

「超ケーラー多様体の双有理変換群」

小木曾啓示氏（東京大学大学院数理科学研究科[†]）

2006年2月17日

瀧 真語（名大・多元数理）記

「代数幾何学勉強会」2006年2月16日～2月17日
於 名古屋大学大学院多元数理科学研究科

平成17年度日本学術振興会科学研究費若手研究(B)
（課題研究番号 15740019, 代表 伊藤 由佳理）

[†]2006年4月より慶應義塾大学経済学部

超ケーラー多様体の双有理変換群

ABSTRACT. 2003年に「Salem多項式と呼ばれる多項式に着目することで、 $K3$ 曲面の対称性を研究する。」という、それ以前にはなかった新しい視点が複素力学系の専門家であるMcMullen氏により与えられた。この視点に立つことで見えてくる $K3$ 曲面、超Kähler多様体の自己同型について解説したい。

CONTENTS

1. $K3$ surfaces	43
2. Salem polynomials	45
3. Example of $K3$ surfaces	47
4. Another applications	50
References	54

1. $K3$ SURFACES

超Kähler多様体に対する結果を紹介することが目標であるが、これらをまず $K3$ 曲面の場合に示してみると、その議論のなかで $K3$ 曲面の特徴はほとんど用いていないことに気付く。このようなことから、本稿で紹介する結果は簡単のために $K3$ 曲面の結果として書かれているが、実際は超Kähler多様体の場合でも同様に成り立つ。

Definition 1.1. M を連結でコンパクトな2次元複素多様体とする。 M が単連結で、至る所で消えない大域正則2形式を持つとき $K3$ 曲面という。

$K3$ の名の由来は「3人の数学者Kummer, Kähler, Kodairaの頭文字を取り、登頂困難であったカラコラム山脈の $K2$ にちなんだ」と言われている。このように $K3$ 曲面の由来としてKählerの名が挙がるが、次の定理の主張が示されたのは1980年に入ってからである。

Date: 2006/3/27.

Theorem 1.2 (Siu). $K3$ 曲面は Kähler 多様体である.

$K3$ 曲面は 20 次元のモジュライを持ち, そのうち射影的なものは 19 次元の加算和である. つまり射影的なものだけを考えていると, $K3$ 曲面の全貌は捉えにくくなることがある. 従って今回本稿で扱う $K3$ 曲面は「射影的」という仮定をしていない. また, 前半で扱う話では非射影的な $K3$ 曲面が中心である.

Example 1.3. 添加公式により, \mathbb{P}^3 内で $X_0^4 + X_1^4 + X_2^4 + X_3^4 = 0$ で定義される超曲面は射影的な $K3$ 曲面である.

Hodge 分解によって $H^2(M, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{C} = H^{2,0}(M) \oplus H^{1,1}(M) \oplus H^{0,2}(M)$ を得る. ω_M を M 上の至る所で消えない大域正則 2 形式とすると, $H^{2,0}(M) = \mathbb{C}\omega_M$, $H^{0,2}(M) = \mathbb{C}\bar{\omega}_M$ である. また, カップ積 $(*, *)$ によって

$$(H^{1,1}(M), \omega_M) = (H^{1,1}(M), \bar{\omega}_M) = 0$$

となり,

$$(\omega_M, \omega_M) = (\bar{\omega}_M, \bar{\omega}_M) = 0, (\omega_M, \bar{\omega}_M) > 0$$

であることもわかる.

さらに $H^2(M, \mathbb{Z})$ はカップ積との組を考えることによって格子の構造が入る. この格子は Hirzebruch の符号定理から符号が $(3, 19)$ であること, Poincaré 双対定理から unimodular であること, Wu の公式から偶格子であることがわかる. 不定符号で unimodular な偶格子は階数と指数によって同型をのぞいて一意的に定まる. 特に, $H^2(M, \mathbb{Z})$ を格子として見ると $U^{\oplus 3} \oplus E_8^{\oplus 2}$ と同型である. この格子は $K3$ 格子と呼ばれる.

Remark 1.4. ここで U は \mathbb{Z}^2 とその上の行列 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ によって定義される双線型形式との組で定まる格子, E_8 は Dynkin 図形 E_8 から定まる, 符号が $(0, 8)$ で負定値な格子である.

