多様体上の Levi 問題 — 総説と最近の結果

大沢 健夫

1. Levi 問題のような根本的問題がどのようにして解かれ, その解決が次世代にどんな問題を提供し, さらにそれらがどう解かれ, という風に, 理論の生長の様子を折りにふれて写しとることは, 学問を生かしていく上で必要不可欠な作業であろう. この小論の目的は, Levi 問題を発端とする多変数複素解析の流れを概説し, その延長上に筆者が興味深く思うある問題を位置づけることである.

2. かつて多変数複素解析の中心的問題であり, その解決のため建設された方法論が現代数学に大きな影響を与えたことから, Levi 問題は 30 年ほど前まで数学界における知識人たちの間では常識とされていたようである. しかし現在はそうでない. 従ってそのかつての常識事項から話を始めたい.

3. 言わずもがなであろうが, 解析関数というものは定義域を複素領域まで拡張することによってはじめて本性が明らかになる. 問題はしばしば特異点における関数の記述であるが, 多変数の解析関数の場合そもそも特異点の分布がどうなっているかを告げる一般論が, F. Hartogs 以前には存在しなかった. 1910 年の E. E. Levi の論文 [Studii sui punti singolari essenziali delle funzioni analiticke de due o più variabili complesse, Ann. Mat. Pura Appl. 17 (1910), 61–87] は Hartogs の一連の研究を受けたものだが, そこには次の発見が報告されている.

$x = x_1 + ix_2$, $y = y_1 + iy_2$ を二つの複素変数とせよ. (x_1, x_2, y_1, y_2) を座標とする 4 次元空間に超曲面 S すなわち

$$\varphi(x_1, x_2, y_1, y_2) = 0$$

を与える. ただし $\varphi(x_1, x_2, y_1, y_2)$ は 2 回連続的微分可能であるとする. S で分けられた空間の片側でのみ正則な一価関数が存在するためには, 式

$$\begin{aligned} C\varphi \equiv & \left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right)^2\right\}\left\{\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y_1^2}\right) + \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y_2^2}\right)\right\} \\ & + \left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y_2}\right)^2\right\}\left\{\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}\right) + \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2}\right)\right\} \\ & -2\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\frac{\partial\varphi}{\partial y_1} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\frac{\partial\varphi}{\partial y_2}\right\}\left\{\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial y_1} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2\partial y_2}\right\} \\ & -2\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\frac{\partial\varphi}{\partial y_2} - \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}\right\}\left\{\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial y_2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2\partial y_1}\right\} \end{aligned}$$

が S 上で定符号であることが必要である．正確には，$\varphi > 0$ の側でのみ正則な (すなわち S のどの点をこえても解析接続できない) 関数が存在するためには $C\varphi \leq 0$ でなければならないし，そのような関数が $\varphi < 0$ の側で存在するためには $C\varphi \geq 0$ でなければならない．

続けて [Sulle ipersuperficie dello spazio a 4 dimensioni che possono essere frontiera del campo di esistenza di una funzione analitica di due variabili complesse, Ann. Mat. Pura Appl. 18 (1911), 69–79] において，Levi は $C\varphi < 0$ なる点の近傍で $\varphi > 0$ の側においてのみ正則な関数が存在することを示したが，このような関数の大域的存在までは示せず，問題として残したのである．

4．記号を現代風に変えるが，Ω は $\mathbb{C}^n$ の領域でその境界 $\partial\Omega$ が C^2 級の実超曲面であるとする．φ を Ω の定義関数とする．すなわち φ は $\mathbb{C}^n$ 上の実数値 C^2 級関数で

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C}^n \mid \varphi(z) < 0\}$$

かつ$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial\varphi}{\partial z_n}\right)$ は $\partial\Omega$ 上に零点をもたないものとする．

$$T^{1,0}\partial\Omega = \left\{(p, \xi) \,\middle|\, p \in \partial\Omega,\, \xi \in \mathbb{C}^n,\, \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\varphi}{\partial z_i}(p)\xi_i = 0\right\}$$

とおく．$T^{1,0}\partial\Omega$ 上の関数 $L\varphi$ を

$$L\varphi(p, \xi) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2\varphi}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}(p)\xi_i\bar{\xi}_j$$

で定義すると，$n = 2$ のとき

$$\partial\Omega \text{ 上で } C\varphi \geq 0 \Longleftrightarrow T^{1,0}\partial\Omega \text{ 上で } L\varphi \geq 0$$

であり，さらに一般次元でも Ω でのみ正則な関数が存在すれば $L\varphi \geq 0$ である．
そこで逆に

(1) $L\varphi \geq 0$ ならば Ω でのみ正則な関数が存在するか．

ということが問題になる．これを Levi 問題という．$L\varphi \geq 0$ のとき Ω は Levi 擬凸であるという．擬凸という言葉が使われるのは，$\mathbb{R}^m$ の領域 D が凸領域であるための条件を，∂D が C^2 級の場合に D の定義関数 $\psi(x_1, \ldots, x_m)$ を用いて述べると

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial\psi}{\partial x_j}(q)\eta_j = 0,\ q \in \partial D,\ \eta_j \in \mathbb{R} \text{ ならば } \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2\psi}{\partial x_i \partial x_j}(p)\eta_i\eta_j \geq 0$$

となり，条件 $L\varphi \geq 0$ はこの複素版だからである．

$L\varphi$ が p をとめたとき ξ について正定値ならば，Ω は p で強擬凸であるという．強擬凸性は 2 次元の場合 $C\varphi > 0$ と同値である．各境界点で強擬凸な領域を強擬凸領域という．

5. Ω でのみ正則な関数が存在するための必要条件を, $\partial\Omega$ の滑らかさを仮定せずに述べることができる. それは, いわゆる Hartogs 擬凸性であるが, 領域

$$T = \left\{|z| < \frac{1}{2},\, |w| < 1\right\} \cup \left\{|z| < 1,\, \frac{1}{2} < |w| < 1\right\} \; \left(\subset \mathbb{C}^2\right)$$

から Ω への任意の正則写像が, 二重円盤 $\{|z| < 1, |w| < 1\}$ から Ω への正則写像として拡張できるというものである. Levi による実超曲面の擬凸性の発見は, この観察を含む F. Hartogs の研究 [Math. Ann. (1906)] を受けたものであった. Hartogs による次の結果は有名である.

(H) U を Ω の実余次元 2 以上の部分多様体とする. $\Omega\backslash U$ でのみ正則な関数が存在すれば U は複素超曲面でなければならない.

容易にわかるように, $\partial\Omega$ が実超曲面である場合には Levi 擬凸性と Hartogs 擬凸性は互に同値である.

(2) Ω が Hartogs 擬凸ならば Ω でのみ正則な関数が存在するか.

という問題を Hartogs の逆問題という. Hartogs は $\Omega = \{(z, w) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C} \,|\, |w| < e^{-\rho(z)}\}$ (ρ は上半連続) の場合にこれを解いている. しかし問題設定の自然さが好まれるのか, 通常はこの種の存在問題を総称して Levi 問題という. 要は Hartogs と Levi によって, 多変数の正則関数の特異点集合の理解へと端緒が開かれたということである.

6. Levi 問題は 2 次元の場合に岡潔 [1942] によって解かれ, 一般次元の場合には岡潔 [1954], F. Norguet [1954], H. Bremermann [1954] によって解かれた.

7. 岡の研究は次の意味で系統的であった. Ω でのみ正則な関数が存在する領域を正則領域というが, 岡は正則領域が正則凸であることに注目し, $\mathbb{C}^n$ 内の領域だけでなく, $\mathbb{C}^n$ 上の Riemann 領域についても正則凸性の帰結を徹底的に調べあげた. [Ω 上の正則関数の集合を $\mathcal{O}(\Omega)$ とするとき, 任意のコンパクト集合 K に対し, 集合

$$\hat{K} = \left\{z \in \Omega \;\middle|\; |f(z)| \leq \sup_{w\in K} |f(w)|,\, \forall f \in \mathcal{O}(\Omega)\right\}$$

がコンパクトになるような領域 (または Riemann 領域) は正則凸であるという.] 正則凸な領域が正則領域であることは見やすい. Riemann 領域でも同様である.

8. 岡の解法のポイントは, $\Omega\,(\neq \mathbb{C}^n)$ が Hartogs 擬凸ならば距離関数 $\delta(z) := \inf_{w\in\partial\Omega} |z-w|$ に対して $-\log\delta$ が多重劣調和 (:$\Longleftrightarrow$ 上半連続かつ複素直線への制限が劣調和) になることを用いて, 問題を Ω が強擬凸な有界領域の場合に帰着させ, その場合を次のはり合わせ定理を用いて解いたことである.

岡のはり合わせ定理．　$\pi : \Omega \to \mathbb{C}^n$ を Riemann 領域とする．$\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_n)$, $\varepsilon > 0$, $\Omega_1(\varepsilon) = \{z \in \Omega \mid \mathrm{Re}\,\pi_1 < \varepsilon\}$, $\Omega_2(\varepsilon) = \{z \in \Omega \mid \mathrm{Re}\,\varphi_1 > -\varepsilon\}$ とおく．ある ε に対して $\Omega_1(\varepsilon)$ と $\Omega_2(\varepsilon)$ が両方とも正則凸ならば Ω も正則凸である．

9.　もちろん一般の Hartogs 擬凸領域に対しては $\delta(z)$ は可微分とは限らないから, Ω を強擬凸領域で近似するためには δ を適当に変形して滑らかにしておかねばならない．条件 $C\varphi \geq 0$ を $L\varphi \geq 0$ に読みかえることや多重劣調和関数の概念の導入はこの要請から起こったとのことである (西野利雄氏による).

