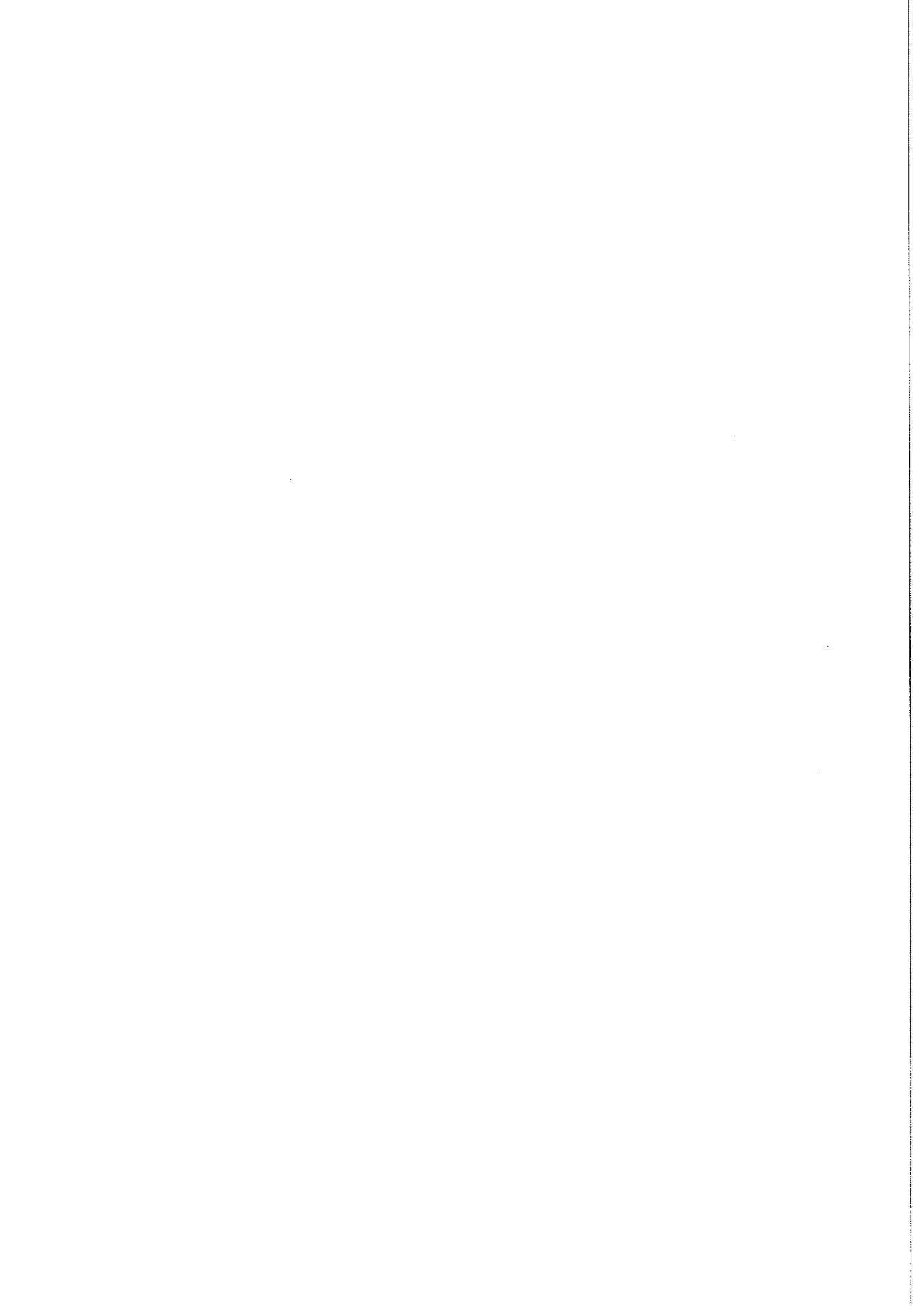


3次元双曲型空間の平均曲率1の曲面  
—極小曲面との関係をテーマとして—

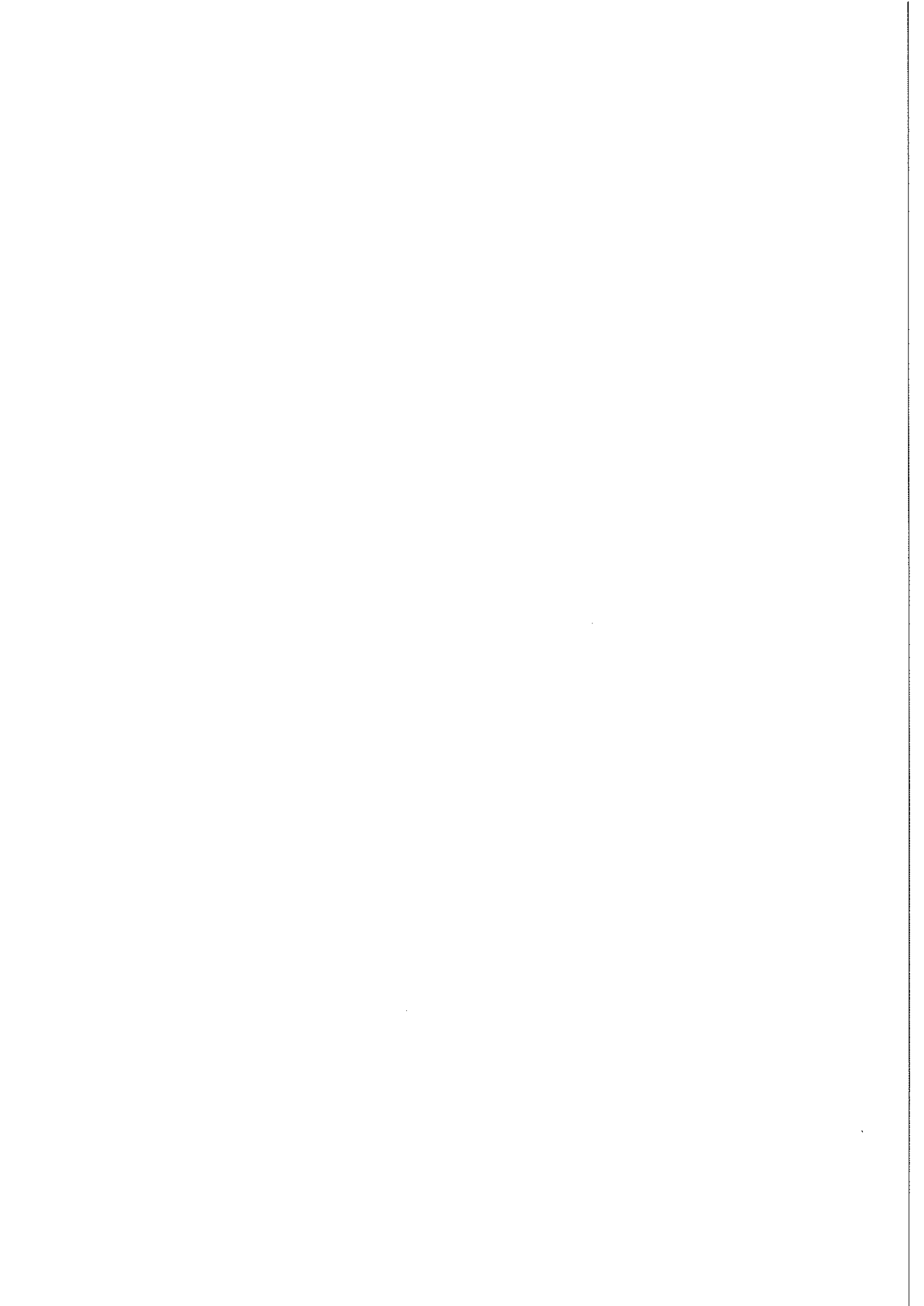
梅原 雅顕 (大阪大学大学院理学研究科)

川上 裕 (九州大学大学院数理学研究院) 記



# 目次

第 1 章	極小曲面論概要	7
1.1	2次元 Riemann 多様体上の等温座標系	7
1.2	極小曲面とは?	9
1.3	Weierstrass の表現公式	11
1.4	極小曲面の微分型表現公式	15
1.5	Osserman の不等式	17
第 2 章	Bryant の表現公式	23
2.1	極小曲面との局所対応	23
2.2	3次元双曲型空間の設定	26
2.3	Bryant の表現公式	28
2.4	双曲的 Gauss 写像について	32
2.5	双対性について	34
2.6	具体例	38
第 3 章	有限全曲率性	43
3.1	第二 Gauss 写像 $g$ の有理性	43
3.2	Osserman 型の不等式	49
3.3	CMC-1 曲面の微分型表現公式	50
3.4	Bianchi-Small の公式の応用	53
第 4 章	発展的話題	61
4.1	平行曲線と平行曲面	61
4.2	$\mathbb{H}^3$ における曲面の単位法線ベクトル場	62
4.3	Bryant 型の線形 Weingarten 曲面	64
4.4	$\mathbb{H}^3$ の平坦な曲面	65
4.5	$S_1^3$ の平均曲率 1 の曲面	67
付録	Schwarz 微分とその基本性質	68



# 序

この講義録は2007年11月に名古屋大学大学院多元数理科学研究科において大学院生向けに行った(定曲率 $-1$ の)3次元双曲型空間 $\mathbb{H}^3$ の平均曲率 $1$ の曲面(以下CMC-1曲面と記す)の入門講義を,川上裕氏により記録・整理していただき,筆者が,若干修正加筆し,さらに最後に展望の部を付け加えて完成したものです.その際,川上氏は,数多くの筆者の講義の説明,証明等の不備を補ってくださいました.

$\mathbb{H}^3$ のCMC-1曲面は3次元Euclid空間 $\mathbb{R}^3$ の極小曲面と類似の性質をもつことが知られ,1987年Robert Bryantにより,Weierstrass型の表現公式が見いだされ,多くの基本的性質が示されました.但し,当時は完備かつ有限全曲率な例が,2,3知られているのみでしたが,その後,筆者と山田光太郎氏およびWayne Rossman氏との一連の共同研究により,多くの具体例が構成され,また双対性の発見,円錐的特異点をもつ定曲率 $1$ の計量との対応,Osserman型の不等式などが示されました.(本書の内容の一部は,これらの山田氏やRossman氏との共同研究の紹介です.筆者が,CMC-1曲面に興味をもったのは,1990年頃,大阪大学の湯川奨学生(筆者の助手時代)として筑波大学から頻りに阪大へ顔を出していたころ,当時,阪大におられた納谷信氏から,Bryantの論文を教えていただいたのがきっかけです.)

さらにその後,多くの幾何学者の貢献により,分野はさらに発展し,本書のような解説書を書くのに適した時期を迎えております.しかしながら,このテーマを解説するには,まず極小曲面について準備をする必要があるなど,全容を語るには,テクニカルな部分が相当にあり,講義をしたり,本などを書くことに,いささか躊躇していたところ,小林亮一先生から名大で集中講義をする機会を与えていただき,さらに川上氏により,本書を記していただけるといふ,筆者としては望外の展開となり,両氏に心より感謝いたしている次第です.また,國分雅敏氏と藤森祥一氏は,最終段階の原稿を読んでくださり,いくつかの貴重なご指摘をいただきました.ここに感謝の意を表します.

