

多重複素 Green 関数から導入される擬計量

東川 和夫

2002年1月25日(金)名古屋大学

1 多重複素 Green 関数

$D \subset \mathbf{C}^n$: domain,
 $p \in D$ に対して,

$$\begin{aligned} \text{NPS}^D(p) := \{f : D \rightarrow [-\infty, 0] \mid & \text{plurisubharmonic on } D, \exists U \ni p, \exists C \in \mathbf{R} \\ & \text{s.t. } f(z) - \log \|z - p\| \leq C(z \in U)\} \end{aligned}$$

$q \in D$ に対して,

$$g^D(q, p) := \sup\{f(q) \mid f \in \text{NPS}^D(p)\}.$$

: (pluricomplex Green function with pole at p . 多重複素 Green 関数という)

Theorem 1.1. $\Phi \in \text{Hol}(D, D') \Rightarrow g^{D'}(\Phi(q), \Phi(p)) \leq g^D(q, p).$

Proof. $\forall f \in \text{NPS}^{D'}(\Phi(p))$ とする.

$$\begin{aligned} f \circ \Phi &\in \text{NPS}^D(p). \\ \therefore f \circ \Phi(q) &\leq g^D(q, p). \\ \therefore g^{D'}(\Phi(q), \Phi(p)) &\leq g^D(q, p). \end{aligned}$$

□

$E := \{\lambda \in \mathbf{C} \mid |\lambda| < 1\}, T := \{\lambda \in \mathbf{C} \mid |\lambda| = 1\}$ とおく.

Theorem 1.2. $g^E(\lambda, \mu) = \log |\varphi_\mu(\lambda)|, \varphi_\mu(\lambda) = \frac{\mu - \lambda}{1 - \bar{\mu}\lambda}.$

Proof. $\mu = 0$ の場合を示す.

$\forall f \in \text{NPS}^E(0)$ とする.

$$f(\lambda) - \log |\lambda| \leq c \text{ for } 0 < |\lambda| \ll 1.$$

$$f(\lambda) - \log |\lambda| : \text{subharmonic on } E \setminus \{0\}.$$

よって $f(\lambda) - \log |\lambda|$: subharmonic on E .

$$\lim_{\lambda \rightarrow \partial E} (f(\lambda) - \log |\lambda|) \leq 0.$$

$$\therefore f(\lambda) - \log |\lambda| \leq 0 \ (\lambda \in E).$$

$$\therefore g^E(\lambda, 0) \leq \log |\lambda|.$$

$$f(\lambda) = \log |\lambda| \text{ とすれば } f \in \text{NPS}^E(0) \text{ なので } g^E(\lambda, 0) \geq \log |\lambda|. \quad \square$$

$D \subset \mathbf{C}^n$: disked domain とする ($\forall z \in D, \forall \lambda \in \bar{E}, \lambda z \in D$ かつ D が open).

$$\mu^D(z) := \inf\{\lambda > 0 | z \in \lambda D\} \ (z \in \mathbf{C}^n) \text{ (: Minkowski functional of } D \text{ という)}$$

とおく。

$$z \in D \Leftrightarrow \mu^D(z) < 1$$

$$\mu^D(\lambda z) = |\lambda| \mu^D(z) \text{ をみたす.}$$

Lemma 1.3. $D \subset \mathbf{C}^n$: disked domain とする. $\exp g^D(\cdot, 0) \leq \mu^D$ on D .

Proof. $\forall f \in \text{NPS}^D(0)$ とする.

$$f(z) \leq \log \|z\| + C, z \in D.$$

$\forall z \in D$ とする. $\mu^D(z) < 1$ である.

$$\mu^D(z) > 0 \text{ のとき}$$

$$\lambda \mapsto f(\lambda z) - \log \mu^D(\lambda z) \text{ は } \frac{1}{\mu^D(z)} E \setminus \{0\} \text{ で subharmonic.}$$

$$\begin{aligned} f(\lambda z) - \log \mu^D(\lambda z) &\leq \log |\lambda| + \log \|z\| + C - (\log |\lambda| + \log \mu^D(z)) \\ &= \log \|z\| + C - \log \mu^D(z) : \text{ 上に有界.} \end{aligned}$$

$$\therefore \lambda \mapsto f(\lambda z) - \log \mu^D(\lambda z) : \text{ subharmonic on } \frac{1}{\mu^D(z)} E.$$

$$\varlimsup_{\lambda \rightarrow \frac{1}{\mu^D(z)} T} (f(\lambda z) - \log \mu^D(\lambda z)) \leq 0.$$