しばしば強調されることだが, Bremermann や, Norguet と違って, 岡は $\mathbb{C}^n$ の不分岐被拡領域に対して Hartogs の逆問題を解いている．

10.　岡理論の複素多様体への一般化は, 当時の第一線の数学者たちにとって絶好のテーマだったようである．コンパクト多様体上では小平邦彦が楕円型作用素の L^2 評価を用いる方法で有理型関数の構成を行なった．その要になったのが有名な小平の消滅定理である．岡や小平の研究を受けて, H. Grauert, R. Remmert らは特異点をもつ空間上で複素解析を展開した．それらを Grauert の ICM 招待講演 (1962, Stockholm) から拾うと以下の如くである．(このあたりから段々専門的になる．因にこれ以前に書かれた Levi 問題の総合報告としては [酒井榮一, 正則領域, 数学 9 (1957), 17–44] が唯一のものであろう.)

X は被約な複素解析空間であるとする．

(I)　X が Stein 空間であるための必要十分条件は, X が 1-完備である ($:\Longleftrightarrow$ 強多重劣調和皆位関数をもつ) ことである．[R. Narasimhan, The Levi problem for complex spaces, Math. Ann. 142 (1961), 355–365, X が複素多様体の場合は, H. Grauert, On Levi's problem and the embedding of real-analytic manifolds, Ann. Math. 68 (1958), 460–472.] (一般に位相空間 Y 上の実関数 φ が皆位関数であるとは, $\forall c < \sup \varphi$ に対して $\{x \in Y | \varphi(x) < c\} \Subset Y$ であることをいう.)

(II)　X が正則凸ならば, X からある Stein 空間 Y への適正な (proper) 正則写像が存在する (この写像を Remmert 簡約写像とよぶ). [R. Remmert, Sur les espaces analytiques holomorphiquement séparables et holomorphiquement convexes, C. R. Acad. Sci. Paris, 243 (1956), 118–121.]

(III)　X がコンパクトであり, Hodge 計量をもてば, X は射影空間に正則にうめこまれる．[H. Grauert, Über Modifikationen und exzeptionelle analytische Mengen, Math. Ann. 146 (1962), 331–368.]

Grauert は第一種例外曲線についての Castelnuovo-Enriques の定理と小平の定理がポテンシャル論を経由せずに示せることを強調しているが, 同時に彼自身の方法の限界も明らかにしつつ, 偏微分方程式の方法を特異点をもつ空間においても有効なものにすることに特

別の意義があると主張している．[この点に関しては Grauert 自身が学位論文 (Math. Ann. 129 (1955), 233–259.) で示したように，X が射影的代数多様体ならば X の通常点の集合上には完備な Kähler 計量が入るから，一応端緒は開かれていた．その後の発展については Grauert 選集 (vol 1. pp 164–166) を参照されたい.]

11. 一方岡の周辺では Hartogs の逆問題の解を一般化する立場がとられた．上記 (I) を複素多様体の場合に岡の方法で示した西野利雄の仕事と，$\mathbb{P}^n$ 上の Levi 問題を解いた藤田玲子，武内章の仕事を Grauert は上の講演の中で紹介している．とくに武内による次の結果は微分幾何における新しい視点を含むものであった．(以後，局所的に Hartogs 擬凸な領域を，単に擬凸領域ということにする．これが現在通用している語法である.)

定理 1. [Takeuchi, A., Domaines pseudoconvexes infinis et la métrique riemannienne dans un espace projectif, J. Math. Soc. Japan 16 (1964), 159–181] $\Omega \subsetneq \mathbb{P}^n$ を擬凸領域とし，$z \in \Omega$ に対して $\delta(z)$ を z から $\partial\Omega$ までの Fubini-Study 計量に関する距離とする．すると $-\log\delta$ は多重劣調和であり，カレントの意味で

$$\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}(-\log\delta) \geq \frac{1}{3}\omega_{FS} \qquad (*)$$

である．ただし ω_{FS} は Fubini-Study 計量の基本形式を表す．

12. 武内の不等式 (*) の右辺に現れる $\frac{1}{3}$ であるが，これは最良である．そのことは $\mathbb{P}^1$ の場合だけからはわからないのだが，計算の要領はこれに尽きるのでやっておこう．

13. $\mathbb{P}^1$ の Fibini-Study 計量は，非同次座標 ζ を用いて

$$\frac{\partial^2\log(1+|\zeta|^2)}{\partial\zeta\partial\bar{\zeta}}d\zeta d\bar{\zeta} = \frac{d\zeta d\bar{\zeta}}{(1+|\zeta|^2)^2} \qquad (\text{曲率} = 2)$$

と書ける [たとえば J. Jost, Riemannian Geometry and Geometric Analysis, Springer 1995]. よって $\Omega = \{\zeta \in \mathbb{P}^1 \mid \zeta \neq 0\}$ のとき

$$\begin{aligned}\delta(\zeta) &= \int_0^1 \frac{|\zeta|}{1+|\zeta|^2t^2}dt \\ &= \operatorname{Arctan}|\zeta|\end{aligned}$$

である．$\zeta \neq 0, \infty$ における $-\partial\bar{\partial}\log\delta$ の値を計算したい．回転対称性から，正の実軸上で求めれば十分である．0 からの距離 $\operatorname{Arctan}|\zeta|$ は実解析的だから，$(0,\infty)$ の近傍上で定義された正則関数 $u = u(\zeta)$ で $(0,\infty)$ 上 $\operatorname{Arctan}|\zeta|$ に一致するものが存在する (*i.e.* $u := \operatorname{Arctan}\zeta$). $(0,\infty)$ は測地線だから

$$\frac{d\zeta d\bar{\zeta}}{(1+|\zeta|^2)^2} = \left\{1 - a(u)(\operatorname{Im}u)^2 + O\Big((\operatorname{Im}u)^3\Big)\right\}dud\bar{u}$$

と書けるが, 曲率の計算から $a(u)$ は $(0,\infty)$ 上恒等的に 4 に等しい.

従って $(0,\infty)$ の近傍で

$$\begin{aligned}\delta(\zeta) &= |u|\int_0^1 \sqrt{1-4(\operatorname{Im} u)^2 t^2}\,dt + O\left(|\operatorname{Im} u|^3\right)\\ &= |u|\left(1-\frac{2}{3}(\operatorname{Im} u)^2\right) + O\left(|\operatorname{Im} u|^3\right).\end{aligned}$$

ゆえに $(0,\infty)$ 上で

$$\begin{aligned}\partial\bar\partial(-\log\delta) &= \partial\bar\partial\left(\log|u| + \log\left(1-\frac{2}{3}(\operatorname{Im} u)^2\right)\right)\\ &= \frac{1}{3}\,du\wedge d\bar u.\end{aligned}$$

これより Ω 上いたる所で

$$\sqrt{-1}\,\partial\bar\partial(-\log\delta) = \frac{2}{3}\omega_{FS}\left(= \frac{\sqrt{-1}}{3}\frac{d\zeta\wedge d\bar\zeta}{(1+|\zeta|^2)^2}\right)$$

となる. Ω が $\mathbb{P}^1$ の一般の領域の場合, $-\log\delta$ は上のような境界が一点の場合の関数の集合の上限となるので, 評価式 $\sqrt{-1}\partial\bar\partial(-\log\delta) \geq \frac{2}{3}\omega_{FS}$ が得られる.

14. 一般には測地線のパラメーターの複素化にいくつかの座標関数をつけ加えたものに関して計量の Taylor 展開の 2 次の項が問題になる. $\mathbb{P}^n$ の場合 $(n \geq 2)$ 曲率テンソルを接空間の複素 2 次元部分空間に制限したものの固有値は 2 と 1 であり, この理由から上式の 2/3 は 1/3 に変わる.

15. 定理 1 は Elencwajg, 鈴木理, 松本和子によって Kähler 多様体に対して一般化されている.

16. さて 1962 年の ICM では Levi 問題についてもう一つ R. Narasimhan による講演があった. (ICM で似たような話が重なるのは昔からで, 京都の時だけではない. 余談のついでに, Grauert は当時 32 才であり, Narasimhan はもっと若い.) 彼は Stein 空間における Runge 型近似定理 [The Levi problem for complex spaces II, Math. Ann. 146 (1962), 195–216] について報告し, その方法論的なアイディアは岡の論文に含まれていると述べた. 同時に, 彼は果敢にも擬凸領域が正則凸であるための条件について一つの予想を述べた.

> Narasimhan の予想 : 複素多様体内の滑らかな境界をもつ相対コンパクトな擬凸領域が少なくとも一つ強擬凸な境界点をもてば正則凸であろう.

17. これには Grauert によってすぐ反例があげられたが, その作り方では 3 次元以上の例しかできないので 2 次元の場合が問題として残された. また Narasimhan の予想の条件 (略して N 条件と呼ぶ) をみたす領域上に非定数正則関数が存在するかどうかもわかっていない. 2 次元 Narasimhan 予想は, 境界が連結で C^ω 級の場合, 肯定的に解決された. しばらくその周辺を述べてみたい.