3次元双曲型空間のCMC-1曲面論には,Lie群 $SL(2, \mathbb{C})$ が深く関与しております.一方, $\mathbb{R}^3$ の極小曲面はAbel群としての $\mathbb{C}^3$ が同じ役割を果たしており,Lie群 $SL(2, \mathbb{C})$ を $\mathbb{C}^3$ に崩壊させることで, $\mathbb{R}^3$ の極小曲面論を,対応する $\mathbb{H}^3$ のCMC-1曲面の理論の極限として理解することができます.また,最近では $\mathbb{H}^3$ の平坦な曲面や3次元de Sitter時

空の平均曲率1の曲面が、本書で扱う CMC-1 曲面と極めて類似の性質をもつことが知られるようになりました。但し、これら2つの対象では、曲面が必然的に特異点を持つという難点があり、これら類似の理論を学ぶ上でも、まず基礎として、本書の内容は役立つと思われま

す。本書は4つの章から構成されております。第1章は完備かつ有限全曲率をもつ  $\mathbb{R}^3$  の極小曲面の入門です。第2章では、前章の内容をふまえて  $\mathbb{H}^3$  の CMC-1 曲面の基本事項を説明します。第3章ではさらに完備かつ有限全曲率をもつ CMC-1 曲面の性質について解説します。第4章は展望の章で、先に記した  $\mathbb{H}^3$  の平坦な曲面や3次元 de Sitter 時空の平均曲率1の曲面と本書で扱う  $\mathbb{H}^3$  の CMC-1 曲面との関連について記しました。本書が、この方面に興味を持たれた方々の助けになれば幸いです。

最後に、何度も原稿を通読して下さり多くのアドバイスをくださった親友、山田光太郎氏に深く感謝します。特に第2章の Bryant の表現公式の証明は、山田氏と筆者の共同研究の際に見いだしたものです。

2009年7月 梅原雅顕

# 第1章 極小曲面論概要

本章では、3次元 Euclid 空間  $\mathbb{R}^3$  の極小曲面論の基本事項について概説する。ここでは曲面を2次元多様体  $M^2$  から  $\mathbb{R}^3$  へのはめ込み写像として考える。第1節では、曲面に複素構造を入れるため等温座標系を定義し、その存在と関連する結果について紹介する。第2節では、曲面論の基本事項を確認し、それをもとに極小曲面の定義と幾つかの基本的な性質について紹介する。第3節では、極小曲面を複素解析的手法で構成する「Weierstrass の表現公式」について、その証明を含め詳しく述べる。第4節では、極小曲面を積分を使わず構成できる「微分型表現公式」について、Weierstrass の表現公式から導く方法を紹介する。第5節では、有限全曲率をもつ完備極小曲面に対して成り立つ「Osseman の不等式」とその証明の概略、そして、その等号が成り立つ非自明な例として、Jorge-Meeks 曲面を紹介する。

## 1.1 2次元 Riemann 多様体上の等温座標系

向き付けられた2次元多様体  $M^2$  上に Riemann 計量  $ds^2$  が備わっている状況を考える。このとき、 $M^2$  の各点  $p$  において向きに同調した正規直交基底  $\{e_1, e_2\} (\in T_p M^2)$  をとり、

$$J_p(e_1) = e_2, \quad J_p(e_2) = -e_1 \quad (1.1.1)$$

により、 $p$  の接平面  $T_p M^2$  からそれ自身への線形写像  $J_p: T_p M^2 \rightarrow T_p M^2$  を定義する。この写像は「接ベクトルを反時計まわりに  $\pi/2$  回転させる写像」であることから正規直交基底の取り方によらない。今、任意の点  $p \in M^2$  において向きに同調した局所座標系  $(U; (x, y))$  をとる。このとき  $U$  上のベクトル場

$$\partial/\partial x, \quad \partial/\partial y$$

に Schmidt の直交化法を施すことで向きに同調する  $U$  上の正規直交基底の場  $\{E_1, E_2\}$  をつくり、その双対基底の場を  $\{\omega_1, \omega_2\}$  とすると、先ほど定義した  $J$  は

$$J = \omega_1 \otimes E_2 - \omega_2 \otimes E_1$$

と局所表示することができ、 $J$  は  $M^2$  上の  $(1, 1)$  テンソル場を定めていることがわかる。さらに  $J^2 = -\text{id}$  となるので、 $J$  は  $M^2$  上の複素構造を定める。

事実 1.1 (Ehresmann, Newlander-Nirenberg).  $M^{2n}$  を偶数次元多様体とし、 $J$  をその上の複素構造とする<sup>1</sup>。もし  $J$  に対する Nijenhuis テンソル

$$N(X, Y) := [JX, JY] - [X, Y] - J[X, JY] - J[JX, Y], \quad (X, Y \text{ は } M^{2n} \text{ 上のベクトル場})$$

が至るところ 0 になるならば、 $M^{2n}$  上には  $J$  を複素構造とする複素多様体の構造が入る。

この結果を我々の状況に当てはめると、(1.1.1) で定まる  $J$  に対する Nijenhuis テンソル  $N$  は、至るところ 0 になるので (章末の演習問題 1 を参照)、 $M^2$  上に Riemann 面 (1 次元複素多様体) の構造が入る。つまり、 $p \in M^2$  の近傍  $U$  に複素座標  $z = u + iv$  がとれて、

$$J(\partial/\partial u) = \partial/\partial v, \quad J(\partial/\partial v) = -\partial/\partial u$$

をみます。また、 $J$  は、各点で直交変換を引き起こすので

$$ds^2\left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}\right) = 0, \quad ds^2\left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u}\right) = ds^2\left(\frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial v}\right) = e^{2\sigma}$$

とおくことができる。ここで  $\sigma = \sigma(u, v)$  は  $U$  上の  $C^\infty$  級関数である。特に、

$$ds^2 = e^{2\sigma}(du^2 + dv^2) \tag{1.1.2}$$

なる表示が得られる。Riemann 計量が上のような表示をもつ局所座標系  $(u, v)$  を等温座標系 (isothermal coordinate system) という<sup>2</sup>。

ところで Riemann 計量  $ds^2$  による接束  $TM^2$  と余接束  $T^*M^2$  との同一視を行えば、複素構造  $J$  は Hodge の \* 作用素

$$*\omega_1 = \omega_2, \quad *\omega_2 = -\omega_1$$

と同一視できる。この作用素を用いることで、Riemann 計量  $ds^2$  に対するラプラシアン  $\Delta$  が

$$\Delta f = *d*df \quad (f \in C^\infty(M^2)) \tag{1.1.3}$$

と定まるが<sup>3</sup>、簡単な計算により計量 (1.1.2) に対するラプラシアンは

$$\Delta f = e^{-2\sigma}(f_{uu} + f_{vv}) \tag{1.1.4}$$

<sup>1</sup>このとき  $M^{2n}$  は自動的に向き付け可能になる。

<sup>2</sup>ここまでの議論は  $M^2$  の向き付け可能性を仮定したが、局所的な話なので、始めから各点の単連結な近傍に制限をすることで、等温座標系の存在が  $M^2$  が向き付け不可能な場合にも有効であることがわかる。

<sup>3</sup>Hodge の \* 作用素やラプラシアンの詳しいことは、文献 [40] の §14 を参照。



によって与えられることがわかる。また、

$$\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial u} - i \frac{\partial}{\partial v} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial u} + i \frac{\partial}{\partial v} \right)$$

と定めると、(1.1.4) は次のように表すことができる

$$\Delta f = 4e^{-2\sigma} f_{z\bar{z}}. \quad (1.1.5)$$

但し、ここで以下のような記法を用いた、

$$f_z := \frac{\partial f}{\partial z}, \quad f_{\bar{z}} := \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}, \quad f_{z\bar{z}} := \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}}.$$

## 1.2 極小曲面とは？

いま、2次元多様体  $M^2$  から3次元 Euclid 空間  $\mathbb{R}^3$  へのはめ込み (immersion)  $f: M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  を考える。 $\mathbb{R}^3$  の内積「 $\cdot$ 」の  $f$  による引き戻し (第一基本形式という)

$$ds^2 = df \cdot df = (f_u \cdot f_u) du^2 + 2(f_u \cdot f_v) dudv + (f_v \cdot f_v) dv^2$$

によって  $M^2$  上に Riemann 計量を定める。この Riemann 計量に関する等温座標系  $(U; u, v)$  をとると、(1.1.2) の条件式は

$$f_u \cdot f_u = f_v \cdot f_v = e^{2\sigma}, \quad f_u \cdot f_v = 0 \quad (1.2.1)$$

に翻訳される。特に、 $z = u + iv$  とおくと、 $f_z \cdot f_z = 0$  が成り立つ。また、 $\times$  を  $\mathbb{R}^3$  のベクトル積とすると、 $f$  の単位法ベクトル  $\nu$  が

$$\nu = \frac{f_u \times f_v}{|f_u \times f_v|} = e^{-2\sigma} (f_u \times f_v)$$

によって定まるが、

$$h := -df \cdot d\nu = -(f_u \cdot \nu_u) du^2 - (f_u \cdot \nu_v) dudv - (f_v \cdot \nu_u) dudv - (f_v \cdot \nu_v) dv^2$$

で定まる共変対称テンソルを第二基本形式という。関係式  $f_u \cdot \nu = f_v \cdot \nu = 0$  の両辺を  $u$  または  $v$  で微分することで、第二基本形式は次のように書きなおすことができる。

$$h = (f_{uu} \cdot \nu) du^2 + 2(f_{uv} \cdot \nu) dudv + (f_{vv} \cdot \nu) dv^2.$$

$\{e_1, e_2\}$  を  $T_p M^2$  の第一基本形式  $ds^2$  に関する正規直交基底とする。このとき、第二基本形式を用いて定まる対称行列

$$A := \begin{pmatrix} h(e_1, e_1) & h(e_1, e_2) \\ h(e_2, e_1) & h(e_2, e_2) \end{pmatrix}$$

の固有値を  $f$  の主曲率 (principal curvature) という。また,  $A$  の行列式  $K$  を Gauss 曲率 (Gaussian curvature) といい, そしてトレースの半分を平均曲率 (mean curvature) といい  $H$  で表す。平均曲率関数  $H$  が恒等的に 0 になる 2 次元多様体から  $\mathbb{R}^3$  へのはめ込みを極小曲面 (minimal surface) という。定義から, 極小曲面の 2 つの主曲率の和は零となる。閉じた針金に石鹸膜を張ると, その膜は極小曲面になることが知られている。特に, 次の事実は極小曲面の存在性を示す重要な結果である。

**事実 1.2 (Douglas-Radó, Osserman).**  $\gamma$  を  $\mathbb{R}^3$  内の区分的に滑らかな単純閉曲線とする。このとき, 単位円板から  $\mathbb{R}^3$  への  $\gamma$  を境界とする (分岐はめ込みのクラスとして面積最小な) 極小はめ込みが存在する<sup>4</sup>

