「リジッド幾何学超速成コース」

加藤　文元氏（京都大学大学院理学研究科数学教室）

2006 年 2 月 17 日

内田　幸寛（名大・多元数理）記

「代数幾何学勉強会」2006 年 2 月 16 日〜2 月 17 日
於　名古屋大学大学院多元数理科学研究科

平成 17 年度独立行政法人学術振興会科学研究費若手研究 (B)
（課題研究番号　15740019, 代表　伊藤　由佳理）

概要

Kontsevich によってミラー対称性にリジッド幾何学が応用される可能性が開かれました．まだ可能性ですが，でもなにしろ Kontsevich が言うくらいですから信憑性はあるのですよ．そもそもリジッド幾何学というのは例えば p-進体といった非アルキメデス的付値体上の幾何学で，すぐれて数論的な応用に長けているものだと思ってましたが，それがミラー対称性のような数理物理的な話に応用があるというのは非常に魅力的な話です．そこで今回私は「リジッド幾何学超速成コース」と題して，主に何故ミラー対称性に応用出来るのか，というポイントを主軸にリジッド幾何学の基本的な考え方をお話ししようと思います．

1 SYZ-picture

高橋氏の講演で述べられた Strominger-Yau-Zaslow の予想から話を始める．

M を複素 n 次元 Calabi-Yau 多様体で，limit に近いものとする．このとき，Strominger-Yau-Zaslow [5] の予想によれば，

$$
\begin{tikzcd}
M \arrow[dr, "\pi", "\text{“fibration”}"'] & & M^{\vee} \ \text{mirror} \arrow[dl, "\text{dual torus fibration}"] \\
& B &
\end{tikzcd}
$$

となるような実 n 次元多様体が存在する．ここで，π のファイバーは「ラグランジアントーラス」で与えられる．

これに従って $M^{\vee}$ を作るには多くの問題がある．ファイバーの中には特異ファイバーが存在し，それがミラー $M^{\vee}$ に「量子効果」を及ぼす．この効果は大域的な影響を及ぼすため，非特異なところだけ先に作っておいて局所的な議論で全体を作るということができない．

ミラーを作るには貼り合わせを行うのであるが，大まかに言って次の 2 つの問題点がある．

1. 収束の問題．
2. cocycle condition の問題．

このうち，cocycle condition のほうはまだ楽かもしれない．[2] の §10 は回避したと主張しているようである．そこで以下，収束の問題を考える．

2 $M^{\vee}$ の作り方

ミラー $M^{\vee}$ を作るために，HMS (Homological Mirror Symmetry) を見る．

A 模型側のブレーンは組 $(L, \mathscr{L})$ である．ここで，$L \subset M$ はファイバーであり，$\mathscr{L}$ は flat U(1)-bundle である．$(L, \mathscr{L})$ に対応する B 模型側のブレーン $\mathscr{E}(L, \mathscr{L})$ は $M^{\vee}$ の点の摩天楼層である．従って点の周りの局所構造は $(L, \mathscr{L})$ の「変形」で決まる．この変形は Floer 複体の変形である．$(L, \mathscr{L})$ からモジュライ空間 $\mathscr{M}_{(L,\mathscr{L})}$ が定まる．これは「だいたい」形式スキームである．このとき，

$$M^{\vee} = \bigcup \mathscr{M}_{(L,\mathscr{L})}$$

によって $M^{\vee}$ が作れる．ここで量子効果が現れる．貼り合わせる際に使われる変換関数は冪級数になる．そ

記述者注：「概要」はプログラムに記載されているアブストラクトと（句読点を除いて）同一のものである．なお，本講義録と同じテーマについて [1] に加藤氏本人によるより詳しい解説があるので参考にしていただきたい．

こでこれが収束するかという問題が発生する．リジッド幾何は収束の問題を回避するために有用であると思われる．

3 $\mathbb{P}^1$ を作ろう！

例として，$\Lambda = \mathbb{C}[[t]]$, $K = \operatorname{Frac}\Lambda(= \mathbb{C}((t)))$ として，$\mathbb{P}^1_K$ を作ることを考える．ここで，Λ は完備離散付値環であり，したがって Noether 環であるが，$M^\vee$ を作るためには Noether でない環を使わなければならないことを注意しておく．