$T(M) \otimes \mathbb{C}$ が ω_M を含む $H^2(M, \mathbb{Z})$ の最小の原始部分加群 $T(M)$ を M の超越格子と呼ぶ.

Remark 1.5. $T(M)$ の自由基底が $H^2(M, \mathbb{Z})$ の自由基底に伸びる, という事が「原始」の定義である. またこれは $H^2(M, \mathbb{Z})/T(M)$ にねじれがない, という事と同値である.

カップ積に関する $T(M)$ の直交補空間: $NS(M) = T(M)_{H^2(M, \mathbb{Z})}^\perp$ を Néron-Severi 格子という. M は $K3$ 曲面であるから, 完全列 $0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{O}_M \rightarrow \mathcal{O}_M^* \rightarrow 0$ によって $NS(M) = c_1(\text{Pic}(M)) \simeq \text{Pic}(M)$ となる. さらに Lefschetz の定理によって $NS(M) = H^{1,1}(M) \cap H^2(M, \mathbb{Z})$ が成り立つ.

さて, ここで M の Picard 数を $\rho := \text{rank } NS(M)$ と定める. $NS(M)$ は $H^2(X, \mathbb{Z})$ の部分加群であるから $\rho \leq 22$ である. しかし, 実際は $T(M) \otimes \mathbb{C} \supset \mathbb{C}\omega_M, \mathbb{C}\bar{\omega}_M$ であるので, $0 \leq \rho \leq 20$ となる. なお, Example 1.3 の $K3$ 曲面の Picard 数 20 である.

Remark 1.6 (符号). $NS(M)$ の符号は $(1, 0, \rho-1)$, $(0, 1, \rho-1)$, $(0, 0, \rho-1)$ の 3通りある. それぞれの場合を hyperbolic, parabolic, elliptic という. これら 3つの場合に対して $T(M)$ の符号は $(2, 0, 20-\rho)$, $(2, 1, 19-\rho)$, $(3, 0, 19-\rho)$ である. ここで符号 $(*, *, *)$ は左から正の固有値の数, 0 の固有値の数, 負の固有値の数を表す.

parabolic の場合は $NS(M) \cap T(M) = \mathbb{Z}v$ と共通部分が現れることに注意する. また, Hodge の指数定理より, M が射影的な場合は hyperbolic の場合に対応する.

一般に Picard 数が大きいということは, 直線束が沢山あり, 曲線が豊富ということからある意味で対称性が高いとすることができる. 後で述べるように射影的でないにも関わらず, 非常に対称性が高い $K3$ 曲面が存在する.

2. SALEM POLYNOMIALS

まず Salem 多項式を導入する. この Salem 多項式は $K3$ 曲面と関連付けることができる.

Definition 2.1. $a > 1$ を充たす実数 a を考える. a が代数的整数: すなわち整数係数のモニック多項式の根になるものであり, a の共役 (最小多項式の根) が $1/a$ か $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ 上にあるとき, a を Salem 数と呼ぶ.

Example 2.2. 1 の冪根は代数的整数であり, その共役は S^1 上にある.

実はこれの逆が成り立つ:

Theorem 2.3 (Kronecker). 共役がすべて S^1 上にある代数的整数は 1 の冪根である.

この定理は代数的整数の整数ということが非常に大切である. 古くに「整数」という条件を無視し, 単に代数的数に対して「共役の大きさが 1 であるから, 1 の冪根である。」という事を用いて誤った群の分類を行ってしまった人もいる.

Example 2.4. $\begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{pmatrix}$ の固有値の大きさは 1 であるが, 無限位数である.

さて, 1 の冪根の最小多項式を円周等分多項式という. さらに原始 $d(\geq 3)$ 乗根 z がその解であるとき, $1/z = \bar{z}$ も解である. すなわちこのとき円周等分多項式は相反多項式 (係数を上から読んでも下から読んでも同じになっている) である.

Definition 2.5. Salem 数の最小多項式を Salem 多項式という.

Salem 多項式は定義から「1 より大きな解 1 つを持ち, 既約であり monic な相反多項式」と同値である.

Example 2.6. 2 次の Salem 多項式を構成する. Salem 多項式は相反多項式なので

$$f(x) = x^2 - cx + 1 \quad c \in \mathbb{Z}$$

と表すことができる. このとき $f(x)$ が区間 $(0, 1)$, $(1, \infty)$ に 1 つずつ根を持つということは $f(x) < 0$ と同値である. つまり $c \geq 3$ のとき $f(x)$ は Salem 多項式である.