特に  $\gamma$  が, 空間内の平面に横たわる単純閉曲線となるときに, この結果は Riemann の写像定理を意味することに注意する。いま,  $(u, v)$  は等温座標系であるので,  $e_1 = e^{-\sigma} \partial/\partial u$ ,  $e_2 = e^{-\sigma} \partial/\partial v$  とおくことができ,

$$\Delta f = 2H\nu, \quad \Delta = e^{-2\sigma} \left( \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right) \quad (1.2.2)$$

が成り立つので, 極小はめ込み  $f$  の各成分は調和関数からなる。特に, 調和関数に関する最大値の原理により, コンパクトで境界を持たない極小曲面は存在しない。「平面 (plane)」は極小曲面の代表的な例であるが, ここではその他の 3 つの基本的な例を紹介する。

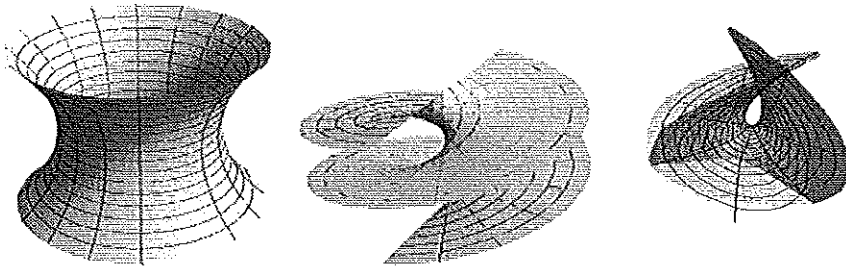


図 1.1: 左から catenoid, helicoid, Enneper の極小曲面

**例 1.3 (カテノイド).** 双曲線関数  $\cosh t$  は天井から吊るした鎖の形を表すことから懸垂線 (catenary) と呼ばれる。この懸垂線から作られる回転面

$$f(t, \theta) = \left( (\cosh t)(\cos \theta), (\cosh t)(\sin \theta), t \right) \quad (t, \theta \in \mathbb{R})$$

は極小曲面になる。これはカテノイド (catenoid) あるいは懸垂面と呼ばれる。

<sup>4</sup>この結果の詳細については, 文献 [22] をみよ。

例 1.4 (ヘリコイド). 次の写像で定まる曲面は極小になる.

$$f(t, \theta) = (t \cos \theta, t \sin \theta, \theta) \quad (t \in \mathbb{R}, \theta \in [0, 2\pi]).$$

これはヘリコイド (helicoid) あるいは常螺旋面と呼ばれる.  $t$  を固定すると常螺旋 (helix) であり, Euclid 空間  $(\mathbb{R}^3; x, y, z)$  において, 常螺旋の各点から  $xy$  平面に平行な線を伸ばしてできる線織面である. これはカテノイド同様に自己交叉のない極小曲面である.

例 1.5 (Enneper の極小曲面). これは 3 次式で表される極小曲面で

$$f(u, v) = \left( u - \frac{u^3}{3} + uv^2, -v + \frac{v^3}{3} - u^2v, u^2 - v^2 \right) \quad (u, v \in \mathbb{R})$$

で与えられる.

### 1.3 Weierstrass の表現公式

ここで, 極小曲面の構成法として有名な Weierstrass の表現公式を紹介する. 基本文献として, 和書では, 小林昭七先生の著書 [15] の最終章, 洋書では Osserman [23] などが挙げられる. 以下  $M^2$  は向き付け可能である<sup>5</sup>とし,  $f: M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  を極小はめ込みとする.

このとき第 1 節で述べたように,  $M^2$  には計量  $ds^2$  から複素構造が定まっており,  $f = (f_1, f_2, f_3)$  の各成分は  $M^2$  上の調和関数となるので,  $(u, v)$  を第 1 節で述べた向きに同調した等温座標系とし,  $z = u + iv$  とおくと,  $z$  は  $M^2$  の Riemann 面 (つまり 1 次元複素多様体) としての局所複素座標を与えて,

$$(f_z)_{\bar{z}} = f_{z\bar{z}} = \frac{1}{4}(f_{uu} + f_{vv}) = 0$$

となる. 特に  $f_z$  は  $M^2$  上の正則関数となる. よって,

$$f_z dz = \frac{1}{2}(f_u - if_v)(du + idv) = \frac{1}{2} \left\{ (f_u du + f_v dv) + i(f_u dv - f_v du) \right\}$$

であるから,  $df$  を  $\mathbb{R}^3$  に値をとる 1 次微分形式と考えて線積分を行うと,

$$f(z) = \int_{z_0}^z df = \int_{z_0}^z (f_z dz + f_{\bar{z}} d\bar{z}) = \operatorname{Re} \int_{z_0}^z 2f_z dz$$

なる積分表示が得られる (ここで,  $z_0$  は  $M^2$  上の点で 1 つ固定しておく. また  $\operatorname{Re}$  は実部を表す). ところで

$$f_z \cdot f_{\bar{z}} = (f_u - if_v) \cdot (f_u - if_v) = (f_u \cdot f_u - f_v \cdot f_v) - 2i(f_u \cdot f_v)$$

<sup>5</sup>ここでは向き付け可能であることを仮定しているが, 向き付け不可能な極小曲面も定義することができ, 幾つかの性質や具体例が知られている. 詳しくは, Martin [13] を見よ.

であるから, (1.2.1) より

$$0 = f_z \cdot f_{\bar{z}} = ((f_1)_z)^2 + ((f_2)_z)^2 + ((f_3)_z)^2 \quad (1.3.1)$$

であることがわかる. いま

$$\omega = \hat{\omega} dz := \left( (f_1)_z - i(f_2)_z \right) dz, \quad g := \frac{(f_3)_z dz}{\omega}$$

とおくと, 局所複素座標  $z$  の取り方によらず<sup>6</sup>, それぞれ  $M^2$  上で大域的に定義された正則 1 次微分形式, 有理型関数となる<sup>6</sup>. この対  $(g, \omega)$  を Weierstrass data という. 先の関係式 (1.3.1) から,  $(f_1)_z$ ,  $(f_2)_z$ ,  $(f_3)_z$  をそれぞれ次のように復元できる.

$$\begin{aligned} (1-g^2)\hat{\omega} &= \frac{\hat{\omega}^2 - ((f_3)_z)^2}{\hat{\omega}} = \frac{2((f_1)_z)^2 - 2i(f_1)_z(f_2)_z}{\hat{\omega}} = 2(f_1)_z \frac{(f_1)_z - i(f_2)_z}{\hat{\omega}} = 2(f_1)_z, \\ i(1+g^2)\hat{\omega} &= i \frac{\hat{\omega}^2 + ((f_3)_z)^2}{\hat{\omega}} = i \frac{-2i(f_1)_z(f_2)_z - 2((f_2)_z)^2}{\hat{\omega}} = 2(f_2)_z \frac{(f_1)_z - i(f_2)_z}{\hat{\omega}} = 2(f_2)_z, \\ 2g\hat{\omega} &= 2(f_3)_z. \end{aligned}$$

特に,

$$f_z dz = \frac{1}{2} \left( (1-g^2)\omega, i(1+g^2)\omega, 2g\omega \right)$$

なる表示が得られる. このとき,  $f$  の第一基本形式は

$$ds^2 = df \cdot df = (f_z dz + f_{\bar{z}} d\bar{z}) \cdot (f_z dz + f_{\bar{z}} d\bar{z}) = (f_z \cdot f_z) dz^2 + 2(f_z \cdot f_{\bar{z}}) |dz|^2 + (f_{\bar{z}} \cdot f_{\bar{z}}) d\bar{z}^2$$

という表示をもつ<sup>7</sup>が<sup>8</sup>, (1.3.1) より  $f_z \cdot f_z = f_{\bar{z}} \cdot f_{\bar{z}} = 0$  が成り立つので,

$$ds^2 = 2(f_z \cdot f_{\bar{z}}) |dz|^2 = \frac{1}{2} \left( (1-g^2)\omega, i(1+g^2)\omega, 2g\omega \right) \begin{pmatrix} (1-g^2)\bar{\omega} \\ -i(1+g^2)\bar{\omega} \\ 2g\bar{\omega} \end{pmatrix} = (1+|g|^2)|\omega|^2$$

なる表示を得る. 特に「 $f$  がはめ込みである」という条件は,

$$(1+|g|^2)\omega \text{ が } M^2 \text{ 上で零点を持たない 1-form を定める} \quad (1.3.2)$$

<sup>6</sup>一般に, Riemann 面  $M^2$  (つまり 1 次元複素多様体) からの  $\mathbb{C} \cup \{\infty\} = S^2 = P^1(\mathbb{C})$  への正則写像を,  $M^2$  上の有理型関数という. また Riemann 面  $M^2$  上の 2 つの正則 1 次微分形式 (あるいはもっと一般に 2 つの有理型 1 次微分形式)  $\alpha$  と  $\beta$  が与えられると,  $M^2$  の局所複素座標  $z$  に対して  $\alpha = \hat{\alpha} dz$ ,  $\beta = \hat{\beta} dz$  と表示される. このとき, 商  $\hat{\alpha}/\hat{\beta}$  は局所複素座標  $z$  の取り方に依存しない. そこで, この商を  $\alpha/\beta$  と記す. つまり Riemann 面の場合には正則 1 次微分形式同士の商が自然に定義される.

<sup>7</sup> $dz \cdot d\bar{z}$  のことを, ここでは  $|dz|^2$  と略記している.

という条件と同値である、 $f$  の単位法線ベクトル  $\nu$  は

$$\begin{aligned}\nu &= \frac{f_u \times f_v}{|f_u \times f_v|} = \frac{1}{1+|g|^2} \begin{pmatrix} g + \bar{g} \\ -i(g - \bar{g}) \\ -1 + |g|^2 \end{pmatrix} \\ &= \left( \frac{2\operatorname{Re}(g)}{1+|g|^2}, \frac{2\operatorname{Im}(g)}{1+|g|^2}, \frac{-1+|g|^2}{1+|g|^2} \right)\end{aligned}\quad (1.3.3)$$

で与えられるので、 $g$  は  $\nu$  の北極からの立体射影と同一視される。つまり  $g$  は Gauss 写像に他ならない。実際、 $\nu$  が単位ベクトルであることは簡単に確かめられ、 $f$  と直交することは  $f_z \cdot \nu = 0$  と同値であり、それは

$$f_z \cdot \nu = \frac{\hat{\omega}}{2(1+|g|^2)} \begin{pmatrix} 1-g^2 \\ i(1+g^2) \\ 2g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g + \bar{g} \\ -i(g - \bar{g}) \\ -1 + |g|^2 \end{pmatrix} = 0 \quad (1.3.4)$$

からわかる。さらに  $f$  の第二基本形式  $h$  については

$$\begin{aligned}h &= -df \cdot d\nu = -(f_z dz + f_{\bar{z}} d\bar{z}) \cdot (\nu_z dz + \nu_{\bar{z}} d\bar{z}) \\ &= -(f_z \cdot \nu_z) dz^2 - (f_z \cdot \nu_{\bar{z}} + f_{\bar{z}} \cdot \nu_z) |dz|^2 - (f_{\bar{z}} \cdot \nu_{\bar{z}}) d\bar{z}^2 \\ &= (f_{zz} \cdot \nu) dz^2 + 2(f_{z\bar{z}} \cdot \nu) |dz|^2 + (f_{\bar{z}\bar{z}} \cdot \nu) d\bar{z}^2\end{aligned}$$