(1) $\operatorname{Spec} K[x]$ と $\operatorname{Spec} K[w]$ を $x = w^{-1}$ という関係式で，$\operatorname{Spec} K[x, x^{-1}] = \operatorname{Spec} K[w, w^{-1}]$ に沿って貼り合わせる．この場合，何も問題が起きず幸せである．しかし，これは虫が良すぎる．一般にはこのようなうまいパラメータが選べるとは限らない．

(2) パラメータの選び方が悪くて，x が w^{-1} の冪級数でしか与えられなかった場合を考える．このとき，

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i(t) w^{-i}$$

となる．ただし，$a_i(t) \in K$, $a_1(t) \neq 0$ とする．さらに，以下のような仮定をする．

仮定 1. 右辺は t-進位相で収束する．

もし t-進位相で収束しない場合は，あきらめてパラメータを取り直してほうが良いと思われる．t-進位相で収束すると仮定すれば，a_i の t に関するオーダーが i とともに増えていくので，適当にパラメータを取り直して次のように仮定して良い．

仮定 2. $a_i(t) \in \Lambda$.

この仮定から，$\Lambda\langle\langle w^{-1}\rangle\rangle$ の中で，右辺は $w^{-1}\tilde{a}(t)$ と表せる．ここで，$\Lambda\langle\langle w^{-1}\rangle\rangle$ は $\Lambda[w^{-1}]$ の t-進完備化である．ここで，次のことを仮定する．

仮定 3. $\tilde{a}(t)$ が単元である．

このとき，$\Lambda\langle\langle w^{-1}\rangle\rangle$ の中で $x = w^{-1}$ とパラメータを取り直すことができる．そこで，形式スキーム $\operatorname{Spf}\Lambda\langle\langle x\rangle\rangle$ と $\operatorname{Spf}\Lambda\langle\langle w\rangle\rangle$ を $\operatorname{Spf}\Lambda\langle\langle x, x^{-1}\rangle\rangle(\cong \operatorname{Spf}\Lambda\langle\langle x, y\rangle\rangle/(xy-1))$ で，$x = w^{-1}$ によって貼り合わせる．こうして，Λ 上の形式スキーム $\mathscr{X}$ を得る．Grothandieck の GFGA を使えば，$\mathscr{X} = (\mathbb{P}^1_\Lambda)^\wedge$ となる．ここで $(\mathbb{P}^1_\Lambda)^\wedge$ は $\mathbb{P}^1_\Lambda$ の形式的完備化である．よって，$\mathbb{P}^1_\Lambda \otimes \operatorname{Spec} K = \mathbb{P}^1_K$ として $\mathbb{P}^1_K$ を作ることができた．このとき，収束の問題は回避されている．

(3) 上の状況で $\tilde{a}(t)$ が単元でない場合を考える．このとき，パラメータを取り替えても $x = t^N w^{-1}$ という形にしかならない．簡単のため $N = 1$ の場合を考える．このときは，$\operatorname{Spf}\Lambda\langle\langle x\rangle\rangle$ と $\operatorname{Spf}\Lambda\langle\langle y, z\rangle\rangle/(yz - t)$ を $xy = 1$ で貼り，$\operatorname{Spf}\Lambda\langle\langle y, z\rangle\rangle/(yz - t)$ と $\operatorname{Spf}\Lambda\langle\langle w\rangle\rangle$ を $zw = 1$ で貼り合わせる．後は同様にすれば $\mathbb{P}^1_K$ ができる．できた $\mathscr{X}$ は図 1 のようになる．

大変さの一つの理由は，作りたいのは一般ファイバー (generic fiber) であるのに，作業するときには一般ファイバーがないことである．そこでリジッド幾何学が登場する．リジッド幾何学はおおよそ形式スキームの「一般ファイバー」の幾何学である．上において，$\operatorname{Spf}\Lambda\langle\langle x\rangle\rangle$ の「一般ファイバー」(Raynaud 一般ファイバーと呼ばれる) は閉円板 $D = \{z \in K \mid |z|_t \leq 1\}$ に対応する．(2) の場合，図 2 のように，2 枚の D をふ