最大値の原理より

$$f(z) - \log \mu^D(z) \leq 0 \therefore g^D(z, 0) \leq \log \mu^D(z).$$

$\mu^D(z) = 0$ のとき $Cz \subset D, \forall R > 0$ に対して

$$g^D(z, 0) \leq g^E\left(\frac{1}{R}, 0\right) = -\log R \ (E \ni \lambda \mapsto \lambda R z \in D).$$

$$\therefore g^D(z, 0) = -\infty.$$

\square

Theorem 1.4. $\forall D, \forall p \in D$

$$g^D(\cdot, p) \in \text{NPS}^D(p)$$

Proof. $g(q) := \limsup_{q' \rightarrow p} g^D(q', p)$ とおけば g は plurisubharmonic on D ($g^D(q', p)$ は上に有界な plurisubharmonic の upper envelope).

$$(1) \quad g(q) \geq g^D(q, p).$$

$B(p; r) \subset D$ をとる.

$$\begin{aligned} g^D(q, p) &\leq g^{B(p; r)}(q, p) = g^B\left(\frac{1}{r}(q - p), 0\right) \\ &\leq \log \mu^B\left(\frac{1}{r}(q - p), 0\right) \quad (\because \text{Lemma 1.3}) \\ &= \log \left\| \frac{1}{r}(q - p) \right\|. \quad (\because \mu^B = \|\cdot\|) \end{aligned}$$

故に

$$\begin{aligned} g^D(q', p) &\leq \log \|q' - p\| - \log r \quad (q' \in B(p; r)). \\ \therefore g(q) &\leq \log \|q - p\| - \log r \quad (q \in B(p; r)). \end{aligned}$$

$$g \in \text{NPS}^D(p).$$

故に

$$(2) \quad g(q) \leq g^D(q, p).$$

(1), (2) より

$$g^D(\cdot, p) = g \in \text{NPS}^D(p).$$

□

Lemma 1.5. D : disked domain with μ^D とする.

次は同値.

- (i) D : pseudoconvex ($\Leftrightarrow D \times \mathbf{C}^n \ni (a, X) \mapsto -\log d^D(a, X) \in [-\infty, \infty)$ is plurisubharmonic. $d^D(a, X) = \sup\{r > 0 : a + rEX \subset D\}$).
- (ii) $\log \mu^D$: plurisubharmonic on \mathbf{C}^n .
- (iii) μ^D : plurisubharmonic on \mathbf{C}^n .

Proof. (i) \Rightarrow (ii) :

$$\begin{aligned}
 d^D(0, z) &= \sup\{r > 0; rzE \subset D\} \\
 &= \sup\{r > 0; rz \in D\} \\
 &= \sup\left\{\frac{1}{r}; r > 0, z \in rD\right\} \\
 &= (\inf\{r > 0; z \in rD\})^{-1} \\
 &= \mu^D(v)^{-1}.
 \end{aligned}$$

(ii) \Rightarrow (iii) : $\mu^D = e^{\log \mu^D}$ より.

(iii) \Rightarrow (i) : $D = \{z \in \mathbf{C}^n | \mu^D(z) < 1\}$ より.

□

Theorem 1.6. $D \subset \mathbf{C}^n$: disked domain with μ^D . 次は同値.

(i) $g^D(\cdot, 0) \leq \log \mu^D$ on D .

(ii) D is pseudoconvex $\Leftrightarrow g^D(\cdot, 0) = \log \mu^D$.

Proof. (i) は Lemma 1.3.

(ii) (\Rightarrow) D : pseudoconvex と仮定. $\log \mu^D$: plurisubharmonic on D .
 $\exists B(0; \varepsilon) \subset D$ より

$$\frac{1}{\varepsilon} \| \cdot \| \geq \mu^D.$$

よって

$$\log \mu^D \leq \log \| \cdot \| + \log \frac{1}{\varepsilon} \text{ on } D.$$

故に

$$\log \mu^D \in \text{NPS}^D(0).$$

$$\therefore \log \mu^D \leq g^D(\cdot, 0).$$

(\Leftarrow) $g^D(\cdot, 0) = \log \mu^D$ on D . と仮定.

$\log \mu^D$: plurisubharmonic on D .

$$\begin{aligned}
 \log \mu^D(z) &= \log \mu^D(M \cdot \frac{z}{M}) \\
 &= \log M + \log \mu^D(\frac{z}{M}) : \text{plurisubharmonic on } \mu^D(z) < M.
 \end{aligned}$$

よって $\log \mu^D$: plurisubharmonic on \mathbf{C}^n .

$\therefore D$ is pseudoconvex. □

2 P -擬計量

M を複素多様体とし, TM を M の正則接束とする.