このように次数を抑えても Salem 多項式は沢山存在する.

さて, $f(x)$ を $2d$ 次の相反多項式とする. このとき $f(x) = x^d g(x+1/x)$ となる $g(y) \in \mathbb{Z}[y]$ が存在する.

Example 2.7. 6 次の Salem 多項式を構成する. a を $a \geq 3$ を満たす整数とする.

$$g(y) = (y^2 - 4)(y - a) - 1$$

は区間 $(-2, 2)$ に 2 つ, $(2, \infty)$ に 1 つ根を持つ.

実数 α に対し, $\alpha > 1$ と $\alpha + 1/\alpha \in (2, \infty)$ は同値であり, $\beta \in S^1 \setminus \{\pm 1\}$ と $\beta + 1/\beta (= \beta + \bar{\beta}) \in (-2, 2)$ は同値である. これを用いると

$$\begin{aligned} f_6(x) &:= x^3 g(x + 1/x) \\ &= x^6 - ax^5 - x^4 + (2a - 1)x^3 - x^2 - ax + 1 \end{aligned}$$

は $(1, \infty)$ に 1 つ, $(0, 1)$ に 1 つ根を持ち, 残りの根は S^1 上に持つ.

そして $(y^2 - 4)(y - a)$ が 1 になるような整数 y は存在しないことから $f_6(x)$ が \mathbb{Z} 上既約であることがわかる. 従って $f(x)$ は 6 次の Salem 多項式である.

3. EXAMPLE OF K3 SURFACES

上で用意した Salem 多項式を用いて $K3$ 曲面の具体的な例を構成する.

a を $a \geq 3$ を充たす整数とし, $A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ とする. $\det A =$

1 であるから, A は自己同型 $A: \Lambda(= \mathbb{Z}^4) \rightarrow \Lambda$ を定める. A の固有多項式は $t^4 + at^2 + t + 1$ であり, これが実数根を持たないことはグラフを描けば容易にわかる. 従ってこの固有値を $\{\alpha, \bar{\alpha}, \beta, \bar{\beta}\}$ と表すことができる.

$|\alpha| = |\beta| = 1$ とすると Theorem 2.3 によって A の固有多項式は円周等分多項式の積として表される. しかし式の形から A の固有多項式: $t^4 + at^2 + t + 1$ を割り切るような円周等分多項式は存在しない. これより $|\alpha| > 1 > |\beta|$ と仮定してよい.

次に $\Lambda \otimes \mathbb{C}$ を固有空間分解する.

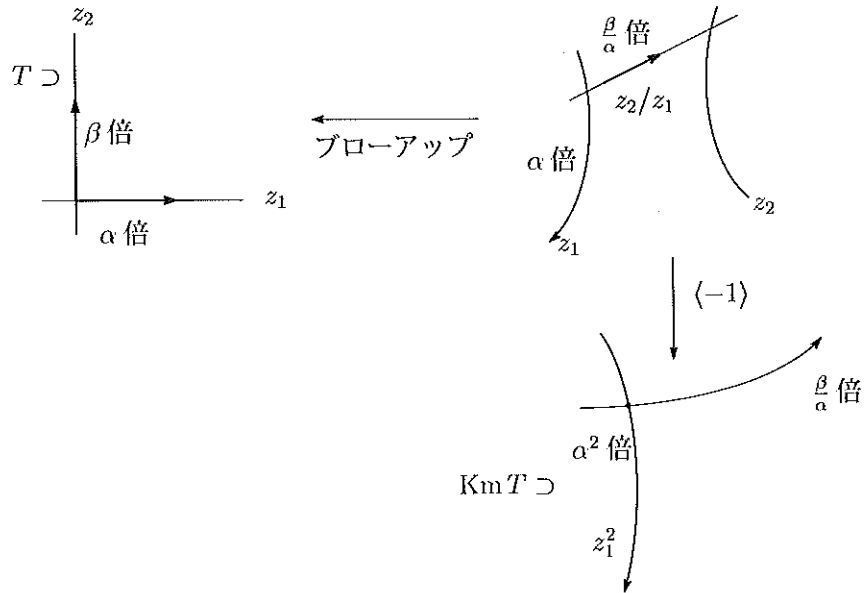
$$\Lambda \otimes \mathbb{C} = V(\bar{\alpha}) \oplus V(\bar{\beta}) \oplus V(\alpha) \oplus V(\beta).$$

