3次元del Pezzo多様体内の標準曲線のHilbert scheme

那須弘和
nasu@kurims.kyoto-u.ac.jp
京都大学数理解析研究所
(向井茂氏との共同研究)

代数幾何学勉強会, 名古屋大学, 2006年2月16日～17日

1 歴史

射影多様体 V に対し V 内の非特異連結曲線の Hilbert scheme を $\mathrm{Hilb}^S V$ で表す. 次数 d 種数 g の曲線からなる開部分スキームを $\mathrm{Hilb}^S_{d,g} V$ で表す.

定理 1 (Mumford'62) $\mathrm{Hilb}^S \mathbb{P}^3$ は生成的に被約でない 56 次元既約成分を持つ.

"当時" 非被約性は Hilbert scheme の**病理現象 (pathology)** と呼ばれた. (理由: 曲線も $\mathbb{P}^3$ も非特異. モジュライ的に良い対象.) その後 Kleppe['85], Ellia['87], Gruson-Peskine['82], Fløystad['93], Nasu['05] の研究により $\mathrm{Hilb}^S \mathbb{P}^3$ には頻繁に非被約成分が現れることがわかった.

2 問題意識

意識 2 *Hilbert scheme* の非被約性は *(*珍しくないという意味で*)* もはや *pathology* でないにしてもその根本的原因を探りたい.

今回は Mumford の非被約成分を変更・簡易化することで非被約性に対するより良い理解を得るのが狙い.

問題 3 $\mathbb{P}^3$ 以外の *Fano* 多様体 V に対し $\mathrm{Hilb}^S V$ は生成的に非被約か?

V として del Pezzo 3-fold $V_d \subset \mathbb{P}^{d+1}$ を考える.

3 del Pezzo 3-foldって何?

定義 4 一般の超平面による 2 回切断

$$[V_d \subset \mathbb{P}^{d+1}] \cap H_1 \cap H_2$$

が d 次正規楕円曲線 $F_d \subset \mathbb{P}^{d-1}$ となる 3-*fold* $V_d \subset \mathbb{P}^{d+1}$ を次数 d の **del Pezzo 3-fold** と呼ぶ。

例 5

del Pezzo 3-folds	次数	
$V_3 = (3) \subset \mathbb{P}^4$	3	3次超曲面
$V_4 = (2) \cap (2) \subset \mathbb{P}^5$	4	完全交差
$V_5 = [\mathrm{Gr}(2,5) \overset{\text{Plücker}}{\hookrightarrow} \mathbb{P}^9] \cap \mathbb{P}^6$	5	*Grassman* の線形切断
$V_6 = [\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \overset{\text{Segre}}{\hookrightarrow} \mathbb{P}^8] \cap \mathbb{P}^7$	6	
$V_6' = [\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \overset{\text{Segre}}{\hookrightarrow} \mathbb{P}^7]$	6	
$V_7 = \mathrm{Blow}_{\mathrm{pt}} \mathbb{P}^3 \subset \mathbb{P}^8$	7	$\mathbb{P}^3$ の 1 点爆発
$V_8 = \mathbb{P}^3 \overset{\text{Veronese}}{\hookrightarrow} \mathbb{P}^9$	8	

4 標準曲線って何?

種数 g の曲線 X の標準束 $K_X = T_X^*$ による埋め込み $X \overset{|K_X|}{\hookrightarrow} \mathbb{P}^{g-1}$ を**標準曲線**と呼ぶ. 種数 $g = d+2$ の標準曲線 X の V_d への埋め込み $f : X \hookrightarrow V_d \subset \mathbb{P}^{d+1}$ は 2 種類:

(1) 線形正規: 像 $f(X)$ は $\mathbb{P}^{d+1}$ を張る;
(2) 線形非正規: 像 $f(X)$ は $\mathbb{P}^d$ に含まれる (+条件 α).

(2) の曲線から $\mathrm{Hilb}^S V_d$ の非被約成分が構成される.

5 主結果1(Hilbの非被約性)

主結果 1 非特異 *del Pezzo 3-fold* $V_d \subset \mathbb{P}^{d+1}$ に対し $\mathrm{Hilb}^S V_d$ は生成的に被約でない $4d+4$ 次元既約成分 W_{nr} を持つ.

W_{nr} の構成: $d \le 7$ を仮定. V_d の (ある) 超平面切断 S_d (del Pezzo 曲面) に含まれ, 直線 $E \subset S_d$ に対し $C \sim -2K_{S_d} + 2E$ を満たす曲線 C の族 W を考える:

$$\begin{array}{rcccl}
\{C \subset {}^{\exists}S_d \mid C \in |-2K_{S_d}+2E|\}^{-} & =: & W & \subset & \mathrm{Hilb}^S_{2d+2,d+2} V_d \\
 & & \big\downarrow \mathbb{P}^{3d+3}\text{-bundle} & & \\
\{(E,S_d) \mid S_d \supset E\} & = & P & & \\
 & & \big\downarrow \mathbb{P}^{d-1}\text{-bundle} & & \\
\text{Fano 曲面} \to \ \{E \subset V_d\} & = & F & \subset & \mathrm{Gr}(1,\mathbb{P}^{d+1}).
\end{array}$$

6 非被約性の証明

次の命題より $\mathrm{Hilb}_S V_d$ は W の一般点 $[C]$ において特異 (より強く非被約) である. (つまり $(W_{nr})_{\mathrm{red}} = W$ なる非被約成分 W_{nr} が存在.)

命題 6 曲線 $C \hookrightarrow V_d$ の 1 位無限小変形 $\tilde{C}$ で $\mathrm{Spec}\, k[t]/(t^3)$ 上の変形にリフトしないものが存在する.

証明には曲線 C より定まる直線 (つまり S_d 上の第一種例外曲線)

$$E := \frac{1}{2}(C + 2K_{S_d})$$

が鍵になる. 法束 N_{E/V_d} が自明な時 $\tilde{C}$ の障害類が零でない.

7 興味深い点

- 曲線 $C \hookrightarrow V_d$ の変形が C の形式的近傍だけでなく離れた直線 E に影響を受ける点.
- さらに直線 E の V_d 内での法束 N_{E/V_d} が関係する点.

将来的な問題として次が考えられる.

問題 7 (1) $\mathrm{Hilb}^S V$ の非被約性は多様体 V の双有理同値で普遍な性質?
(2) 多様体 V の $\mathrm{Hilb}^S V$ からの復元・特徴づけ.

8 主結果2(Homの非被約性)

cubic 3-fold V_3 の場合の主結果 1 を Hom scheme の研究に応用する. 多様体 X と V を固定したとき, それらの間の射 $f : X \to V$ の全体には, $\mathrm{Hilb}(X \times V)$ の subscheme として自然な scheme の構造が入る. これを **Hom scheme** と呼び $\mathrm{Hom}(X, V)$ で表す.

主結果 2 X を種数 5 の一般の曲線, V_3 を一般の *cubic 3-fold* または *Fermat* 型 *cubic 3-fold*

$$V_3^{\mathrm{Fermat}} : x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 = 0 \quad \subset \mathbb{P}^4$$

とする. このとき $\mathrm{Hom}_8(X, V_3)$ は生成的に被約でない 4 次元既約成分 T をもつ.