論文

理想乱流の同期化制御と通信への応用

鈴木　雅康[†a)]　　坂本　　登[†b)]

Synchronizing Ideal Turbulence and an Application to Communications

Masayasu SUZUKI[†a)] and Noboru SAKAMOTO[†b)]

あらまし　波動方程式と非線形境界条件によって記述されるある物理系の内部状態を同期させることを試みる．これらの系は，Sharkovsky らによって導入された理想乱流と呼ばれる時空カオスを発生させる分布定数系であり，系の振舞いは時間的・空間的に非常に複雑になるが，その動特性の解析は d'Alembert の解を用いることで低次元の差分方程式に帰着させることができる．本論文では，この d'Alembert の解を用いた解析手法をもとに，1 組の理想乱流発生系の同期化制御則を設計する．そして，その同期現象が多チャネルスペクトル拡散通信に応用できることを示す．

キーワード　理想乱流，時空カオス，波動方程式，同期，多チャネルスペクトル拡散通信

1．まえがき

理想乱流は，電子回路，音響，無線などの実在する分布定数系を数学的に理想化したモデルにおいて発生する複雑現象であり，Sharkovsky ら [1] によって導入された概念である．理想乱流が発生する系では，状態構造を限りなく細分化し，時として確率的な現象さえ引き起こすカスケード過程を観測できる．その意味で理想乱流の分析は実世界の乱流に対する数学的シナリオを理解する助けになると考えられている．理想乱流の研究は，特に偏微分方程式の境界値問題から導かれる決定論的無限次元系に対するものが進んでおり，伝送路に非線形性素子が接続されている Time-delayed Chua 回路 [2] はその一例である．

低次元システムを対象としては観察することのできない，時間と空間の両方に関する複雑で豊富なパターンを生み出す時空カオスの研究が近年大きな関心をよんでいる．その中，カオス制御工学において高次元システムに対する制御手法の開発あるいは既存手法の拡張が様々な形態で取り組まれてきた．例えば，Hu と Qu [3] は結合写像格子で記述される系に現れる時空カオスに対し，内部入力を用いて周期軌道の安定化を達成している．Kocarev ら [4] は，時空カオスを生む偏微分方程式で記述される二つの系の同期を，有限個の内部入力によって実現している．また，Huang [5] は，定常状態をカオス状態へ遷移させる anti-control の手法を応用して，時空カオスがもともと現れない双曲型偏微分方程式で記述される系に時空カオスを出現させる手法を提案している．

一方，カオス同期の応用として，カオス通信に関する研究が数多く報告されている [6]〜[8]．カオス通信においては送信信号のスペクトルが広帯域にわたるため，干渉に強いという利点をもつ．また，二つの系（送信機と受信機）のパラメータを一致させないと状態を同期できないため，そのパラメータを暗号鍵とすることで秘匿性をもたせることができる．Xiao ら [9] は，時空カオスが出現する結合写像格子系に対し，従来のカオス通信技術を拡張した多チャネルスペクトル拡散通信手法を提案している．

本論文では，理想乱流が発生する波動方程式と非線形境界条件で記述される 1 組の系に対し，モデルの動特性の解析を d'Alembert の解法によって有限次元の差分方程式の解析に帰着させ，その差分方程式に基づくことによってそれらの理想乱流発生系の同期化制御則を設計する．また，この同期現象を利用した多チャネルスペクトル拡散通信について報告する．

† 名古屋大学大学院工学研究科，名古屋市
Graduate School of Engineering, Nagoya University, Nagoya-shi, 464–8603 Japan
a) E-mail: ma-suzuki@nagoya-u.jp
b) E-mail: sakamoto@nuae.nagoya-u.ac.jp

2. 理想乱流

理想乱流は，滑らかあるいは区分的に滑らかな関数によって表現される初期状態が，時間とともに入り組んだ構造をもつ状態に遷移した後の複雑な時空間的振動現象である．その数学的定義は Sharkovsky [1] によって与えられているが，概して，時間発展後の分布定数系内部状態がフラクタル関数あるいは確率関数で表現されるとき，その極限状態をそれぞれ理想乱流あるいは確率的理想乱流と呼ぶ．以下で，理想乱流を発生する系の例を紹介する．

図 1 にあるような Chua ダイオード [10] を接続した伝送路を考える．この分布定数系は Time-delayed Chua 回路と呼ばれる．

初期値–境界値問題（IBVP）：伝送路は波動方程式

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial x}(x,t) = -L\frac{\partial i}{\partial t}(x,t) \\ \frac{\partial i}{\partial x}(x,t) = -C\frac{\partial v}{\partial t}(x,t) \end{cases} ,\ x \in [-l,l],\ t \geq 0 \quad (1)$$

で記述され，境界条件

$$v(-l,t) = 0, \qquad t \geq 0 \quad (2)$$

$$i(l,t) = G(v(l,t) - Ri(l,t) - E),\ t \geq 0 \quad (3)$$

をもつ．ここで

$$G(\xi) = m_1\xi + \frac{1}{2}(m_0 - m_1)[|\xi + B_p| - |\xi - B_p|].$$

であり，Chua ダイオードがもつ電圧–電流の区分線形性を表している（図 2）．(1) に対する一般解は，d'Alembert の解法より

$$\begin{cases} v(x,t) = \alpha\left(t - \frac{x}{\nu}\right) - \beta\left(t + \frac{x}{\nu}\right) \\ i(x,t) = \frac{1}{Z}\left[\alpha\left(t - \frac{x}{\nu}\right) + \beta\left(t + \frac{x}{\nu}\right)\right] \end{cases} \quad (4)$$