で与えられる。一方、

$$\beta := \frac{1}{2}(1-g^2, i(1+g^2), 2g)$$

とおくと

$$f_{zz} = (\beta \hat{\omega})_z = \beta_z \hat{\omega} + \beta \hat{\omega}_z$$

であるが、(1.3.4) より  $\beta \cdot \nu = 0$  であるから直接計算で

$$f_{zz} \cdot \nu = \hat{\omega} \beta_z \cdot \nu = -\hat{\omega} g_z \quad (1.3.5)$$

が確かめられる。また、 $f_{z\bar{z}} = 0$  であることから、結局第二基本形式は

$$h = (f_{zz} \cdot \nu) dz^2 + (f_{\bar{z}\bar{z}} \cdot \nu) d\bar{z}^2 = (f_{zz} \cdot \nu) dz^2 + \overline{(f_{zz} \cdot \nu) dz^2} = -\omega dg - \bar{\omega} d\bar{g}$$

となることがわかる。ここで、特に正則 2 次微分<sup>8</sup>

$$Q := \omega dg \quad (1.3.6)$$

を、極小はめ込み  $f$  の Hopf 微分と云う。第二基本形式は  $h = -Q - \bar{Q}$  と表されるので、極小はめ込みに対しては、 $Q$  は第二基本形式と等価な情報を持っていることに注意せよ。

以上のことを整理すると次の定理を示したことになる。

<sup>8</sup>正則な複素数値対称共変テンソルのことを、関数論では正則 2 次微分という。

定理 1.6 (Weierstrass の表現公式).  $\tilde{M}^2$  を単連結な Riemann 面とし, 1 点  $z_0 \in \tilde{M}^2$  を固定する.  $(g, \omega)$  を  $\tilde{M}^2$  上の有理型関数と正則 1 次微分形式との対で (1.3.2) をみたすとすると,

$$f(z) = F + \bar{F}, \quad F := \frac{1}{2} \int_{z_0}^z (1 - g^2, i(1 + g^2), 2g)\omega \quad (1.3.7)$$

で定める写像は  $\tilde{M}^2$  から  $\mathbb{R}^3$  への共形極小はめ込みを定める. このとき,  $f$  の第一基本形式  $ds^2$  と第二基本形式  $h$  はそれぞれ

$$ds^2 = (1 + |g|^2)^2 |\omega|^2, \quad (1.3.8)$$

$$h = -\omega dg - \bar{\omega} d\bar{g} \quad (1.3.9)$$

で与えられる. 逆に  $\tilde{M}^2$  から  $\mathbb{R}^3$  への共形極小はめ込みは, すべてこのようにして得られる.

ここで,  $f$  が共形 (conformal) であるとは,  $f$  が角度を保つ写像であること, つまり,  $z = u + iv$  を  $\tilde{M}^2$  の複素座標とすると

$$f_u \cdot f_u = f_v \cdot f_v, \quad f_u \cdot f_v = 0$$

が成り立つことを意味する. (この条件は 第一基本形式  $ds^2$  が, Riemann 面  $\tilde{M}^2$  上の Hermite 計量 (p53 参照) になっていることと同値である.)

既に示したように, これは  $f_z \cdot f_z = 0$  と同値な条件になる.

注意 1.7. Weierstrass data  $(g, \omega)$  からの極小曲面の構成で, 計量  $ds^2 = (1 + |g|^2)^2 |\omega|^2$  が退化する点は分岐点 (branch point) とよばれ, その点では曲面がはめ込みにならず, 曲面が分岐するようになる.

注意 1.8. もしも  $M^2$  が単連結でない場合には, 積分

$$\operatorname{Re} \int_{\gamma} (1 - g^2, i(1 + g^2), 2g)\omega \quad ([\gamma] \in \pi_1(M^2)) \quad (1.3.10)$$

がすべての  $M^2$  の基本群  $\pi_1(M^2)$  の生成元について消えるという「周期条件 (period condition)」が成り立てば,  $f$  は  $M^2$  上で一価な写像を定める.

注意 1.9. 定理 1.6 での表現公式 (1.3.7) の虚部

$$f^*(z) := \operatorname{Im} \int_{z_0}^z (1 - g^2, i(1 + g^2), 2g)\omega \quad (1.3.11)$$

も極小曲面となり, これは (1.3.7) で Weierstrass data を  $(g, i\omega)$  としたものに対応している. このとき,  $f$  と  $f^*$  は互いに共役 (conjugate) な極小曲面であるという. 両者は同じ第一基本形式をもち, 変形

$$f_t(z) := \operatorname{Re} \int_{z_0}^z (1 - g^2, i(1 + g^2), 2g)e^{it}\omega \quad (t \in \mathbb{R}) \quad (1.3.12)$$

は主曲率と第一基本形式を保つ  $f = f_0$  から  $f^* = f_{\pi/2}$  への極小曲面の実解析的な変形を与える。

例 1.10 (Enneper の極小曲面).  $M^2 = \mathbb{C}$  (複素平面) とし,

$$g := z, \quad \omega := dz$$

とおくと, これは (1.3.2) をみだし,  $M^2$  上の極小はめ込みを定める. これは例 1.5 と一致する. Enneper 曲面  $f$  に対して (1.3.12) で定まる極小曲面  $f_t$  ( $t \in \mathbb{R}$ ) は, 適当な座標変換を行うと, 元の  $f$  と同じ第一基本形式と第二基本形式を持ち,  $f$  と合同である.

例 1.11 (ヘリコイド).  $M^2$  を  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  の普遍被覆面とし,

$$g := z, \quad \omega := idz/z^2$$

とおくとこれは (1.3.2) をみだし,  $M^2$  上の極小はめ込みを定める. それは例 1.4 のヘリコイドと本質的に同じものを定める.

例 1.12 (カテナイド).  $M^2$  を  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  とし,

$$g := z, \quad \omega := dz/z^2$$

とおくと, これは (1.3.2) と (1.3.10) をみだし,  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  上の極小はめ込みを定める. それは例 1.3 のカテナイドと本質的に同じものを定める. 特にカテナイドとヘリコイドは同じ第一基本形式と主曲率をもち,  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  の普遍被覆面上で互いに共役な極小曲面になっている.

## 1.4 極小曲面の微分型表現公式

いま,  $f: M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  を共形極小はめ込みとする. このとき, 定理 1.6 から Weierstrass data  $(g, \omega)$  が存在し,

$$f = F + \bar{F}, \quad F = \frac{1}{2} \int_{z_0}^z (1 - g^2, i(1 + g^2), 2g)\omega \quad (1.4.1)$$

が成り立つ. そこで,  $F = (F_1, F_2, F_3): M^2 \rightarrow \mathbb{C}^3$  と成分表示し

$$h_2 := F_1 - iF_2, \quad \psi := -F_1 - iF_2, \quad \varphi := F_3$$

とする. このとき (1.4.1) から

$$dh_2 = \omega, \quad (1.4.2)$$

$$d\psi = -d(F_1 + iF_2) = g^2\omega, \quad (1.4.3)$$

$$d\varphi = g\omega \quad (1.4.4)$$

となる。いま、 $\varphi = h_2g - h_1$  によつて  $h_1$  を定義すると、(1.4.4) から

$$h_2 = \frac{dh_1}{dg}$$

が得られる。さらに、 $\psi = h_2g^2 - 2h_1g + 2h$  によつて  $h$  を定義すると、(1.4.3) から

$$h_1 = \frac{dh}{dg}$$

が得られる。以上のことから次の式が与えられたことになる。

$$F_1 = \frac{1}{2}(h_2 - \psi) = -h + gh_1 + \frac{1-g^2}{2}h_2,$$

$$F_2 = \frac{i}{2}(h_2 + \psi) = ih - igh_1 + \frac{i(1+g^2)}{2}h_2,$$

$$F_3 = -h_1 + gh_2.$$

先程の3式を行列表示すると

$$F = \begin{pmatrix} -1 & g & (1-g^2)/2 \\ i & -ig & i(1+g^2)/2 \\ 0 & -1 & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \quad \left( \text{但し } h_1 = \frac{dh}{dg}, h_2 = \frac{dh_1}{dg} \right) \quad (1.4.5)$$

となる。この  $F$  は、作り方から

$$(dF_1)^2 + (dF_2)^2 + (dF_3)^2 = 0 \quad (1.4.6)$$

をみtas。この条件(1.4.6)をみtas  $\mathbb{C}^3$  への正則写像を null (または isotropic) というが、特に、(1.4.5)で定義した  $F$  は、 $\mathbb{C}^3$  への正則写像と考えたとき null となる。以上のことから、 $M^2$  上の有理型関数の組  $(h, g)$  によつて  $F$  を (1.4.5) で定義し、その実部を取ること(分岐したものも含む) 極小曲面を生成できる、すなわち、積分を用いない表現公式を得ることができた。この表現公式を極小曲面の微分型表現公式という。意外なことがあるが、積分を用いた表現公式と、この微分型表現公式は歴史的にはほぼ同時に発見されている。微分型表現公式は、単連結でない Riemann 面から極小曲面を構成するのに有効であるが、分岐点(はめ込みでない点)が生じないようにするのが難しい。一方、積分公式の方は、単連結でない Riemann 面から極小曲面を構成するのに、モノドロミー(周期)を制御する必要があるが、反面、曲面上の曲線の長さなどの下からの評価をする際、(微分公式で与えられている場合には不可能な操作として)積分の中に絶対値を入れることができるという利点があり、一長一短である。



## 1.5 Osserman の不等式

この節以降、極小はめ込みはすべて、向き付け可能な2次元多様体の上で定義されているものとする。向き付け不可能な多様体は2重被覆をとることで、向き付け可能な多様体が構成できるので、この仮定は以下の議論に大きな影響を与えない。まず、2次元 Riemann 多様体の全曲率を定義する。

定義.  $(M^2, ds^2)$  を、向き付けられた非コンパクトかつ完備な2次元 Riemann 多様体とし、その Gauss 曲率を  $K$ 、面積要素を  $dA$  とする。このとき、Gauss 曲率の面積要素による積分

$$\int_{M^2} K dA$$

が、 $\pm\infty$  への発散も含めて値が確定するとき、その値を  $M^2$  の全曲率 (total curvature) という。

向き付け可能な2次元 Riemann 多様体  $(M^2, ds^2)$  を与えると、第1節で述べたように  $M^2$  に自然な Riemann 面の構造が入るが、特に  $\mathbb{R}^3$  の極小曲面の全曲率については、Weierstrass 表現公式から、Gauss 写像  $g$  を用いて

$$\int_{M^2} K dA = - \int_{M^2} \frac{2idg \wedge d\bar{g}}{(1+|g|^2)^2} \quad (1.5.1)$$

