楕円曲線の高さ関数の差の評価

内田 幸寛

名古屋大学大学院多元数理科学研究科

導入

Kを代数体，EをK上の楕円曲線とする．このとき，EのK有理点全体$E(K)$は有限生成Abel群となることが知られている（Mordell-Weilの定理）．$E(K)$をMordell-Weil群と呼ぶ．Mordell-Weil群を研究する際，高さ関数(**height function**)が重要である．高さ関数は，$E(K)$上の実数値関数であって，有理点の数論的複雑さを反映する．

よく使われる高さ関数として次の2つがある．

- h : ordinary height, Weil height, naive height

計算が容易である．また，高さが小さい点を直接探せる．

- $\hat{h}$: canonical height, Néron-Tate height

$E(K)\otimes\mathbb{R}$上の2次形式であり，理論的に扱いやすい．

この2つの高さ関数の差について，次の定理が知られている．

定理 1. Eの定義式とKにのみ依存する定数c_1, c_2が存在して，任意の$P\in E(K)$に対し，

$$c_1 \le h(P)-\hat{h}(P) \le c_2$$

が成り立つ．

この定数c_1, c_2は$E(K)$の基底の計算や，E上の整数点の計算などに用いられる．c_1, c_2の評価が良くなると計算が速くできる．

c_1, c_2の具体的な評価には次のような研究がある．

Dem'janenko	1968
Zimmer	1976
Silverman	1990
Sikesek	1995
Cremona, Prickett, Siksek	2006

評価の方法は様々であるが，筆者の方法 [5]は，Cremonaらの方法 [1]と同様に，高さを局所高さの和に分解し，それぞれを評価することによって全体の評価を得る．彼らは有限素点に対する局所高さについては最良の結果を得ているので，無限素点に対する評価の改良を行えばよい．彼らは評価のために2倍写像を用いたが，ここでは$m\ge 2$としてm倍写像を用いる．これによって評価の改善が可能となる．

記号

楕円曲線EがWeierstrass方程式

$$E\colon y^2+a_1xy+a_3y=x^3+a_2x^2+a_4x+a_6$$

で与えられているとする．ただし，$a_1,\dots,a_6$はKの整数とする．

M_KをKの素点全体，M_K^0をKの有限素点全体，M_K^∞をKの無限素点全体として，$v\in M_K$に対し，K_vをKのvにおける完備化とする．$n_v=[K_v:\mathbb{Q}_v]$とおく．n_vは局所次数と呼ばれる．

K上の絶対値$|\cdot|_v$を，積公式

$$\sum_{v\in M_K} n_v \log|x|_v = 0 \quad (\forall x\in K^\times)$$

が成り立つように定める．

高さ関数を次のように定める．

$$h(P)=\frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}\sum_{v\in M_K}\log\max\{1,|x(P)|_v\},$$

$$\hat{h}(P)=\lim_{i\to\infty}\frac{1}{4^i}h(2^iP).$$

ϕ_m, ψ_m^2をEの乗法多項式(multiplication polynomial)とする．このとき，$x(mP)=\phi_m(x(P))/\psi_m^2(x(P))$となる．

$v\in M_K$とする．mを正整数として，関数$\Phi_{m,v}\colon E(K_v)\to\mathbb{R}$を

$$\Phi_{m,v}(P)=\frac{\max\left\{|\phi_m(x(P))|_v, \left|\psi_m^2(x(P))\right|_v\right\}}{\max\{1,|x(P)|_v\}^{m^2}}$$

と定義する．さらに，

$$\varepsilon_{m,v}^{-1}=\inf_{P\in E(K_v)}\Phi_{m,v}(P),\quad \delta_{m,v}^{-1}=\sup_{P\in E(K_v)}\Phi_{m,v}(P),$$

$$S_v(m)=\frac{\log\delta_{m,v}}{m^2-1},\quad T_v(m)=\frac{\log\varepsilon_{m,v}}{m^2-1}$$

とおく．

主定理

定理 2 ([5]). mを2以上の自然数とする．任意の$P\in E(K)$に対し，

$$\frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}\sum_{v\in M_K^\infty} n_vS_v(m) \le h(P)-\hat{h}(P)$$

$$\le \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}\sum_{v\in M_K^\infty} n_vT_v(m)+\frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}\sum_{v\in M_K^0} C_v.$$

ただし，C_vはEの係数a_iと素点vから有限時間内に計算できる定数であり，有限個のvを除いて$C_v=0$である．

注意 3. $m=2$の場合がCremonaらの結果[1]にあたる．

mの値に対する変化

命題 4. $v\in M_K$とし，$m\ge 2$, $l\ge 1$を自然数とする．このとき，

$$S_v(m)\le S_v(m^l),\quad T_v(m^l)\le T_v(m).$$

すなわち，定理2の評価はmをm^lに変えるとより強くなる．

注意 5. mがm'の約数であっても，

$$S_v(m)\le S_v(m'),\quad T_v(m')\le T_v(m)$$

とは限らない．反例が存在する．

例

楕円曲線

$$E\colon y^2=x^3-459x^2-3478x+169057$$

を考える．定理2より$E(\mathbb{Q})$上で次の評価を得る．

$$\begin{aligned}
-6.531924724 &\le h-\hat{h}\le 0.4620981204 \quad (m=2),\\
-5.228881425 &\le h-\hat{h}\le 0.4620981204 \quad (m=3),\\
-5.227187136 &\le h-\hat{h}\le 0.4620981204 \quad (m=4),\\
-5.006931796 &\le h-\hat{h}\le 0.4620981204 \quad (m=5).
\end{aligned}$$

Silverman [4]の評価：

$$-15.40309857\le h-\hat{h}\le 18.74780624.$$

Zimmer [3]の評価：

$$-8.208491752\le h-\hat{h}\le 16.41698351.$$

Cremonaら[1]によれば，

$$h(P)-\hat{h}(P)=0.4620980788\dots,$$
$$h(P)-\hat{h}(P)=-4.900153342\dots$$

となる$P\in E(\mathbb{Q})$が存在する．彼らは，$m=2$にあたる結果を述べた後で，

We leave it to the reader to draw their own conclusions.

と述べているが，上で見たように，さらに良い評価が得られることが実証される．

参考文献

[1] J. E. Cremona, M. Prickett, S. Siksek, Height difference bounds for elliptic curves over number fields, J. Number Theory **116**, 42–68 (2006).

[2] S. Siksek, Infinite descent on elliptic curves, Rocky Mountain J. Math. **25**, 1501–1538 (1995).

[3] S. Schmitt, H. G. Zimmer, *Elliptic Curves: A Computational Approach*, de Gruyter Studies in Mathematics 31, Walter de Gruyter, 2003.

[4] J. H. Silverman, The difference between the Weil height and the canonical height on elliptic curves, Math. Comp. **55**, 723–743 (1990).

[5] Y. Uchida, The difference between the ordinary height and the canonical height on elliptic curves, preprint, (2006).