定理 2. [Diederich, K. and Ohsawa, T., A Levi problem on two dimensional complex manifolds, Math. Ann. 261 (1982), 255–261] 2 次元複素多様体内の領域 Ω が N 条件をみたし, $\partial\Omega$ が連結で C^ω 級ならば, Ω は正則凸である.

18. この結果の証明には, ワーム領域の発見 [Diederich, K. and Fornaess, J., Pseudoconvex domains : An example with nontrivial Nebenhiille, Math. Ann. 225 (1977), 275–292] と, 自己交点数 0 の複素曲線の近傍の構造の理論 [Ueda, T., On the neighbourhood of a compact complex curve with topologically trivial normal bundle, J. Math. Kyoto Univ. 22 (1983), 583–607] が必要であった. 1981 年 2 月頃, 筆者には少なくとも $\mathbb{P}^1$ のまわりをくねくねと動くような擬凸領域が存在しないことはほぼ確実なことに思われた. 同じ年, Wuppertal でワームについて教わったおかげで定理 2 の証明ができた. ワームの理論だけではすべての場合をつくせないのだが, 残りはすでに上田理論に含まれていた. 上田氏の論文はまたプレプリントの段階だったが, その端緒となった次の定理 (1978 年 3 月ごろ) が既に筆者にとって非常に感銘深いものであり, Diederich 氏が上田氏の結果を知らなかったことにかえって当惑の念を覚えたほどであった.

定理 3. M を 2 次元複素多様体, $C \subset M$ を特異点のないコンパクト複素曲線とする. もし C の M における法線束が解析的に自明束に同値であり, C が正則凸な近傍系をもたなければ, C のある近傍 U に対して $\bar{U}\backslash C$ は強多重劣調和な皆位関数をもつ.

因にワーム領域論の要点は, 「複素直線に沿って単位円盤を調和にころがせば擬凸領域ができ, その逆も真である」というもので, 定理 2 の証明にはこの「擬凸 $\Longrightarrow$ 調和」が役立った.

19. これらの延長上に次の結果がある.

定理 4. [Diederich, K. and Ohsawa, T., Harmonic mappings and disc bundles over compact Kähler manifolds, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 21 (1985), 819–833] N をコンパクトな Kähler 多様体, $\pi_1(N)$ を N の基本群, $\mathbb{H}$ を上半平面とする. このとき任意の準同型

$$\rho : \pi_1(N) \longrightarrow PSL(2, \mathbb{R})\,(= \mathrm{Aut}\,(\mathbb{H}))$$

に対して, 複素多様体 $N \times_\rho \mathbb{H}$ は C^∞ 級の多重劣調和皆位関数をもつ. ただし $\pi : \tilde{N} \to N$ を普遍被覆とし, $\pi_1(N)$ を被覆変換群と同一視して

$$N \times_\rho \mathbb{H} := \tilde{N} \times \mathbb{H}/\sim$$

$$(x,z) \sim (y,w) \iff \exists \gamma \in \pi_1(N) \ \ s.t. \begin{cases} x = \gamma y \\ z = \rho(\gamma) w \end{cases}$$

とおく．

20. C^∞ 級の多重劣調和皆位関数をもつ複素多様体を弱 1 完備多様体という．コンパクト多様体上のコホモロジー消滅定理は弱 1 完備多様体上に自然に拡張される [Nakano, S., Vanishing theorems for weakly 1-complete manifolds, Number theory, Algebraic Geometry and Commutative Algebra – in honor of Yasuo Akuzuki, ed. by Y, Kusumori et al., 169–179, Kinokuniya, Tokyo, 1973]. 定理 4 は,「コンパクト Kähler 多様体上の解析的円盤束は弱 1 完備である」と言ってもよい．弱 1 完備性は擬凸性よりも強い条件で, 例えば Hopf 曲面上の円盤束 ($\mathbb{P}^1$ 束内の擬凸領域とみなせる) の中には $\mathbb{C}^2\backslash\{0\}$ と円環領域の直積に同値な (従って弱 1 完備でない！) ものも含まれる [Diederich-Fornaess, manuscripta Math. 39].

21. 定理 4 の証明と同時に次が得られたことにも注意したい．

定理 5. コンパクト Riemann 面上の解析的円盤束は, 正則凸であるかまたは直線束の零断面の近傍に双正則同値である．

22. さて話は戻るが, Grauert, Narasimhan による正則凸性の判定条件 (10, (I)) から, ポテンシャル論的方法によることなく Castelnouvo-Enriques-小平の定理が導けた．すなわち例外集合は強擬凸領域の正則凸性により‘つぶせる’わけである．しかしこれだけでは解析空間の改変操作一般の理解としては十分ではない．解析空間 X 内の解析集合 A 上で定義された適正正則写像 $f : A \to B$ があるとき, f に沿って X をつぶすことができるためには f の各ファイバーが正則凸な近傍系をもつことが必要だが, $\dim B > 0$ の場合にはそれらは強擬凸にならないからである．この方向に先鞭をつけたのは, 小平の方法の一般化によった中野茂男の論文 [On the inverse of monoidal transformation, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 6 (1970) 438–502. Supplement (with Fujiki, A.) ibid. 7 (1971)] であった．

定理 6. (中野) 複素多様体 $\tilde{X}$ が余次元 1 の部分多様体 S を含み, S は他の複素多様体 M の上の解析的 $\mathbb{P}^{n-1}$ バンドルになっているとする：$S \xrightarrow{\pi} M$. M の各点 a に対して $\pi^{-1}(a) = L_a$ と置くとき, 条件

$$[S]|L_a = [e]^{-1} \qquad ([e] \text{ は } L_a \simeq \mathbb{P}^{n-1} \text{上の超平面バンドル})$$

が成り立っているならば, M を含む複素多様体 X と正則写像 $\tilde{\pi} : \tilde{X} \to X$ とがあって, $\tilde{\pi}|S$ はバンドルの射影 π に一致し, $(\tilde{X}, \tilde{\pi})$ は M を中心とする X のモノイダル変換になる．

中野理論は藤木明の学位論文で一般化され，これで改変操作の基礎理論は一段落した [Fujiki, A., On the blowing down of analytic spaces, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 10 (1975), 473–507]. その要点は次の三点である．

1) A が X のコンパクトな解析集合の場合，A の X における法線束 $N_{A/N}$ が負なら (*i.e.* $N_{A/X}$ の零断面を 1 点につぶすことができれば) A を 1 点につぶすことができる [Grauert, Über Modifikationen...].

2) A が X の Cartier 因子の場合 (一般の場合は広中の定理によりこれに帰着できる.)

   i) A は正則凸
   ii) $N_{A/X}$ は負 (:$\Longleftrightarrow$ 零断面を Remmert 簡約写像に沿ってつぶせる.)
   iii) $H^1(A, \mathcal{O}((N^*_{A/X})^{\otimes\mu})) = 0 \quad \forall\mu > 0$

   なる 3 つの条件がみたされれば X は A の Remmert 簡約写像に沿ってつぶせる．

3) 2) において *iii)* を落とすことはできない．実際，コンパクト複素多様体 F とその上の負直線束 $L \to F$ を適当にとれば，L 上のアファイン直線束 $\pi : X \to L$ で，X を L の零断面 F_0 上に制限すれば自明束だが，F_0 のある有限次の近傍に制限すると断面をもたなくなるようなものが存在する．このとき $A = \pi^{-1}(F_0)$ とおけばよい．

23. 中野・藤木理論によって小平の消滅定理を開多様体へと拡張する大義名分ができた．まず弱 1 完備多様体上で，中野，風間，鈴木理，Abdelkader, 竹腰らによって一連の消滅定理および Runge 型近似定理が得られ，その間に筆者も修士論文をこのテーマで書かせて頂いた (有限性定理と同型定理). それに加えて何か新しい応用がほしいと思っていたところへ，Hörmander の本を読んで卒業レポートをまとめた泊昌孝氏が数理研に来られた．泊レポートに大きな刺激を受けて次の結果が得られた (Publ. RIMS, 1980).

定理 7. C^1 級の実超曲面を境界にもつ $\mathbb{C}^n$ 内の領域が完備な Kähler 計量をもつことと擬凸であることは同値である．

この証明は，弱 1 完備多様体上の消滅定理を，完備な Kähler 計量をもつ多様体に対して，L^2 条件つきで拡張することによって可能になった．結果自体は境界の滑らかさが C^ω 級の場合に Grauert が学位論文で示していたことであったが，方法論的にはまったく異なっている．簡単のため筆者の方法だけ説明する．$\mathbb{C}^n$ 内の領域 Ω については，その擬凸性は複素超平面 H による切り口 $\Omega \cap H$ で定義された正則関数が Ω 上に正則な拡張をもつかどうかでわかるのだが，Ω 上で L^2 条件つきの消滅定理があれば一定の増大度の条件をみたす関数が拡張可能であるといえる．そして Ω が完備な Kähler 計量をもてばこの形で使える消滅定理が存在する．その消滅定理の一般型は 1979 年 3 月ごろまでにはわかっていたのだが，別の応用を捜すなどしているうちに発表するのが遅くなってしまい，1984 年に出版された時には J. P. Demailly の論文が先に出てしまっていた [Estimations L^2 pour l'opérateur $\bar\partial$

d'un fibré vectoriel holomorphe semi-positif du dessus d'une variété kählerienne compléte, Ann. Sci. Ec.Norm. Sup. 15 (1982), 457–511]. 定理 7 については 1979 年秋の学会で報告し, 1980 年夏には Oberwolfach で Diederich と Fornaess の前で話したりした. 1979 年夏の阿蘇でも話をさせて頂いた (多変数関数論サマーセミナー). あの頃が花だったのだろうか. 閑話休題. Diederich と P. Pflug による次の結果をあげなければいけない.