$\Lambda \otimes \mathbb{C} \supset \Lambda \otimes \mathbb{R} \supset \Lambda$ であるから, 射影 $P: \Lambda \otimes \mathbb{C} \rightarrow V(\bar{\alpha}) \oplus V(\bar{\beta}) = \mathbb{C}^2$ を考えれば $V(\bar{\alpha}) \oplus V(\bar{\beta}) \supset P(\Lambda \otimes \mathbb{R}) \supset P(\Lambda)$ である. $P(\Lambda \otimes \mathbb{R})$ は \mathbb{R} 上 1 次独立になるので, $P(\Lambda)$ は rank = 4 の離散格子である. これを改めて Λ と記す.

$T := (V(\bar{\alpha}) \oplus V(\bar{\beta})) / \Lambda$ とすると, T は 2次元の複素トーラスになり, A は T の自己同型 $f : T \rightarrow T$ を導く. さらに $H^2(T, \mathbb{Z}) = \Lambda^2 \Lambda^*$ であることがわかる. そこで固有値を $\{\alpha\bar{\alpha}, \alpha\beta, \alpha\bar{\beta}, \bar{\alpha}\beta, \bar{\alpha}\bar{\beta}, \beta\bar{\beta}\}$ とすると, α, β の仮定から $|\alpha\bar{\alpha}| > 1, |\alpha\beta| = |\alpha\bar{\beta}| = |\bar{\alpha}\beta| = |\bar{\alpha}\bar{\beta}| = 1, |\beta\bar{\beta}| < 1$ である. また固有多項式は Example 2.7 で構成した $f_6(x)$ である.

$V(\bar{\alpha}), V(\bar{\beta})$ の座標をそれぞれ z_1, z_2 とすると, $f^* dz_1 \wedge dz_2 = \alpha\beta dz_1 \wedge dz_2$ となる. なお $\alpha\beta$ は作り方から 1 の冪根ではないことに注意する.

こうして Salem 多項式を固有多項式に持つような複素トーラスの自己同型を構成することができた. そこで Kummer 曲面を作る事で $K3$ 曲面を構成する. $\text{Km} T$ を $T / \langle -1 \rangle$ の極小特異点解消 (minimal resolution) とし, f から定まる $\text{Km} T$ の自己同型を $\bar{f} : \text{Km} T \rightarrow \text{Km} T$ とする.



今 $\text{Km} T$ は非射影的であり, \bar{f} の $H^2(\text{Km} T, \mathbb{Z})$ への作用の固有多項式は $f_6(x) \cdot (\text{円周等分多項式})$ という形をしている. ここでの円周等分多項式は 16 本の \mathbb{P}^1 への置換で定まるものである.

Salem 多項式がこのような形で現れたのは偶然ではない。それを主張するのが次の定理である。原型は McMullen によるものであるが、次はより一般的に書き換えたものである。

Theorem 3.1. L を符号が $(3, n)$ で非退化な格子とする。これに抽象的な Hodge 分解

$$L_{\mathbb{C}} = L^{1,1} \oplus L^{2,0} \oplus L^{0,2}$$

を与える。ここで $(L^{1,1}, L^{2,0}) = (L^{1,1}, L^{0,2}) = 0$ を充たし、 $L^{2,0} = \mathbb{C}\omega$ 、 $L^{0,2} = \mathbb{C}\bar{\omega}$ である ($(\omega, \omega) = 0$, $(\omega, \bar{\omega}) > 0$)。これらを重さ 2 の Hodge 構造という。

さて $L^{1,1} = (L_{\mathbb{R}}^{1,1}) \otimes \mathbb{C}$ であり、 $(L_{\mathbb{R}}^{1,1})$ の符号は $(1, n)$ となる。従って $(L_{\mathbb{R}}^{1,1}) \cap \{x^2 > 0\}$ は 2 つの連結成分を持つ。このとき 1 つの連結成分を取ることを「正の錐を選ぶ」という。そこで

$$O_{\text{Hodge}}(L)^+ := \{\text{Hodge 構造と正の錐を保つ } L \text{ の等長写像}\}$$

と定めると、これは合成によって群になる。

$g \in O_{\text{Hodge}}(L)^+$ とすると、固有多項式 $\Phi_g(t)$ は

- (i) 円周等分多項式の積
- (ii) 1 つの Salem 多項式と幾つかの円周等分多項式の積

の何れかである。

また L を符号が $(1, n)$ の格子として $O_{\text{Hodge}}(L)^+$ の元に対しても同様の結果が得られる。

Section 1 で述べたように、 $K3$ 曲面の 2 次元コホモロジー群は重さ 2 の Hodge 構造を持った。従って $K3$ 曲面の自己同型を 2 次元コホモロジー群への作用を通して調べるときに、Salem 多項式や円周等分多項式は本質的な役割を果たしてくれる。