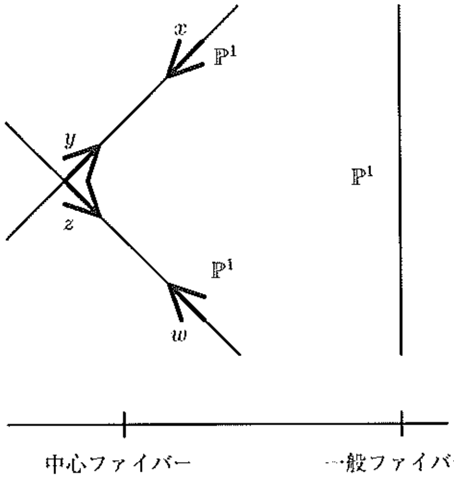

図1　(3) のときの $\mathscr{X}$ の図

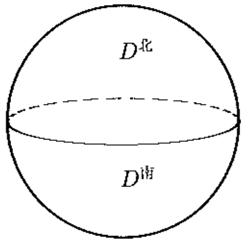

図2　(2) のときの $\mathbb{P}^1$

ちで貼り合わせて $\mathbb{P}^1$ ができている．(3) の場合，図3のように，2枚の D だけでは届かないので，間に円環 (annulus) が必要である．

4　速成コース

まず形式スキームについて述べる．

A を環，I を A のイデアルとし，A は I-進位相について完備であるとする．$\mathrm{Spf}\,A$ は A の開素イデアル全体である．$\mathfrak{p}$ が A の開素イデアルであることと，$\mathfrak{p}$ が I を含む素イデアルであることは同値だから，$\mathrm{Spf}\,A = V(I)$ であり，これは $\mathrm{Spec}\,A$ の閉集合とみなせる．$\mathrm{Spf}\,A$ の位相は $\mathrm{Spec}\,A$ の位相から定まる．$f \in A$ に対し，A_f を局所化とし，$A_{\{f\}} = \hat{A}_f$ とする．構造層 $\mathscr{O}$ を $\Gamma(U(f), \mathscr{O}) = A_{\{f\}}$ で定める．

スキーム論の場合，環の局所化しか使わず，これは完全関手なので理論がうまくいく．ところが形式スキームの場合，完備化をしなければならず，完備化は一般には完全関手ではないので理論が難しくなる．A が Noether 環であると仮定すると，有限生成 A-加群 M に対して，M の完備化 $\hat{M}$ と $M \otimes_A \hat{A}$ は同型である．さらに，$A \to \hat{A}$ は平坦である．したがって有限生成 A-加群に対する完備化も完全関手となりうまくいく．こ

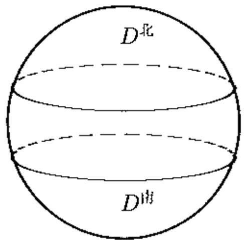

図 3　(3) のときの $\mathbb{P}^1$

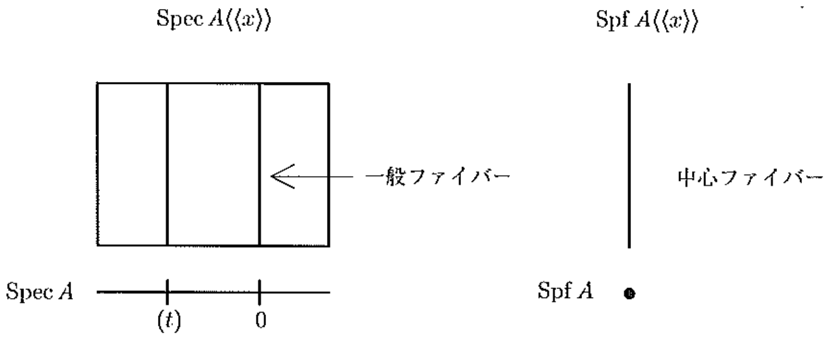

図 4　Spec A と Spf A

こで有限生成加群に限定しないと完備化が完全関手にならないことを注意しておく．A が Noether でない場合は一般にはこのようなことが成り立たないので難しくなる．

次にリジッド幾何について述べる．前に述べたように，リジッド空間はおおよそ形式スキームの一般ファイバーであった．

例として，$A = \mathbb{C}[[t]]$ とする．Spec A は 2 点 (t), 0 からなるが，Spf A は 1 点 (t) のみからなる．これを図に描くと図 4 のようになり，Spf $A\langle\langle x\rangle\rangle$ には一般ファイバーはなく，中心ファイバーしかない．