定理 8. [Math. Ann. 257 (1981), 191–198] 自身の内核に一致する $\mathbb{C}^n$ の領域について, 完備な Kähler 計量の存在と擬凸性は同値である.

この証明には Skoda の L^2 理論が用いられる. Skoda 理論は Levi 問題への定量的アプローチとしても有力である [Pflug, P., Holomorphiegebiete, pseudokonvexe Gebiete und das Levi-Problem, LNM 432, 1975]. ただし定理 7 の証明法がこの場合にそのまま通用することが Y. T. Siu 氏や E. Bedford 氏により指摘された.

24. Hartogs による特異点集合の特徴づけ (cf. 5 の (H)) に対応する結果も同様の方法で証明できる.

定理 9. [Proc. Japan Acad. 56 (1980), 484–487] M を複素多様体, $A \subset M$ を C^1 級の実部分多様体で実余次元がいたる所 2 であるものとする. このとき $M \backslash A$ が完備な Kähler 計量をもてば A は複素部分多様体である.

A が (実超曲面でなく) 実余次元 2 であるという仮定は除けない. 除けそうな気もするからいろいろ工夫してみたのだができなかった所へ, 1981 年 9 月, Wuppertal で Diederich に Fornaess と反例を作ったと告げられ驚いた [Math. Ann. 259 (1982), 331–341, Manuscripta math. 37 (1982), 121–125]. Diederich は Fornaess との共同研究をさらに進め, 補集合が完備な Kähler 計量をもつ部分多様体 A に対しては, 各点 $p \in A$ における接空間 T_pA が $T_pA + JT_pA \neq T_pM$ (J は M の複素構造) をみたすことを示した [Math. Ann. 268 (1984), 475–495]. これは定理 9 の一般化になっているが, 定理 9 の証明自体は今でも L^2 評価式を使う方法が唯一のものである.

25. 少し整理すると, 超平面の片側でのみ正則な関数を作る仕方ということでは, 岡のはり合わせ定理の他に Grauert の方法 ['58 Ann. Math.] や, 小平・中野式のコホモロジー消滅定理またはその変形により部分多様体上の関数を拡張する方法, さらに定理 8 の証明に用いられた Skoda 理論におけるように, Ω の外点 p に対する関数方程式

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(z)(z_i - p_i) = 1$$

の解 $f_1, \ldots, f_n$ を用いる方法などがある. それぞれに長所があるが, とくに L^2 評価式の方法は, 領域の幾何学的条件と関数空間の性質とをもっとも直接的に結び付けるものである.

また, その他にも J. J. Kohn による $\bar{\partial}$-Neumann 問題の解を用いるものや, G. M. Henkin と J. Leiterer の本, [Theory of functions on complex manifolds, 1984] にあるように, 積分核を用いる方法もある.

26. ICM '62 以後に出された Levi 問題の総合報告としては [Onishchik, A. L., Pseudoconvexity in the theory of complex spaces, Itogi Nauki Tekh (1977), Sov. Math. 14 (1980)], [Siu, Y. T., Pseudoconvexity and the problem of Levi, Bull. AMS, 84 (1978) 481–511] および [Diederich, K., Some aspects of the Levi Problem : recent developments, Geometric Complex Analysis, 1996 World Sci, 163–181] がある.

27. Siu の総合報告であるが, 一見網羅的なこの論説で, 実は重点的に扱われているのは正則凸性と等質空間, 曲率, ファイバー束などの幾何学的構造との関連である. これによって複素幾何の根本的な部分にまだ重要な課題が残されていることを察知できたのは筆者だけではあるまい.

28. すでに小平の仕事にもあるように, 代数幾何において Levi 問題は少し形を変えて現れる. Siu が論説の末尾で言及している Grauert-Riemenschneider 予想もその一種である.

> Grauert-Riemenschneider 予想 [Invent. Math. 11 (1970), 263–292] : M を n 次元コンパクト複素多様体とする. M 上の Hermite 直線束 L で, その曲率形式がいたるところ非負かつ少なくとも 1 点で正になるものが存在すれば, M 上の有理型関数体の超越次数は n である.

実際, このような直線束 L に対して双対束 L^* の零断面 M_0 は N 条件をみたす擬凸近傍系をもつ. M_0 上の $\mathcal{O}_{L^*}$ の断面を M_0 に沿って Taylor 展開すると, その μ 次の係数は $L^{\otimes\mu}$ の断面と自然に同一視される. 従って G-R 予想は Narasimhan 予想の修正版 (17. 参照) の特殊な場合と解釈される.

29. この特殊な場合でさえ長い間未解決だったのだが, 1985 年, Siu がとうとうこれを解決した [LNM. 1111, 169–192]. 解のポイントは Riemann-Roch の定理である. つまり Riemann-Roch の定理によれば, $L^{\otimes\mu}$ のオイラー数

$$\chi(L^{\otimes\mu}) := \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \dim H^k(M, L^{\otimes\mu})$$

は μ について n 次の多項式であり, その最高次の係数は L の曲率形式 Θ を用いて

$$(\text{定数}) \times \int_M \Theta^n$$

と書けるから, G-R 予想の仮定より 0 でない. 従って $k \geq 1$ に対して $\mu \to \infty$ のとき $\dim H^k(M, L^{\otimes\mu}) = o(\mu^n)$ であることがいえれば

$$\varliminf_{\mu\to\infty} \frac{\dim H^0(M, L^{\otimes\mu})}{\mu^n} > 0$$

が言え, G-R 予想が従う. $\dim H^k(M, L^{\otimes\mu})$ に対する上の評価は, Schwarz の補題から容易に導くことができる.

30. Witten 流の Morse 理論のアイディアを用いて Siu の証明を解釈することにより, 曲率の条件をもっと弱めることができる [Demailly, J. P., Champs magnétiques et inegalités de Morse pour la d''-cohomologie, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 35 (1985), 189–229].

31. 等質空間上の Levi 問題については, $\mathbb{P}^n$ に対する藤田・武内の定理以後, Hirschowitz による interior integral curve をふくまぬ擬凸領域の正則凸性, Michel による Narasimhan 予想の解, 上田による Grassman 多様体上の Levi 問題の解決などがある.

32. ファイバー束であるが, J. P. Serre により Stein 空間を底とし, Stein 空間をファイバーとする解析的ファイバー束は Stein 空間かという問題が提出されていた [Quelques problémes globaux relatifs aux variétés de Stein, Coll. Plus. Var. Bruxelles (1953), 57–68]. ファイバーが有界な強多重劣調和皆位関数をもつとき (このような複素多様体は hyperconvex であるという), これは正しい [Stehlé, J. L., Fonctions plurisousharmoniques et convexité holomorphe de certaines fibrés analytiques, C. R. Acad. Sci. 279 (1964), 235–238]. 因に hyperconvexity は平面領域の場合, 境界点がすべて Dirichlet 問題の正則点であることと同値である (Bouligand). Serre の予想には H. Skoda により反例があげられた. これは基本的には $\mathbb{C}^2$ の正則自己同型群が巨大であることによる [Invent. Math. 43 (1977), 97–107]. しかし, Serre の問題を Stein 多様体の幾何的構成法の問題ととらえるとき, どのような $\mathbb{C}^n$ 束が Stein 多様体になるかは依然興味のある問題であろう. なお, ファイバーの次元が 1 の場合に Serre 予想が正しいことは, N. Mok [Math. Ann. 258 (1981), 145–168] によって, 中井三留氏による Evans-Selberg のポテンシャル関数の構成法を用いるなどして示されている (1996 年, 筆者はこれを少し発展させることができたが, その詳細をまとめる暇がないまま今日に到っている). Skoda の反例はあるが, Stein 束の複素多様体としての特徴を問題にすることはできる. B. Jennane [Invent. Math. 54 (1979), 75–79, Math. Ann. 256 (1981), 37–42] は次の結果を得た.

定理 10. E, X を複素多様体, $p: E \to X$ を正則写像とする. X が Stein 多様体であり, p が Stein 射, すなわち X の任意の点の, 適当な近傍 U に対して $p^{-1}(U)$ が Stein 多様体であれば, E 上の任意の解析的連接層 $\mathcal{F}$ に対して $H^r(E, \mathcal{F}) = 0$ $(r \geq 2)$ が成り立つ.

さらにこのとき $H^1(E,\mathcal{F})$ は 0 または非 Hausdorff (よって特に無限次元の) ベクトル空間であり, E が Stein 多様体になるための必要十分条件は $H^1(E,\mathcal{O}_E)=0$ である.

これにより Stein 多様体上の Stein 束は, Andreotti-Grauert の意味で 2 完備 [cf. Bull. Soc. math. France, 90 (1962), 193–259] ではなかろうかと予想されている.

