

幾何学的不変式論によるクレパント解消の構成

石井 亮

広島大学理学部

記録者：伊藤 裕貴

名古屋大学多元数理科学研究科

2006年2月16日

代数幾何学勉強会¹

¹平成17年度独立行政法人学術振興会科学研究費若手研究(B)
(課題研究番号 15740019, 代表 伊藤 由佳理)

概要

$SL(3, \mathbb{C})$ の有限部分群 G による商特異点を考えます。これは、「クレパント解消」という良い特異点解消を持つことが、 G の分類に従って 90 年代までに示されました。その後、 G -Hilb というモジュライ空間を考えると、これがいつでもクレパント解消になっているということで、クレパント解消の存在の統一的証明がなされました。また、 G -Hilb を使うと、3次元の McKay 対応というものの導来圏による定式化ができます。一方で3次元では、クレパント解消は一般にはいくつか存在して、 G -Hilb というのはそのうちの一つです。そこで、 G -Hilb と似たようなモジュライ空間として、 G -constellation というもののモジュライ空間を考えます。これらモジュライ空間は、幾何学的不変式論 (GIT) を使って構成されます。一般に GIT による商空間の構成は、あるパラメータ (安定性を定めるパラメータ) に依存し、パラメータによって商空間が変化する様子は Thaddeus らによって考察されています。 G -constellation のモジュライもパラメータによって変化する、特に G がアーベル群の時には、任意の射影的クレパント解消がこのようなモジュライとして実現できることがわかっています。この様なことを解説したいと思います。

1 Introduction

まず2次元のときについて述べる. $G \subset SL(2, \mathbb{C})$ を有限部分群とする. G は次のように分類されている.

- 巡回群,
- 2項2面体群,
- 2項多面体群.

G は \mathbb{C}^2 に自然に作用するので, $X := \mathbb{C}^2/G$ を考える. X は原点のみに特異点を持つ. 一方, G は $\mathbb{C}[x, y]$ にも自然に作用する. その作用で不変なものの全体を $\mathbb{C}[x, y]^G$ と書く. $X \subset \mathbb{C}^3$ は $\mathbb{C}[x, y]^G$ を座標環とするアフィン代数多様体, 特に \mathbb{C}^3 の超曲面になる.

今述べたことは19世紀にKleinによって調べられたことである. 20世紀になり, DuValはminimal resolution

$$\tau: Y \rightarrow X$$

を調べた. これはブローアップにより得られ, exceptional locus は (-2) curves の tree になる. その dual graph には, A, D, E 型の Dynkin 図形が現れる. この話はその後, McKay 対応といった話などに続いていく.

resolution の中には「良い」resolution がある. 次に定義する crepant resolution もその中の1つである.

定義 1.1. resolution $\tau: Y \rightarrow X$ が, crepant resolution であるとは,

$$K_Y \cong \mathcal{O}_Y$$

となることである.

次に3次元のときを考える. $G \subset SL(3, \mathbb{C})$ を有限部分群とし, $X := \mathbb{C}^3/G$ を考える. これは2次元の場合とは違い, 超曲面になるというわけではなく, 特異点は孤立特異点になるとも限らない. また, minimal resolution で1つ良いものがあるというわけでもない.

1980年頃に物理学者から「crepant resolution は存在するか?」という問いが出た. この問題は90年代前半に, 場合分けにより次のように肯定的に解決された.

定理 1.2 (Ito[7, 8], Markusevich[11, 3, 12], Roan[15, 16, 17]). 必ず crepant resolution が存在する.

ただし, crepant resolution は一意的とは限らない. それらの間は「flop」の列によりつながる.

上で述べた話はブローアップといった幾何学的な構成に基づくものであるが, これに対して Kronheimer は2次元のとき, hyper Kähler quotient という言葉を使ってこれを構成した. 彼は, \mathbb{C}^2/G の minimal resolution, semi-universal deformation, simultaneous resolution をモジュライ空間として構成した. また, Cassens-Slodowy は Kronheimer の方法を代数幾何学の言葉に翻訳した.

今回の講義では「3次元のときに, すべての crepant resolution は Kronheimer の方法で得られるか?」という話をする.

