トーリック多様体と反射的多面体

瀧　真語
名古屋大学大学院多元数理科学研究科

一般に n 次元のトーリック多様体は n 次元有理多面体との対応があり，特に高々 Gorenstein 特異点を持つトーリック Fano 多様体は反射的多面体と対応している．

そこで Gorenstein トーリック del Pezzo 曲面を有理多面体（多角形？）の言葉で分類してみよう！

定義

Δ：原点 $0 \in M_{\mathbb{Q}}$ を内部に含む凸多面体．

$$\Delta^* = \{y \in N_{\mathbb{Q}} | \langle x, y\rangle \geq -1, \forall x \in \Delta\}$$

を Δ に対する極多面体という．

Δ の任意の $n-1$ 次元の面が生成するアフィン超平面 H に対して，原始元 $l \in N$ が存在し，

$$H = \{x \in M_{\mathbb{Q}} | \langle x, l\rangle = 1\}$$

と表せるとき，Δ を反射的多面体という．

Batyrev はこのような概念を用いてミラー対称な Calabi-Yau 多様体を組織的に構成している．このときトーリック多様体は Calabi-Yau 多様体の「入れ物」としてカッコ良く利用されている．

2 次元の反射的多面体は方眼用紙に書き表すことができるが，特にテクニックを使わずに分類を始めると色々大変である．（方眼用紙の上のテクニックだけで出来たらこっそり教えて下さい．）そこで次の定理が利いてくる．

定理

Δ：反射的多角形，$l(\Delta) := \Delta$ の辺に含まれる格子点の数．

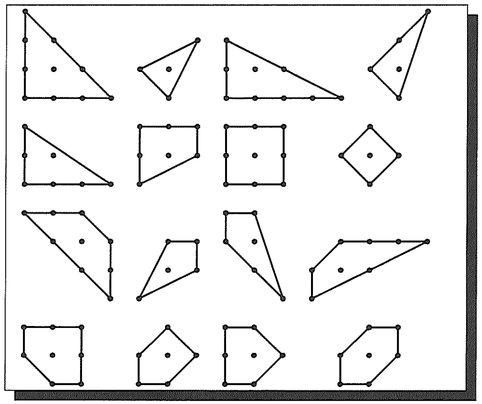
$$l(\Delta) + l(\Delta^*) = 12$$

これについては真に驚嘆すべき証明を発見したが，余白が狭・・・

この定理によって，扱う多角形がもつ格子点の数を制限できる．実際には高々 4 つの格子点の配置を気にしてやれば良いだけである．

なお，3,4 次元の反射的多面体も上手いアルゴリズムを用いて一応分類されている．しかしこの辺まで来ると数が多くなりすぎて手で扱うのは無理だと思う．

座標変換を除いた 2 次元の反射的多面体（多角形）は次の 16 個である．



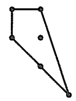
これらの多角形から高々 Gorenstein 特異点を持つトーリック del Pezzo 曲面を構成することができる．ちなみに Gorenstein 特異点と言っても，今回出てくるのは A_n 特異点だけである．

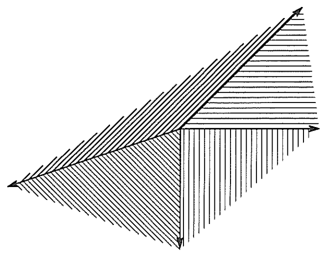
構成方法の壹例

一般に F を Δ の i 次元の面とすると，

$$\sigma_F := \{v \in N_{\mathbb{R}} | \langle u, v\rangle \leq \langle u', v\rangle, \forall u \in F, u' \in \Delta\}$$

は rank $N - i$ 次元の有理強凸多面錐になる．

例えば， という多角形から定まる扇は



である．あとはいつも通り（？）の構成法でトーリック多様体を作ってやれば良い．もちろん，支持関数を使って $-K$ が豊富であることのチェックもちゃんとできる．

この辺の事はある程度やり込んで，カラクリが分かってしまうと左の絵から「どのような特異点を持つか」ということも分かる．（ちなみに今回扱ったの多角形は M の方に御座候．）