33. さて曲率であるが, 武内の定理 (cf. 定理 1) の証明からわかるように, $\mathbb{P}^n$ 上で Levi 問題が解けるのは Fubini-Study 計量の正則双断面曲率が正だからである [鈴木理, Publ. RIMS,(1976) および G. Elencwajg, Ann. Inst. Fourier, (1975) 参照]. ところが T.Frankel [Pacific J. 1968] が予想し, Andreotti-Frankel, 落合, 飯高, 満渕らの部分的解決をへて森重文 [Ann. of Math. 110 (1979), 593–606] によって示されたように, 正則双断面曲率が正であるようなコンパクト複素多様体は, 実は $\mathbb{P}^n$ に限る (Siu と Yau の別証明が Invent. math. 59 (1980) にある). よって武内の定理は非常に強い条件を用いて Levi 問題を解いたものと言える. これに対して, $\mathbb{C}^n$ 上で Levi 問題が解ける理由は計量的なものではなく, 単なる $\mathbb{C}^n$ の Stein 性, 或は 1 完備性である [cf. Docquier, F. and Grauert, H., Math. Ann. 146 (1960), 94–123]. 翻って $\mathbb{C}^n$ を特徴づける曲率の条件は, 単なる符号だけでなく無限遠点での挙動をも含めたものでなければならない ($n=1$ の場合は特別であり, A. Huber [Comm. Math. Helv. 32 (1957)] により正曲率の完備な開リーマン面は $\mathbb{C}$ に同値であることが示されていた). 1975 年, R. E. Greene と H. Wu によって次の予想がなされた.

Greene-Wu 予想 I : (M,g) を単連結で完備な Kähler 多様体とする. M の点 p における断面曲率 $\kappa(p)$ が, ある $p_0\in M$, $A>0$, $\varepsilon>0$ に対して

$$\frac{-A}{\mathrm{dist}(p_0,p)^{2+\varepsilon}}<\kappa(p)\le 0$$

をみたせば, M は $\mathbb{C}^n$ に双正則同値であろう.

この予想は, Siu-Yau の仕事をへて, Greene-Wu [Duke Math. J. 49 (1982), 731–756] により, $\mathbb{R}^m$ の平坦計量の特徴づけにまで一般化されて証明された.

34. Greene-Wu 予想 I における曲率の条件をゆるめて, $\mathbb{C}^n$ の代わりに Stein 多様体を特徴づけることは可能だろうか. できればその方向で有界正則関数の集合に関して正則凸な複素多様体を特徴づけたい. そう考えるのは自然であろう.

35. 自然な予想がいくつも出された. それらの多くは未解決であるが, 次は広く関心を持たれているものの一つである.

Grenne-Wu 予想 II : 完備な非コンパクト Kähler 多様体がいたるところ正の正則双断面曲率をもてば Stein 多様体であろう.

36. これが注意を引くのは次の命題の証明が簡単であることによるものだろう.

命題 11. M は完備な非コンパクト Kähler 多様体で, その断面曲率はいたるところ正とする. このとき M は Stein 多様体である.

証明のスケッチ. $p \in M$ を固定し, p から出る ray すべてにわたって Busemann 関数を考え, その関数族の最小優関数を η とおく. η は明らかに連続であり, 曲率の条件から狭義凸関数である. η の皆位性は定義と凸性より明白. 従って η を C^2 級の関数で近似することにより, M 上の強多重劣調和皆位関数が得られる.

37. 上と同じ理由により, M を完備な非コンパクト Kähler 多様体で, その断面曲率はいたるところ非負であるものとすれば, M 上に連続な多重劣調和皆位関数が存在する. 従ってこのような多様体の正則凸性が問題になる.

Greene-Wu 予想 III : 非負断面曲率をもち, かつその Ricci 曲率が正である完備 Kähler 多様体は正則凸であろう.

38. G-W 予想 III は, 昨年高山茂晴氏によって解決された [The Levi problem and the structure theorem for non-negatively curved complete Kähler manifolds, preprint (1997)]. その大要は, [非負曲率をもつ完備ケーラー多様体の構造定理と Levi 問題, 解析幾何セミナリーノート, 創刊号, 1998, 28–33] にまとめられている. それによると, ポイントは次の定理にある.

定理 12. (高山) 負の標準束をもつ擬凸多様体は正則凸である.

ただし, 擬凸多様体とは<u>連続な</u>多重劣調和皆位関数をもつ複素多様体をいう.

39. 高山氏がこの結果に到達するためには, 技法的には Nadel, Demailly, 辻, Angehrn-Siu らの仕事によってようやく一般的になってきた特異ファイバー計量の構成法が必要であった. 筆者は 1979 年に, 負の標準束をもつ 2 次元の弱 1 完備多様体が正則凸であることを示し得たのに過ぎないので, 学問の進歩の力強さには感心するばかりである.

40. さて複素解析の最近の動向の一つには, M. Christ らの仕事により $\bar{\partial}$ 方程式の解の評価を統制する領域の幾何学的条件が一層明確になってきたこともあげられよう. $\mathbb{P}^n$ の擬凸領域に対する $\bar{\partial}$-Neumann 問題も, 現実的な成果を伴うようになってきた. 以下述べるのはこの方向で筆者が最近試み続けたことの一端である. 完成されたものではない.

41. $\Omega \subsetneq \mathbb{P}^n$ を擬凸領域とする. 特にことわらない限り $n \geq 2$ であるとする.

42. 1995 年 5 月, フランス滞在中に筆者が Grenoble で J. P. Demailly, G. Tomassimi に出された問題がある. それは $\mathbb{P}^n$ を実超曲面によって二つの擬凸開集合に分けることが可能かというものだった.

43. 局所的に両側が擬凸であるような実超曲面は Levi 平坦であるという. $\mathbb{P}^n$ は単連結だから, 問題は $\mathbb{P}^n$ 内にコンパクトな Levi 平坦超曲面が存在するかということである.

44. これは手懸りがあまりにも乏しいように思われたので, 久しく関心の外にあった問だった. 実際, 二次元の弱 1 完備多様体の分類は Levi 平坦超曲面がわからないので進まない.

45. Demailly 氏に示唆されたことであるが, とりあえず Ω 上の有界な多重劣調和皆位関数を構成することから始めた. 定理 1 に基いた直接的な計算で, $\partial\Omega \in C^3$ の場合にはこのことをすぐ確かめることができる. これを N. Sibony が改良して, 結局次が得られた.

定理 13 [T. Ohsawa and N. Sibony, Bounded P.S.H. functions and pseudoconvexity in Kähler manifold, NMJ. 149 (1998), 1–8] $\mathbb{P}^n$ 内の擬凸領域 Ω の領域が C^2 級の実超曲面であるとする. このとき (Ω に依存する) ある正数 ε に対して $-\delta^\varepsilon$ は Ω 上で (連続な) 強多重劣調和関数である. ただし δ は定理 1 の通りとする.

46. 定理 13 だけでは $\mathbb{P}^n$ 内の Levi 平坦超曲面の非存在を結論づけることはできない. そこでいろいろ別の工夫をしてみた. 以下に報告する内容は,

I. Levi 平坦多様体上のある $\bar{\partial}_b$ 方程式の C^∞ 可解性が正しければ上の予想は正しい.

II. しかし, 一般には $\bar{\partial}_b$ 方程式は L^2 可解でも C^∞ 可解とは限らない.

の二点である.

§1. Levi 平坦な CR 多様体上の L^2 評価式

複素多様体 X 内に実超曲面 S があるとき, S の複素接ベクトル束 $T_S \otimes \mathbb{C}$ の部分束

$$T_S^{1,0} := (T_S \otimes \mathbb{C}) \cap T_M^{1,0}|S$$

は Lie 括弧積に関して閉じている. 局所的に S の両側が擬凸ならば, $T_S^{1,0} + \overline{T_S^{1,0}}$ も Lie 括弧積について閉じている. これらの性質だけを使って出ることがらについてまとめておこう.

定義 (Cauchy-Riemann 多様体) $(2n-1)$ 次元の C^∞ 級多様体 M は, 次の 1), 2), 3) をみたす $\mathbb{C}$ ベクトル束 $T^{1,0} \subset T_M \otimes \mathbb{C}$ をもつとき CR 多様体という.

1) $\mathrm{rank}_{\mathbb{C}} T^{1,0} = n-1$.
2) 各点 $p \in M$ において $T_p^{1,0} \cap \overline{T_p^{1,0}} = \{0\}$.
3) $T^{1,0}$ は Lie 括弧積について閉じている.

定義(Levi 平坦多様体) CR 多様体 $(M, T^{1,0})$ において, $T^{1,0}+\overline{T^{1,0}}$ が Lie 括弧積について閉じているとき, M は Levi 平坦多様体であるという.

Frobenius の定理と助変数つきの Newlander-Nirenberg の定理によって, Levi 平坦多様体 M の各点のまわりには次の $i)$, $ii)$ を満たす局所座標

$$(z,t): U \longrightarrow \mathbb{C}^{n-1}\times\mathbb{R}$$

が存在する.

$i)$ $T_{t^{-1}(x)} \subset T^{1,0}+\overline{T^{1,0}} \qquad (\forall x\in\mathbb{R})$
$ii)$ 射影

$$\pi_{p,q}: \bigwedge(T_M\otimes\mathbb{C})^* \longrightarrow \bigwedge^p(T^{1,0})^*\otimes\bigwedge^q(\overline{T^{1,0}})^*$$

に関し,

$$\pi_{0,1}(dz)=0.$$

以後 M は向きづけられた Levi 平坦多様体とし, M の局所座標 $(z_1,\dots,z_{n-1},t)$ としては $(\sqrt{-1})^{n-1}dz_1\wedge d\bar z_1\wedge\cdots\wedge dz_{n-1}\wedge d\bar z_{n-1}\wedge dt$ が正であるもののみを考える. $\{U_i\}_{i\in I}$ を局所座標近傍系による M の開被覆, (z^i,t^i) を U_i 上の局所座標で上の条件をみたすものとする.