であり（α，β は任意関数），これを (2)，(3) に代入して，連続時間要素をもつ差分方程式（DE）：

$$\alpha(t + l/\nu) = \beta(t - l/\nu) \quad (5)$$

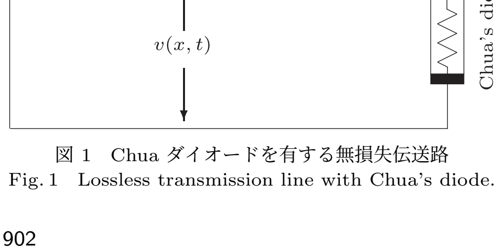

図 1 Chua ダイオードを有する無損失伝送路
Fig. 1 Lossless transmission line with Chua's diode.

$$\beta(t + l/\nu) = f\left(\alpha(t - l/\nu)\right) \quad (6)$$

を得る．ここで $Z = \sqrt{L/C}$，$\nu = 1/\sqrt{LC}$ で各々伝送路の特性インピーダンスと伝搬速度である．f は

$$f(\eta) = \begin{cases} A_1\eta - B_{-1}, & \eta - \frac{E}{2} < -\delta \\ A_0\eta - B_0, & |\eta - \frac{E}{2}| \leq \delta \\ A_1\eta - B_1, & \eta - \frac{E}{2} > \delta \end{cases} \quad (7)$$

$$A_1 = \frac{m_1(Z-R)-1}{m_1(Z+R)+1}, \quad A_0 = \frac{m_0(Z-R)-1}{m_0(Z+R)+1},$$
$$B_{-1} = \frac{[m_1E-(m_1-m_0)B_p]Z}{m_1(Z+R)+1}, \quad B_0 = \frac{m_0EZ}{m_0(Z+R)+1},$$
$$B_1 = \frac{[m_1E+(m_1-m_0)B_p]Z}{m_1(Z+R)+1}, \quad \delta = \frac{[m_0(Z+R)+1]B_p}{2}$$

となっている（図 3）．(5)，(6) から α を消去すると，以下を得る．

$$\beta(t + l/\nu) = f(\beta(t - 3l/\nu)),\ t \geq 0. \quad (8)$$

一方，IBVP に対する初期条件 $v(x,0) = \varphi(x)$，$i(x,0) = \psi(x)$ は，DE (8) に対する初期条件 $\beta(\tau)$，$\tau \in [-3l/\nu, l/\nu]$ を以下のように与える．

$$\begin{aligned} \beta(-(x+2l)/\nu) &= [\varphi(x) + Z\psi(x)]/2 \\ \beta(x/\nu) &= [-\varphi(x) + Z\psi(x)]/2. \end{aligned} \quad (9)$$

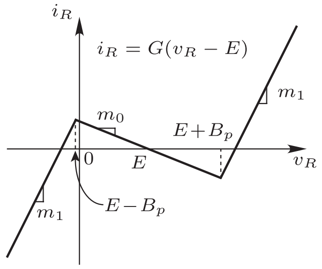

図 2 Chua ダイオードの電圧–電流特性：v_R と i_R はダイオードにかかる電圧と電流，E はバイアス電圧である
Fig. 2 The voltage-current characteristic of Chua's diode: Here v_R and i_R are the voltage and the current, applied to the diode, respectively, and E is a bias voltage.

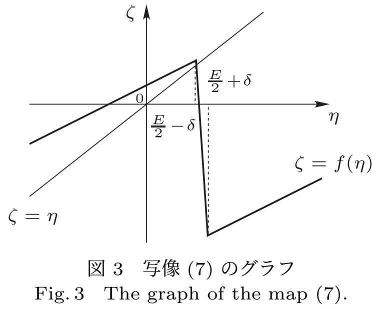

図 3 写像 (7) のグラフ
Fig. 3 The graph of the map (7).

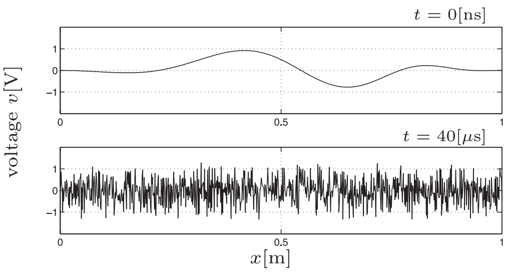

図 4　確率的理想乱流
Fig. 4　Stochastic ideal turbulence.