2 Kronheimer の構成 (の言い換え)

まず, V を \mathbb{C} 上の n 次元ベクトル空間とする. そして, $G \subset SL(n, V)$ を有限部分群, R を G の正則表現とする. 正則表現とは G 上の関数のなす空間を G の表現空間と思ったものである. 我々は

$$\mathcal{N} := \{B \in \text{Hom}_{\mathbb{C}[G]}(R, V \otimes R) \mid B \wedge B = 0\}$$

を考える. ただし $B \wedge B \in \text{Hom}_{\mathbb{C}[G]}(R, (\wedge^2 V) \otimes R)$ とする.

$$\text{Hom}_{\mathbb{C}[G]}(R, V \otimes R) = \text{Hom}_{\mathbb{C}[G]}(V^* \otimes R, R)$$

であるから, B は V^* の R への作用と見ることができる. このように見ると $B \wedge B = 0$ という条件は, 交換法則を満たすための条件ということができる. よって, \mathcal{N} は R への多項式環 $\mathbb{C}[V]$ (V の座標環) の作用で G -equiv なもの全体と見ることができる. \mathcal{N} はアフィンスキームである.

\mathcal{N} には $\text{Aut}_{\mathbb{C}[G]} R$ が作用している. 有限群の表現は完全可約であるから, G の既約表現全体を $\text{Irr}(G)$ と書くことにすると,

$$R = \bigoplus_{\rho \in \text{Irr}(G)} R_\rho \otimes \rho$$

と書ける. ここで R_ρ はベクトル空間であり, ρ の方に G が作用している. また, Schur の補題より

$$\text{Aut}_{\mathbb{C}[G]} R = \prod_{\rho} GL(R_\rho)$$

である.

細かいことは考えずに \mathcal{N} をこの群作用により, 集合として割る. すなわち, 集合として

$$\mathcal{N} / \text{Aut}_{\mathbb{C}[G]} R$$

を考える. これは G -equiv な $\mathbb{C}[V]$ -module で, $\mathbb{C}[G]$ -module としては (つまり G の表現としては) R であるようなものの同型類と, 1 対 1 に対応する. このようなものを G -constellation と呼ぶことにする.

今は集合として割ったわけであるが, スキームとして割るためには「GIT」が必要である.

3 GIT(Geometric Invariant Theory)

ここでは アフィンスキームを割る場合のみを扱う.

定義 3.1. algebraic group が **reductive** であるとは, maximal connected solvable normal subgroup が torus となることである.

H を reductive algebraic group, $\mathcal{N} = \text{Spec } \mathbb{C}[\mathcal{N}]$ をアフィンスキームとする.

注意. H は前節における $\text{Aut}_{\mathbb{C}[G]} R$ に対応するものである.

H は \mathcal{N} に作用しているとする. 指標 $\chi: H \rightarrow \mathbb{G}_m (= \mathbb{C}^*)$ に対し,

$$\mathbb{C}[\mathcal{N}]^\chi := \{f \in \mathbb{C}[\mathcal{N}] \mid f(g \cdot x) = \chi(g)f(x), \quad \forall g \in H\}$$

と定義する.

定義 3.2. $x \in \mathcal{N}$ が χ -semistable であるとは, ある $n > 0$ と, ある $f \in \mathbb{C}[\mathcal{N}]^{x^n}$ が存在して, $f(x) \neq 0$ となることである.

定義 3.3. $x \in \mathcal{N}$ が χ -stable であるとは, ある $n > 0$ と, ある $f \in \mathbb{C}[\mathcal{N}]^{x^n}$ が存在して, つぎの 3 条件を満たすことである.

- (i) $f(x) \neq 0$,
- (ii) H の $\mathcal{N}_f = \{y \mid f(y) \neq 0\}$ への作用が閉,
- (iii) x の stabilizer は有限個.

上で述べた定義に関連して

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\chi\text{-ss}) &:= \{x \in \mathcal{N} \mid x \text{ は } \chi\text{-semistable}\}, \\ \mathcal{N}(\chi\text{-s}) &:= \{x \in \mathcal{N} \mid x \text{ は } \chi\text{-stable}\} \end{aligned}$$

と書くことにする.

定理 3.4 (GIT). categorical quotient $\phi: \mathcal{N}(\chi\text{-ss}) \rightarrow Y$ が存在して, 次の 2 条件を満たす.

- (i) $\phi(x) = \phi(y) \iff \overline{Hx} \cap \overline{Hy} \neq \emptyset$,
- (ii) ある Y 上の豊富な直線束 L と $m > 0$ が存在して, $\phi^*L \cong (\mathcal{O}_{\mathcal{N}(\chi\text{-ss})})^{\otimes m}$ となる.