Lemma 3.2. $E \simeq \mathbb{Z}^r$, G を $GL(E)$ の部分群でアーベル群とする。また、 $g \in G$ の固有多項式 $\Phi_g(t)$ は上の (i), (ii) の形であり、1 を固有値に持つ G の元は id のみ、と仮定する。

このとき $G \setminus \{\text{id}\}$ に対し $\Phi_g(t)$ は

- (1) 1 つの円周等分多項式の冪
- (2) Salem 多項式

である。さらに (1) のとき $G \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, (2) のとき $G \simeq \mathbb{Z}$ となる。

Example 3.3 (McMullen). $22(= K3$ 曲面 M の $H^2(M, \mathbb{Z})$ の rank) 次の Salem 多項式

$$S_{22} = x^{22} + x^{21} + x^{19} - 2x^{18} - 3x^{17} - 3x^{16} - 2x^{15} + 2x^{13} + 4x^{12} + 5x^{11} + \text{低次の項}$$

を考える。このとき $f_{|H^2(M, \mathbb{Z})}^*$ の固有多項式 $= S_{22}$ を充たす (M, f) が存在する。ここで f は $K3$ 曲面 M の自己同型である。

S_{22} は既約なので, $T(M) = H^2(M, \mathbb{Z})$ となる。すなち M の Picard 数 $\rho(M) = 0$ である。さらに f の固定点集合 $M^f = \{P\}$ は横断的であり, P の近傍 $P \subset \Delta_{(z_1, z_2)}^2 \subset M$ で $f^*(\Delta_{(z_1, z_2)}^2) = \Delta_{(z_1, z_2)}^2$ を充たし, $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ と局所対角化される。

また $|\alpha| = |\beta| = 1$ であり, α と β は乗法的独立: $\alpha^m \beta^n = 1$ ならば $(m, n) = (0, 0)$ である。この例と上で構成した Kummer 曲面の例との違いがこれである。

4. ANOTHER APPLICATIONS

Salem 多項式は例を構成だけではなく, 自己同型を調べて行く上でも有用である。

Theorem 4.1. M を射影的な $K3$ 曲面, G を $\text{Aut } M$ の部分群とする。このとき G は rank が高々 $\max\{1, \rho(M) - 2\}$ の準アーベル群であるか, $G \supset \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ となる。

Definition 4.2. G が rank $= r$ の準アーベル群とは, $[G : H] < \infty$ を充す G の部分群 H と, H の正規部分群であり有限なもの (N とする。) が存在し,

$$1 \longrightarrow N \longrightarrow H \longrightarrow \mathbb{Z}^r \longrightarrow 0$$

が完全であるときをいう。

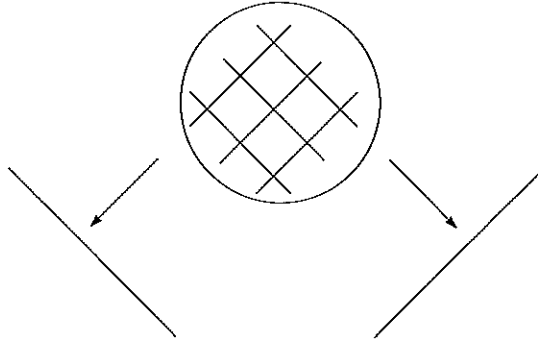
この r は well-defined であり, 有限指数や有限余指数の群に置き換える操作で不変である。

Example 4.3. $\left\{ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & c & \\ 0 & 1 & b & \\ 0 & 0 & 1 & \end{array} \right) \mid a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}$ は準アーベル群でもなく,
 $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ も含まない.

Example 4.4.

