差分 Galois 理論

森川 修司

Picard-Vessiot theory

線型微分方程式の Galois 理論である．自然に有限次元微分加群に拡張される．この理論は有限次元であり，Galois 群は有限次元線型代数群である．1896.

Galois theory of H. Umemura

非線形微分方程式または有限生成微分拡大の Galois 理論．Galois 群は Lie pseudo group(Lie 環) である．1996.

Galois theory of B. Malgrange

多様体上の foliation の Galois 理論である．Galois 群は Lie-D-groupoid である．2001.

Galois theory of M.Singer and P. Cassidy

パラメータ付の線型微分方程式の Galois 理論．Galois 群は線型微分代数群である．さらに研究対象として微分が非可換な場合が含まれる．2004.

これらの微分 Galois 理論の関係は

$$\begin{tikzcd} \boxed{\text{H. Umemura}} \arrow[r, phantom, "\sim"] & \boxed{\text{B. Malgrange}} \\ \boxed{\text{P. Cassidy and M. Singer}} \arrow[u] \arrow[ur] & \\ \boxed{\text{Picard-Vessiot theory}} \arrow[u] & \end{tikzcd}$$

ただし，P. Cassidy と M. Singer の Galois 理論については微分が可換な場合とする．

以下，全ての環は可換であり，単位元と有理数体 $\mathbb{Q}$ を含んでいるとする．

1 差分 Picard-Vessiot 理論

定義 1.1. 環 R とその自己同型写像 $\phi : R \to R$ の組 (R, ϕ) を差分環という．さらに，$\phi(c) = c$ となる $c \in R$ を定数といい，定数全体の集合を C_R で表す．

イデアル $I \subset R$ が，$\phi(I) \subset I$ をみたすとき，I を差分イデアルという．$(0), R$ 以外に差分イデアルを持たないとき単純という．

以下，(k, ϕ) を差分体とし，定数体 $C := C_k$ が代数閉体とする．

差分 Picard-Vessiot 理論では，線型差分方程式

$$\phi(y) = Ay \quad A \in GL_n(k)$$

について考える．大体の方針は，代数方程式の Galois 理論と同様である．

定義 1.2. $\phi(y) = Ay$ に対して，次の条件をみたす差分拡大環 R を *Picard-Vessiot* 環という．

(i) R は単純差分環.

(ii) ${}^{\exists}F = (x_{ij}) \in GL_n(R)$ $s.t$ $\phi(F) = AF$.

(iii) $R = k[x_{ij}, \det^{-1} F]$.

この Picard-Vessiot 環が Galois 拡大に対応している．Picard-Vessiot 環の存在性と (同型を除いて) 一意性は自明でないが示すことができる．また Picard-Vessiot 環は定数の集合を不変に保つ ($C_R = C$)．代数方程式 (微分 Picard-Vessiot 理論) の場合と異なる点は，Picard-Vessiot 拡大が常に体 (整域) になるとは限らないことである．

定義 1.3. R/k を *Picard-Vessiot* 拡大とする．このとき，差分 *Galois* 群を $\mathrm{Gal}(R/k) := \mathrm{Aut}_{\phi}(R/k)$ によって定義する．また *Picard-Vessiot* 環の全商環を全 *Picard-Vessiot* 環という．

差分 Galois 群 $\mathrm{Gal}(R/k)$ は自然に $GL_n(C)$ の部分群に思うことができ，線形代数群の構造を持つ．さらに作用 $(\mathrm{Gal}(R/k), \mathrm{Spec}R)$ は torsor である．

定理 1.4. 全 *Picard-Vessiot* 環の (非零因子は単元となる) 部分差分環と差分 *Galois* 群 $\mathrm{Gal}(R/k)$ の部分代数群の間には *1* 対 *1* 対応がある．

2 無限次元差分 Galois 理論にむけて

$\mathbb{N} := \{0, 1, 2, \ldots\}$ とする．

$\phi : R \to R$ は自己準同型写像とし，(R, ϕ) を再び差分環ということにする．以下，(R, ϕ) の環 R を $R^{\natural}$ で表し，(R, ϕ) を R で表す．

$F(\mathbb{N}, R^{\natural}) := \{\psi : \mathbb{N} \to R^{\natural}\}$ と定め，差分構造を $\phi(f)(n) := f(n+1)$ で定める． このとき，自然に $(R, \phi) \subset (F(\mathbb{N}, R^{\natural}), \phi)$ と見なすことが出来る．

以降，有限生成差分拡大体 L/k における Galois 理論の概要を述べる．

$D_1, \cdots, D_d$ を $\mathrm{Der}(L^{\natural}/k^{\natural})$ の可換な基底とする．このとき，偏微分体 $L^{\sharp} = (L^{\natural}, \{D_1, \ldots, D_d\})$ が定まる．これによって，$L \subset F(\mathbb{N}, L^{\sharp})$ とみれる．

定義 2.1. $L, L^{\sharp}, \phi, D_1, \ldots, D_d$ によって生成される $F(\mathbb{N}, L^{\sharp})$ の部分環を $\mathcal{L}$ とし，$k, L^{\sharp}$ によって生成される部分環を $\mathcal{K}$ とする．ここで，$L^{\sharp}$ は定数写像全体を表す．

こうして，一般の場合の差分 Galois 群を

$$\mathrm{Gal}(L/k) \fallingdotseq \mathrm{Aut}_{\phi, D_1, \ldots, D_d}(\mathcal{L}/\mathcal{K})$$

によって定める．実際は関手を用いて定義し，principle homogeneous space で特徴づけられる．