「量子コホモロジー環入門」

前野俊昭氏 (京都大学大学院理学研究科[1])

2006 年 2 月 17 日

森川 修司（名大・多元数理）記

「代数幾何学勉強会」2006 年 2 月 16 日～2 月 17 日
名古屋大学大学院多元数理科学研究科

平成 17 年度日本学術振興会科学研究費若手研究 (B)
(課題研究番号 15740019, 代表 伊藤 由佳理)

[1] 2006 年 6 月より京都大学大学院工学研究科

量子cohomology環

量子cohomology環とは?

> Gromov-Witten不変量を使って射影的多様体のcohomology環の環構造を変形したものである．いわゆるcohomology理論ではなく，さらに量子群, q-変形とは独立の理論である．(無関係というわけではない．)

今回の話は, Kontsevich-Maninの流儀 [10], [11], [12] (代数幾何的, 公理的) で行う．他には, Ruan-Tian流 [16], [17] (symplectic幾何) もある．Gromov-Witten不変量や量子cohomology環の一般論・例を知るための参考文献としては [4], [6], [14], [18] を挙げておく．

1　Gromov-Witten不変量

V を $\mathbb{C}$ 上の射影的多様体とする．

Counting problem

$\beta \in H_2(V,\mathbb{Z})$, $A_1,\dots,A_n$ を V 上のサイクル, $g \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とする．ただし, $2g+n-3 \geq 0$ をみたすものとする．このとき, 次のような条件を満たす $(f;C,x_1,\dots,x_n)$ の数え上げを考えたい．

(1) C は滑らかな代数曲線で種数 $g(C)=g$,
(2) $x_1,\dots,x_n \in C$, $(x_i \neq x_j)$,
(3) $f: C \to V$ は正則写像,
(4) $f_*([C])=\beta$, $f(x_i) \in A_i$.

上で $(f;C,x_1,\dots,x_n)$ は f も $(C;x_1,\dots,x_n)$ も共に動かして考えていることに注意する．

これから線型写像

$$\langle I^V_{g,n,\beta} \rangle \ : \ H^*(V,\mathbb{Q})^{\otimes n} \to \mathbb{Q}$$

として (V のdeformationで変らない) 不変量を構成したい．この不変量はintersection theoryの一般化になる．特に $g=0, \beta=0, n=3$ のとき, 通常のintersection numberに相当している．($\beta=0$ ならば f の像は1点にいく．そのため f の像は3つのサイクルの共通点となる．また $n \neq 3$ のときは点付き曲線のmoduliに関する情報が現れるため, intersection numberとは異なる量が出てくる．) ナイーヴな見方をするならば, Gromov-Witten不変量とは上のcounting problemで考えている $\#(f;C,x_1,\dots,x_n)$ のことである．しかし，この量そのものはうまくコントロールできるようなものになっていない．ここでの困難は交点数を定義する際に現れる状

況と同じようなもので，例えばカウントした個数が無限大となっているときにどう考えるべきか，サイクルの向きと符号の処理，重複度の定義，ホモロジー類に対しての well-definedness 等が問題となる．そのため，$\#(f; C, x_1, \ldots, x_n)$ を moduli 空間上の交点数として解釈することで問題点を回避するという方針を取る．

$\mathcal{M}_{g,n}(V,\beta)$ を $(f; C, x_1, \ldots, x_n)$ のモジュライ空間とする．ここで，C は滑らかな代数曲線で種数が $g(C) = g$, $f_*([C]) = \beta$, $x_1, \ldots, x_n \in C$ $(x_i \neq x_j)$ とする．

$$\begin{array}{cccc} ev_i & : & \mathcal{M}_{g,n}(V,\beta) & \to & V \\ & & \Psi & & \Psi \\ & & (f; C, x_1, \ldots x_n) & \mapsto & f(x_i) \end{array}$$