すると，DE (8) によって初期条件 (9) に対する解が一意的に決定される．

$$\beta(\tau) = f^n\left(\beta\left(\tau - \frac{4nl}{\nu}\right)\right),$$
$$\frac{(4n-3)l}{\nu} \le \tau < \frac{(4n+1)l}{\nu},\ n = 0, 1, \cdots .$$

そして，対応する IBVP の解が

$$\begin{pmatrix} v(x,t) \\ i(x,t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f^{\lambda}(\beta(\mu)) - f^{\lambda+1}(\beta(\mu)) \\ \left[f^{\lambda}(\beta(\mu)) + f^{\lambda+1}(\beta(\mu))\right]/Z \end{pmatrix},$$
$$\lambda \in \mathbb{N}\ \text{s.t.}\ \frac{\nu}{4l}\left(t - \frac{x}{\nu}\right) - \frac{3}{4} < \lambda \le \frac{\nu}{4l}\left(t - \frac{x}{\nu}\right) + \frac{1}{4}$$
$$\mu = t - \frac{x}{\nu} - \frac{4\lambda l}{\nu} \in \left[-\frac{3l}{\nu}, \frac{l}{\nu}\right]$$

によって得られる．このように，分布定数系の時間発展を一次元写像 f を用いて書き下すことができ，この写像 f の解析によって分布定数系の漸近的な振舞いをはじめとする多くの性質を調べることが可能となる．以下の定理は Sharkovsky らによって得られた結果である [2]．

［定理 1］ (i)　f が周期 $m > 2$ の吸引的周期軌道をもつとき，理想乱流が発生する．
(ii)　f がいかなる吸引的周期軌道ももたないとき，確率的理想乱流が発生する．

回路のパラメータを $m_0 = -1[1/\mathrm{k\Omega}]$，$m_1 = 100[1/\mathrm{k\Omega}]$，$Z = 0.51[\mathrm{k\Omega}]$，$4l/\nu = 400\,[\mathrm{ns}]$，$R = 0.01[\mathrm{k\Omega}]$，$B_p = 3.5[\mathrm{V}]$，$E = 3[\mathrm{V}]$ としたとき，f は安定な周期軌道をもたず，振舞いはカオスとなる．図 4 はこのとき発生する確率的理想乱流への遷移の様子を示している．

3. 二つの理想乱流発生系の同期

以下の初期値–境界値問題について考える．

$$\Sigma : \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial x}(x,t) = -L\frac{\partial i}{\partial t}(x,t),\ x \in [-l, l] \\ \frac{\partial i}{\partial x}(x,t) = -C\frac{\partial v}{\partial t}(x,t),\ x \in [-l, l] \\ H_1(v(-l,t), i(-l,t), 0) = 0 \\ H_2(v(l,t), i(l,t), 0) = 0 \end{cases}$$

H_1，H_2 はそれぞれ $x = -l$, l における境界条件であり（注1），d'Alembert の解 (4) によって，連続時間要素を伴う差分方程式

$$\begin{pmatrix} \alpha(t + x/\nu) \\ \beta(t + x/\nu) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(\beta(t - x/\nu)) \\ f_2(\alpha(t - x/\nu)) \end{pmatrix}$$
$$=: F\left(\alpha(t - x/\nu), \beta(t - x/\nu)\right)$$

を導くことができるものとする．ただし，f_1 と f_2 はそれぞれ H_1, H_2 に対応する連続な関数である．また，分布定数系の境界における状態 $(v(-l,t), i(-l,t))$, $(v(l,t), i(l,t))$ を観測できるものとする．

一方，境界 $x = -l, l$ に入力をもち，それを除いて系 Σ と同一パラメータをもつ以下の系を用意する．

$$\widehat{\Sigma} : \begin{cases} \frac{\partial \hat{v}}{\partial x}(x,t) = -L\frac{\partial \hat{i}}{\partial t}(x,t),\ x \in [-l, l] \\ \frac{\partial \hat{i}}{\partial x}(x,t) = -C\frac{\partial \hat{v}}{\partial t}(x,t),\ x \in [-l, l] \\ H_1(\hat{v}(-l,t), \hat{i}(-l,t), u_1(t)) = 0 \\ H_2(\hat{v}(l,t), \hat{i}(l,t), u_2(t)) = 0 \end{cases}$$

$\widehat{\Sigma}$ は，差分方程式

$$\begin{pmatrix} \hat{\alpha}(t+x/\nu) \\ \hat{\beta}(t+x/\nu) \end{pmatrix} = F\left(\hat{\alpha}(t-x/\nu), \hat{\beta}(t-x/\nu)\right) + Bu(t)$$

を導くものと仮定する．ただし，$u(t) = (u_1(t)\ u_2(t))^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^m$，$B \in \mathbb{R}^{2\times m}$ である．以降，系 Σ をマスタ，$\widehat{\Sigma}$ をスレーブと呼ぶことにする．

マスタ Σ とスレーブ $\widehat{\Sigma}$ から導かれた差分方程式は，以下の離散時間力学系によって特徴づけることができる．

$$(\alpha_{n+1}\ \beta_{n+1})^{\mathrm{T}} \quad = F(\alpha_n, \beta_n) \tag{10}$$
$$(\hat{\alpha}_{n+1}\ \hat{\beta}_{n+1})^{\mathrm{T}} = F(\hat{\alpha}_n, \hat{\beta}_n) + Bu_n. \tag{11}$$

この二つの離散時間力学系に対して潮 [11] による同期化制御則を設計する．二つのシステムの状態の誤差を評価するための次のような関数を考える．

$$D_n := h(\hat{\alpha}_n, \hat{\beta}_n) - h(\alpha_n, \beta_n)$$

（注1）：入力を扱うために第 3 引数を用意している．

ただし，$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^p$ である．(11) に対する制御則を，適当な定数ゲイン $K \in \mathbb{R}^{m \times p}$ と上の D_n によって

$$u_n = KD_n = K\left[h(\hat{\alpha}_n, \hat{\beta}_n) - h(\alpha_n, \beta_n)\right]$$