と表すことができる<sup>9</sup>。

事実 1.13. (Huber)  $(M^2, ds^2)$  を、向き付けられた非コンパクトかつ完備な向き付け可能な2次元 Riemann 多様体とし、計量  $ds^2$  に付随する Gauss 曲率の負の部分の全曲率が有限とする。このとき、 $M^2$  は (Riemann 面として) コンパクト Riemann 面  $\bar{M}^2$  から有限個の点を除いたものと正則同値になる。

Huber の論文 [12] には、明確な形では  $M^2$  がコンパクト Riemann 面  $\bar{M}^2$  から有限個の点を除いたものと同相になることしか書かれていないが、実は、論文の議論をよく読むと、上の主張が示されていることがわかる。詳しくは文献 [39] の付録をみよ。特に極小曲面  $f: M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  が完備<sup>10</sup>であり、かつ有限全曲率をもてば、コンパクト Riemann 面  $\bar{M}^2$  と有限個の点  $p_1, \dots, p_n$  が存在し、 $M^2$  と  $\bar{M}^2 \setminus \{p_1, \dots, p_n\}$  は Riemann 面として同一

<sup>9</sup>この式は  $(g, \omega)$  ( $\omega = \hat{\omega} dz$ ) を Weierstrass data とするとき、章末の演習問題 [8] による Gauss 曲率の表示  $K = \frac{-4|g_1|^2}{|\hat{\omega}|^2(1+|g|^2)^2}$  と面積要素の式  $dA = (1+|g|^2)^2 |\hat{\omega}|^2 du \wedge dv$  および  $dz \wedge d\bar{z} = -2idu \wedge dv$  なる3つの関係式から導出される。

<sup>10</sup> $f$  の第一基本形式が  $M^2$  上で Riemann 多様体として完備のとき、 $f$  は完備であるという。

視される。このとき、除かれた  $n$  個の点  $p_1, \dots, p_n$  のことを、極小曲面  $f$  のエンド (end) という。

ところで、関数論における古典的な結果として次のことが知られている。

**事実 1.14.** (Picard の大定理)  $D$  を  $\mathbb{C}$  の領域とし、 $p \in D$  とする。  $D \setminus \{p\}$  上の有理型関数  $f(z)$  が除外値を3点以上もてば、 $f(z)$  は  $z = p$  で高々極をもつ。

実際  $f(z) = e^{1/z}$  は、 $z = 0$  で真性特異点を持ち、かつ、 $0, \infty$  という2つの除外値をもつので、この事実は最良の結果である。このことから、次のことが示せる。

**命題 1.15.**  $M^2$  を Riemann 面とし、 $(g, \omega)$  を完備かつ有限全曲率をもつ極小はめ込み  $f: M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  の Weierstrass data とすると、 $g$  は  $M^2$  の各エンドで高々極をもつ。

**証明.** 単位球面  $S^2$  の面積要素を  $dA_{S^2}$  とし、北極からの立体射影により、 $S^2$  を  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$  と同一視すると、 $\mathbb{C}$  の自然な座標系を用いて

$$dA_{S^2} = \frac{2i dz \wedge d\bar{z}}{(1 + |z|^2)^2}$$

で表される。特に (1.5.1) の導出から  $(-K)dA$  は  $dA_{S^2}$  の Gauss 写像  $g: M^2 \rightarrow S^2$  による引き戻しに一致することがわかる。(ここでは、本来の単位法線ベクトルとしての  $\nu$  をその立体射影  $g$  と同一視している。) さて  $f$  のエンドを原点として、 $\Delta^*$  をその点を除外した穴あき円板とする。もし  $g$  がそこで真性特異点をもったとすると、Picard の大定理 (事実 1.14) により

$$\int_{\Delta^*} \frac{2i dg \wedge d\bar{g}}{(1 + |g|^2)^2} = \int_{\Delta^*} g^*(dA_{S^2}) = \int_{a \in S^2} g^{-1}(a) dA_{S^2} = \infty$$

なる等式が成立し、有限全曲率性に反する。 □

また、次の事実が成り立つ<sup>11</sup>。

**事実 1.16.**  $\omega$  を穴あき単位円板  $\mathbb{D}^* := \{z \in \mathbb{C}; 0 < |z| < 1\}$  上の正則1次微分形式で、原点に向かう任意の経路  $\gamma$  に関して

$$\int_{\gamma} |\omega| = \infty$$

が成り立つならば、 $\omega$  は原点に高々極をもつ。

このことを用いると次が示せる。

<sup>11</sup>詳しくは文献 [23] の Lemma 9.6 (83 ページ) を参照せよ。

命題 1.17.  $M^2$  を Riemann 面とし,  $(g, \omega)$  を, 完備かつ有限全曲率をもつ極小はめ込み  $f: M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  の Weierstrass data とすると,  $\omega$  は  $M^2$  の各エンドで高々極をもつ.

証明. 実際, エンドを原点として,  $\mathbb{D}^*$  をその点を除外した穴あき円板とする. 命題 1.15 により,  $g$  は原点で高々極をもつので, 同じ値を有限回しかとらず, 特に, 曲面の適当な回転により, エンドで極を持たないとして一般性を失わない. 特に  $g(0) \in \mathbb{C}$  であるから,  $g(z)$  の連続性により, 正数  $C$  が存在して

$$|g(z)| < C \quad (z \in \Delta^*)$$

が成り立つ. すると,

$$(1 + |g|^2)|\omega| \leq (1 + C^2)|\omega|$$

なる評価が得られる<sup>12</sup>. よって, 計量  $ds^2 = (1 + |g|^2)|\omega|^2$  の完備性により, 原点に向かう任意の経路  $\gamma$  に関して, その長さを  $L_{ds^2}(\gamma)$  とすると

$$\infty = L_{ds^2}(\gamma) = \int_{\gamma} (1 + |g|^2)|\omega| \leq (1 + C^2) \int_{\gamma} |\omega|$$

が成り立つので, 事実 1.16 により,  $\omega$  は原点に高々極をもつ. □

以上の準備のもと, 次の不等式を示すことができる.

定理 1.18 (Osserman の不等式).  $M^2$  を向きづけられた 2次元多様体とし,  $f: M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  を完備かつ有限全曲率をもつ極小はめ込みとする. このとき  $f$  の Gauss 写像<sup>13</sup>  $g: \bar{M}^2 \rightarrow S^2$  の写像度を  $\deg g$  で表し, エンドの数を  $n$  とすると,

$$2 \deg g \geq -\chi(M^2) + n$$

が成り立つ.<sup>14</sup> 但し  $\chi(M^2)$  は  $M^2$  の Euler 数を表す. 等号は, 各エンドが自己交叉しないときに成り立つ.

注意 1.19. 写像度  $\deg g$  とは, 一般に写像が何回球面を覆ったのかを測る量であり, 全曲率で次のように表すことができる.

$$\deg g = \frac{1}{4\pi} \int_{M^2} (-K) dA.$$

<sup>12</sup>両辺に任意の零でない接ベクトル  $v$  を代入したとき  $(1 + |g|^2)|\omega(v)| \leq (1 + C^2)|\omega(v)|$  が成り立つ, という意味である.

<sup>13</sup>命題 1.15 により, Gauss 写像  $g$  は  $M^2$  のコンパクト化  $\bar{M}^2$  から  $S^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  への  $C^\infty$  級写像と考えることができる.

<sup>14</sup>写像度は位相幾何的な概念であるが,  $g$  は  $S^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  への正則写像なので, この値は  $p \in S^2$  に対して, 逆像の個数  $\#g^{-1}(p)$  に一致する.

証明. 等号成立条件は Jorge と Meeks によって与えられたが, ここではその証明を与えずに (詳しくは [18] をみよ), 不等式のみ証明を与える. いま,  $p_1, \dots, p_n \in M^2$  を曲面のエンドとする. 命題 1.17 により,  $\omega$  は各エンド  $p_j \in \bar{M}^2$  ( $j = 1, \dots, n$ ) に真性特異点をもたない.  $g$  は Gauss 写像と立体射影との合成であるから, 必要ならば曲面を回転させることにより,  $g$  は各エンドで極をもたないとしてよい. よって計量

$$ds^2 = (1 + |g|^2)|\omega|^2$$

が各  $p_j$  で完備であるためには,  $\omega$  はこの点で必ず極を持たねばならない. そこで  $m_j (\geq 1)$  を  $p_j$  における  $\omega$  の極の位数とする. ここで,  $m_j \neq 1$  であることを背理法を用いて示す. いま  $\mathbb{C}^3$  に値を持つ 1-form を

$$\alpha := (1 - g^2, i(1 + g^2), 2g)\omega$$

と定めると,

$$f = \operatorname{Re} \int_{z_0}^z \alpha$$

で表される.  $m_j = 1$  であるとする,

$$\alpha = \left( \frac{1}{z - p_j} (c_{1,j}, c_{2,j}, c_{3,j}) + (\text{高次の項}) \right) dz$$

と書けるが,  $f$  が  $p_j$  のまわりで一価関数になるためには,  $\alpha$  の各成分の留数が実数でなければならない. つまり  $c_{1,j}, c_{2,j}, c_{3,j} \in \mathbb{R}$  となる.  $\alpha = 2f_z dz$  であり, (1.3.1) により  $\alpha \cdot \alpha = 0$  であるから, その  $1/(z - p_j)^2$  の項の係数が零でなければならないことに着目すると

$$(c_{1,j})^2 + (c_{2,j})^2 + (c_{3,j})^2 = 0$$

となり,  $c_{1,j}, c_{2,j}, c_{3,j}$  が実数であることから,  $c_{1,j} = c_{2,j} = c_{3,j} = 0$  となる. 特に  $\alpha$  は  $z = p_j$  で正則となるので,  $f$  は  $p_j$  において滑らかとなり,  $p_j$  における完備性に反する. よって

$$m_j \geq 2 \quad (j = 1, \dots, n)$$

である. ところで, Riemann-Roch の定理 (文献 [6] 参照) により

$$\chi(\bar{M}^2) = (\omega \text{ の極の位数の総和}) - (\omega \text{ の零点の位数の総和})$$

が成り立つ. ところが

$$(\omega \text{ の極の位数の総和}) = m_1 + \dots + m_n \geq 2n$$

であるので,

$$\chi(\bar{M}^2) \geq 2n - (\omega \text{ の零点の位数の総和})$$

となるが,  $ds^2$  が  $M^2$  で正定値であるためには  $q_1, \dots, q_m$  を  $\omega$  の零点とし,  $l_k$  を各  $q_k$  ( $k = 1, \dots, m$ ) におけるその位数とすると,  $g^2$  は各  $q_k$  で  $l_k$  位の極をもたねばならない. 特に  $l_k$  は偶数でなければならず,

$$2 \deg g = \ell_1 + \dots + \ell_n = (\omega \text{ の零点の位数の総和})$$

となる. 以上より

$$2 \deg g \geq -\chi(\bar{M}^2) + 2n = -\chi(M^2) + n$$

となる. □

Osserman の不等式で等号をみたす極小曲面の最も簡単な例は平面<sup>15</sup>である. 実際, 平面は Gauss 写像の写像度は 0 であり, Euler 数は 1, そしてエンドの数は 1 である. カテナイドも, Gauss 写像の写像度は 1 であり, Euler 数は 0 で, エンドの数は 2 より, Osserman の不等式の等号をみたす例となる. 最後に非自明な例を 1 つ挙げておこう.