Definition. (i) $F : TM \rightarrow [0, \infty)$ が次の条件をみたすならば、 F は M の擬計量であるという：

$$(p1) \quad F(p; \lambda X) = |\lambda| F(p; X) \text{ for } (p; X) \in TM, \lambda \in \mathbb{C}.$$

(ii) M の擬計量 F が次をみたすとき、 F は計量であるという.

$$(p2) \quad F(p; X) = 0 \Rightarrow X = 0.$$

Remark. 応用上（例えば曲線の長さを定義するときなど）次を仮定することが多い。

$$(p3) \quad F \text{ は } TM \text{ 上半連続.}$$

以下、複素多様体 M の擬計量 F^M を M の内部構造から定めるときには、対応を

$$M \mapsto F^M$$

と書く。

Definition. 対応 $M \mapsto F^M$ が次の条件をみたすならば正則写像に関して減少性をもつという：

$$(\Phi^* F^{M'})(p; X) \leq F^M(p; X) \text{ for } (p; X) \in TM, \Phi \in \text{Hol}(M, M')$$

減少性をもつ擬計量については次の性質がある。

[性質 1] 対応 $M \mapsto F^M$ は双正則不变である。すなわち、

$$\Phi : M \longrightarrow M'$$

が双正則写像であれば

$$\Phi^* F^{M'} = F^M$$

が成り立つ。

[性質 2] 対応 $M \mapsto F^M$ および $M \mapsto G^M$ がともに減少性をもつ擬計量であるとする。このとき

$$g_M := F^M / G^M : M \longrightarrow [0, \infty)$$

は well-defined な関数であり、対応 $M \mapsto g_M$ は双正則不变である。

減少性をもつ擬計量の典型的な例は次の 2 つである。

[例 1] Carathéodory 擬計量

$$C^M(p; X) := \sup \{ \rho(f(p); f_*X) \mid f \in \text{Hol}(M, U) \}$$

for $(p; X) \in TM$.

[例 2] 小林擬計量

$$K^M(p; X) := \inf \{ \rho(q; Y) \mid (q; Y) \in TU, f \in \text{Hol}(U, M)$$

with $f(q) = p, f_*Y = X\}$

for $(p; X) \in TM$.

但し、 ρ は単位円板 $U \subset \mathbf{C}$ における Poincaré 計量をあらわす。すなわち、

$$\rho\left(p; \xi \frac{d}{dz} \Big|_p\right) = \frac{|\xi|}{1 - |p|^2}, \quad \left(p; \xi \frac{d}{dz} \Big|_p\right) \in TU.$$

とおく。

このとき Schwarz の補題により TM において

$$C^M \leq K^M$$

が成り立つ。特に、 $M = U$ のときには

$$C^M = K^M = \rho$$

が成り立つ。さらに、対応 $M \mapsto F^M$ が正則写像に関して減少性をもち、かつ $F^M = \rho$ が成り立つならば、 TM において

$$C^M \leq F^M \leq K^M$$

が成り立つことが知られている。

以下 $M = D \subset \mathbf{C}^n$: domain とする。 $n = 1$ のとき $p \in D$ に対して $k(p)$ を p における Robin 定数とし、 $C_\beta(p)$ を p における D の理想境界 β の容量とする。このとき

$$\begin{aligned} C_\beta(p) &= \exp(-k(p)) \\ &= \exp\left(-(-g^D(q, p) \text{ の } p \text{ における harmonic part の定数項})\right) \\ &= \exp\left(-\left(\lim_{q \rightarrow p} (-g^D(q, p) + \log |z(q) - z(p)|)\right)\right) \\ &= \lim_{q \rightarrow p} \frac{\exp g^D(q, p)}{|z(q) - z(p)|} \end{aligned}$$

となる。この関係を高次元の場合に次のように拡張して定義する。

Definition. $(p; X) \in TD = D \times \mathbf{C}^n$ に対して,

$$P^D(p; X) := \limsup_{\lambda \rightarrow 0, \lambda \neq 0} \frac{\exp g^D(p + \lambda X, p)}{\lambda}.$$

P -擬計量という。

Proposition 2.1. $f \in \text{NPS}^D(p)$. $\varphi_0, \varphi_1 \in \text{Hol}(\varepsilon E, D)$ s.t. $\varphi'_0(0) = \varphi'_1(0)$, $\varphi_i(0) = p \Rightarrow L_f[\varphi_0] = L_f[\varphi_1]$.