(1) 全てのファイバーが既約である楕円 $K3$ 曲面 $f : M \rightarrow \mathbb{P}^1$ を考える. このとき Mordell-Weil 群 $M.W.(f)$ が定まるが, $M.W.(f)$ は $\text{rank} = \rho - 2$ の準アーベル群である.

(2) $f_i : M \rightarrow \mathbb{P}^1$ を異なる楕円ファイバー ($i = 1, 2$) とし, $\text{rank } M.W.(f_i) > 0$ とする. このとき無限位数の元 $\varphi_i \in M.W.(f_i)$ を取ると, $\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle \subset \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ を充たす.



(3) $\rho = 20$ のときは (2) が必ず成り立つ. ($\rho = 19$ ならば $\text{Aut } M < \infty$ の例がある. (Nikulin, Kondō))

4.1. 定理の証明のアイデア. Theorem 4.1 の証明の概略を述べる.

G はそれぞれ $NS(M)$ と $T(M)$ を保つので $G \rightarrow O(NS(M)) \times O(T(M))$ という表現を持つ.

Proposition 4.5. $O(T(M))$ への像は有限群となる.

Proof. $T(M)_R = \mathbb{R}\langle \text{Re}\omega, \text{Im}\omega \rangle \oplus (\star)^\perp$ とすると, $\mathbb{R}\langle \text{Re}\omega, \text{Im}\omega \rangle$ は正定値であり, 直交補空間 $(\star)^\perp$ は負定値である. 従って G は unitary 群に含まれ, コンパクト性と離散性から有限群であることがわかる. \square

位相的な方法を用いないで, 純粋に代数的に示すこともできる ([O2]). Proposition 4.5 から $G \hookrightarrow O(NS(M))$ と仮定して良い. 今 M は射影的なので $NS(M)$ は hyperbolic であることに注意する. すなわち定理を

示すには hyperbolic な直交群の部分群はどのような性質を持つか、ということ調べれば良いのである。

Theorem 4.6 (Tits). k を標数 0 の体とする. $GL(n, k)$ の部分群 G とすると, G は virtually solvable 又は $G \supset \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ を充たす.

「virtually solvable」とは有限指数の部分群が存在し, それが可解 (solvable) であるときを言う.

Remark 4.7. この定理は $k = \mathbb{Z}$ のときはアルキメデス付値を用いる事で比較的容易に証明することができる ([O2]). しかし k が体である場合には難しい.

G を virtually solvable であり, L を符号が $(1, r)$ である hyperbolic 格子とする. このとき「 G が $O(L) \supset G$ を充たすとき, G は準アーベル群であり $\text{rank} \leq \max\{1, \rho - 2\}$ である。」が成り立てば良い.

これを示す. 結論は有限指数の部分群を取る事によって変わらないので, G は可解群として良い. さらに群を扱い易くするために Zariski 閉包を $\bar{G}^{\text{Zar}} \subset O(L) \subset GL(L_{\mathbb{C}})$ で取る. 可解なものの Zariski 閉包は再び可解であるので, \bar{G}^{Zar} は可解である. さらに連結成分 $(\bar{G}^{\text{Zar}})^{\circ}$ を取ると, $[\bar{G}^{\text{Zar}} : (\bar{G}^{\text{Zar}})^{\circ}] < \infty$ である. 従って G を $G = (\bar{G}^{\text{Zar}})^{\circ} \cap G$ と置き換えてよい. つまり連結な可解部分群になっているのである.

Theorem 4.8 (Lie-Kolchin). \bar{G} を連結な可解群とする. このとき固有値 $v \in L_{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$ が存在し, $gv = \alpha(g)v$ ($g \in G$) を充たす.

すなわち連結な可解群は上三角行列に埋め込む事が出来る.

「(a): $T(M)$ と ω_M 」と「(b): $\otimes \mathbb{C}$ のとき v を含む L の最小の原始加群と v 」を比較し, 通常 $K3$ 曲面において (a) 対して行う議論を (b) に対して行う.

$L \otimes \mathbb{C}$ が v を含む L の最小の原始加群を L_v と記す. このとき次の 4 つの可能性が生じる.

