

差分 Galois 理論

森川 修司

Picard-Vessiot theory

線型微分方程式の Galois 理論である。自然に有限次元微分加群に拡張される。この理論は有限次元であり、Galois 群は有限次元線型代数群である。1896。

Galois theory of H. Umemura

非線形微分方程式または有限生成微分拡大の Galois 理論。Galois 群は Lie pseudo group(Lie 環)である。1996。

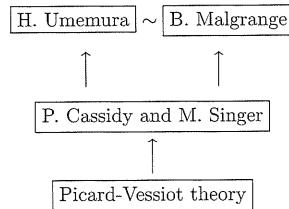
Galois theory of B. Malgrange

多様体上の foliation の Galois 理論である。Galois 群は Lie- D -groupoid である。2001。

Galois theory of M.Singer and P. Cassidy

パラメータ付の線型微分方程式の Galois 理論。Galois 群は線型微分代数群である。さらに研究対象として微分が非可換な場合が含まれる。2004。

これらの微分 Galois 理論の関係は



ただし、P. Cassidy と M. Singer の Galois 理論については微分が可換な場合とする。

以下、全ての環は可換であり、単位元と有理数体 \mathbb{Q} を含んでいるとする。

1 差分 Picard-Vessiot 理論

定義 1.1. 環 R とその自己同型写像 $\phi : R \rightarrow R$ の組 (R, ϕ) を差分環という。さらに、 $\phi(c) = c$ となる $c \in R$ を定数といい、定数全体の集合を C_R で表す。

イデアル $I \subset R$ が、 $\phi(I) \subset I$ をみたすとき、 I を差分イデアルという。(0), R 以外に差分イデアルを持たないとき単純という。

以下、 (k, ϕ) を差分体とし、定数体 $C := C_k$ が代数閉体とする。

差分 Picard-Vessiot 理論では、線型差分方程式

$$\phi(y) = Ay \quad A \in GL_n(k)$$

について考える。大体の方針は、代数方程式の Galois 理論と同様である。

定義 1.2. $\phi(y) = Ay$ に対して、次の条件をみたす差分拡大環 R を *Picard-Vessiot* 環という。

- (i) R は単純差分環。
- (ii) $\exists F = (x_{ij}) \in GL_n(R)$ s.t $\phi(F) = AF$.
- (iii) $R = k[x_{ij}, \det^{-1} F]$.

この Picard-Vessiot 環が Galois 拡大に対応している。Picard-Vessiot 環の存在性と(同型を除いて)一意性は自明でないが示すことができる。また Picard-Vessiot 環は定数の集合を不変に保つ ($C_R = C$)。代数方程式(微分 Picard-Vessiot 理論)の場合と異なる点は、Picard-Vessiot 拡大が常に体(整域)になるとは限らないことである。

定義 1.3. R/k を *Picard-Vessiot* 拡大とする。このとき、差分 Galois 群を $\text{Gal}(R/k) := \text{Aut}_\phi(R/k)$ によって定義する。また *Picard-Vessiot* 環の全商環を全 *Picard-Vessiot* 環という。

差分 Galois 群 $\text{Gal}(R/k)$ は自然に $GL_n(C)$ の部分群に思うことができ、線形代数群の構造を持つ。さらに作用 $(\text{Gal}(R/k), \text{Spec}R)$ は torsor である。

定理 1.4. 全 *Picard-Vessiot* 環の(nonzero 因子は単元となる)部分差分環と差分 Galois 群 $\text{Gal}(R/k)$ の部分代数群の間には 1 対 1 対応がある。

2 無限次元差分 Galois 理論にむけて

$\mathbb{N} := \{0, 1, 2, \dots\}$ とする。

$\phi : R \rightarrow R$ は自己準同型写像とし、 (R, ϕ) を再び差分環ということにする。以下、 (R, ϕ) の環 R を $R^\mathbb{N}$ で表し、 (R, ϕ) を R で表す。

$F(\mathbb{N}, R^\mathbb{N}) := \{\psi : \mathbb{N} \rightarrow R^\mathbb{N}\}$ と定め、差分構造を $\phi(f)(n) := f(n+1)$ で定める。このとき、自然に $(R, \phi) \subset (F(\mathbb{N}, R^\mathbb{N}), \phi)$ と見なすことが出来る。

以降、有限生成差分拡大体 L/k における Galois 理論の概要を述べる。

D_1, \dots, D_d を $\text{Der}(L^\mathbb{N}/k^\mathbb{N})$ の可換な基底とする。このとき、偏微分体 $L^\mathbb{N} = (L^\mathbb{N}, \{D_1, \dots, D_d\})$ が定まる。これによって、 $L \subset F(\mathbb{N}, L^\mathbb{N})$ とみれる。

定義 2.1. $L, L^\mathbb{N}, \phi, D_1, \dots, D_d$ によって生成される $F(\mathbb{N}, L^\mathbb{N})$ の部分環を \mathcal{L} とし、 $k, L^\mathbb{N}$ によって生成される部分環を \mathcal{K} とする。ここで、 $L^\mathbb{N}$ は定数写像全体を表す。

こうして、一般の場合の差分 Galois 群を

$$\text{Gal}(L/k) \cong \text{Aut}_{\phi, D_1, \dots, D_d}(\mathcal{L}/\mathcal{K})$$

によって定める。実際は関手を用いて定義し、principle homogeneous space で特徴づけられる。