ただし, $L_f[\varphi_i] := \limsup_{\lambda \rightarrow 0, \lambda \neq 0} (\exp f \circ \varphi_i)(\lambda)/|\lambda|$ とおく。

Proof. $X = \varphi'_0(0) = \varphi'_1(0) \in \mathbf{C}^n$ とおく。

$$O := \{(\lambda, \xi) \in (\varepsilon E) \times \mathbf{C} \mid (1 - \xi)\varphi_0(\lambda) + \xi\varphi_1(\lambda) \in D\}.$$

$O \supset \{0\} \times \mathbf{C}$ である。

$\forall \xi \in \mathbf{C}$,

$$\varphi_\xi(\lambda) := (1 - \xi)\varphi_0(\lambda) + \xi\varphi_1(\lambda) \text{ for } \lambda \in \varepsilon E \text{ with } (\lambda, \xi) \in O.$$

$$\begin{cases} \varphi_\xi \in \text{Hol}(\varepsilon'E, D) \ (0 < \varepsilon' < \varepsilon) \\ \varphi'_\xi(0) = X, \varphi_\xi(0) = p. \end{cases}$$

$$g(\lambda, \xi) := f \circ \varphi_\xi(\lambda) - \log |\lambda|, (\lambda, \xi) \in O \setminus \{0\} \times \mathbf{C}.$$

g : plurisubharmonic on $O \setminus \{0\} \times \mathbf{C}$ である. $f \in \text{NPS}^D(p)$ より, $\exists M > 0$ s.t.

$$\exp f(v) \leq M\|v - p\| \text{ (for } \|v - p\| \ll 1).$$

$$(\exp f \circ \varphi_\xi)(\lambda)/|\lambda| \leq M\|(\varphi_\xi(\lambda) - p)/\lambda\| \text{ for } 0 < |\lambda| \ll 1.$$

このとき, $\forall \xi \in \mathbf{C}$

$$(**) \quad \limsup_{(\lambda', \xi') \rightarrow (0, \xi)} g(\lambda', \xi') \leq \log(M\|X\|).$$

g は, $\{0\} \times \mathbf{C}$ を越えて, O 上で plurisubharmonic な関数 \tilde{g} として拡張できる. しかも

$$\tilde{g}(0, \xi) = \limsup_{(\lambda', \xi') \rightarrow (0, \xi), \lambda' \neq 0} g(\lambda', \xi').$$

$\forall \xi \in \mathbf{C}$ に対して, $\tilde{g}(\cdot, \xi)$ は 0 の近傍で subharmonic なので

$$\begin{aligned} \tilde{g}(0, \xi) &= \limsup_{\lambda \rightarrow 0, \lambda \neq 0} \tilde{g}(\lambda, \xi) \\ &= \limsup_{\lambda \rightarrow 0, \lambda \neq 0} g(\lambda, \xi) \\ &= \log L_f[\varphi_\xi]. \end{aligned}$$

他方, $\tilde{g}(0, \cdot)$ は \mathbf{C} で subharmonic. しかも $(\ast\ast)$ より

$$\tilde{g}(0, \xi) \leq \log(M\|X\|) (\xi \in \mathbf{C}).$$

よって上に有界なので, $\tilde{g}(0, \cdot)$ は constant.

$$\therefore \log L_f[\varphi_0] = \tilde{g}(0, 0) = \tilde{g}(0, 1) = \log L_f[\varphi_1].$$

□

Proposition 2.2. $D \mapsto P^D$ は decreasing property を持つ, i.e., $\Phi \in \text{Hol}(D, D')$, $(p; X) \in TD$

$$\Rightarrow P^{D'}(\Phi(p); \Phi'(p)X) \leq P^D(p; X).$$

Proof. pluricomplex Green function の減少性より

$$(*) \quad \frac{\exp g^{D'}(\Phi(p + \lambda X), \Phi(p))}{|\lambda|} \leq \frac{\exp g^D(p + \lambda X, p)}{|\lambda|}.$$

$$\varphi_0(\lambda) = \Phi(p + \lambda X),$$

$$\varphi_1(\lambda) = \Phi(p) + \lambda \Phi'(p)(X) \text{ とおけば}$$

$$\varphi'_0 = \Phi'(p)(X) = \varphi'_1(0) \text{ なので Proposition 2.1 より}$$

$$L_{g^{D'}}[\varphi_0] = L_{g^{D'}}[\varphi_1].$$

$$(*) \text{ の両辺の } \limsup_{\lambda \rightarrow 0, \lambda \neq 0} \text{ をとれば, } P^{D'}(\Phi(p); \Phi'(p)(X)) \leq P^D(p; X).$$

□

Definition. $f \in \text{NPS}^D(p)$, $X \in T_p D$ に対して

$$\varphi \in \text{Hol}(\varepsilon E, D) \text{ with } \varphi(0) = p, \varphi'(0) = X$$

をとり, $L_f(X) := L_f[\varphi]$ とおく (φ のとり方によらない).

$$L_f : T_p D \longrightarrow \mathbf{R} \text{ である.}$$

Proposition 2.3. $f \in \text{NPS}^D(p)$

$$\Rightarrow \log L_f : \text{plurisubharmonic on } T_p D = \mathbf{C}^n.$$

この補題の証明の為の準備をする.