のように与える．このとき，もし $F + BKh$ が縮小写像となる，あるいは安定行列 L と定数ベクトル M を用いて $(F + BKh)(\alpha, \beta) = L(\alpha\ \beta)^{\mathrm{T}} + M$ と書くことができれば，(10) と (11) を同期させる(注2)ことが可能である．

もとの二つの分布定数系 $\Sigma, \widehat{\Sigma}$ に対する制御則としては，ここでの K と h を用いて

$$\begin{aligned} u(t) &= (u_1(t)\ u_2(t))^{\mathrm{T}} \\ &= K\Big[h(\hat{\alpha}(t - l/\nu), \hat{\beta}(t - l/\nu)) \\ &\qquad - h(\alpha(t - l/\nu), \beta(t - l/\nu))\Big] \end{aligned} \tag{12}$$

を与える．$\alpha(t - l/\nu)$ や $\beta(t - l/\nu)$ は，境界状態値より

$$\begin{aligned} \alpha(t - l/\nu) &= [v(l, t) + Zi(l, t)]/2 \\ \beta(t - l/\nu) &= [-v(-l, t) + Zi(-l, t)]/2 \end{aligned}$$

によって求まる．$\hat{\alpha}(t - l/\nu)$ と $\hat{\beta}(t - l/\nu)$ についても同様である．したがって，制御則 (12) は，マスタとスレーブの境界情報のフィードバック則となっている．

［注意 1］ 本提案手法では，d'Alembert の解をもつ無限次元連続時間系を低次元離散時間系に帰着させ，続いて帰着先の系に対して "離散時間制御則" を設計し，そして，その制御則を拡張することで "連続時間境界制御則" としてもとの系に適用している．このアルゴリズムによって制御系設計を試みた例を筆者らは目にしたことがなく，少なくともカオス制御の分野では知られていない．なお，本論文では離散時間系における同期化制御則の設計に潮 [11] による方法を用いているが，他の方法で設計した場合でも，制御則がマスタとスレーブの状態量 $\{\alpha_n, \beta_n, \hat{\alpha}_n, \hat{\beta}_n\}$ の関数で与えられれば，同様に適用可能である．

3.1 適 用 例

入力項を除いてパラメータの等しい二つの Time-delayed Chua 回路を同期させる．

$$\Sigma : \begin{cases} v_x = -Li_t,\ i_x = -Cv_t \\ v(-l, t) = 0, \\ i(l, t) = G(v(l, t) - Ri(l, t) - E) \end{cases}$$

$$\hat{\Sigma} : \begin{cases} \hat{v}_x = -L\hat{i}_t,\ \hat{i}_x = -C\hat{v}_t \\ \hat{v}(-l, t) = 0, \\ \hat{i}(l, t) = G(\hat{v}(l, t) - R\hat{i}(l, t) - E + u(t)) + w(t) \end{cases}$$

ここで，スレーブにおいては，$x = l$ における電圧入力 $u(t)$ と電流入力 $w(t)$ をもつとしている．

$$u(t) = (Z + R)w(t)$$

という関係を与え，d'Alembert の解を用いると，

$$\begin{pmatrix} \alpha(t + \frac{l}{\nu}) \\ \beta(t + \frac{l}{\nu}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta(t - \frac{l}{\nu}) \\ f(\alpha(t - \frac{l}{\nu})) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \hat{\alpha}(t + \frac{l}{\nu}) \\ \hat{\beta}(t + \frac{l}{\nu}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\beta}(t - \frac{l}{\nu}) \\ f(\hat{\alpha}(t - \frac{l}{\nu})) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{Z}{Z+R} \end{pmatrix} u(t)$$

を得る．そこで，対応する離散時間力学系

$$\begin{pmatrix} \alpha_{n+1} \\ \beta_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_n \\ f(\alpha_n) \end{pmatrix} \tag{13}$$

$$\begin{pmatrix} \hat{\alpha}_{n+1} \\ \hat{\beta}_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\beta}_n \\ f(\hat{\alpha}_n) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{Z}{Z+R} \end{pmatrix} u_n \tag{14}$$

を考え，入力 u_n を

$$u_n = K(h(\hat{\alpha}_n) - h(\alpha_n))$$

のように与える．ここで定数 K と関数 $h : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ は，関数 $f + \frac{Z}{Z+R} \cdot Kh$ が縮小写像となるようなものとする．例えば，$K = \frac{Z+R}{Z}$，a を絶対値が 1 より小さい数として h を

$$h(\eta) = \begin{cases} (A_0 - a)\delta, & \eta \le -\delta + \frac{E}{2} \\ (a - A_0)(\eta - \frac{E}{2}), & -\delta + \frac{E}{2} < \eta < \delta + \frac{E}{2} \\ (a - A_0)\delta, & \eta \ge \delta + \frac{E}{2} \end{cases}$$

のように与えれば，二つの離散時間系 (13) と (14) は最終的に同期する．そこで，スレーブに対する入力を

$$\begin{aligned} u(t) &= K(h(\hat{\alpha}(t - l/\nu)) - h(\alpha(t - l/\nu))) \\ &= (Z + R)/Z \cdot \Big[h\left([\hat{v}(l, t) + Z\hat{i}(l, t)]/2\right) \\ &\qquad - h\left([v(l, t) + Zi(l, t)]/2\right)\Big] \end{aligned}$$

とすれば，$\Sigma, \hat{\Sigma}$ の送電線内の分布電圧と分布電流を同期させることができる．図 5 における上から 1，3 番目の図は二つの系の分布電圧の初期状態と 90 [ns] 後

(注2)：$\lim_{n \to \infty} ||(\hat{\alpha}_n\ \hat{\beta}_n)^{\mathrm{T}} - (\alpha_n\ \beta_n)^{\mathrm{T}}|| = 0$.