とすると，上述の counting problem は $\#(ev_1^{-1}(A_1) \cap \cdots \cap ev_n^{-1}(A_n))$ を求めることに相当しているので，$\mathcal{M}_{g,n}(V,\beta)$ 上でサイクル $ev_1^{-1}(A_1), \ldots, ev_n^{-1}(A_n)$ たちの交点数として $\langle I_{g,n,\beta}^V \rangle$ を定義するのが自然と思われる．しかし，そのためには $\mathcal{M}_{g,n}(V,\beta)$ の自然なコンパクト化が必要になる．

stable map のモジュライ空間

$\overline{\mathcal{M}_{g,n}}(V,\beta)$ を $(f; C, x_1, \ldots, x_n)$ のモジュライ空間とする．ここで，C は被約連結曲線で結節点（ODP）(局所的には $xy = 0$ で表される特異点) 以外には特異点を持たないとする．$x_1, \ldots, x_n \in C$ は互いに異なる非特異点とし，$f_*[C] = \beta$ をみたすとする．

$C' \subset C$ を既約成分とする．このとき stability の条件

$$f(C') = \mathrm{pt} \Rightarrow 2p_a(C') + n_{C'} - 3 \geq 0$$

をみたしているものを考える．ここで，$n_{C'}$ は C' 上の special point(特異点または marked point) の数である．

注意　$\beta \neq 0$ ならば $2g + n - 3 < 0$ でも定義可能．

定理 1.1 ([10], [2]). $\overline{\mathcal{M}_{g,n}}(V,\beta)$ が $\mathbb{C}$ 上 *proper* な *algebraic stack* である．

この定理から，$\overline{\mathcal{M}_{g,n}}(V,\beta)$ はその上で "$\mathbb{Q}$ 上の intersection theory" が出来るような空間になっていることがわかる [19].

$\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in H^*(V, \mathbb{Q})$ に対して

$$\int_{\overline{\mathcal{M}_{g,n}}(V,\beta)} ev_1^*(\alpha_1) \wedge \cdots \wedge ev_n^*(\alpha_n)$$

と定義することで不変量を考えたい．しかしこの定義では，V の変形に対して不変ではない．そのために少し改良する．

基本類 $[\overline{\mathcal{M}_{g,n}}(V,\beta)] \in A_*(\overline{\mathcal{M}_{g,n}}(V,\beta))_{\mathbb{Q}}$ のかわりに, $A_d(\overline{\mathcal{M}_{g,n}}(V,\beta))_{\mathbb{Q}}$ の virtual fundamental class $[\overline{\mathcal{M}_{g,n}}(V,\beta)]^{\mathrm{virt}}$ を用いる. ここで $d = (1-g)\dim V + \int_\beta c_1(T_V) + 3g - 3 + n$ である. Virtual fundamental class $[\overline{\mathcal{M}_{g,n}}(V,\beta)]^{\mathrm{virt}}$ は [1], [13] で構成されている.

Gromov-Witten 不変量

定義 1.2 (Gromov-Witten invariant).

$$\langle I^V_{g,n,\beta}\rangle(\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_n) = \int_{[\overline{\mathcal{M}_{g,n}}(V,\beta)]^{\mathrm{virt}}} ev_1^*(\alpha_1) \wedge \cdots \wedge ev_n^*(\alpha_n).$$

より一般に gravitational Gromov-Witten invariant と呼ばれるものを定義するために

$$\begin{array}{ccc} \overline{\mathcal{M}_{g,n+1}}(V,\beta) & = & \tilde{\mathfrak{X}} \\ \pi \downarrow \uparrow s_i & & \\ \overline{\mathcal{M}_{g,n}}(V,\beta) & = & \mathfrak{X} \end{array}$$

を考えよう.

ここで, $\tilde{\mathfrak{X}}$ は universal curve であり, π は $n+1$ 番目の点を忘れる写像, s_i は marked points に対応する section である. また line bundle $\mathcal{L}_i := s_i^*(\Omega^1_{\tilde{\mathfrak{X}}/\mathfrak{X}})$ と定める.

定義 1.3 (Gravitational Gromov-Witten invariant).

$$\langle \tau_{d_1}\alpha_1 \cdots \tau_{d_n}\alpha_n\rangle_{g,\beta} = \int_{[\overline{\mathcal{M}_{g,n}}(V,\beta)]^{\mathrm{virt}}} c_1(\mathcal{L}_1)^{d_1} \wedge ev_1^*(\alpha_1) \wedge \cdots \wedge c_1(\mathcal{L}_n)^{d_n} \wedge ev_n^*(\alpha_n).$$

2 量子 cohomology 環

量子 cohomology 環は種数 $g = 0$ の部分から来る情報をみている. 簡単のため, $H := H^{\mathrm{even}}(V, \mathbb{C})$ で考える. (奇数次部分も含める場合は, 符号についての問題が生じるため superspace を用いることになる.)

