Database of $\mathbb{Q}$-Fano 3 Folds

Kaori SUZUKI
University of Tokyo, Japan

名古屋大学　代数幾何学勉強会　Feb. 16 - Feb. 17, 2006

1 目的

3 次元 $\mathbb{Q}$-Fano 多様体について，次数環を用いた手法により分類を行う．この方法の利点の一つに，次数環すなわち重み付き射影空間内での重射影モデルが式で書ける，という具体性がある．その結果，理論的には決定し得なかった幾つかの不変量に対してより良い評価，知見が得られるという点が挙げられる．

2 3次元 $\mathbb{Q}$-Fano 多様体とは?

定義 1 $X/\mathbb{C}$ が$\mathbb{Q}$-Fano 多様体であるとは高々端末特異点をもち,$-K_X$ が豊富であってさらに,$\mathbb{Q}$-factorial という性質を持つものである.

定義 2 Fano 指数とは, $-K_X = fA$ を満たすような Weil 因子 A が存在する最大の正整数 f である.

注　Fano 多様体の幾何学的な構造は，Fano 指数によって大きく異なる．

歴史

1. 1980 年　Iskovskikh　(smooth な場合)
2. 1993 年　Borisov-Borisov　(トーリックの場合)
3. 1996 年　Sano　(ある条件の下で)
4. $f = 1$ case
   Reid, Corti, Brown, Altinok, Fletcher ⟶ 次数環を用いた分類
   森, 向井, 高木 ⟶ 双有理幾何を用いた分類

“$f \geq 2$ の場合に分類してみよう !!”

3 分類表

[Su] K. Suzuki, *On Fano indices of $\mathbb{Q}$-Fano 3-folds*, Manuscripta Math114 (2004).

f	$X/\sim$	$\mathcal{B} = \{[r, a]\} = \{\frac{1}{r}(1,\ a,\ r-a)\}$	$-K_X^3$
9	$X_6 \subset \mathbb{P}(1,2,3,4,5)$	$\{[2,1],[4,1],[5,2]\}$	$\frac{729}{20}$
	$X_{12} \subset \mathbb{P}(2,3,4,5,7)$	$\{3 \times [2,1],[5,2],[7,2]\}$	$\frac{729}{70}$
10	codim ≥ 7	$\{[7,3],[11,3]\}$	$\frac{2000}{77}$
11	$\mathbb{P}(1,2,3,5)$	$\{[2,1],[3,1],[5,2]\}$	$\frac{1331}{30}$
	$X_{12} \subset \mathbb{P}(1,4,5,6,7)$	$\{[2,1],[5,1],[7,2]\}$	$\frac{1331}{70}$
	$X_{10} \subset \mathbb{P}(2,3,4,5,7)$	$\{[2,1],[3,1],[4,1],[7,3]\}$	$\frac{1331}{84}$
13	$\mathbb{P}(1,3,4,5)$	$\{[3,1],[4,1],[5,2]\}$	$\frac{2197}{60}$
17	$\mathbb{P}(2,3,5,7)$	$\{[2,1],[3,1],[5,1],[7,3]\}$	$\frac{4913}{210}$
19	$\mathbb{P}(3,4,5,7)$	$\{[3,1],[4,1],[5,2],[7,2]\}$	$\frac{6859}{420}$

表 1: $f \geq 9$ の 3 次元 $\mathbb{Q}$-Fano 多様体

4 次数環

定義 3 (次数環)
$R(X, A) := \oplus_{n \geq 0} H^0(X, \Theta_X(nA))$
$\longrightarrow X = Proj R(X, A)$ により X と $R(X, A)$ は 1 対 1 に対応する．

定義 4 (ヒルベルト多項式)
$P(X, t) := \sum_{n \geq 0} P_n(X) t^n$　ただし $P_n(X) := \dim H^0(X, \theta_X(nA))$.

$P_n(X)$ は次の特異点つきの多様体に対するリーマンロッホの公式から導かれる．

定理 5 (リーマンロッホの公式) [YPG, Su]

$$\chi(\theta_X(nA)) = \chi(\theta_X) + \frac{n(n+f)(2n+f)}{12} A^3 - \frac{2n}{f} \sum_{\mathcal{B}} \frac{r^2-1}{12r} \frac{Ac_2(X)}{12}$$
$$+ \sum_{\mathcal{B}} \left\{ -i \frac{r^2-1}{12r} + \sum_{j=1}^{r-1} \frac{\overline{bj}(r - \overline{bj})}{2r} \right\}$$

1. $ab \equiv 1 \bmod r$
2. i: $nA \sim_{\mathbb{Q}} iK_X$ を満たす最小の正整数.

例　$f = 9$

$\mathcal{B} = \left\{[2,1],\ [4,1],\ [5,2]\right\}$ を考える．このとき $A^3 = \dfrac{1}{20}$, $Ac_2(X) = \dfrac{31}{20}$,

$P_1(X) = 1,\ P_2(X) = 2,\ P_3(X) = 3$,,,

```
> P(X,t);

> 1-t+t^2 / 1-2*t+t^2-t^4+t^5+t^6-t^7+t^9-2*t^10+t^11

> P(X,t)*(1-t)*(1-t^2)*(1-t^3)*(1-t^4)*(1-t^5);

> 1-t^6
```

$\Rightarrow X_6 \subset \mathbb{P}(1,2,3,4,5)$

5 Database

Conditions

1. $\sum_{i=1}^{m}(r_i - \frac{1}{r_i}) < 24 \quad m \leq 15$, 　→ 全ての取り得る特異点の Basket を決定.
2. $A^3 > 0^{(*)}$,
3. $P_i = 0 \quad (i = 1, \ldots, f-1)$,
4. Kawamata's condition
   $\exists k > 0\ s.t.\ (-K_X)^3 \leq k(-K_X)C_2(X)$.

(2–4:) 1.の $\mathcal{B}$ に対し条件 $2-4$ をチェック. 満たすもののヒルベルト多項式を具体的に計算し, 分類を行う.

注　$(*)$: Fano 指数が 1, 2 の場合には A^3 の取り扱いが他の場合とは異なる．
計算には Magma というソフトを用いた．

今回の結果
以前 Magma に提供していた Database には Fano 指数が 2, 3 の場合が抜けていたが，今回この部分を補った．Fano 指数が 2 の場合は Kent 大学の G. Brown 氏との共同論文として発表予定．

今後の課題
この手法の欠点は，実際には存在しないものも結果に含むことにある．そこで，その非存在性をより幾何学的な方法を加味することで示すことが重要となる．

参考文献

[Ka] Y. Kawamata, *Boundedness of $\mathbb{Q}$-Fano Threefolds*, Contemp. Math. 131 (1992), 439–445.

[Ma] Magma (John Cannon's computer algebra system): W. Bosma, J. Cannon and C. Playoust, *The Magma algebra system I: The user language*, J. Symb. Comp. 24 (1997) 235–265.

[YPG] M. Reid, *Young person's guide to canonical singularities*, Algebraic Geometry(1985), ed. S.Bloch, Proc. of Sym. Pure Math. 46, A.M.S. (1987), vol1, 345-414.