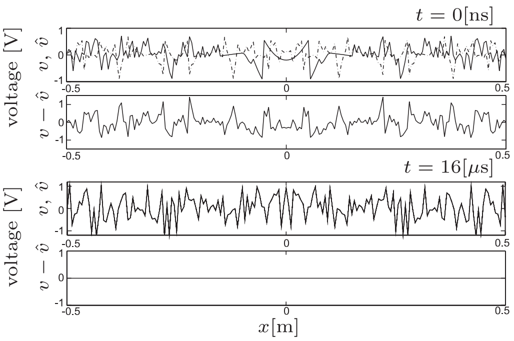

図 5　二つの Time-delayed Chua 回路の同期化：最上図，第 3 図において，実線は $v(x,l)$，破線は $\hat{v}(x,l)$ を表している

Fig. 5　Synchronization of two time-delayed Chua's circuits: In the top and the third figures, solid lines and broken lines mean $v(x,l)$ and $\hat{v}(x,l)$, respectively.

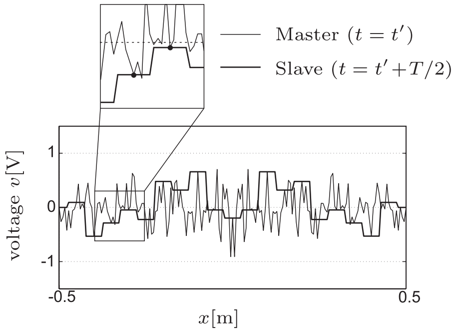

図 6　サンプリング時間 T でホールドされた参照信号を用いての同期化

Fig. 6　Synchronization using a reference signal held during the sampling period T.

の状態を示している．2，4 番目の図はそれらの差を示しており，系の初期状態が大きく異なる場合にも，同期が達成されていることが分かる．

［注意 2］　後述する通信方式にとって，その秘匿性の保持には，通信系外部の第三者によってマスタの内部状態が再現されなければよい．そのためには，第三者が系列 $\{\alpha(t)\}$ と $\{\beta(t)\}$ を独立に得ることが困難になるように，マスタからスレーブに引き渡す状態変数を制限し，系のパラメータを知るスレーブは足りない状態量を推定すればよい．例えば上の Time-delayed Chua 回路の場合，マスタが $v(l,t)$ のみをスレーブに引き渡せば，その情報のみで $\{\alpha(t)\}$ と $\{\beta(t)\}$ を独立に得ることはできない．一方，スレーブは境界条件 $z(t) = G(v(l,t) - Rz(t) - E)$ より $z(t)$ を求めることで $i(l,t)$ を推定することができる．

3. 2　同期化制御則再考

次節で提案する通信方式は，二つの同期された系に対し，変調・復調信号としてあらかじめ指定した空間 $[-l,l]$ 上の点 x_j における状態の時系列を用いる．その際，二つの系の点 x_j を一致させる必要がある．しかしながら，それらの点の不一致があった場合（それがどんなに微小なずれであっても），理想乱流の特性上それぞれの点上の状態の時系列は全く異なったものになってしまう可能性がある．以下では，マスタからの同期化制御のための信号に操作を加えることで，スレーブの内部状態が指定した点 x_j 周りで同一値をとるように制御できることを示す．

P を適当な自然数とし，$T = l/(P\nu)$ とする．マスタの境界値を時間 T ごとにサンプリングし，そのサンプル値時系列を 0 次ホールドした信号

$$\bar{v}(l,t) := v(l,kT) = \alpha(kT - l/\nu) - \beta(kT + l/\nu)$$
$$\bar{i}(l,t) := i(l,kT) = [\alpha(kT - l/\nu) + \beta(kT + l/\nu)]/Z$$
$$\text{where } kT \le t < (k+1)T,\ k = 0, 1, \cdots$$

を参照信号としてスレーブの同期に使う．$kT \le t < (k+1)T$ に対し，$\bar{\alpha}(t) := \alpha(kT)$，$\bar{\beta}(t) := \beta(kT)$ という関数 $\bar{\alpha}$，$\bar{\beta}$ を定義すれば，

$$\bar{v}(l,t) = \bar{\alpha}(t - l/\nu) - \bar{\beta}(t + l/\nu)$$
$$\bar{i}(l,t) = [\bar{\alpha}(t - l/\nu) + \bar{\beta}(t + l/\nu)]/Z$$

と書ける．上記同期化制御則を用いて十分時間が経てば，スレーブの状態 $\hat{v}(x,t) = \hat{\alpha}(t - x/\nu) - \hat{\beta}(t - x/\nu)$ は，状態 $\bar{\alpha}(t - x/\nu) - \bar{\beta}(t - x/\nu)$ とほぼ等しい値をとるようになる．ここで，空間 $[-l,l]$ 上の点 $x_j = jl/P$ $(= j\nu T)$，$j = -(P-1), \cdots, P-1$ を考え，点 x_j からのずれを $\Delta x \in [-l/(2P), l/(2P))$ で表すと

$$\begin{aligned}
&\hat{v}(x_j + \Delta x, kT + T/2)\\
&\approx \bar{\alpha}(kT + T/2 - (x_j + \Delta x)/\nu)\\
&\quad -\bar{\beta}(kT + T/2 + (x_j + \Delta x)/\nu)\\
&= \alpha(kT - x_j/\nu) - \beta(kT + x_j/\nu)\\
&= v(x_j, kT)
\end{aligned}$$