例 1.20 (Jorge-Meeks 曲面).  $n$  を自然数とし,  $\zeta$  を 1 の原始  $n+1$  乗根とする.

$$g := z^n, \quad \omega := \frac{dz}{(z^{n+1} - 1)^2}$$

とおく. すると第一基本形式は変換  $z \mapsto \zeta z$  で不変である. また, Hopf 微分 ((1.3.6) 参照)

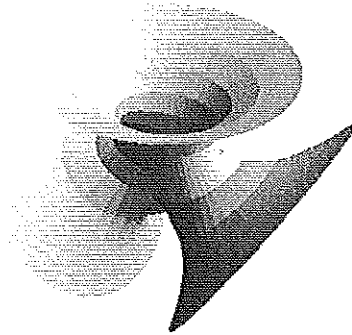
$$\omega dg = \frac{nz^{n-1}dz^2}{(z^{n+1} - 1)^2}$$

も  $z \mapsto \zeta z$  で不変であり, 曲面論の基本定理 (次章の定理 2.1 を参照) により対応する曲面もこの対称性をもつ. よって, この Weierstrass data  $(g, \omega)$  に対応する極小曲面が,  $z = \zeta^j$  ( $j = 0, 1, \dots, n$ ) のまわりで一価になるためには,  $(1 - g^2, i(1 + g^2), 2g)\omega$  の各成分の  $z = 1$  での留数が実数であればよいが, これは直接計算で確かめられる. よって,  $(g, \omega)$  を Weierstrass data とする極小曲面

$$f : (\mathbb{C} \cup \{\infty\}) \setminus \{1, \zeta, \dots, \zeta^n\} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

が定まる. この曲面の回転対称性から, 完備性は  $z = 1$  でのみチェックすればよい.  $\omega$  の  $z = 1$  での極の位数は 2 であり  $g$  の位数は 0 であるから  $ds^2$  は完備となる. この例では  $\deg g = n$  であり, 曲面の Euler 数は  $1 - n$  で, エンドの数は  $n + 1$  であるから Osserman の不等式の等号をみたす.  $n = 1$  のときには, 得られた極小曲面はカテナイドに一致する. (章末の演習問題の [7] をみよ.)

<sup>15</sup> $M^2 = \mathbb{C}$  とし,  $g = 0, \omega = dz$  なる Weierstrass data から定まる極小はめ込みが平面を与える.

Jorge-Meeks 曲面 ( $n = 2$  の場合)

## 演習問題 1

- [1] 第1節で定義した  $J$  が複素構造を定めていることを事実 1.1 を用いて示せ. さらにその  $J$  によって表示した計量  $ds^2$  が Kähler 計量であることを確かめよ. ここで計量が Kähler 計量であるとは, Hermite 計量 (つまり  $ds^2(JX, JY) = ds^2(X, Y)$  をみたす) で,  $\Omega(X, Y) := ds^2(X, JY)$  で定まる  $M^2$  上の 2 次形式が閉形式となることである.
- [2] 式 (1.1.3) から計量 (1.1.2) に対するラプラシアンが式 (1.1.4) になることを確かめよ.
- [3] 等温座標系 (1.2.1) において, Gauss 曲率  $K$  を計算せよ.  
(答:  $K = -e^{-2\sigma}(\sigma_{uu} + \sigma_{vv})$ )
- [4] 等温座標系 (1.2.1) において, 式 (1.2.2) を導け.
- [5] 例 1.3, 例 1.4, 例 1.5 が極小曲面を定めていることを平均曲率を直接計算して確かめよ.
- [6] 例 1.10, 例 1.11, 例 1.12 がそれぞれ例 1.5, 例 1.4, 例 1.3 と本質的に同一のものであることを示せ.
- [7]  $n = 1$  のときには, 例 1.20 で構成した極小曲面はカテナイドと本質的に同一のものであることを示せ.
- [8] 極小曲面の Gauss 曲率  $K$  は, Weierstrass data  $(g, \omega)$  を用いて

$$K = \frac{-4}{(1 + |g|^2)^4} \left| \frac{dg}{\omega} \right|^2$$

と表されることを示せ.

## 第2章 Bryantの表現公式

定(断面)曲率  $-c$  ( $c > 0$ ) の単連結完備な3次元 Riemann 多様体を3次元双曲型空間といい,  $\mathbb{H}^3(-c)$  で表す. 特に  $c=1$  のときには  $\mathbb{H}^3(-1)$  を  $\mathbb{H}^3$  で表す. 本章では,  $\mathbb{H}^3$  の平均曲率1の曲面に関する基本事項を概説する<sup>1</sup>. 第1節では, 定曲率空間の曲面論の基本定理を紹介し, それを用いて,  $\mathbb{R}^3$  の極小曲面と  $\mathbb{H}^3$  の平均曲率1の曲面との局所的な対応について説明する. 第2節では, 3次元双曲型空間の基本事項について紹介する. 第3節では, 前章で紹介した「Weierstrassの表現公式」に対応した,  $\mathbb{H}^3$  の平均曲率1の曲面の表現公式である「Bryantの表現公式」について詳しく述べる. 第4節では, 極小曲面の Gauss 写像に対応するものとして「双曲的 Gauss 写像」を定義し, 第5節では, その1つの幾何的意味を与える概念である「双対性」とその基本的性質について解説する. 第6節では, Bryantの表現公式を用いた,  $\mathbb{H}^3$  の平均曲率1の曲面の具体例を幾つか紹介する.

### 2.1 極小曲面との局所対応

まず, 定曲率空間の曲面論の基本定理から始める. いま,  $M^3(c)$  を定(断面)曲率  $c$  の単連結完備な Riemann 多様体 (3次元空間形と云う) とする. このとき  $M^3(c)$  は,  $c > 0$  のときは3次元球面  $S^3(c)$  と,  $c = 0$  のときは  $\mathbb{R}^3$  と, そして,  $c < 0$  のときは3次元双曲型空間  $\mathbb{H}^3(c)$  と等長的 (isometric) になることが知られている. 上述したように, 特に  $c = -1$  のとき,  $\mathbb{H}^3(-1)$  を単に  $\mathbb{H}^3$  で表すことにする. また同時に, 混乱が生じない場合には, 単位球面  $S^3(1)$  と  $S^2(1)$  はそれぞれ  $S^3, S^2$  と略記する.

定理 2.1 (曲面論の基本定理).  $(\tilde{M}^2, ds^2)$  を単連結な2次元 Riemann 多様体とし,  $K$  をその Gauss 曲率とする. いま,  $\tilde{M}^2$  上の2次共変対称テンソル  $h$  が以下の2つの関係式をみたしているとする.

(i)  $ds^2$  に関する局所正規直交枠  $(e_1, e_2)$  によってできる対称行列  $A = (h(e_i, e_j))_{i,j=1,2}$  は

$$K = c + \det(A)$$

をみたす (これを Gauss 方程式という).

<sup>1</sup>基本文献は, R. Bryant [2] と山田氏と筆者の共著論文 [34] である.

- (ii)  $h$  の  $ds^2$  に関する Levi-Civita 接続による共変微分  $\nabla h$  は 3 次対称テンソルとなる (これを Codazzi の方程式という).

このとき,  $\tilde{M}^2$  から  $M^3(c)$  への等長はめ込みで, その第二基本形式が  $h$  であるものが,  $M^3(c)$  の向きを保つ合同変換を除いて一意に存在する.

特にいま,

$$f_0: \tilde{M}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

が極小はめ込みであるとする, その第一基本形式と第二基本形式は Gauss の方程式と Codazzi の方程式をみたす. すると,  $f_0$  の極小性から  $A$  のトレースは 0 になるので

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$$

という形になり, さらに Gauss の方程式から

$$K = 0 + \det(A) = -(a^2 + b^2) \leq 0$$

となる. そこで, 新しい第二基本形式  $\tilde{h}$  を

$$\tilde{h} := h + ds^2$$

とすると,  $\nabla ds^2 = 0$  となるので,  $\tilde{h}$  は Codazzi の方程式をみたす. また,  $ds^2$  に関する局所正規直交枠  $(e_1, e_2)$  によってできる対称行列  $B := (\tilde{h}(e_i, e_j))_{i,j=1,2}$  は

$$B = \begin{pmatrix} a+1 & b \\ b & -a+1 \end{pmatrix}$$

となり, このことから

$$K = \det(A) = -a^2 - b^2 = -1 + (1 - a^2 - b^2) = -1 + \det(B)$$

となるので, 定曲率  $-1$  の 3 次元双曲型空間  $\mathbb{H}^3$  への  $\tilde{h}$  を第二基本形式とする等長はめ込み

$$f: (\tilde{M}^2, ds^2) \rightarrow \mathbb{H}^3$$

が定まる.  $B$  のトレースは 2 なので,  $f$  の平均曲率は 1 で一定であることがわかる. また,  $h + ds^2$  の代わりに  $h - ds^2$  を用いると,  $f$  の平均曲率は  $-1$  で一定となる. こうして, 曲面論の基本定理を通して,  $\mathbb{R}^3$  の極小曲面と  $\mathbb{H}^3$  の平均曲率が  $\pm 1$  で一定の曲面との間に, 曲面が単連結な場合には  $1:2$  の対応があることがわかった. 平均曲率の符号は, 単位法線ベ



クトルの取り方によって変わるので、正負の差は本質的ではない。そこで以後、平均曲率が1の曲面のみを扱うことにして、そのような曲面を CMC-1 曲面<sup>2</sup>(最近では、Bryant 曲面という用語も使われている) と呼ぶことにする。

$M^2$  を2次元多様体とし、 $f: M^2 \rightarrow \mathbb{H}^3$  を CMC-1 はめ込みとすると、 $f$  の単位法線ベクトルを平均曲率が1となる方向に選ぶことができるので、大域的に定義された単位法線ベクトル場  $\nu$  が存在する。特に  $M^2$  は向きづけ可能となり、特に各点  $p \in M^2$  の接空間  $T_p M^2$  の基底  $v_1, v_2$  をえらんで

$$df(v_1), df(v_2), \nu(p)$$

が3次元双曲型空間  $\mathbb{H}^3$  の自然な向きに同調するようにできるので、 $M^2$  に自然な向きを指定できる。特に  $M^2$  には第1章第1節に述べた方法で自然に Riemann 面の構造を付与することができる。以後、 $\mathbb{H}^3$  の CMC-1 はめ込みを扱うときには定義域としての2次元多様体にはいつもこの複素多様体としての構造が付与されているものとする。

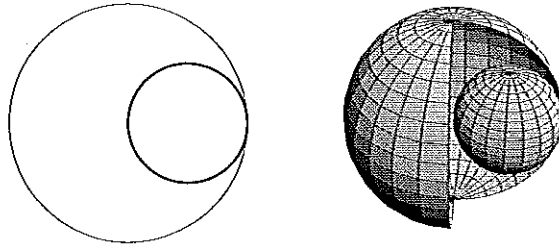


図 2.1: ホロサイクルとホロ球面

例 2.2. 第一基本形式を

$$ds^2 = du^2 + dv^2$$

とし、第二基本形式も  $h := ds^2$  で与えるとする、これらは  $c = -1$  に対して定理 2.1 の 2 つの基本方程式をみたし、 $\mathbb{H}^3$  に平坦でかつ平均曲率が1の曲面

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{H}^3$$

が定まる。これはホロ球面 (horosphere) と呼ばれ、 $\mathbb{R}^3$  における平面の対応物である。双曲型空間では、ホロ球面は、定点を通る半径  $r$  の測地球面の  $r \rightarrow \infty$  としたときの極限とし

<sup>2</sup>これは “Constant Mean Curvature 1” の略語に対応している

て得られることから極限球面とも呼ばれる。次節で述べる Poincaré 単位球面モデルでは、理想境界に接する球面として解釈される。また、2次元双曲型空間、つまり双曲平面  $\mathbb{H}^2$  によるホロ球面の切り口をホロサイクル (horocycle) といい、半径  $r$  の測地円の  $r \rightarrow \infty$  としたときの極限円として解釈される。(図 2.1 参照.)