ただし, (i) の閉包は $\mathcal{N}(\chi\text{-ss})$ におけるものとする. この Y を $\mathcal{N} //^{\chi} H$ と書く.

この定理より, $\mathcal{N} //^{\chi} H$ の点は $\mathcal{N}(\chi\text{-ss})$ の closed orbit を parameterize することがわかる. そして

$$x \in \mathcal{N}(\chi\text{-s}) \iff \begin{cases} x \in \mathcal{N}(\chi\text{-ss}), \\ Hx \text{ が } \mathcal{N}(\chi\text{-ss}) \text{ で closed,} \\ \text{stabilizer が有限個,} \end{cases}$$

であるから, $\mathcal{N}(\chi\text{-s})/H$ の点は $\mathcal{N}(\chi\text{-s})$ の orbit を parameterize する.

例 3.5. $\mathcal{N} := \mathbb{C}^4 = \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 = \{(x_1, x_2, y_1, y_2)\}$ とする. $\lambda \in \mathbb{C}^*$ の \mathcal{N} への作用を

$$(x_1, x_2, y_1, y_2) \mapsto (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda^{-1} y_1, \lambda^{-1} y_2)$$

とする. 指標 χ_0 を

$$\chi_0: \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*, \quad \lambda \mapsto 1$$

とすると, \mathcal{N} のすべての点は χ_0 -semistable である. このことは $f = 1$ をとればわかる. このとき,

$$\mathcal{N} //^{\chi_0} \mathbb{C}^* = \text{Spec } \mathbb{C}[x_1, x_2, y_1, y_2]^{\mathbb{C}^*} = \text{Spec } \mathbb{C}[x_i, y_j] \cong \text{Spec } \mathbb{C}[s, t, u, v]/(su - tv)$$

となる.

次に, 指標 χ を

$$\chi: \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*, \quad \lambda \mapsto \lambda$$

とする. このとき

$$\mathcal{N}(\chi\text{-ss}) = \mathcal{N}(\chi\text{-s}) = \mathcal{N} \setminus (\{0\} \times \mathbb{C}^2)$$

となる。つまり $\{0\} \times \mathbb{C}^2$ の点だけが semistable ではない。すると、

$$\mathcal{N} //^X \mathbb{C}^* \rightarrow \mathcal{N} //^{\chi^0} \mathbb{C}^*, \quad \mathbb{P}^1 \mapsto 0$$

は small resolution になることがわかる。

同様にして χ の代りに χ^{-1} を考える。このとき

$$\mathcal{N}(\chi^{-1}\text{-ss}) = \mathcal{N}(\chi^{-1}\text{-s}) = \mathcal{N} \setminus (\mathbb{C}^2 \times \{0\})$$

となる。除いているところの余次元が 2 以上であることから、次のような birational map が存在する。

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{N} //^X \mathbb{C}^* & \overset{\text{(Atiya's flop)}}{\dashrightarrow} & \mathcal{N} //^{\chi^{-1}} \mathbb{C}^* \\ \text{small resolution} \searrow & & \swarrow \text{small resolution} \\ & \mathcal{N} //^{\chi^0} \mathbb{C}^* & \end{array}$$

定理 3.4 より $\mathcal{N} //^X \mathbb{C}^*$, $\mathcal{N} //^{\chi^{-1}} \mathbb{C}^*$ には、それぞれ直線束 $L_X, L_{\chi^{-1}}$ がある。

$$\mathcal{N}^0 := \mathcal{N} \setminus \{(\{0\} \times \mathbb{C}^2) \cup (\mathbb{C}^2 \times \{0\})\}$$

とすると、 $\mathcal{N}^0 \subset \mathcal{N}(\chi\text{-s})$, $\mathcal{N}^0 \subset \mathcal{N}(\chi^{-1}\text{-s})$ であるから、

$$L_X|_{\mathcal{N}^0 //^X \mathbb{C}^*} \cong L_{\chi^{-1}}^{-1}|_{\mathcal{N}^0 //^{\chi^{-1}} \mathbb{C}^*}$$

となる。両方とも標準束が自明であること等に注意すると、上の birational map が同型ではなく flop であることがわかる。(この場合は、いわゆる Atiya's flop になっている。)

4 我々の場合

我々の場合、

$$\mathcal{N} := \{B \in \text{Hom}_{\mathbb{C}[G]}(R, V \otimes_{\mathbb{C}} R) \mid B \wedge B = 0\},$$

$$H := \text{Aut}_{\mathbb{C}[G]} R / (\mathbb{C}^* \cdot \text{id}_R) \cong \prod_{\rho} GL(R_{\rho}) / \mathbb{C}^*$$