となる(注3)．ただし，$kT - x_j/\nu = (k-j)T$，$kT + x_j/\nu = (k+j)T$ であってそれぞれ T の整数倍であること，また $T/2 + \Delta x/\nu \in [0, T)$ であることを使っ

(注3)：$\hat{i}$ についても同様．

た．この関係式は，スレーブの点 x_j を中心とした直径 l/P の範囲では，サンプル時間 T ごとにマスタの点 x_j と同じ値をとることを示している．ただし，その一致時刻が $T/2$ だけ遅れていることに注意する．図 6 はその様子を表した図である．

4. 多チャネルスペクトル拡散通信への応用

Xiao ら [9] によって，結合写像格子系に現れる時空カオスの同期による多チャネルスペクトル拡散通信の研究が報告されている．この章では，同様の通信方式が，本論文で扱っているような理想乱流が発生する分布定数形の同期現象を利用しても実現できることを Time-delayed Chua 回路を例に示す．

伝送路上の点 x_i，$i=1,2,\cdots,N$ を適当に選び，各点（チャネル）における電圧を時間 $T=4l/\nu$ [s] ごとにサンプルした時系列 $\{v_i^k\}_{k\in\mathbb{N}}$，$v_i^k := v(x_i,kT)$ を考える．確率的理想乱流が発生するような系では，これらの時系列はそれぞれカオス的な振舞いを見せる．これらの時系列を量子化したビット列を拡散符号として情報信号の変調に利用し，多チャネルを有するスペクトル拡散通信技術に応用する．

4.1 時系列 $\{v_i^k\}$ の性質

伝送路を均等に 50 等分し，内部の 49 点における電圧の時系列 $\{v_i^k\}$ について観察する．まず状態 v_i^k が正不変集合 $\Lambda=[a-b,b-a]$ （$a=A_0^2(E/2-\delta)-B_0(A_0+1)$，$b=A_0(E/2-\delta)-B_0$）に含まれることに注意して，$\Lambda$ が区間 $[0,1]$ と同相になるアファインな座標変換 $\mathscr{A}:\Lambda\to[0,1]$ を v_i^k に施す．そして，各状態量 v_i^k を J 個の記号 $S_j^{i,k}\in\{1,-1\}(j=1,\cdots,J)$ よりなるビット列によって量子化する．ここでは $S_j^{i,k}(j=1,\cdots,J)$ を

$$0\le \mathscr{A}(v_i^k)-\sum_{j=1}^{J}[S_j^{i,k}+1]\left(\frac{1}{2}\right)^{j+1}<\left(\frac{1}{2}\right)^{J}$$

を満たすように与える．例えば $J=5$ のとき $\mathscr{A}(v_i^k)=0.6$ ならば，$S^{i,k}=(S_1^{i,k},\cdots,S_J^{i,k})=(1,-1,-1,1,1)$ となる．

チャネル x_i と x_l における電圧の時系列を，$J=5$ として量子化したビット列 $S^i=(S^{i,1},S^{i,2}\cdots)$ と $S^l=(S^{l,1},S^{l,2}\cdots)$ の相関を以下によって計算する(注4)．

$$C_{il}(\tau)=\tilde{C}_{il}(\tau)/\sqrt{\tilde{C}_{ii}(0)\tilde{C}_{ll}(0)}$$

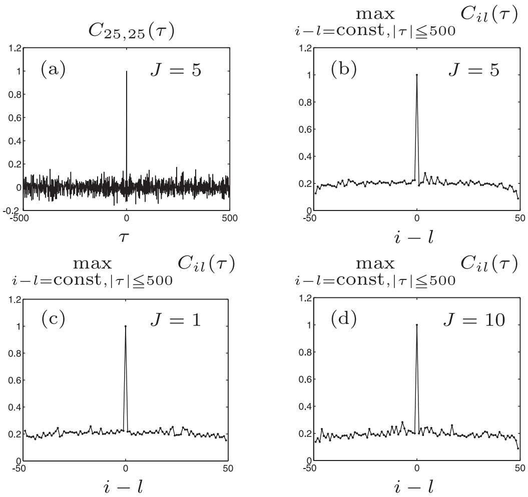

図 7 (a) 時系列 $\{S^{25}\}$ の自己相関（$J=5$）．(b) – (d) 時系列の相互相関

Fig. 7 (a) The autocorrelation of a time series $\{S^{25}\}$ ($J=5$). (b) – (d) The crosscorrelation of time serieses.

$$\tilde{C}_{il}(\tau)=\frac{1}{T_s}\sum_{n=1}^{T_s}[S^i(n)-\bar{S}^i][S^l(n+\tau)-\bar{S}^l]$$