Gromov-Witten potential

ω を complexified Kähler class, 即ち $\sqrt{-1}(\text{Kähler cone}) + H^2(V,\mathbb{R}) \subset H^2(V,\mathbb{C})$ の元とし, $\Delta_0, \ldots, \Delta_N$ を H の線形基底 (Δ_0 は fundamental class), $t_0, \ldots, t_N$ をパラメータ, $t = t_0\Delta_0 + \cdots + t_N\Delta_N$ とする. さらに $g_{ij} = \int_V \Delta_i \wedge \Delta_j$, $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$ とする.

定義 2.1 (Gromov-Witten potential).

$$F_\omega^V(t) := \sum_{n\geq 3}\sum_{\beta\in H_2(V,\mathbb{Z})} q^\beta \frac{1}{n!}\langle I_{0,n,\beta}^V\rangle(t^{\otimes n}).$$

ここで, $q^\beta = e^{2\pi\sqrt{-1}\int_\beta \omega}$ である. これは $t_0,\ldots,t_N$ の形式的巾級数である.

WDVV 方程式

Gromov-Witten potential は次の非線型微分方程式

$$\sum_{a,b}\frac{\partial^3 F_\omega^V(t)}{\partial t_i\partial t_j\partial t_a}g^{ab}\frac{\partial^3 F_\omega^V(t)}{\partial t_k\partial t_l\partial t_b} = \sum_{a,b}\frac{\partial^3 F_\omega^V(t)}{\partial t_j\partial t_k\partial t_a}g^{ab}\frac{\partial^3 F_\omega^V(t)}{\partial t_i\partial t_l\partial t_b}$$

をみたす. これは Gromov-Witten 不変量の幾何学的性質からの帰結である. Stable map $(f;C,x_1,\ldots,x_n)\in\overline{\mathcal{M}_{0,n}}(V,\beta)$, $n>3$, に対して, domain curve $(C;x_1,\ldots,x_4)$ の stable 化を対応させる. これにより

$$\varpi : \overline{\mathcal{M}_{0,n}}(V,\beta)\to\overline{\mathcal{M}_{0,4}}\cong\mathbb{P}^1$$

が定まる. Boundary $\overline{\mathcal{M}_{0,4}}\setminus\mathcal{M}_{0,4}$ は 3 点から成り, それぞれの ϖ による引き戻しが数値的に同値であることから WDVV 方程式が導かれる.

H の tangent bundle $T_H\to H$ を考える. T_H 上の Dubrovin connection $\nabla^{\mathrm{Dub}} := \nabla$ を次のように定義する.

$$\nabla_{\partial/\partial t_i}\left(\frac{\partial}{\partial t_j}\right) = \sum_k A_{ij}^k(t)\frac{\partial}{\partial t_k}.$$

ここで, $A_{ijk}(t) := \dfrac{\partial^3 F_\omega^V}{\partial t_i\partial t_j\partial t_k}$, $\quad A_{ij}^k(t) := \sum_l A_{ijl}(t)g^{lk}$ である.

WDVV 方程式は ∇ の可積分性を意味し, quantum cohomology ring の associativity を保証する.

量子 cohomology 環

T_H の fiber は H 自身である. Base の H を parameter space と考え, その fiber の上に代数としての構造を考えることができる. 即ち H 上のパラメータ t を動かすにつれて, fiber $(T_H)_t\cong H$ 上の環構造が動くように量子 cohomology 環の量子積 $*=*_t$ を定義する. 量子積 $*$ は

$$\frac{\partial}{\partial t_i}*\frac{\partial}{\partial t_j} := \nabla_{\partial/\partial t_i}\left(\frac{\partial}{\partial t_j}\right)$$

