versal Galois covering について

坂内 真三

東京都立大学理学研究科数学専攻

Introduction

X, Y を正規射影的代数多様体, $\pi\colon X \to Y$ を全射有限射とする．この時，π による引き戻しで，X の関数体 $\mathbb{C}(X)$ は Y の関数体 $\mathbb{C}(Y)$ の有限次拡大となる．

定義 1 *(有限)ガロア(分岐)被覆*
上記の設定のもとで，$\mathbb{C}(X)/\mathbb{C}(Y)$ がガロア拡大 であるとき π をガロア被覆 (Galois covering) という．特に，ガロア群が G である時，π を G-被覆 (G-covering) とよぶ．

π がガロア被覆である時，X に G が自然に作用し，$Y \cong X/G$ となる．
また，G は π のファイバーに推移的に作用している．

ガロア被覆の研究は，定義からわかるように 関数体上のガロア理論を研究することと同値である．また，代数多様体からの側面を考えることにより，幾何学的にも大変興味深い研究分野である．

1

基本的な問題

ガロア被覆の研究においては以下の問題が基本的である．難波[14] 参照．

1. 構成問題: 正規射影的代数多様体 Y が与えられた時，Y 上のガロア被覆全てを具体的に構成する方法を与えよ．有限群 G が与えられた時，Y 上の G-被覆が存在するか？ Y 上に因子 D を与えた時，D で分岐する Y 上の ガロア被覆が存在するか？

2. 同値問題: Y 上のガロア被覆 $\pi\colon X \to Y$ と $\pi'\colon X' \to Y'$ が与えられた時，X と X' が双正則 (双有理) になるための条件を分岐因子の言葉で与えよ．

3. モジュライの問題: Y 上の有限ガロア被覆の同形類全体を Y の内部量で記述せよ．

2

構成問題について: 難波の方法

難波は構成問題に対する一つの解を与えた． G-被覆 $\pi\colon X \to Y$ と G-indecomposable な有理射 $f\colon W \dashrightarrow Y$ が与えられたときに，以下のような図式を満たす新たな G-被覆 $\pi'\colon Z \to W$ を構成できる．
(詳しくは難波[13])

$$\begin{tikzcd} Z_0 \arrow[r, dash] & W_0 \times_Y X \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "\pi"] \\ & W_0 \arrow[r, "f_0"] & Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Z_0 \arrow[r] \arrow[d, "\pi''"'] & Z \arrow[d, "\pi'"] \\ W_0 \arrow[r] & W \end{tikzcd}$$

ここで，$f_0\colon W_0 \to Y$ は f の不確定点の解消，Z_0 は $W_0 \times_Y X$ の正規化である．

3

この構成方法では G-indecomposable な有理射の存在に依存している．存在しない場合も考えられるので，以下のようなある種の universality をもつ概念を定義することが自然となる．

記号 1 G を有限群，X を G が作用する多様体とするこのとき，

$$G_x := \{g \in G | gx = x\}, \mathit{Fix}(X, G) := \{x \in X | G_x \neq \{1\}\}$$

定義 2
G-cover $\varpi\colon X \to Y$ が *versal* である $\Leftrightarrow$
任意の G-被覆 $\pi\colon Z \to W$ に対して，G-同変な有理射 $\mu\colon Z \dashrightarrow X$ で，$\mu(Z) \not\subset \mathrm{Fix}(X, G)$ をみたすものが存在する．

この定義における μ は $\bar{\mu}\colon W \dashrightarrow Y$ を誘導し，$\bar{\mu}$ は G-indecomposable となる． **標語的にいうと versal G-被覆は全ての G-被覆を誘導する基本的な G-被覆である．**

4

緒結果:

versal G-被覆に対しては，以下の結果が知られている．

定理 1 (難波) 任意の有限群 G に対して *versal* G-被覆は存在する．

難波は $(\mathbb{P}^1)^{|G|}$ に G を正則表現で座標の置換として自然に作用させたものと，その作用による商射像 $\varpi\colon (\mathbb{P}^1)^{|G|} \to (\mathbb{P}^1)^{|G|}/G$ が versal G-covering となることを証明した．しかしながら，この versal G-被覆では次元が大きいことと，下の空間の構造がわかりにくいことから，幾何学的な性質を研究するのにはあまり実用的でなかった．構造が簡単なものを求めることが次の課題となる．