ここで，$T_s=500$ とし，$\bar{S}^i$ は $\{S^i(n)\}$ の平均である．図 7 (a) はチャネル x_{25} における自己相関 $C_{25,25}(\tau)$ を示したものであり，$\tau=0$ でピークを示すが，$|\tau|$ が少しでも大きくなると直ちに減衰していることが分かる．この δ 関数のような自己相関は，カオス時系列のスペクトルが広帯域に分布することを意味し，耐干渉性をもたせるための役割を担っている．伝送路上の他のチャネル x_i，$i=1,\cdots,49$ における自己相関についても同様の結果が得られた．

多チャネル通信にとって，各チャネルの時系列間の相互相関が小さいことは，更に重要で必要不可欠な性質である．図 7 (b) はその相互相関を示したものである．ただし，各 i，l に対し $C_{il}^M=\max_{|\tau|\le 500} C_{il}(\tau)$ を求め，更に $i-l$ が同じ数の組 $\{C_{il}^M\}_{i-l=const}$ の中での最大値をプロットしている．図 7 (b) より，伝送路上の異なる点の時系列は，互いに相関が小さいことが確認できる．

［注意 3］ 図 7 (c)，(d) に，$J=1$，10 とした量子化したビット列の相互相関を示した．これらの図から J の大きさは相関特性にほとんど影響を与えていないこ

(注4)：$S^i(n)$ によって数列 S^i の第 n 項を表す．

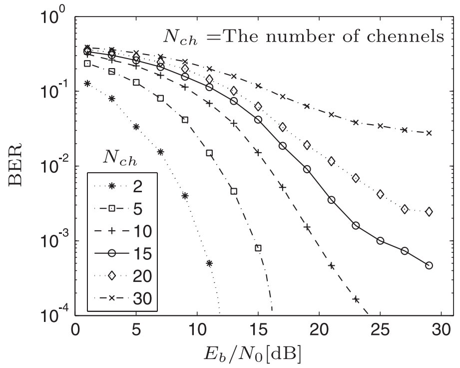

図 8　異なるチャネル数に対する BER 曲線の比較（$J=5$, $T_M=200$）
Fig. 8　The comparison among BER curves for the different number of channels ($J=5$, $T_M=200$).

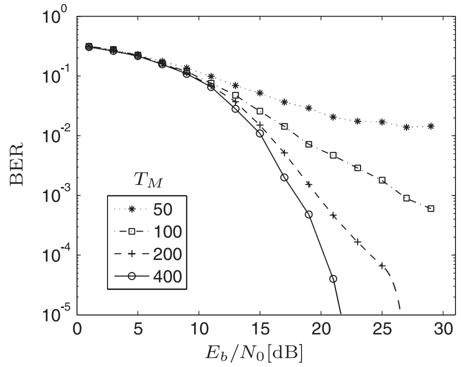

図 9　異なる T_M に対する BER 曲線の比較（$J=5$, チャネル数 10）
Fig. 9　The comparison among BER curves for different T_Ms ($J=5$, the number of chennels $=10$).

とが分かる．自己相関についても同様のことがいえる．

4.2 通信方式

量子化されたカオス時系列 S^i によって情報信号 M^i を以下のように変調する．

$$G^i(n)=M^i(n)S^i(n),\ n=1,2,\cdots$$

ただし，M^i は 1, -1 からなる列で，信号の切り換わり周期 T_M（すなわち $M^i(n)$, $n=\nu T_M+1,\cdots,\nu T_M+T_M$ はすべて同じ記号とする．）は $T_M \gg 1$ とする（図 10 (a) 参照）．これらの各チャネルにおいて変調された信号 G^i を足し合わせた全信号

$$G(n)=\sum_i G^i(n),\ n=1,2,\cdots$$

を送信する．受信機は，送信機と状態を同期させた上で，伝送路上の同じ点における電圧を量子化したカオス時系列 $\hat{S}^i$ を用いて，以下のように情報を復調する．

$$M^i_\nu=\begin{cases}1 & ,\ p^i_\nu>0\\ -1 & ,\ p^i_\nu<0\end{cases},\ \nu=1,2,\cdots$$

$$p^i_\nu=\frac{1}{T_M}\sum_{n=\nu T_M+1}^{\nu T_M+T_M}\hat{S}^i(n)G(n). \tag{15}$$

これは，$i\neq i'$ ならば S^i と $\hat{S}^{i'}$ に相関がなく，G に加えられた他のチャネルの信号は (15) によって取り除かれるという事実に基づいている．

通信路において送信信号 G に白色ガウスノイズが付加されることを想定し，通信方式をシミュレートした結果を以下に示す．図 8 は，異なるチャネル数に対する BER 曲線の比較（$J=5$, $T_M=200$）を，また，図 9 は，異なる T_M に対する BER 曲線の比較（$J=5$, チャネル数 10）を示している．$E_b/N_0 \geq 20$ [dB] の環境で $T_M \geq 200$ に設定すれば，少なくとも 10 チャネル多重が BER$\leq 10^{-3}$ で達成できていることが分かる．図 10 は，チャネル数 10（x_i, $i=1,\cdots,10$), $J=5$, $T_M=200$, $E_b/N_0=20$ [dB] と設定したときの，チャネル x_5 にのせる情報信号 M^5，送信信号 G，復調した信号 M^5_ν を示しており，情報信号が復調されていることが分かる．

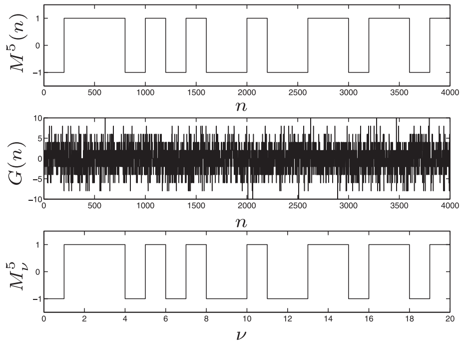

図 10　多チャネルスペクトル拡散通信のシミュレーション
Fig. 10　A simulation result of multichannel spread-spectrum communication.