- (1) L_v :elliptic
- (2) L_v :parabolic
- (3) L_v :hyperbolic かつ $L_v \subsetneq L$
- (4) $L_v = L$

以下 r に関する帰納法で示す. (1) と (3) のときは $G \subset O(L_v) \times O(L_v^\perp)$ となる. このとき L_v^\perp は hyperbolic であり, $\text{rank } G < \text{rank } L$ であるから帰納法を用いる事が出来る. (2) のときは L_v には $(u^2) = 0$ となる原始元 ($\neq 0$) が ± 1 を除き 1 つに定まる. G は \pm を除いて保存される. これより $\text{rank } G \leq \max\{1, \text{rank } L_v - 1\} \leq \max\{1, \text{rank } L - 2\}$ となる.

残りの (4) の場合を考察してやればよい.

Lemma 4.9.

- (1) $\alpha: G \rightarrow \mathbb{C}^*$ は単射. (すなわち G はアーベル群)
- (2) 1 を固有値に持つ g の元は id のみ.

Proof. (1) $\alpha(g) = 1$ とすると, $g(v) = \alpha(g)v$ なので v は $L_{\mathbb{C}}$ の g 不変空間 $(L_{\mathbb{C}})^g$ に含まれる. $(L_{\mathbb{C}})^g = (L^g)_{\mathbb{C}}$ であるから, $L_v = L$ の最小性によって $L^g = L$ である. すなわち $g = \text{id}$ である.

(2) も同様. □

Lemma 3.2 により $G \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ または $G \simeq \mathbb{Z}$ であり, 連結性から $G = \{1\}$ または \mathbb{Z} である.

以上によって Theorem 4.1 が証明される.

4.2. 主補題の証明. Lemma 3.2 を証明で Salem 多項式という条件が効いていく Main の部分について説明する.

すべての $\Phi_g(x)$ ($g \neq 1$) が Salem 多項式とする. このとき 1 より大きいただ 1 つの固有値を $C(g)$ と記す. $S := \{C(g) | g \in G \setminus \{1\}\}$ とする. g_0 を一つとり, $S \cap (1, C(g_0)]$ を考える. ここに属する Salem 数は上から抑さえられている. 次数と S^1 上にない固有値の大きさも抑さえられているから, 固有値の基本対称式の値も抑さえられてしまう. つまり Salem 多項式の係数が抑さえられる. Salem 多項式の係数は整数であるから, これは Salem 多項式が有限個であることを意味する. 従って $S \cap (1, C(g_0)]$ は有限集合である. 故に最小値が存在する. これを $C(g_1)$ とする.

$\Phi_g(x)$ ($g \neq 1$) は対角化可能であり, 特に同時対角化可能である.

$g \in G \setminus \{1\}$ を $gg_1 \neq 1, g^{-1}g_1 \neq 1$ と $1 < C(g_1) \leq C(g)$ である. このとき $1 \leq C(g)C(g_1)^{-m}, C(g)C(g_1)^{-(m+1)} < 1$ を満たす m が存在する.

今 $C(g)C(g_1)^{-m} = C(gg_1^m)$, $C(g)C(g_1)^{-(m+1)} = C(gg_1^{-(m+1)})$ となっている. (必要ならば g を g^{-1} に取り替える.)

この結果 $C(gg_1^{-(m)}) < C(g_1)$ であり, $C(g_1)$ の最小性から $gg_1^{-m} = \text{id}$ である. 従って $g = g_1^m$ である.

Remark 4.10. 今回の話を $K3$ 曲面ではなく, 超 Kähler とすることができる. $K3$ 曲面では $G_1 \rightarrow O(NS(M)) \times O(T(M))$ は埋め込みである. 超 Kähler では必ずしも埋め込む事はできないが,

$$0 \rightarrow N \rightarrow G \rightarrow O(NS(M)) \times O(T(M))$$

という完全列があり, N は有限群である. 準アーベル群などは有限群の違いは無視できるので, 超 Kähler でも問題はない.

REFERENCES

- [M] C.T. McMullen, Dynamics on $K3$ surfaces: Salem numbers and Siegel disks., *J. Reine Angew. Math.* **545** (2002), 201–233.
- [O1] K. Oguiso, Tits alternative in hyperkahler manifolds, *Math. Research Letters* **13** (2006) 307–316. (dedicated to Professor Yukihiko Namikawa on the occasion of his 60-th birthday, available at <http://MRLonline.org> most recent issue)
- [O2] 小木曾啓示, Salem 多項式と複素 $K3$ 曲面の自己同型, (向井, 金銅, 松木先生達との本の原稿, 準備中).