説明のコンセプトは以下の二つである．

- 概念としての「空間」
- 視覚化

例としてスキームの場合，

概念　関手

視覚化　局所環付空間 (Spec A)

となる．

連接リジッド空間 (coherent rigid space) の場合次のようになる．

概念としては次の圏になる．

$$\mathbf{CRf} = \{\text{ テキトーな形式スキーム }\}/\{\text{ 認容ブローアップ }\}.$$

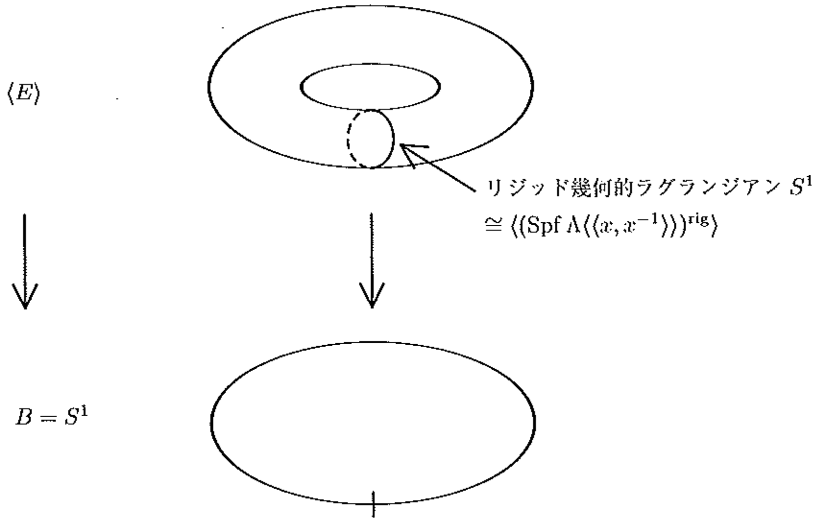

図 5　$\langle E\rangle \to B$

ここで，「テキトー」は [4] で述べられる技術的な条件である．

視覚化は次のように得られる．形式スキーム X に対し，リジッド空間 X^{rig} が定まる．X^{rig} の視覚化は

$$\langle X^{\mathrm{rig}}\rangle = \varprojlim_{\substack{X'\to X\\ \text{adm. blow-up}}} X'$$

である．ただし，右辺の極限は位相空間の圏において取る．これに構造層 $\mathscr{O}_{X^{\mathrm{rig}}}$ を載せる．

視覚化から生まれるいい状況を挙げる．$\mathscr{X}$ をリジッド空間とする．このとき，たいていの場合次のような図式を得る．

$$\langle\mathscr{X}\rangle \xrightarrow{\text{sep}} [\mathscr{X}] \xrightarrow{\text{retraction}} B.$$

ここで，$[\mathscr{X}]$ は $\langle\mathscr{X}\rangle$ の商位相が入った位相空間であり，B は CW 複体である．この図式はトロピカル幾何との関係を示唆している．また，$M^\vee \xrightarrow{\pi^\vee} B$ の代わりとして使えるかもしれない．

例. $\Lambda = \mathbb{C}[[t]]$ 上の楕円曲線 E が悪い還元を持つとする．このとき，$\langle E\rangle \to B$ は図 5 のようになる．$B = S^1$ であり，B の 1 点のファイバーは円周，B の区間の引き戻しは円環になる．

参考文献

[1] 加藤文元：『ミラー対称性とリジッド幾何学』2005 年度城崎代数幾何学シンポジューム報告集，(2005)，130–150.

[2] Kontsevich, M.; Soibelman, Y.: *Affine structures and non-archimedean analytic spaces*, preprint, math.AG/0406564.

[3] Fujiwara, K.; Kato, F.: *Rigid Geometry and Applications*, to appear in Advanced Studies in Pure Mathematics.

[4] Fujiwara, K.; Kato, F.: a book in preparation.

[5] Strominger, A.; Yau, S-T.; Zaslow, E.: *Mirror symmetry is T-duality*, Nuclear Phys. B **479** (1996), no. 1–2, 243–259.