M 上の重み α つきの (p,q) 形式の空間を

$$C^{p,q,\alpha}(M)=\left\{(u_i)_{i\in I}\;\middle|\; u_i\in C^\infty(U_i, \wedge^p(T^{1,0})^*\otimes\wedge^q(\overline{T^{1,0}})^*, \right.$$
$$\left. u_i=\left(\frac{dt^j}{dt^i}\right)^\alpha u_j \quad (U_i\cap U_j\text{上で})\right\}$$

によって定める. $C^{p,q,\alpha}(M)$ の元を便宜上

$$u=\sum_{A,B}{}' u_{A\bar B}\,dz_A\wedge d\bar z_B\wedge(dt)^\alpha$$

と局所表示する. $\sum'$ は走らせる添字を増加列に限った総和記号である.

微分作用素 $\bar\partial_b: C^{p,q,\alpha}(M)\to C^{p,q+1,\alpha}(M)$, $\partial_b: C^{p,q,\alpha}(M)\to C^{p+1,q,\alpha}(M)$ をそれぞれ

$$\bar\partial_b u=\pi_{p,q+1}\circ d\left(\sum_{A,B}{}' u_{A\bar B}\,dz_A\wedge d\bar z_B\right)\wedge(dt)^\alpha$$

および

$$\partial_b u=\pi_{p+1,q}\circ d\left(\sum_{A,B}{}' u_{A\bar B}\,dz_A\wedge d\bar z_B\right)\wedge(dt)^\alpha$$

により定義する(局所座標を用いているので, well-definedness が問題だが, それは $U_i\cap U_j$ 上で t^j が t^i のみの関数だからよい).

M の開集合上で定義された C^1 級関数 f が方程式 $\bar{\partial}_b f = 0$ をみたすとき, f は CR 関数であるという.

M 上の複素直線束で遷移関数系が CR 関数であるものを, CR 直線束という. CR 直線束 $L \to M$ に対し,

$$C^{p,q,\alpha}(M, L) := \left\{(u_i)_{i\in I} \,|\, u_i \in C^{p,q,\alpha}(U_i), u_i = e_{ij} u_j \text{ on } U_i \cap U_j\right\}$$

とおく. $\bar{\partial}_b u_i = e_{ij} \bar{\partial}_b u_j$ だから, $\bar{\partial}_b$ は自然に $C^{p,q,\alpha}(M, L)$ から $C^{p,q+1,\alpha}(M, L)$ への作用素とみなせる. L の双対 L^* の共役 $\overline{L^*}$ に対して

$$C^{p,q,\alpha}(M, \overline{L^*}) := \left\{(v_i)_{i\in I} \,|\, v_i \in C^{p,q,\alpha}(U_i), v_i = \overline{e_{ji}} v_j \text{ on } U_i \cap U_j\right\}$$

とおく. 一般に $\bar{\partial}_b$ は $C^{p,q,\alpha}(M, \overline{L^*})$ には作用しないが, L のファイバー計量 h が与えられれば, h を $C^\infty(M, \mathrm{Hom}(L, \overline{L^*}))$ の元と同一視することにより作用素 $h^{-1} \circ \partial_b \circ h : C^{p,q,\alpha}(M, L) \to C^{p+1,q,\alpha}(M, L)$ を定義することができる. $h^{-1} \circ \partial_b \circ h$ を単に $\partial_{b,h}$ で表す.

作用素 $\kappa_h := \bar{\partial}_b \, \partial_{b,h} + \partial_{b,h} \, \bar{\partial}_b$ は複素多様体の場合と同様, 微分を含まない.

M 上の C^∞ 級 Riemann 計量 g について, g が Kähler 計量であるとは, 各局所座標 (z^i, t^i) に対し, g の $(t^i)^{-1}(x)\,(x \in \mathbb{R})$ への制限が Kähler であることをいう. Kähler 計量をもつ Levi 平坦多様体を Levi-Kähler 多様体という.

以後 (M, g) は Levi-Kähler 多様体, (L, h) は M 上の計量つき CR 直線束を表すものとする. また簡単のため M はコンパクトであると仮定する.

$g|(T^{1,0} + \overline{T^{1,0}})$ の基本形式を ω_g とする. $\omega_g \in C^{1,1,0}(M)$ である. $C^{p,q,\alpha}(M, L)$ には (g, h) から誘導される内積が入る. $u, v \in C^{p,q,\alpha}(M, L)$ の内積を単に (u, v) で表す. 作用素 $f \mapsto \omega_g \wedge f$ の, この内積に関する共役を Λ で表す (Λ は α によらない係数をもつ).

以後 $\alpha = \frac{1}{2}$ とする. 内積 (u, v) に関する $\bar{\partial}_b$ の共役を $\bar{\partial}^*_{b,h}$, $\partial_{b,h}$ の共役を ∂^*_b で表す. 次の等式は Kähler 多様体の場合と同様である.

中野の等式 : 任意の $u \in C^{p,q,\frac{1}{2}}(M, L)$ に対し

$$\|\bar{\partial}^*_{b,h} u\|^2 + \|\bar{\partial}_b u\|^2 = \|\partial^*_b u\|^2 + \|\partial_{b,h} u\|^2 + (\sqrt{-1}\,[\kappa_h, \Lambda] u, u).$$

ただし $\|u\|^2 := (u, u)$.

ノルム $\|\ \ \|$ に関する $C^{p,q,\frac{1}{2}}(M, L)$ の完備化を $\mathcal{L}^{p,q,\frac{1}{2}}(M, L)$ で表す.

$\kappa_h(1)$ を, 局所座標を用いて

$$\kappa_h(1) = \sum_{\alpha,\beta} \Theta_{\alpha\bar{\beta}} \, dz_\alpha \wedge d\bar{z}_\beta$$

と表す. $g = \sum_{\alpha,\beta} g_{\alpha\bar{\beta}} \, dz_\alpha \otimes d\bar{z}_\beta$ とおき, $(g_{\alpha\bar{\beta}})$ に対する $(2\Theta_{\alpha\bar{\beta}})$ の最小固有値の下限を $A (= A_h)$ で表す. $A > 0$ のとき (L, h) は正 (直線束) であるという.

命題 1 (中野の等式の系) $u \in C^{n-1,q,\frac{1}{2}}(M, L)$, $q > 0$ ならば

$$\|\bar{\partial}^*_{b,h} u\|^2 + \|\bar{\partial}_b u\|^2 \geq A \, \|u\|^2.$$

とくに (L,h) が正ならば, 任意の $v \in \mathcal{L}^{n-1,q,\frac{1}{2}}(M,L) \cap \operatorname{Ker} \bar{\partial}_b$ (ただし $q>0$) に対し

$$\begin{cases} \bar{\partial}_b u = v, \quad u \perp \operatorname{Ker} \bar{\partial}_b \\ A\|u\|^2 \leq \|v\|^2 \end{cases}$$

をみたす $u \in \mathcal{L}^{n-1,q-1,\frac{1}{2}}(M,L)$ がただ一つ存在する.

複素多様体上の $\bar{\partial}$ 作用素の楕円性により, 命題 1 において $v \in C^{n-1,q,\frac{1}{2}}(M,L) \cap \operatorname{Ker} \bar{\partial}_b$ ならば u の各部分多様体 $(t^i)^{-1}(x)$ への制限は C^∞ 級である. ただし u の t^i 方向の滑らかさについては何もいえない. ただし標準的方法により, 次のように弱い形の滑らかさを導くことができる [J. J. Kohn, Trans. AMS. 181 (1973), 273–292].

命題 2. (L,h) が正ならば, 任意の $m \in \mathbb{N}$ に対しある $\mu_0 \in \mathbb{N}$ が存在して

$$\forall v \in C^{n-1,q,\frac{1}{2}}(M,L^{\otimes\mu}) \cap \operatorname{Ker} \bar{\partial}_b \quad (q>0,\ \mu \geq \mu_0)$$

に対し, C^m 級の $u \in \mathcal{L}^{n-1,q-1,\frac{1}{2}}(M,L^{\otimes\mu})$ で $\bar{\partial}_b u = v$ をみたすものが存在する.

上の命題においては, μ を十分大きくとれば, ということだから, $(dt)^{\frac{1}{2}}$ は省いて述べても構わない.

§2. $\bar{\partial}_b$ 方程式の滑らかな解の存在について

(M,g), $(U_i,(z^i,t^i))$ は上の通りとし, (L,h) を M 上の正直線束とする. あらかじめ

$$(z^i,t^i) : U_i \xrightarrow{\sim} \Delta^{n-1} \times (0,1)$$
$$(\Delta = \{\zeta \in \mathbb{C} \mid |\zeta| < 1\})$$

かつ L は $\overline{U_i}$ 上で自明であるとして構わない. また $(t^i)^{-1}(x)$ を $\Delta_{i,x}$ で表すことにする.

$$v \in C^{n-1,q,\frac{1}{2}}(M,L) \cap \operatorname{Ker} \bar{\partial}_b, \quad q>0$$

とすると, Hörmander の定理より (i,x) を止めるごとに

$$\begin{cases} \bar{\partial} u_{i,x} = v|\Delta_{i,x} \\ u_{i,x} \perp \operatorname{Ker} \bar{\partial} \\ A\|u_{i,x}\|^2 \leq \|v|\Delta_{i,x}\|^2 \end{cases}$$

をみたす $u_{i,x} \in C^{n-1,q-1,\frac{1}{2}}(\Delta_{i,x},L)$ がただ一つ存在する. U_i は Δ^{n-1} と $(0,1)$ の直積だから, $u_{i,x}$ は x についても C^∞ 級である. すなわち $u_i(x) := u_{i,x}$ とおくと $u_i \in C^{n-1,q-1,\frac{1}{2}}(U_i,L)$. u_i を方程式 $\bar{\partial}_b u = v$ の (局所) 標準解という. L が '十分に正' ならば, M に関する一定の幾何学的条件の下にこれらの u_i を 'building block' として方程式 $\bar{\partial}_b u = v$ の滑らかな解を作ることができるというのが基本的なアイディアである. CR 直線束 $T_M \otimes \mathbb{C}/(T^{1,0}+\overline{T^{1,0}})$ を M の Levi 法線束とよぼう.