と定義される. このとき,

- $*_t$ $(t \in H)$ は H 上の associative product の族である．

- $\frac{\partial}{\partial t_0}$ は単位元である．

- $2\pi\sqrt{-1}\displaystyle\int_\beta \omega \to -\infty$ $\quad(\beta :$ effective$)$ の極限で $* \to \cdot$ となる．ここで $\cdot$ は通常の intersection product である．

- $t = 0$ での代数構造を small quantum cohomology ring という．(ここでは q^β が変形のパラメータ)

Gromov-Witten invariant は Divisor Axiom

$$\langle I^V_{g,n,\beta}\rangle(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) = \left(\int_\beta \alpha_n\right)\langle I^V_{g,n-1,\beta}\rangle(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1}),\ \ \text{for } \alpha_n \in H^2(V)$$

をみたす．そのため，

$$\underbrace{t_0}_{\text{fundamental class}},\underbrace{t_1,\ldots,t_r}_{H^2},\underbrace{t_{r+1},\ldots,t_N}_{\text{それ以外}} \quad t := t' + t'' \quad t' := t_1\Delta_1 + \cdots + t_r\Delta_r$$ とす

ると，Gromov-Witten potential は

$$F^V_\omega(t) = \sum_{n\geq 3}\frac{1}{n!}q^\beta e^{\int_\beta t'}\langle I^V_{0,n,\beta}\rangle((t'')^{\otimes n}) = F^V_{\omega+\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}t'}(t'')$$

となる．

例　$\mathbb{P}^1$

$H^0, H^2 = \mathbb{C}[\mathrm{pt}]$ であり，それぞれに対応するパラメータとして t_0, t_1 をとる．このとき，Gromov-Witten potential は

$$F^{\mathbb{P}^1}_\omega(t) = \frac{1}{2}t_0^2 t_1 + \sum_{n\geq 3}\frac{t_1^n}{n!}$$

となる．

例　$\mathbb{P}^2$

$H^0, H^2 = \mathbb{C}[\mathrm{line}], H^4 = \mathbb{C}[\mathrm{pt}]$ であり，それぞれのパラメータとして t_0, t_1, t_2 をとる．このとき Gromov-Witten potential は

$$F^{\mathbb{P}^2}_\omega(t) = \frac{1}{2}(t_0t_1^2 + t_0^2t_2) + \sum_{d=1}^{\infty} N(d)\frac{t_2^{3d-1}}{(3d-1)!}e^{dt_1}q^d$$

となる．ここで，$q = e^{2\pi\sqrt{-1}\int_{\mathrm{line}}\omega}$，

$$N(1)=1,$$
$$N(d)=\sum_{\substack{k+l=d\\k,l\geq 1}} N(k)N(l)k^2l\left(l\begin{pmatrix}3d-4\\3k-2\end{pmatrix}-k\begin{pmatrix}3d-4\\3k-1\end{pmatrix}\right)$$

である [11].

可積分系としてみると, $\mathbb{P}^2$ の場合ですらパンルヴェVIを考えるのと等価になる ([5], [14, II §5] 参照). $\mathbb{P}^1,\mathbb{P}^2$ の良い点は, 種数 0 の Gromov-Witten 不変量たちが WDVV 方程式, grading condition, initial condition だけで決まってしまう点である.

Calabi-Yau smooth 3-fold V

$H^2=\oplus_{i=1}^r\mathbb{C}\Delta_i,\qquad t_1,\ldots,t_n$ をパラメータとする. $1\leq i,j,k\leq r$ のとき,

$$\frac{\partial^3F_\omega^V}{\partial t_i\partial t_j\partial t_k}=\int_V\left(\sum_{i=1}^r t_i\Delta_i\right)^3+\sum_{\beta\neq 0}\langle I_{0,3,\beta}^V\rangle(\Delta_i,\Delta_j,\Delta_k)q^\beta e^{\sum_{i=1}^r t_i\int_\beta\Delta_i}.$$

$\mathbb{P}^1,\mathbb{P}^2$ のときとは異なり, WDVV 方程式 ($+\alpha$ の条件) だけから Gromov-Witten 不変量を決定することはできない. Mirror 対称性からの帰結の一つとして, このような状況の下での Gromov-Witten 不変量が mirror partner の変形族を見ることで決定できるということが予言された [3].