［注意 4］　理想乱流を生ずる分布定数回路の通信への利用を試みる動機となり，従来のカオス通信デバイスには見られない重要な性質に，多数のカオス時系列を単一の素子より抽出できる省スペース性と，その時系列発生速度の高速性を兼ね備えている点が挙げられる．

実際，伝送路として長さ数 cm の遅延線（Delay line）を用いると，数十〜数百ナノ秒の間隔で複数の電圧時系列を生成することが可能であり，J の大きさやチャネル数を増やすことができれば，通信容量をより大きくすることができる．

一方で（伝送路の境界条件の選定は拡散符号系列の相関特性に大きく影響を与えるので慎重にならなければならないが），時系列の高速性は，それをいくらか犠牲にする，すなわちカオス時系列の一部を間引いた時系列を利用することで，既に与えられた回路に対してでもビット誤りの改善につなげることも可能である．これは，力学系を支配する写像（例えば **3.** における F）の合成から作られるより複雑な力学系を採用することに相当し，相関特性の向上を期待できるためである．

最後に，このような理想乱流の特性を生かせるのは上述した通信方式に限らないことに注意されたい．本論文で扱ったような理想乱流発生系を，これまでに提案されている様々なカオス通信方式へ応用することも可能であると筆者らは考える．

5. むすび

本論文では，二つの理想乱流が発生する系を，境界入力のみによって同期させる手法を提案した．これらの系は非線形境界条件をもつ波動方程式が d'Alembert の解法を用いて低次元写像に帰着される初期値–境界値問題のクラスに属する分布定数系である．ここでは Time-delayed Chua 回路を主に扱ったが，同様の構造をもつ系はほかにも多く存在し，それらに対しても提案手法は応用できると考えられる．後半では，Time-delayed Chua 回路の同期現象を利用した多チャネルを有するスペクトル拡散通信について報告した．Time-delayed Chua 回路は構成要素がシンプルであり，この通信方式のハードウェアとしての実現が期待できる．そのためのより細かな解析が，今後の課題として挙げられる．

文献

[1] A.N. Sharkovsky, “Ideal turbulence,” Nonlinear Dynamics, vol.44, pp.15–27, 2006.

[2] A.N. Sharkovsky, “Ideal turbulence in an idealized time-delayed Chua's circuit,” Int. J. Bifurcation and Chaos, vol.4, no.2, pp.303–309, 1994.

[3] G. Hu and Z. Qu, “Controlling spatiotemporal chaos in coupled map lattice systems,” Phys. Rev. Lett., vol.72, pp.68–71, Jan. 1994.

[4] L. Kocarev, Z. Tasev, and U. Parlitz, “Synchronizing spatiotemporal chaos of partial differential equations,” Phys. Rev. Lett., vol.79, no.1, pp.51–54, July 1997.

[5] Y. Huang, “Boundary feedback anticontrol of spatiotemporal chaos for 1D hyperbolic dynamical systems,” Int. J. Bifurcation and Chaos, vol.14, no.5, pp.1705–1723, 2004.

[6] K.M. Cuomo and A.V. Oppenheim, “Circuit implementation of synchronized chaos with applications to communications,” Phys. Rev. Lett., vol.71, no.1, pp.65–68, July 1993.

[7] G. Kolumbán, M.P. Kennedy, and L.O. Chua, “The role of synchronization in digital communications using chaos–Part II: Chaotic modulation and chaotic synchronization,” IEEE Trans. Circuits Syst.I, vol.45, no.11, pp.1129–1140, Nov. 1998.

[8] 井上栄治，潮　俊光，“未知入力オブザーバを用いたカオス通信，” 信学論（A），vol.J82-A, no.12, pp.1801–1807, Dec. 1999.

[9] J.H. Xiao, G. Hu, and Z. Qu, “Synchronization of spatiotemporal chaos and its application to multichannel spread-spectrum communication,” Phys. Rev. Lett., vol.77, no.20, pp.4162–4165, Nov. 1996.

[10] T. Matsumoto, L.O. Chua, and M. Komuro, “The double scroll,” IEEE Trans. Circuits Syst.I, vol.32, no.8, pp.797–818, Aug. 1985.

[11] 潮　俊光，“非線形離散時間システムにおける同期化手法の拡張，” 信学技報，NLP94-61, Sept. 1994.

（平成 21 年 3 月 20 日受付，7 月 7 日再受付）

鈴木　雅康　（学生員）

2007 名古屋大学大学院工学研究科博士前期課程了．同年同大学院博士後期課程に進学，現在に至る．カオス制御の研究に従事．計測自動制御学会会員．

坂本　　登　（正員）

1991 北大・理卒．1996 名古屋大学大学院工学研究科博士後期課程了．同年名古屋大学工学部助手，1997 名古屋大学工学研究科講師，2000 同助教授．2007 より准教授．非線形制御理論の研究に従事．計測自動制御学会，システム制御情報学会，日本航空宇宙学会，IEEE，SIAM 各会員．