## 2.2 3次元双曲型空間の設定

始めに、3次元双曲型空間の記述法を説明する。4次元 Euclid 空間  $\mathbb{R}^4$  に符号  $(-, +, +, +)$  の自然な Lorentz 計量を入れた空間を Lorentz-Minkowski 時空とよび、 $L^4$  で表す。 $L^4$  内の二葉双曲面の上側

$$\mathbb{H}^3 := \left\{ (t, x_1, x_2, x_3) \in L^4; (x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 - t^2 = -1, t > 0 \right\}$$

に時空の標準的な Lorentz 計量を誘導して計量を定めると、これは、正定値になり、定曲率  $-1$  の空間形を定める。これを3次元双曲型空間として扱う。 $\mathbb{H}^3$  は、南極にあたる  $(-1, 0, 0, 0)$  からの  $x_1 x_2 x_3$  超平面への立体射影

$$\pi: \mathbb{H}^3 \ni (t, x_1, x_2, x_3) \mapsto \frac{1}{1+t}(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{D}^3$$

により、単位球  $\mathbb{D}^3$  の内部の点と同一視される。 $(\mathbb{D}^3; X, Y, Z)$  において対応する Riemann 計量は

$$\frac{4}{(1-X^2-Y^2-Z^2)^2} (dX^2 + dY^2 + dZ^2)$$

である。これを3次元双曲型空間の (Poincaré の) 単位球モデルといい、曲面のグラフィックなどを描くときに用いられる。実際、本書の  $\mathbb{H}^3$  における絵はすべて、この単位球モデルで描かれている。また、外側の単位球面  $S^2 := \partial\mathbb{D}^3$  を  $\mathbb{H}^3$  の理想境界 (ideal boundary) という。図 2.2 は次元を1つ下げて、2次元双曲型空間 (双曲平面)  $\mathbb{H}^2$  の場合に、立体射影による二葉双曲面と単位円板との同一視を図示したものである。

次に、後の Bryant の表現公式を述べる際に有用である  $\mathbb{H}^3$  の行列表示を紹介する。4次元時空  $L^4$  を2次の Hermite 行列の全体  $\text{Herm}(2)$  と次のように同一視する。

$$L^4 \ni (t, x_1, x_2, x_3) \leftrightarrow \begin{pmatrix} t+x_3 & x_1+ix_2 \\ x_1-ix_2 & t-x_3 \end{pmatrix} \in \text{Herm}(2).$$

すると、この同一視のもと

$$\begin{aligned} \mathbb{H}^3 &= \{X \in \text{Herm}(2); \det(X) = 1, \text{Trace}(X) > 0\} \\ &= \{aa^*; a \in \text{SL}(2, \mathbb{C})\} \quad (a^* := {}^t\bar{a}) \end{aligned}$$

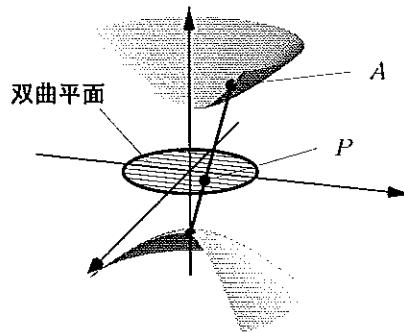


図 2.2: 二葉双曲面と双曲平面との立体射影

なる表示が得られる.  $L^4$  の Lorentz 内積はこの同一視において,

$$\langle X, Y \rangle = -\frac{1}{2} \text{Trace}(X\tilde{Y}), \quad (X, Y \in \text{Herm}(2))$$

となる. ここで,  $\tilde{X}$  は  $X$  の余因子行列を表す. 実際,  $\tilde{\tilde{X}} = X$  および  $\tilde{X}\tilde{Y} = \tilde{Y}\tilde{X}$  であることに注意すれば

$$\langle X, Y \rangle = -\frac{1}{2} \text{Trace}(X\tilde{Y}) = -\frac{1}{2} \text{Trace}(\tilde{\tilde{X}}\tilde{Y}) = -\frac{1}{2} \text{Trace}(Y\tilde{X}) = \langle Y, X \rangle$$

となり, 対称性が示せる. 特に,  $X = Y \in \text{Herm}(2)$  として,

$$\langle X, X \rangle := -\frac{1}{2} \text{Trace}(X\tilde{X}) = -\det \begin{pmatrix} t + x_3 & x_1 + ix_2 \\ x_1 - ix_2 & t - x_3 \end{pmatrix} = -t^2 + (x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2$$

となることから,  $\langle X, X \rangle$  は  $L^4$  の標準的内積に対応することを示せた. さて,  $a \in \text{SL}(2, \mathbb{C})$  と 2 次の複素正方行列  $X$  に対して

$$\langle aX, aY \rangle = -\frac{1}{2} \text{Trace}(aXa\tilde{Y}) = -\frac{1}{2} \text{Trace}(aX\tilde{Y}a^{-1}) = -\frac{1}{2} \text{Trace}(X\tilde{Y}) = \langle X, Y \rangle,$$

$$\langle Xa, Ya \rangle = -\frac{1}{2} \text{Trace}(Xa\tilde{Y}a) = -\frac{1}{2} \text{Trace}(Xaa^{-1}\tilde{Y}) = -\frac{1}{2} \text{Trace}(X\tilde{Y}) = \langle X, Y \rangle$$

であるから, 特に  $\text{SL}(2, \mathbb{C})$  は  $L^4 = \text{Herm}(2, \mathbb{C})$  に

$$\text{Herm}(2, \mathbb{C}) \ni X \mapsto aXa^* \in \text{Herm}(2, \mathbb{C}) \quad (a \in \text{SL}(2, \mathbb{C}))$$

によって等長的に作用することがわかる.

最後に, 3次元双曲型空間におけるベクトル積の概念を導入しておく. これは  $\mathbb{R}^3$  の曲面の単位法線ベクトルを計算するのに有用である.

補題 2.3.  $p \in \mathbb{H}^3(\subset \text{Herm}(2))$  の接ベクトル  $X, Y \in T_p\mathbb{H}^3(\subset \text{Herm}(2))$  に対して

$$X \times Y := \frac{i}{2}(Xp^{-1}Y - Yp^{-1}X)$$

とおくと,  $X \times Y$  は位置ベクトル  $p$  および  $X, Y$  に直交し,  $X, Y$  が 1 次独立ならば,

$$p, X, Y, X \times Y$$

は  $L^4$  の向きに同調した基底を与える. さらに,

$$\langle X \times Y, X \times Y \rangle = \langle X, X \rangle \langle Y, Y \rangle - \langle X, Y \rangle^2 \quad (*)$$

が成り立つ.

証明. 概略に留める.  $p = aa^*(a \in \text{SL}(2, \mathbb{C}))$  とおき,  $e_0$  を単位行列とする.  $X, Y \in T_{e_0}\mathbb{H}^3$ ,  $X_p = aXa^*$ ,  $Y_p = aYa^*$  とすれば

$$a(e_0, X, Y, X \times Y)a^* = (p, X_p, Y_p, X_p \times Y_p)$$

となるので,  $p = e_0$  のときのみ示せばよい. このときには,  $X, Y$  はトレースが 0 の Hermite 行列となり, (\*) が直接的に確かめられる.  $\square$

## 2.3 Bryant の表現公式

$\mathbb{H}^3$  の CMC-1 曲面は  $\mathbb{R}^3$  の極小曲面と同様に複素解析的データによる曲面の表現公式の構築が可能である. つまり, 次の定理が成り立つ.

定理 2.4 (Bryant).  $\tilde{M}^2$  を単連結な Riemann 面とする.  $(g, \omega)$  を  $\tilde{M}^2$  上の有理型関数と正則 1 次微分形式の対で,

$$(1 + |g|^2)\omega \text{ が } \tilde{M}^2 \text{ 上の零点を持たない 1-form を定める,} \quad (2.3.1)$$

という条件をみたすとすると, 基点  $z_0 \in \tilde{M}^2$  に対して  $F_z := dF/dz$  とおくと

$$F^{-1}F_z = \alpha, \quad \alpha dz = \begin{pmatrix} g & -g^2 \\ 1 & -g \end{pmatrix} \omega \quad (F(z_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) \quad (2.3.2)$$

で定まる正則写像  $F: \tilde{M}^2 \rightarrow \text{SL}(2, \mathbb{C})$  は, はめ込みであり,

$$f = FF^*: \tilde{M}^2 \rightarrow \mathbb{H}^3$$

は共形的<sup>3</sup>な平均曲率 1 のはめ込みを定める。また、この曲面の第一基本形式  $ds^2$  と第二基本形式  $h$  はそれぞれ次のようになる。

$$ds^2 = (1 + |g|^2)|\omega|^2, \quad (2.3.3)$$

$$h = -\omega dg - \bar{\omega} d\bar{g} + ds^2. \quad (2.3.4)$$

逆に、 $\tilde{M}^2$  から  $\mathbb{H}^3$  への共形的な平均曲率 1 のはめ込みは、このようにして得られた曲面に合同である。

注意 2.5. このとき、正則写像  $F: \tilde{M}^2 \rightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$  を  $f$  のリフト (lift) あるいは持ち上げという。(2.3.2) から、 $F$  は

$$\det F_z = 0 \quad (2.3.5)$$

をみたす。この性質をもつ  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$  への正則写像を null (あるいは isotropic) という。

定理で定めた、対  $(g, \omega)$  を CMC-1 はめ込み  $f$  の Weierstrass data といい、 $g$  を  $f$  の第二 Gauss 写像 (secondary Gauss map), 正則 2 次微分

$$Q := \omega dg \quad (2.3.6)$$

を  $f$  の Hopf 微分 (Hopf differential) という。 $f$  が単連結でない Riemann 面  $M^2$  上で定義されている場合に、Weierstrass data  $(g, \omega)$  は  $M^2$  上で必ずしも一価であるとは限らない。これに対して、Hopf 微分  $Q$  と後 (2.4 節) に定義する双曲的 Gauss 写像  $G$  は常に一価である。 $g$  を第二 Gauss 写像というのは、 $G$  よりも幾何的意味に乏しいことが理由である。