V を quintic 3-fold ($\mathbb{P}^4$ の中の 5 次超曲面) とする. この場合の Picard 数は 1 となる. $H^2=\mathbb{C}\Delta_1$ とする. ここで Δ_1 は hyperplane section であり, 対応するパラメータを t_1 とする. このとき,

$$\frac{\partial^3}{\partial t_1^3}F_\omega^V=5+\sum_{d=1}^\infty n_dd^3\frac{q^d}{1-q^d}=\frac{5}{(1+5^5z)y_0(z)^2}\left(\frac{q}{z}\frac{dz}{dq}\right)$$

となる. 最後の等号は, mirror conjecture の帰結である. 「このような意味での」mirror conjecture は Givental [7] により証明された.

ここで n_d は quintic 3-fold の中に含まれる degree d の有理曲線の個数であり,

$$y_0(z)=\sum_{n=0}^\infty\frac{(5n)!}{(n!)^5}(-1)^nz^n,$$
$$y_1(z)=y_0(z)\log(-z)+5\sum_{n=1}^\infty\frac{(5n)!}{(n!)^5}\left[\sum_{j=n+1}^{5n}\frac{1}{j}\right](-1)^nz^n,$$
$$q=\exp(y_1/y_0)$$

である.

3　J-関数

J-関数は, 量子 cohomology 環と可積分系をつなぐものである. Dubrovin connection を変形した Givental connection (正確には connection ではない) を用いて, horizontal section を構成する. その制限として J-関数が定まる.

T_H 上の Givental connection ∇^{Giv} を

$$\nabla^{\mathrm{Giv}}_{\partial/\partial t_i}\left(\sum_j \varphi_j \frac{\partial}{\partial t_j}\right) = \hbar \sum \frac{\partial \varphi_j}{\partial t_i}\frac{\partial}{\partial t_j} - \sum \varphi_j \frac{\partial}{\partial t_i} * \frac{\partial}{\partial t_j}$$

で定義する. ここで $\hbar$ はパラメータであり, $*$ は quantum product である.

$$s_a := \frac{\partial}{\partial t_a} + \sum_{n\geq 0} \hbar^{-(n+1)} \sum_{j,k} \langle \tau_n \Delta_a, \Delta_j, \underbrace{t, \ldots, t}_{n\text{ 個}} \rangle_{0,\beta} \frac{q^\beta}{n!} g^{kj} \frac{\partial}{\partial t_k}$$

とすると任意の i, a に対して,

$$\nabla^{\mathrm{Giv}}_{\partial/\partial t_i}(s_a) = 0$$

となる.

$T_H \to H$ を $H \supset H' := H^0 \oplus H^2$ に制限する. このとき H' 上の関数 J を

$$J := \sum_i \langle s_i, \Delta_0 \rangle \Delta^i |_{H'}$$

と定める. J は $t_0, \ldots, t_r, \hbar^{-1}$ の H-valued formal power series である. ここでは Δ_i と $\dfrac{\partial}{\partial t_i}$ を同一視して考えている.

定理 3.1 (Givental [7]). $P\left(\hbar\dfrac{\partial}{\partial t}, e^t, \hbar\right)$ を $\left(\hbar\dfrac{\partial}{\partial t_i}\right)_{i=1,\ldots,r}, (e^t)_{i=1,\ldots,r}, \hbar$ の形式冪級数とする. $P\left(\hbar\dfrac{\partial}{\partial t}, e^t, \hbar\right) J = 0$ が成り立つならば, *small quantum cohomology ring* $QH^*(V)$ の中で $P(\Delta, q, 0) = 0$ が成立する.

例　$\mathbb{P}^n$

$$J = e^{(t_0 + t_1\gamma)/\hbar} \sum_{d=0}^{\infty} \frac{1}{((\gamma+\hbar)(\gamma+2\hbar)\cdots(\gamma+d\hbar))^{n+1}}.$$

ここで γ は H^2 の超平面の class であり, 対応するパラメータが t_1 である.