予想. $(M,g),(L,h)$ を上の通りとする. M の Levi 法線束が正ならば, 任意の CR 直線束 $L_0 \to M$ に対しある $\mu_0 \in \mathbb{N}$ が存在して, 任意の $v \in C^{n-1,q,\frac{1}{2}}(M, L_0 \otimes L^{\otimes\mu}) \cap \operatorname{Ker} \bar\partial_b$ $(\mu \geq \mu_0)$ に対して $C^{n-1,q-1,\frac{1}{2}}(M, L_0 \otimes L^{\otimes\mu})$ の元 u で $\bar\partial_b u = v$ をみたすものが存在する.

命題 2 のように, μ を大きくとることによって $\bar\partial_b$ 方程式の解の可微分性を高めることができる. その証明だけ記しておく. $\{U_i\}_{i\in I}$ は必要なら細分をとって, $\max_j \#\{i \mid U_i \cap U_j \neq \emptyset\} \leq 2^{2n-1}$ かつ $L_0|\overline{U_i}$ も自明であるようにとっておく. L_0 のファイバー計量 h_0 を一つ決め, $A_0 := A_{h_0}$ とおくと, $\mu A + A_0 > 0$ なる自然数 μ に対しては, 上記のように任意の $v \in C^{n-1,q,\frac{1}{2}}(M, L_0 \otimes L^{\otimes\mu})$ $(q > 0)$ に対し,

$$\begin{cases} \bar\partial_b u_i = v|U_i \\ u_i|\Delta_{i,x} \perp \operatorname{Ker} \bar\partial \\ (\mu A + A_0)\|u_i\|^2 \leq \|v|U_i\|^2 \end{cases}$$

をみたす $u_i \in C^{n-1,q-1,\frac{1}{2}}(M, L_0 \otimes L^{\otimes\mu})$ が存在する. $\{\rho_i\}$ を $\{U_i\}$ に付随する 1 の分割とする $(0 \leq \rho_i \leq 1, \operatorname{supp} \rho_i \Subset U_i, \sum \rho_i = 1)$.

$$u^1 = \sum \rho_i u_i$$

とおくと, $u^1 \in C^{n-1,q-1,\frac{1}{2}}(M, L_0 \otimes L^{\otimes\mu})$ であり,

$$\bar\partial_b u^1 - u = \sum \bar\partial \rho_i \wedge u_i$$

である.

そこで u^1 および誤差項 $\sum \bar\partial\rho_i \wedge u_i$ の評価であるが, L^2 ノルムに関しては明らかに

$$\sqrt{\mu A + A_0}\,\|u^1\| \leq \|u\|$$

かつ

$$C_0^{-1}\sqrt{\mu A + A_0}\,\left\|\sum \bar\partial\rho_i \wedge u_i\right\| \leq \|u\|,$$

ただし $C_0 := 2^{2n-1} \times \left(\max_i \sup|\bar\partial\rho_i| + 1\right)$, となる.

従って $\mu A + A_0 > 9(C_0^2 + 1)$ であれば

$$\begin{cases} \|u^1\| \leq \dfrac{1}{3}\|u\| \\ \left\|\sum \bar\partial\rho_i \wedge u_i\right\| \leq \dfrac{1}{3}\|u\| \end{cases}$$

であるから逐次近似により L^2 空間内で解の存在がいえる. すなわち帰納的に u_i^k を, $u_i^0 = u_i$,

$$\begin{cases} \bar\partial_b u_i^k = \sum \bar\partial\rho_i \wedge u_i^{k-1}|U_i \\ u_i^k|\Delta_{i,x} \perp \operatorname{Ker}\bar\partial \end{cases}$$

で決め, $u^k = \sum \rho_i u_i^{k-1}$ とおくと, $\sum\|u^k\| \leq \|u\|$ だから $v := \sum u^k \in \mathcal{L}^{n-1,q-1,\frac{1}{2}}(M, L_0 \otimes L^{\otimes\mu})$ が定まり, $\bar\partial_b v = u$ である.

v の可微分性を得るには, あらかじめ L^2 ノルムの計り方を少し変えておく必要がある. すなわち, U_i を t^i 方向に細かくとることによって, 計量 g, h_0, h は U_i 上で z^i 方向には C^2 ノルムで, t^i 方向には C^0 ノルムで, t^i に依存しないものでいくらでも近似できる. この近似においては U_i を z^i 方向に細分する必要はないから, これらに関する U_i 上の L^2 ノルムを $\| \ \|_{U_i}$ とし, それらの総和で元のノルム $\| \ \|$ をおきかえても上と同様の逐次近似が成り立つ (*i.e.* 逐次近似が成り立つような μ がとれる).

∂ 作用素の楕円性から $v|\Delta_{i,x}$ の滑らかさをコントロールすることは容易であるので t^i 方向の可微分性だけが問題である.

$D_i = \frac{\partial}{\partial t^i}$ (U_i 上の局所自明化に関する係数ごとの偏導関数) とおく. t^i 方向の 1 階の Sobolev ノルムに関する評価を見よう.

$$\|w\|_{(1)} = \max_i \|D_i w\|$$

とおく. まず $\|u^1\|_{(1)}$ についてだが,

$$\begin{aligned}
\|D_i u^1\| &= \left\| D_i \left(\sum_j \rho_j u_j \right) \right\| \\
&\leq \left\| \sum_j (D_i \rho_j) u_j \right\| + \left\| \sum_j \rho_j D_i u_j \right\| \\
&\leq C' \|u\| + 2^{2n-1} \times \max_j \|\rho_j D_i u_j\|.
\end{aligned}$$

ただし $C' := \sum_j \sup_{U_i} |D_i \rho_j|$.

$D_i u_i$ は方程式 $\bar\partial_b w = D_i u$ の標準解だから

$$(\mu A + A_0) \|D_i u_i\|^2 \leq \|D_i u\|^2$$

である. $D_i u_j$ のノルム評価のためには $D_i u_j$ と $D_j u_j$ の隣接関係が問題だが, それを見る前に, u_i が $\bar\partial_b$ 方程式の局所標準解であることから

$$(*) \qquad D = \left(\frac{\partial}{\partial z_1^i}\right)^{\nu_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial z_{n-1}^i}\right)^{\nu_{n-1}} \left(\frac{\partial}{\partial \bar z_1^i}\right)^{\mu_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial \bar z_{n-1}^i}\right)^{\mu_{n-1}} \left(\frac{\partial}{\partial t^i}\right)^{\kappa}$$

に対して, $\nu_1 + \cdots + \nu_{n-1} + \mu_1 + \cdots + \mu_{n-1} + \kappa = k$, $\kappa < k$ のとき

$$(\star) \qquad \sum_{\alpha=1}^{n-1} \left(\left\| \rho_i \frac{\partial}{\partial \bar z_\alpha^i} D u_i \right\| + \left\| \rho_i \frac{\partial}{\partial \bar z_\alpha^i} D u_i \right\| \right) \leq \tilde C_k \|u\|_k$$

であることに注意しよう. ただし $\tilde C_k$ は u によらない定数である (A_0, A, μ には依存する).

$D_i u_j$ と $D_j u_j$ の隣接関係は,

$$\begin{aligned}
D_i u_j &= a_{ij}(t^j) D_j u_j + Z_{ij} u_j \\
Z_{ij} u_j &= \sum_{\alpha=1}^{n-1} a_\alpha^j \frac{\partial u_j}{\partial z_{\alpha^j}} + \sum_{\alpha=1}^{n-1} \bar a_\alpha^j \frac{\partial u_j}{\partial \bar z_\alpha^j}
\end{aligned}$$

と表せるから, $\mu A + A_0 > 9(C_0^2+1)\,(\max_{i,j}\sup|\rho_j a_{ij}|^2+1)$ かつ $C_1 \gg 1$ (A_0, A, μ に依存する) のとき

$$\|u^1\| + \frac{1}{C_1}\left(\|u^1\|_{(1)} + \|u^1\|_1'\right) \le \frac{4}{9}\|u\| + \frac{1}{3C_1}\left(\|u\|_{(1)} + \|u\|_1'\right).$$

ただし $\|w\|_1' := \max_{i,\alpha}\left\{\left\|\rho_i\frac{\partial}{\partial z_i^\alpha}w\right\| + \left\|\rho_i\frac{\partial}{\partial \bar{z}_i^\alpha}w\right\|\right\}$.