であった。

stability のデータとして、

$$\Theta := \{H \text{ の指標} \} \cong \left\{ \theta \in \text{Hom} \left(\bigoplus_{\rho} \mathbb{Z}[\rho], \mathbb{Z} \right) \mid \theta(R) = 0 \right\}$$

とすると、各 $\theta \in \Theta$ に対して、 G -constellation の θ -stability が定まる。

定理 4.1 (King). G -constellation F が θ -stable となるための必要十分条件は、 $0 \subsetneq E \subsetneq F$ となる任意の部分 $G \times \mathbb{C}[V]$ 加群 E に対して、 $\theta(E) > 0$ が成り立つことである。この条件は $\theta(E) > \theta(F)$ と同値である。

$\mathcal{M}_\theta := \mathcal{N}(\theta\text{-s})/H$, $\overline{\mathcal{M}}_\theta := \mathcal{N} //^\theta H$ とする. 自然な射影 $\overline{\mathcal{M}}_\theta \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_0$ がある. $X := \mathbb{C}^3/G$ とすると, 2次元のときは $\overline{\mathcal{M}}_0$ は X そのものであるが, 3次元のときは X は既約成分として $\overline{\mathcal{M}}_0$ に入っている.

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \overline{\mathcal{M}}_0 \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{M}_\theta & \longrightarrow & \overline{\mathcal{M}}_\theta \end{array}$$

\mathcal{M}_θ は割って作ったのであるが, それがいわゆるファインモジュライであるかどうかを確認しなければならない. \mathcal{M}_θ 上には, ベクトル束 $\mathcal{R} = \bigoplus_{\rho} \mathcal{R}_{\rho} \otimes \rho$ が存在する. G の自明表現の次元は1であるから, $\prod_{\rho} GL(R_{\rho})$ から H への射影は分裂し, これによって H は $R \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{N}}$ に作用する. よって, \mathcal{R} は \mathcal{N} 上の

$$R \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{N}} = \bigoplus_{\rho} R_{\rho} \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{N}} \otimes \rho$$

の descent である. \mathcal{R} には G の作用と $\mathbb{C}[V]$ の作用がある. よって \mathcal{R} は G -constellation の universal family と思うことができる. ゆえに \mathcal{M}_θ は universal family をもつモジュライ空間であると思うことができる.

ところで, 定理 3.4 より \mathcal{M}_θ 上には L_θ という豊富な直線束があった. 実は

$$L_\theta \cong \bigotimes_{\rho} (\det \mathcal{R}_{\rho})^{\otimes \theta(\rho)}$$

となる.

定義 4.2. $\theta \in \Theta$ が generic であるとは, θ -stable = θ -semistable となることである.

定理 4.3 (Bridgeland-King-Reid). θ が generic ならば, $\mathcal{M}_\theta \rightarrow \mathbb{C}^3/G$ は crepant resolution となる. さらに, 導来圏の間の圏同値

$$\Phi_\theta: D^b(\mathcal{M}_\theta) \xrightarrow{\sim} D^b(G\text{-Coh}(\mathbb{C}^3)) \quad \text{where} \quad \Phi_\theta(\alpha) = \mathbb{R}\Gamma(\alpha \otimes \mathcal{R})$$

がある.

問題. $Y \rightarrow X$ が projective crepant resolution ならば, ある generic な $\theta \in \Theta$ が存在して

$$Y \cong \mathcal{M}_\theta$$

となるか?

定理 4.4 (Craw-Ishii). $G \subset SL(3, \mathbb{C})$ が可換群であるならば, その答えは Yes! である.

この定理の証明の概略を述べる. この定理を示すには, \mathcal{M}_θ や Φ_θ が θ により, どのように変化するかを見てやれば良い. そのために $\Theta_{\mathbb{Q}}$ の chamber 構造を見る. chamber C は次のように書ける.

$$C = \left\{ \theta \in \Theta \left| \begin{array}{l} \text{(i) 任意の例外曲線 } l \text{ に対して } \theta(\Phi_C(\mathcal{O}_l)) > 0, \\ \text{(ii) 任意のコンパクト被約因子 } D \text{ と任意の既約表現 } \rho \text{ に対して,} \\ \theta(\Phi_C(\mathcal{R}_\rho^{-1} \otimes \omega_D)) < 0, \quad \theta(\Phi_C(\mathcal{R}_\rho^{-1} \otimes \mathcal{O}_D)) > 0 \end{array} \right. \right\}.$$

ここで (i) の不等式は, L_θ が豊富であるための条件である.