土橋[19] はトーリック多様体を用いてより構造が簡単な $\mathbb{P}^{n-1}$ 上の versal S_n-被覆を構成した．その構成方法にそって次の結果を得た．トーリック多様体についての一般論は[8] を参照．

5

定理 2
$G \subset GL(n, \mathbb{Z})$ を有限群．Δ を G-不変な扇とする．このとき Δ に付随するトーリック多様体 $X(\Delta)$ に自然な G の作用が存在し，

$$\varpi\colon X(\Delta) \to X(\Delta)/G$$

は *versal* G-被覆となる．

証明は，具体的に μ を構成することによりなされる．詳細は坂内[1] を参照．

ここでも，下の多様体の構造を具体的に求めるのが今後の課題となる．この問題は，multiplicative invariant theory (これについては[12] を参照) の 射影多様体版と考えられる．

6

例

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

として，α, β で生成される $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$ の部分群を G とすると，G は位数12の二面体群となる．Δ を

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

で生成される完備な扇とすると，Δ は G-不変である．$X(\Delta)$ は $\mathbb{P}^2$ の三点でのブローアップである．上の定理により

$$\varpi\colon X(\Delta) \to X(\Delta)/G$$

は versal G-被覆となる．
$X(\Delta)/G$ は重み付き射影空間 $\mathbb{P}(1, 1, 2)$ と同型であることが示せる．

7

同値問題

定義 3 二つのG-被覆 $\pi\colon X \to Y$ と $\pi'\colon X' \to Y'$ が与えられた時，それらが双有理同値であるとは，以下の図式が可換になるようなG-同変双有理射νと有理射$\bar{\nu}$が存在することである．

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, dashed, "\nu"] \arrow[d, "\pi'"'] & X \arrow[d, "\pi"] \\ Y' \arrow[r, dashed, "\bar{\nu}"'] & Y \end{tikzcd}$$

二つのG-被覆が双有理同値かどうか調べることは，GのXないしX'の双有理自己同形群への二つの表現が共役であるか調べるのと同値である．このような双有理自己同形群の有限部分群は，クレモナ群の場合は古くから研究されている．[10]，[20]．最近でも [3]，[4]，[5]，[7]，[9] などがある．

8

二つの versal G-被覆 $\varpi\colon X \to Y$ と $\varpi'\colon X' \to Y'$が与えられたときに，versal であることの定義により上の図式を可換にするG-同変有理射の存在は保証されている．それが双有理射にとれるかどうかは versal G-被覆の双有理的な分類問題を考えることになり，興味深い問題である．

$\rho\colon S_4 \to \mathrm{GL}(3,\mathbb{C})$ を以下のように定める．

$$\sigma \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \tau \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_1 \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

9

$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$の斉次座標を $([x_0 : x_1], [y_0 : y_1], [z_0 : z_1])$ としS_4の作用を $x = x_1/x_0$，$y = y_1/y_0$，$z = z_1/z_0$ として以下のように定める．

$$\begin{aligned} (x, y, z)^{\sigma} &= (y, x, z), \\ (x, y, z)^{\tau} &= (y, z, x), \\ (x, y, z)^{\lambda_1} &= (-x, y, -z), \\ (x, y, z)^{\lambda_2} &= (-x, -y, z). \end{aligned}$$

$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の超曲面X_1を$x_0y_0z_0 - x_1y_1z_1 = 0$でさだめる．上の作用で$X_1$は不変となるので，$S_4$の$X_1$への作用を得る．$X_1$ は6次の del Pezzo 曲面となる．また$\mathrm{Pic}^{S_4}(X_1) = \mathbb{Z}(-K_{X_1})$ となる．

S_4はρを通して$\mathbb{P}^2 = X_2$に自然に作用する．

定理 3 (徳永[17]，土橋[19])
$\varpi_i\colon X_i \to X_i/S_4$ は *versal* S_4-被覆である．

10

命題 1 (徳永[18]) *versal* でない二次元のS_4-被覆 $\pi\colon X_3 \to X_3/S_4$ でX_3が有理的であるものが存在する．