Lemma 2.4. (Hadamard) u : subharmonic on $P = \{\lambda \in \mathbf{C} | r_1 < |\lambda| < r_2\}$,

$$M(r) := \max\{u(\lambda) | |\lambda| = r\} \text{ とするとき次が成立する.}$$

(i) $t \mapsto M(e^t)$: convex. 特に $M(r)$ は continuous.

(ii) u : subharmonic on $|\lambda| < r_2 \Rightarrow M(r)$: increasing.

Lemma 2.5. f : subharmonic on $P = \{\lambda \in \mathbf{C} | r_1 < |\lambda| < r_2\}$ とし,

$$g(\xi) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\zeta e^{i\theta}) d\theta (\zeta \in P)$$

とおく.

(i) g : subharmonic on P .

- (ii)
 - $g : |\zeta|$ にだけ depend.
 - $t \mapsto g(e^t)$: convex. 特に $g(r)$ は continuous.
 - f : subharmonic on $|\lambda| < r_2 \Rightarrow g(r) \downarrow g(0)$ ($r \rightarrow 0$).

Proof. (i) (g : upper semicontinuousなること)

$g(\zeta_0) < \alpha$ とする.

$\exists C$ s.t. $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\zeta_0 e^{i\theta}) d\theta < C < \alpha$.

$\exists n$ s.t. $\frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^n M_i(\theta_i - \theta_{i-1}) < C$ ($M_i = \max\{f(\zeta_0 e^{i\theta}) | \theta_{i-1} \leq \theta \leq \theta_i\}$).

$\exists M'_i > M_i$ s.t. $\frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^n M'_i(\theta_i - \theta_{i-1}) < C$.

$\exists \delta > 0$:

$$f(\zeta e^{i\theta}) \leq M'_i \text{ for } |\zeta - \zeta_0| < \delta, \theta_{i-1} \leq \theta \leq \theta_i.$$

このとき

$$|\zeta - \zeta_0| < \delta \text{ ならば}$$

$$g(\zeta) \leq C < \alpha.$$

(g が subharmonic なること)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\zeta_0 + \rho e^{i\tau}) d\tau &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\tau}{2\pi} \int_0^{2\pi} f((\zeta_0 + \rho e^{i\tau}) e^{i\theta}) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\zeta_0 e^{i\theta} + \rho e^{i(\tau+\theta)}) d\tau \text{ (Fubini)} \\ &\geq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\zeta_0 e^{i\theta}) d\theta \\ &= g(\zeta_0). \end{aligned}$$

(ii) $|\zeta_1| = |\zeta_2|$ とする.

$$\begin{aligned} g(\zeta_1) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\zeta_1 e^{i\theta}) d\theta \quad (\zeta_1 \zeta_2^{-1} = e^{i\alpha}) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\zeta_2 \zeta_1 \zeta_2^{-1} e^{i\theta}) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\zeta_2 e^{i(\alpha+\theta)}) d\theta \\ &= g(\zeta_2). \end{aligned}$$

$M(r) = \max\{g(\lambda) | |\lambda| = r\}$ とおけば, $M(r) = g(r)$ なので, Hadamard より. \square

Lemma 2.6.

$$f \in \text{NPS}^D(p), \varphi \in \text{Hol}(\varepsilon E, D) \text{ with } \varphi(0) = p, \varphi'(0) = X.$$

$$a(r) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f \circ \varphi(re^{i\theta}) d\theta - \log r \text{ とする。このとき,}$$

$$a(r) \downarrow \log L_f(X) \text{ as } r \rightarrow 0$$

Proof. $g(\lambda) := f \circ \varphi(\lambda) - \log |\lambda|$ とおく。

g : subharmonic on $\varepsilon E \setminus \{0\}$, 0 の近傍で上に有界。

g は εE で subharmonic な \tilde{g} に拡張可能で次をみたす。

$$\tilde{g}(0) = \limsup_{\lambda \rightarrow 0, \lambda \neq 0} g(\lambda) = \log L_f(X).$$

$$\begin{cases} a(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{g}(re^{i\theta}) d\theta \quad (0 < r < \varepsilon) \\ \log L_f(X) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{g}(0) d\theta \end{cases}$$

Lemma 2.5 より, $a(r) \downarrow \log L_f(X)$ as $r \rightarrow 0$. □

Proof. (Proposition 2.3 の証明)

$$\ell(X) := \log L_f(X) = \limsup_{\lambda \rightarrow 0, \lambda \neq 0} (f(p + \lambda X) - \log |\lambda|) \text{ とおく。}$$

(ℓ : upper semicontinuous なること)

$$O := \{(\lambda, X) \in \mathbf{C} \times \mathbf{C}^n \mid p + \lambda X \in D\}.$$

$$h(\lambda, X) := f(p + \lambda X), \quad (\lambda, X) \in O.$$

すると Lemma 2.5 より, $\ell(X) = \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(X, re^{i\theta}) d\theta - \log r \right)$ である。 $X_0 \in \mathbf{C}^n$: Fix する。