$\theta \in C$ のとき, \mathcal{M}_θ は C にのみ依存するので, これを \mathcal{M}_C と書くことにする. X の任意の projective crepant resolution は G -Hilb から flop の列により得られるので, Y の任意の flop Y' に対して,

$$Y' \cong \mathcal{M}_C$$

となる chamber C が存在することを言えば良い.

flop したい射影直線 l についての (i) の不等式が C の wall を定めるとき, Φ_C が圏同値である事等を使うと, その wall の前後で stability の変わる G -constellation はちょうど l の上に載っているものであることがわかる. すると, その wall を通ることにより, 例 3.5 のように flop を起こす事ができる.

l についての (i) の不等式が C の wall を定めないうち (すなわちそれが C を定める不等式の極小系に含まれないとき), (ii) の形の不等式に対応する wall を通る際に Fourier-向井変換 Φ_C がどのように変化するか等を観察すると, いつかは l に対する (i) の形の不等式に対応する wall が現れる事がわかる.

このように C を移って行くことにより, 任意に与えられた flop をする事ができる.

参考文献

- [1] 石井亮, G -Hilb のフロップと Fourier-向井変換, 数理解析研講究録 No. 1348 「Lie Theory のひろがり」と新たな進展」.
- [2] 石井亮, G -Hilb のフロップと導来圏の同値, 第 48 回代数学シンポジウム報告集 (2003), 44–51.
- [3] J. Bertin, D. Markushevich, Singularités quotients non abéliennes de dimension 3 et variétés de Calabi-Yau (French) [Three-dimensional nonabelian quotient singularities and Calabi-Yau manifolds], Math. Ann. 299 (1994), no. 1, 105–116.
- [4] T. Bridgeland, A. King, and M. Reid, The McKay correspondence as an equivalence of derived categories, J. Amer. Math. Soc. 14 (2001), 535–554.
- [5] H. Cassens, P. Slodowy, On Kleinian singularities and quivers. Singularities (Oberwolfach, 1996), 263–288, Progr. Math., 162, Birkhäuser, Basel, 1998.
- [6] A. Craw, A. Ishii, Flops of G -Hilb and equivalences of derived categories by variation of GIT quotient, Duke Math. J. 124 (2004), 259–307.
- [7] Y. Ito, Crepant resolution of trihedral singularities and the orbifold Euler characteristic, Internat. J. Math. 6 (1995), no. 1, 33–43.

- [8] Y. Ito, Gorenstein quotient singularities of monomial type in dimension three, *J. Math. Sci. Univ. Tokyo* 2 (1995), no. 2, 419–440.
- [9] A. D. King, Moduli of representations of finite-dimensional algebras, *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)* 45 (1994), 515–530.
- [10] P. Kronheimer, The construction of ALE spaces as hyper-Kähler quotients, *J. Differential Geom.* 29 (1989), 665–683.
- [11] D. G. Markushevich, M. A. Olshanetsky, A. M. Perelomov, Description of a class of superstring compactifications related to semisimple Lie algebras, *Comm. Math. Phys.* 111 (1987), no. 2, 247–274.
- [12] D. Markushevich, Resolution of \mathbb{C}^3/H_{168} , *Math. Ann.* 308 (1997), no. 2, 279–289.
- [13] D. Mumford, *Geometric invariant theory*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1965.
- [14] I. Nakamura, Hilbert schemes of abelian group orbits, *J. Algebraic Geom.* 10 (2001), 757–779.
- [15] S.-S. Roan, On the generalization of Kummer surfaces, *J. Differential Geom.* 30 (1989), no. 2, 523–537.
- [16] S.-S. Roan, On $c_1 = 0$ resolution of quotient singularity, *Internat. J. Math.* 5 (1994), no. 4, 523–536.
- [17] S.-S. Roan, Minimal resolutions of Gorenstein orbifolds in dimension three, *Topology* 35 (1996), no. 2, 489–508.
- [18] A. V. Sardo-Infirri, Resolutions of orbifold singularities and the transportation problem on the McKay quiver, preprint, arXiv:alg-geom/9610005.
- [19] M. Thaddeus, Geometric invariant theory and flips, *J. Amer. Math. Soc.* 9 (1996), 691–723.