$\left(\hbar\dfrac{\partial}{\partial t_1}\right)^{n+1} J = e^{t_1} J$ であるので

$$QH^*(\mathbb{P}^n) \cong \mathbb{C}[\gamma]/(\gamma^{n+1} - q).$$

例　flag variety G/B

$\mathcal{H}$をGの Langlands dual $G^\vee$に対応する戸田の Hamiltonian とすると, $\mathcal{H}J=0$ であることが知られている [8], [9].

$FL_n := \{\mathbb{C}^n$の中の full flags$\}$とする. このとき

$$QH^*(FL_n) \cong \mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]/(e_1^q(x),\ldots,e_n^q(x)).$$

である. ここで

$$M_n = \begin{pmatrix} x_1 & q_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & x_2 & q_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & x_{n-1} & q_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & x_n \end{pmatrix}$$

とし,

$$\det(tI + M_n) = t^n + \sum_{i=1}^n e_i^q(x) t^{n-i}$$

によって $e_i^q(x)$ を定める.

参考文献

[1] K. Behrend and B. Fantechi, *The intrinsic normal cone,* Invent. Math., **128** (1997), 45-88.

[2] K. Behrend and Yu. Manin, *Stacks of stable maps and Gromov-Witten invariants,* Duke Math. J., **85** (1996), 1-60.

[3] P. Candelas, X. C. de la Ossa, P. S. Green and L. Parkes, *A pair of Calabi-Yau manifolds as an exactly soluble superconformal field theory,* Nucl. Phys. B, **359** (1991), 21-74.

[4] D. A. Cox and S. Katz, *Mirror symmetry and algebraic geometry,* AMS, 1999.

[5] P. Di Francesco and C. Itzykson, *Quantum intersection rings,* in *The Moduli Space of Curves,* (R. Dijkgraaf, C. Faber and G. van der Geer, eds.) Progress in Math. **129**, Birkhäuser, 1995, 81-148.

[6] W. Fulton and R. Pandharipande, *Notes on stable maps and quantum cohomology,* Proc. of Symposia in Pure Math. Vol 62 part 2, AMS, 1997, 45-96.

[7] A. Givental, *Equivariant Gromov-Witten invariants,* Int. Math. Res. Notices, **1996**, no. 13, 613-663.

[8] A. Givental and B. Kim, *Quantum cohomology of flag manifolds and Toda lattices,* Comm. Math. Phys., **168** (1995), 609-641.

[9] B. Kim, *Quantum cohomology of flag manifolds G/B and quantum Toda lattices,* Ann. Math., **149** (1999), 129-148.

[10] M. Kontsevich, *Enumeration of rational curves via torus actions,* in *The Moduli Space of Curves,* (R. Dijkgraaf, C. Faber and G. van der Geer, eds.) Progress in Math. **129**, Birkhäuser, 1995, 335-368.

[11] M. Kontsevich and Yu. Manin, *Gromov-Witten classes quantum cohomology, and enumerative geometry,* Comm. Math. Phys., **164** (1994), 525-562.

[12] M. Kontsevich and Yu. Manin, *Relations between the correlators of the topological sigma-model coupled to gravity,* Comm. Math. Phys., **196** (1998), 385-398.

[13] J. Li and G. Tian, *Virtual moduli spaces and Gromov-Witten invariants of algebraic varieties,* J. Amer. Math. Soc., **11** (1998), 119-174.

[14] Yu. I. Manin, *Frobenius manifolds, quantum cohomology and moduli spaces,* AMS, 1999.

[15] D. McDuff and D. Salamon, *J-holomorphic curves and quantum cohomology,* AMS, 1994.

[16] Y. Ruan and G. Tian, *A mathematical theory of quantum cohomology,* J. Diff. Geom., **42** (1995), 259-367.

[17] Y. Ruan and G. Tian, *Higher genus symplectic invariants and sigma model coupled with gravity,* Invent. Math., **130** (1997), 455-516.

[18] B. Siebert, *An update on (small) quantum cohomology,* in *Mirror Symmetry III,* (D. H. Phong, L. Vinet and S. T. Yau eds.), AMS/IP, 1999, 279-312.

[19] A. Vistoli, *Intersection theory on algebraic stacks and on their moduli spaces,* Invent. Math., **93** (1989), 613-670.