$\forall \eta > \ell(X_0)$ をとる。

$$\exists \delta > 0 : \begin{cases} h(\lambda, X_0) - \log |\lambda| < \eta & \text{for } \lambda \in \mathbf{C} \text{ with } 0 < |\lambda| \leq \delta. \\ (\lambda, X_0) \in O \end{cases}$$

h : upper semicontinuous, δT : compact より ($\forall \lambda \in \delta T$ に対し, λ の近傍と X_0 の近傍をとる。 λ の近傍の有限個で δT を cover)

$$\exists W \ni X_0 : \text{open s.t. } h(\lambda, X) - \log |\lambda| < \eta \text{ for } \lambda \in \delta T, X \in W.$$

Lemma 2.5 より

$$\ell(X) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\delta e^{i\theta}, X) d\theta - \log \delta < \eta \text{ for } X \in W.$$

よって ℓ is upper semicontinuous at X_0 .

(ℓ : plurisubharmonic なること)

$$\ell(X) = \lim_{r \rightarrow +0} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(p + re^{i\theta} X) d\theta - \log r \right),$$

$$\ell(X + e^{i\xi}Y) = \lim_{r \rightarrow +0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f(p + re^{i\theta}X + re^{i(\theta+\xi)}Y) - \log r) d\theta. \text{ (monotone)}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ell(X + e^{i\xi}Y) d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\xi \lim_{r \rightarrow +0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f(p + re^{i\theta}X + re^{i(\theta+\xi)}Y) - \log r) d\theta \\ &= \lim_{r \rightarrow +0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\xi \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f(p + re^{i\theta}X + re^{i(\theta+\xi)}Y) - \log r) d\theta \\ &\quad (\text{monotone convergence theorem}) \\ &= \lim_{r \rightarrow +0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f(p + re^{i\theta}X + re^{i(\theta+\xi)}Y) - \log r) d\xi \\ &\quad (\text{Fubini's theorem}) \\ &\geq \lim_{r \rightarrow +0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f(p + re^{i\theta}X) - \log r) d\theta \\ &\quad (\text{plurisubharmonicity of } f) \\ &= \ell(X). \end{aligned}$$

□

Theorem 2.7. (i) P^D : pseudometric on D , i.e., $\forall \lambda \in \mathbf{C}, \forall (p; X) \in TD, P^D(p; \lambda X) = |\lambda|P^D(p; X)$ かつ $P^D(p, \cdot)$ は $T_p D$ 上 upper semi-continuous.

(ii) $C^D(p; X) \leq P^D(p; X) \leq K^D(p; X)$ for $(p; X) \in TD$.

(iii) $\forall p \in D, IP^D(p) := \{X \in \mathbf{C}^n; P^D(p; X) < 1\}$: pseudoconvex disked domain.

Proof. (ii) $D \mapsto P^D$ が減少性をもつことと $P^E = \rho$ であることより不等式がいえる.

(iii)

$$\mu^{IP^D(p)} = P^D(p; \cdot).$$

$$\log P^D(p; \cdot) = \log L_{g^D(\cdot, p)} \quad (P^D \text{ def})$$

$$\text{: plurisubharmonic on } \mathbf{C}^n \quad (g^D(\cdot, p) \in \text{NPS}^D(p))$$

□

Theorem 2.8. $D \subset \mathbf{C}^n$: disked domain with μ^D とする.

(i) $C^D(0; \cdot) \leq P^D(0; \cdot) \leq K^D(0; \cdot) \leq \mu^D$ on $T_0 D = \mathbf{C}^n$.

$IF^D(0) := \{X \in \mathbf{C}^n | F^D(0; X) < 1\}$ for $F = C$ or P or K .

: (F の 0 における標形という。)

(ii) $IC^D(0) \supset IP^D(0) \supset IK^D(0) \supset D$.

(iii) D : convex $\Leftrightarrow IC^D(0) = D \Leftrightarrow C^D(0; \cdot) = \mu^D$.

(iv) D : pseudoconvex $\Leftrightarrow IP^D(0) = D \Leftrightarrow P^D(0; \cdot) = \mu^D$.