同様に,

$$\|w\|_{(k)} = \max_i \|D_i^k w\|_{U_i}$$
$$\|w\|_{(k)}' = \max_{i,D}\|\rho_i D_i^k w\|_{U_i}$$
$$(D \text{ は } (*) \text{ の形の } k \text{ 階の微分作用素を動く.})$$

とおくと, $(\star)$ および上と同様の $D_i^l u_j$ と $D_j^l u_j$ の隣接関係より, $\mu A + A_0 > 9(C_0^2 + 1)\,(\max_{i,j}\sup|\rho_j a_{ij}|^2+1)^k$ かつ $C_1 \ll C_2 \ll \cdots \ll C_k$ のとき

$$\begin{aligned}
&\|u^1\| + \frac{1}{C_1}\left(\|u^1\|_{(1)} + \|u^1\|_1'\right) + \cdots + \frac{1}{C_k}\left(\|u^1\|_{(k)} + \|u^1\|_k'\right)\\
&\le \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\cdots\right)\|u\| + \frac{1}{C_1}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\cdots\right)\left(\|u\|_{(1)} + \|u\|_1'\right)\\
&\qquad + \cdots + \frac{1}{C_k}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\cdots\right)\left(\|u\|_{(k)} + \|u\|_k'\right)\\
&= \frac{2}{3}\left\{\|u\| + \frac{1}{C_1}\left(\|u\|_{(1)} + \|u\|_1'\right) + \cdots + \frac{1}{C_k}\left(\|u\|_{(k)} + \|u\|_k'\right)\right\}
\end{aligned}$$

となる. $\sum_i \bar{\partial}\rho_i \wedge u_i^k$ についても同様の評価がなりたつ. よってこのような μ に対し $\sum_{m=1}^\infty u^m$ は Sobolev k ノルムに関する収束列である. これより v の可微分性が得られる. □

一方, M の Levi 法線束を F とすると, F は正だから, 命題 2 より, k が十分大きければ $F^{\otimes k}$ は C^1 級の CR 断面で生成される (消滅定理を用いて CR 多様体上に断面を生成する方法については [Boutet de Monvel, L., Séminaire Goulaouic-Lions-Schwartz, 1974–75; Exp. 9, 14pp] を参照). すなわち $k \gg 1$ のとき

$$(a_{ij})^k\sigma_j = \sigma_i, \quad \bar{\partial}_b\sigma_i = 0$$

をみたす CR 関数系 $\{\sigma_i\}_{i\in I}$ を有限個とって共通零点がないようにできる. この事実を用いて v が C^∞ 級であることを出せるかどうかは現在の所不明である.

Levi 平坦超曲面の非存在と $\bar{\partial}_b$ 方程式の C^∞ 可解性の関係は以下の通りである. いま $S \subset \mathbb{P}^2$ が C^∞ 級コンパクト Levi 平坦超曲面だったとする. 複素直線 l を適当にとれば $l \cap S$ は有限個の閉曲線の単純和だから, S におけるある近傍 $U \supset l \cap S$ に対して制限写像

$$C^\infty(U, K_{\mathbb{P}^2}\otimes\mathcal{O}(m)) \cap \operatorname{Ker}\bar{\partial}_b \longrightarrow C^\infty(l\cap S, K_{\mathbb{P}^2}\otimes\mathcal{O}(m))$$

の像 $\mathcal{J}$ は無限次元である．ところが $m \gg 1$ のとき，$K_{\mathbb{P}^2} \otimes \mathcal{O}(m-1)$ 係数の $\bar{\partial}_b$ 方程式が C^∞ 可解だとすると，制限写像

$$C^\infty(S, K_{\mathbb{P}^2} \otimes \mathcal{O}(m)) \cap \operatorname{Ker} \bar{\partial}_b \longrightarrow \mathcal{J}$$

は全射であり，$\mathbb{P}^2 \backslash S = \Omega_+ \cup \Omega_-$ ($\Omega_\pm$ は領域) とすると，定理 1 より，標準的方法で (例えば Andreotti-Vesentini による小平の消滅定理の拡張 [Sopra un teorema di Kodaira, Ann. Sci. Norm. Sup. Pisa 15 (1961), 283–309] を用いて) Bochner 型拡張定理が導け，とくに，二つの制限写像

$$C^\infty(\overline{\Omega_\pm}, K_{\mathbb{P}^2} \otimes \mathcal{O}(m)) \cap \operatorname{Ker} \bar{\partial} \xrightarrow{r_\pm} C^\infty(S, K_{\mathbb{P}^2} \otimes \mathcal{O}(m)) \cap \operatorname{Ker} \bar{\partial}_b$$

は，任意の m に対して全射である．$r_+(s_+)|S = r_-(s_-)|S$ なら

$$s = \begin{cases} s_+ & \text{on } \overline{\Omega_+} \\ s_- & \text{on } \overline{\Omega_-} \end{cases}$$

とおくと $s \in C^\infty(\mathbb{P}^2, K_{\mathbb{P}^2} \otimes \mathcal{O}(m)) \cap \operatorname{Ker} \bar{\partial}$．ところが

$$\dim \left(C^\infty(\mathbb{P}^2, K_{\mathbb{P}^2} \otimes \mathcal{O}(m)) \cap \operatorname{Ker} \bar{\partial} \right) < \infty$$

だからこれは矛盾．

反例　$\bar{\partial}_b$ 方程式の C^∞ 可解性は付加条件なしでは成立しない．以下にそれを示す例を挙げる．

R を種数が 2 以上のコンパクト Riemann 面とし，Γ を単位円盤 Δ の正則自己同型群の離散的部分群で $\Delta/\Gamma \simeq R$ であるものとする．

$$\iota_1 : \Delta \longrightarrow \Delta \times \Delta$$
$$\iota_2 : \Gamma \longrightarrow \Gamma \times \Gamma$$

を対角埋入とし，

$$R^{(2)} = \Delta \times \Delta / \iota_2(\Gamma)$$
$$R_0 = \iota_1(\Delta)/\iota_2(\Gamma)$$

とおく．Γ の作用は $\mathbb{P}^1$ に自然に延長するから，$\iota_2(\Gamma)$ は $\mathbb{P}^1 \times \Delta$ に適正不連続に作用する．$M = \mathbb{P}^1 \times \Delta/\iota_2(\Gamma)$ とおくと，M はコンパクト複素曲面であり，$R^{(2)}$ は M 内の領域で C^ω 級の Levi 平坦な境界をもつ．$S = \partial R^{(2)}$ とおく．もし $\bar{\partial}_b$ 方程式が S 上の十分正な直線束に対して C^∞ 可解であったとすると，特に十分大きい μ に対して

$$\dim C^\infty(S, K_M^{\otimes \mu}) \cap \operatorname{Ker} \bar{\partial}_b = \infty$$

となる．

一方,

$$\varphi(z,w) = -\log\left(1 - \left|\frac{w-z}{\bar{w}z-1}\right|^2\right) \qquad z,w\in\Delta\cdot$$

とおくと, φ は $\iota_2(\Gamma)$ の作用で不変だから $R^{(2)}$ 上の関数の自然な射影 $\Delta^2 \to R^{(2)}$ による引き戻しになっている. その関数を ψ とおくと, ψ は $R^{(2)}$ 上の多重劣調和皆位関数である.

実際,

$$\begin{aligned}
&\partial\bar{\partial}\left(-\log\left(1-\left|\frac{w-z}{\bar{w}z-1}\right|^2\right)\right)\\
&= \partial\bar{\partial}\left(-\log\left(|\bar{w}z-1|^2 - |w-z|^2\right) + \log|\bar{w}z-1|^2\right)\\
&= \partial\bar{\partial}\left(-\log\left(|w|^2|z|^2 - |w|^2 - |z|^2 + 1\right) + \log|\bar{w}z-1|^2\right)\\
&= \left(1-|z|^2\right)^{-2} dzd\bar{z} + \left(1-|w|^2\right)^{-2} dwd\bar{w} - (w\bar{z}-1)^2\, dwd\bar{z} - (\bar{w}z-1)^{-2}\, dzd\bar{w}
\end{aligned}$$

であり,

$$\begin{aligned}
&\left(1-|z|^2\right)^{-2}\left(1-|w|^2\right)^{-2} - |\bar{w}z-1|^{-4}\\
&\quad = \left(1-|z|^2\right)^{-2}\left(1-|w|^2\right)^{-2}|\bar{w}z-1|^{-4}|z-w|^4
\end{aligned}$$

だからである. この計算よりさらに ψ が S の近くで S への距離の逆数の対数と比較可能であることと, R_0 のある近傍の外側で

$$\partial\bar{\partial}\psi > c\left(\partial\psi\bar{\partial}\psi + g\right)$$

であることが従う. 但し c は正定数であり, g は M 上の Hermite 計量を表す.

これより, Andreotti-Vesentini の L^2 消滅定理を用いて $C^\infty(S, K_M^{\otimes\mu})\cap \mathrm{Ker}\,\bar{\partial}_b$ の元を $R^{(2)}$ の側と $M\backslash\overline{R^{(2)}}$ の側に延長して $C^\infty(M, K_M^{\otimes\mu}\otimes[R_0]^{\otimes k})\cap\mathrm{Ker}\,\bar{\partial}$ の元をつくることができる ($M\backslash\overline{R^{(2)}}$ は Stein 多様体であることに注意). ただし k は $C^\infty(S, K_M^{\otimes\mu})\cap\mathrm{Ker}\,\bar{\partial}_b$ の元のとり方に無関係な自然数である. これは $\dim C^\infty(S, K_M^{\otimes\mu})\cap\mathrm{Ker}\,\bar{\partial}_b = \infty$ に反する.