定理 4 (徳永-坂内[2]) $\varpi_i\colon X_i \to X_i/S_4$，$i = 1, 2$は$S_4$-被覆としてそれぞれ，互いに双有理同値でない．

定理 4の証明は，Iskovskikh[9]にならってS_4 固定点を調べ，以下にあげるNoetherの不等式を用いることにより証明される．命題 1とあわせると，少なくとも3つの互いに同値でないS_4-被覆が存在する．

11

Noether の不等式

$\Phi\colon X \dashrightarrow X'$ を非特異射影曲面の双有理射とする．$\mathcal{H}'$ を X'の固定成分を持たない，可変な線形系とする．$\mathcal{H}$ をΦ による $\mathcal{H}'$ の固有変換像とする．$\mathcal{K}$, $\mathcal{K}'$ をX, X' の標準因子に付随する完備線形系とする．このとき以下の定理が成り立つ．

定理 5 (Noetherの不等式)
$\mathcal{H}' + m\mathcal{K}' = \emptyset$と仮定する．このとき，$\mathcal{H} + m\mathcal{K} \neq \emptyset$ ならば，$\mathcal{H}$は重複度がmより真に大きい基点をもつ．

12

References

[1] S. Bannai, Construction of versal Galois coverings using toric varieties, preprint.

[2] S.Bannai and H.Tokunaga, A note on embeddings of S_4 and A_5 into the Cremona group and versal Galois covers, preprint.

[3] L. Bayle and A. Beauville, Birational involutions of $\mathbb{P}^2$, *Asian J. Math.* 4(2000), 11-18.

[4] A. Beauville and J. Blanc, On Cremona transformations of prime order, *C.R. Math. Acad. Sci. Paris* **339**(2004), 257-259.

[5] A. Beauville, p-elementary subgroups of the Cremona group, arXive: mathAG/0502123

[6] J. Buhler and Z. Reichstein, On the essential dimension of a finite group, *Compos. Math.* **106** (1997), 159-179.

[7] T. De Fernex, On planar Cremona maps of prime order, *Nagoya Math. J.* **174** (2004),1-28.

[8] W. Fulton, Introduction to toric varieties, Princeton University Press, Princeton, (1993)

[9] V. A. Iskovskikh, Two non-conjugate embeddings of $S_3 \times \mathbb{Z}_2$ into the Cremona group II, arXiv:math.AG/0508484.

[10] S. Kantor: Theorie der endlichen Gruppen von eindeutigen Transformationen in der Ebene, Mayer & Müller, Berlin, 1895.

[11] M. Koitabashi, Automorphism Groups of Generic Rational surfaces, *J. Algebra*, **116**, 130-142 (1988).

[12] M. Lorenz, Multiplicative invariant theory, Encyclopaedia of Mathematical Sciences 135, Springer

[13] M. Namba, On finite Galois Coverings of projective manifolds, *J. Math. Soc. Japan*, **41**, 391-403.

[14] M. Namba, Finite branched coverings of complex manifold, *Sugaku Expositions* **5** (1992) 193-211.

[15] H. Tokunaga, On dihedral Galois coverings, *Canad. J. Math.* **46** (1994), 1299-1317.

[16] H. Tokunaga, Galois covers for $\mathfrak{S}_4$ and $\mathfrak{A}_4$ and their applications, *Osaka J. Math.* **39**(2002), 621-645.

[17] H. Tokunaga, 2-dimensional versal S_4-covers and rational elliptic surfaces, *Séminaire et Congrés* **10**, Société Mathematique de France (2005), 307-322.

[18] H. Tokunaga, 2-dimensional versal G-covers and Cremona embeddings of finite groups, to appear in *Kyushu J. of Math.*

[19] H. Tsuchihashi, Galois coverings of projective varieties for the dihedral groups and the symmetric groups, *Kyushu J. of Math.* **57**(2003), 411-427.

[20] A. Wiman, Zur Theorie der endlichen Gruppen von birationalen Transformationen in der Ebene, *Math. Ann.* **48**(1896), 195-240.