(v) $IP^D(0) = D$ を含む pseudoconvex disked domain で最小のもの。

Proof. (i)

$$K^D(p; X) = \inf\{\rho(Y) \mid Y \in TE, f \in \text{Hol}(E, D), f(0) = p, f'(0)Y = X\},$$

$$\rho\left(\xi \cdot \frac{d}{d\lambda}\right) = \frac{|\xi|}{1 - |\lambda|^2}.$$

$$C^D(p; X) = \sup\{\rho(f'(p)X) \mid f \in \text{Hol}(D, E), f(p) = 0\}.$$

任意の $\eta > \mu^D(X)$ に対し $f(\lambda) := \frac{\lambda}{\eta}X$ ($\lambda \in E$) とおけば

$$f \in \text{Hol}(E, D), f(0) = 0 \left(\mu^D(f(\lambda)) = \frac{|\lambda|}{\eta} \mu^D(X) < |\lambda| < 1 \right).$$

よって $f'(0)\left(\eta\left(\frac{d}{d\lambda}\right)_0\right) = X$ となる。

$$\rho\left(\eta\left(\frac{d}{d\lambda}\right)_0\right) = \eta \text{ だから}$$

$$K^D(0; X) \leq \eta.$$

$$\therefore K^D(0; X) \leq \mu^D(X).$$

(iv) $P^D(0; \cdot) = \mu^D \Rightarrow \log P^D(0; \cdot)$ plurisubharmonic on \mathbf{C}^n

$\Rightarrow D$: pseudoconvex (Lemma 1.5 による) .

D を pseudoconvex とすると

$f = \log \mu^D \in \text{NPS}^D(0)$ (実際 $\exists C > 0$ with $\mu^D \leq C\|\cdot\|$).

次の Lemma 2.9 より

$$P^D(0; X) = \sup\{L_f(X) \mid f \in \text{NPS}^D(0)\},$$

$$P^D(0; X) \geq L_{\log \mu^D}(X) = \limsup_{\lambda \rightarrow 0, \lambda \neq 0} \frac{\mu^D(0 + \lambda X)}{|\lambda|} = \mu^D(X).$$

(v) D' : disked domain, $D' \supset D$, D' : pseudoconvex とする。

$$\mu^{D'} = P^{D'}(0; \cdot) \leq P^D(0; \cdot)$$

したがって $D' \supset IP^D(0)$ となる。よって $IP^D(0)$ は最小のものである。

□

Lemma 2.9.

$$P^D(p; X) = \sup\{L_f(X) \mid f \in \text{NPS}^D(p)\}.$$

Proof. $g^D(\cdot, p) \in \text{NPS}^D(p)$ より、

$$P^D(p; X) = L_{g^D(\cdot, p)}(X) \leq (\text{右辺})$$

が成り立つ。このとき、任意の $f \in \text{NPS}^D(p)$ に対して

$$\frac{\exp f(p + \lambda X)}{|\lambda|} \leq \frac{\exp g^D(p + \lambda X, p)}{|\lambda|}$$

となる。したがって $L_f(X) \leq L_{g^D(\cdot, p)}(X)$ より、

$$(\text{右辺}) \leq L_{g^D(\cdot, p)}(X) \text{ となる}.$$

□

Remark. 私ははじめ Lemma 2.9 の形で $P^D(p; X)$ を定義をした。

3 応用

次は Schwarz の補題の拡張である。

Theorem 3.1. D : disked domain, $F \in \text{Hol}(E, D)$, $F(0) = 0$.

- (i) $P^D(0; F(\lambda)) \leq |\lambda|$ ($\lambda \in E$).
- (ii) $P^D(0; F'(0)) \leq 1$.
- (iii) ある $\lambda_1 \in E \setminus \{0\}$ が存在して (i) で等号または (ii) で等号ならば、
(i) がすべての $\lambda \in E$ について等号が成立し、(ii) において等号が成立する。

Proof.

$$u(\lambda) := \begin{cases} \log P^D(0; F(\lambda)) - \log |\lambda|, & \lambda \neq 0, \\ \log P^D(0; F'(0)), & \lambda = 0. \end{cases}$$

とおくと、 u は E 上 subharmonic となり、 $v \in \partial E$ に対して $\limsup_{\lambda \rightarrow v, \lambda \in E} u(\lambda) \leq 0$ が成り立つ。よって、 $\lambda \in E$ ならば $u(\lambda) \leq 0$. □

Theorem 3.2 (Suzuki, Barth). D : disked domain, pseudoconvex ならば $IK^D(0) = D$.

Theorem 3.3 (Sadullaev). D, D' : disked domain, $\Phi \in \text{Hol}(D, D')$, $\Phi(0) = 0$, D' ; pseudoconvex ならば $\Phi'(0)(D) \subset D'$.

Proof. $X \in \mathbf{C}^n$ に対して

$$\mu^{D'}(\Phi'(0)X) = P^{D'}(0; \Phi'(0)X) \leq P^D(0; X) \leq \mu^D(X).$$

□

Theorem 3.4. $0 < q < 1$ に対して、

$$A := \{\lambda \in \mathbf{C} \mid q < |\lambda| < 1\}, \quad 0 < r < 1,$$

$$\frac{\log q}{\pi i} = \frac{\pi i}{-\log r} = \tau,$$

$$\frac{\log r}{\pi i} = -\frac{1}{\tau} \text{とする}.$$

このとき $\lambda \in A$ に対して $|\lambda| = q^v, 0 < v < 1$ と書けば

$$\frac{C^A(\lambda; X)}{P^A(\lambda; X)} = C^A/P^A(\lambda) = \prod_{n \geq 1} \frac{|\exp 2\pi i v + r^{2n-1}|^2}{(1 + r^{2n-1})^2},$$

$$\frac{K^A(\lambda; X)}{P^A(\lambda; X)} = K^A/P^A(\lambda) = \prod_{n \geq 1} \frac{|\exp 2\pi i v - r^{2n}|^2}{(1 - r^{2n})^2},$$

が成り立つ。

Corollary.

$$\text{Aut}(A) = \{\lambda \mapsto \lambda \exp i\theta \mid \theta \in \mathbf{R}\} \cup \{\lambda \mapsto \frac{q}{\lambda} \exp i\theta \mid \theta \in \mathbf{R}\}.$$

Proof. (左辺) \supset (右辺) は自明である。したがって (左辺) \subset (右辺) を示せば良い。

$$\begin{aligned} K^A/P^A(\lambda_1) &= K^A/P^A(\lambda_2) \\ \Leftrightarrow \left. \begin{aligned} |\lambda_1| &= q^{v_1} \\ |\lambda_2| &= q^{v_2} \end{aligned} \right\} \text{とおいたとき } \frac{v_1 + v_2}{2} &= \frac{1}{2} \text{ または } v_1 = v_2 \\ \Leftrightarrow |\lambda_1| &= |\lambda_2| \text{ または } |\lambda_1| = \frac{q}{|\lambda_2|}. \end{aligned}$$

$\varphi \in \text{Aut}(A)$ とする。 $\lambda = q^{\frac{1}{4}}$ すると、 $|\varphi(q^{\frac{1}{4}})| = q^{\frac{1}{4}}$ または $q^{\frac{3}{4}}$ 。

Case1 : $|\varphi(q^{\frac{1}{4}})| = q^{\frac{1}{4}}$ のとき

$$U := \{\lambda \in A \mid |\lambda| = q^v, 0 < v < \frac{1}{3}\} \text{ とすれば, } q^{\frac{1}{4}} \in U \text{ であり, }$$

$$U \ni \lambda \mapsto \frac{|\varphi(\lambda)|}{|\lambda|} \text{ は連続であり, }$$

仮定より像は $(q, q^{\frac{1}{3}}) \cup \{1\}$ に含まれる.

$$\left[\begin{array}{ll} |\varphi(\lambda)| = \frac{q}{|\lambda|} のとき. \\ -\frac{1}{3} < -v < 0 & |\varphi(\lambda)| = \frac{q}{|\lambda|^2} \quad (|\lambda| = q^v より) \\ \Leftrightarrow -\frac{2}{3} < -2v < 0 & = \frac{q}{q^{2v}} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{3} < 1 - 2v < 1 & = q^{1-2v}. \end{array} \right]$$

$q^{\frac{1}{4}} \in U$ なので、その像は 1 を含む連結成分 $\{1\}$ である。よって、

$$U \text{ 上で } \left| \frac{\varphi(\lambda)}{\lambda} \right| = 1 \text{ となる。したがって}$$

$$U \text{ 上で } \frac{\varphi(\lambda)}{\lambda} \text{ は定数となるので、}$$

$$A \text{ 上で } \frac{\varphi(\lambda)}{\lambda} = \exp i\theta \text{ となる。}$$

Case2 : $|\varphi(q^{\frac{1}{4}})| = q^{\frac{3}{4}}$ のとき

$$U := \{ \lambda \in A \mid |\lambda| = q^v, 0 < v < \frac{1}{3} \} \text{ とすれば}$$

$U \ni \lambda \mapsto |\varphi(\lambda)\lambda|$ は連続であり、

仮定より像は $\{q\} \cup (q^{\frac{3}{4}}, 1)$ に含まれる。

$$\left[\begin{array}{l} |\varphi(\lambda)| = |\lambda| のとき \quad |\lambda| = q^v より \\ |\varphi(\lambda)\lambda| = |\lambda|^2 = q^{2v}. \\ 0 < 2v < \frac{2}{3} \end{array} \right]$$

$q^{\frac{1}{4}} \in U$ なので、その像は q を含む連結成分 $\{q\}$ である。よって

$$U \text{ 上で } |\varphi(\lambda)\lambda| = q \text{ となる。}$$

したがって U 上で $\varphi(\lambda)\lambda$ は定数となるので、

$$A \text{ 上で } \varphi(\lambda)\lambda = q \exp i\theta \text{ となる。}$$

□