注意 2.6. 後で紹介する例 2.15 のように、回転不変な CMC-1 はめ込みにおいてさえ Weierstrass data は、一般には曲面  $M^2$  上では一価にならないため、極小曲面の構成と比較すると、Weierstrass data から CMC-1 曲面を作るのは非常に困難であることがわかる。実は、後 (定理 3.10) で述べるように、双対 CMC-1 曲面を利用して双曲的 Gauss 写像と Hopf 微分の組  $(G, Q)$  から具体例を作る方法があり、こちらの方が実際には有用である。

定理 2.4 の証明. このようにして得られる  $f$  の第一基本形式と第二基本形式を計算して、平均曲率が 1 で一定になることを確かめる。まず第一基本形式を計算する。

$$df = (dF)F^* + FdF^* = F(F^{-1}dF)F^* + F(F^{-1}dF)^*F^* = F(\alpha dz + \alpha^* d\bar{z})F^*$$

と

$$\langle \alpha, \alpha \rangle = -\det \alpha = 0$$

<sup>3</sup> $f$  の第一基本形式が、Riemann 面  $\tilde{M}^2$  上の Hermite 計量 (p53 参照) になっているとき、はめ込み  $f$  は共形的であるという。

から,

$$\begin{aligned} ds^2 &= \langle df, df \rangle = \langle F(\alpha dz + \alpha^* d\bar{z})F^*, F(\alpha dz + \alpha^* d\bar{z})F^* \rangle \\ &= \langle \alpha dz + \alpha^* d\bar{z}, \alpha dz + \alpha^* d\bar{z} \rangle = 2\langle \alpha, \alpha^* \rangle |dz|^2 \\ &= -\text{Trace}(\alpha^* \hat{\alpha}) = (1 + |g|^2)^2 |\omega|^2 \end{aligned}$$

によって, 第一基本形式が与えられることがわかる. 特に  $f$  は共形的である.

ここで, 前節で定義したベクトル積を用いて,

$$N := -2i(f_z \times f_{\bar{z}})$$

とおくと, これは  $f$  の法線ベクトルを定める. ここで,  $f_z = F\alpha F^*$ ,  $f_{\bar{z}} = F\alpha^* F^*$  に注意すると

$$N = F(\alpha\alpha^* - \alpha^*\alpha)F^*$$

となる.

ここで, 2次の複素正方行列の全体をつくるベクトル空間を  $M_2(\mathbb{C})$  で表わすと, 実ベクトル空間としての直和分解

$$M_2(\mathbb{C}) = \text{Herm}(2) \oplus i\text{Herm}(2)$$

が得られ, これによって複素ベクトル空間  $M_2(\mathbb{C})$  を  $\text{Herm}(2)$  の複素化とみなすことができる. 特に  $\text{Herm}(2)$  に導入した内積  $\langle, \rangle$  を  $M_2(\mathbb{C})$  上に  $\mathbb{C}$  上の双線形写像として拡張することができる. すると, 補題 2.3 の式 (2.3) を  $M_2(\mathbb{C})$  上で拡張して用いることができるので,

$$\langle N, N \rangle = -4\langle f_z \times f_{\bar{z}}, f_z \times f_{\bar{z}} \rangle = -4\left(\langle f_z, f_z \rangle \langle f_{\bar{z}}, f_{\bar{z}} \rangle - \langle f_z, f_{\bar{z}} \rangle^2\right)$$

が成り立つ. 一方,  $f$  が共形的なので,  $\langle f_z, f_z \rangle = 0$  であることから,

$$\langle N, N \rangle = 4\langle f_z, f_{\bar{z}} \rangle^2 = 4\{ds^2(\partial_z, \partial_{\bar{z}})\}^2 = (1 + |g|^2)^4 |\hat{\omega}|^4$$

となる. 但し,  $\omega = \hat{\omega} dz$  とする. 以上より, 単位法線ベクトル  $\nu$  が

$$\nu := \frac{1}{(1 + |g|^2)^2 |\hat{\omega}|^2} F(\alpha\alpha^* - \alpha^*\alpha)F^* \quad (2.3.7)$$

で与えられることがわかった. さらに, この式の両辺の内積をとって

$$(1 + |g|^2)^4 |\hat{\omega}|^4 = \left\langle (\alpha\alpha^* - \alpha^*\alpha), (\alpha\alpha^* - \alpha^*\alpha) \right\rangle = -2\langle \alpha\alpha^*, \alpha^*\alpha \rangle \quad (2.3.8)$$

なる恒等式も示せたことになる。ここで、

$$f_{z\bar{z}} = (F\alpha F^*)_{\bar{z}} = F\alpha\alpha^*F^*$$

と  $\langle \alpha\alpha^*, \alpha\alpha^* \rangle = -\det(\alpha\alpha^*) = -\det(\alpha)\det(\alpha^*) = 0$  に注意して

$$\langle f_{z\bar{z}}, \nu \rangle = \frac{\langle \alpha\alpha^*, \alpha\alpha^* - \alpha^*\alpha \rangle}{(1+|g|^2)^2|\widehat{\omega}|^2} = -\frac{\langle \alpha\alpha^*, \alpha^*\alpha \rangle}{(1+|g|^2)^2|\widehat{\omega}|^2} = \frac{1}{2}(1+|g|^2)^2|\widehat{\omega}|^2$$

となる。一方、

$$\alpha = \beta\widehat{\omega}, \quad \beta := \begin{pmatrix} g & -g^2 \\ 1 & -g \end{pmatrix}$$

とおくと、

$$f_{z\bar{z}} = F(\alpha^2)F^* + F\beta_z\widehat{\omega}F^* + F\beta\widehat{\omega}_zF^*$$

において、 $\alpha^2 = \beta^2 = 0$  に注意することで

$$\langle f_{z\bar{z}}, \nu \rangle = \frac{\langle \alpha_z, \alpha\alpha^* - \alpha^*\alpha \rangle}{(1+|g|^2)^2|\widehat{\omega}|^2} = \frac{\langle \beta_z, \beta\beta^* - \beta^*\beta \rangle}{(1+|g|^2)^2}\widehat{\omega}$$

となる。さらに

$$\beta\beta^* - \beta^*\beta = (1+|g|^2) \begin{pmatrix} |g|^2 - 1 & 2g \\ 2\bar{g} & 1 - |g|^2 \end{pmatrix} \quad (2.3.9)$$

が成り立つことから、直接計算により

$$\langle f_{z\bar{z}}, \nu \rangle = \frac{-1}{2(1+|g|^2)^2} \text{Trace} \left( (\beta\beta^* - \beta^*\beta)\tilde{\beta}_z \right) \widehat{\omega} = -\widehat{\omega}g_z$$

であることがわかり、これで  $f$  の第二基本形式が

$$\langle f_{z\bar{z}}, \nu \rangle dz^2 + 2\langle f_{z\bar{z}}, \nu \rangle dzd\bar{z} + \langle f_{z\bar{z}}, \nu \rangle d\bar{z}^2 = -\omega dg + ds^2 - \bar{\omega}d\bar{g}$$

となり、(2.3.4) に一致する。特に、第1章第3節の式(1.3.5)と比較すると、 $f$  は  $(g, \omega)$  から作られる極小曲面と、この章の第1節で示した関係で結びついていることがわかる。

いま、勝手に共形な CMC-1 はめ込み  $f: \tilde{M}^2 \rightarrow \mathbb{H}^3$  をとると、第2章第1節で紹介した対応により、共形的な極小はめ込み  $f_0: \tilde{M}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  が存在する。その Weierstrass data を  $(g, \omega)$  とすると、これは定理の条件をみたし、これから構成される共形的な CMC-1 はめ込みは  $f$  に合同であることがわかる。□

次節で、与えられた CMC-1 曲面の双曲的 Gauss 写像を定義するが、その前に第二 Gauss 写像の幾何学的意味を明らかにしておこう。  $f: \tilde{M}^2 \rightarrow \mathbb{H}^3$  を定理 2.4 で定まる共形的な

CMC-1 はめ込みとし,  $(g, \omega)$  を, その Weierstrass data とする. 第1章の演習問題 [8] と (2.3.3) から

$$d\sigma^2 = \frac{4dgd\bar{g}}{(1+|g|^2)^2} = 4 \frac{\partial^2 \log(1+|g|^2)}{\partial z \partial \bar{z}} |dz|^2 \quad (2.3.10)$$

なる表示を得る. したがって, 第二 Gauss 写像  $g$  は  $\tilde{M}$  から単位球面  $S^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  への正則写像で, この写像による  $S^2$  の定曲率 1 の Riemann 計量

$$d\sigma_0^2 := \frac{4dzd\bar{z}}{(1+|z|^2)^2}$$

の引き戻しが  $d\sigma^2$  であることがわかる. (つまり  $g$  は  $d\sigma^2$  の展開写像である. p54 をみよ.) 特に  $d\sigma^2$  は曲率が 1 である. さらに (2.3.6) から恒等式

$$d\sigma^2 \cdot ds^2 = 4|Q|^2 \quad (2.3.11)$$

が得られる. この公式は,  $\mathbb{R}^3$  の極小曲面の Weierstrass data  $(g, \omega)$  と Hopf 微分  $Q$  に対しても (ここで述べたのと同じ理由により) 成り立つ関係式であることを注意しておく.

## 2.4 双曲的 Gauss 写像について

ここで,  $M^2$  は単連結とは限らない一般の Riemann 面とし,  $\tilde{M}^2$  をその普遍被覆面とする. このとき, 与えられた CMC-1 はめ込み  $f: M^2 \rightarrow \mathbb{H}^3$  は, 普遍被覆面に持ち上げて考えることにより, 前節で述べたように  $\tilde{M}^2$  上の Weierstrass data  $(g, \omega)$  で表すことができるが, 極小曲面の場合と大きく異なり,  $(g, \omega)$  自体は  $M^2$  上で一価になるとは限らない (後の例 2.15 を見よ). このとき, (2.3.7) および (2.3.9) により,  $f$  の単位法線ベクトル  $\nu: M^2 \rightarrow L^4$  は  $\tilde{M}^2$  に持ち上げて考えると

$$\nu = \frac{1}{(1+|g|^2)^2 |\tilde{\omega}|^2} F(\alpha\alpha^* - \alpha^*\alpha) F^* = \frac{1}{1+|g|^2} F \begin{pmatrix} |g|^2 - 1 & 2g \\ 2\bar{g} & 1 - |g|^2 \end{pmatrix} F^* \quad (2.4.1)$$

で与えられることがわかる<sup>4</sup>. 但し,  $\nu$  自体は  $M^2$  上で一価なので, 式 (2.4.1) 自体は  $M^2$  上で一価になっていることに注意する. いま, 曲面上の点  $f(p)$  から  $\nu(p)$  方向に測地線を伸ばすと, それは

$$\gamma(t) = (\cosh t)f(p) + (\sinh t)\nu(p)$$

であるが,  $t \rightarrow \infty$  とすると, この曲線は光錐 (light-cone) の正の部分, つまり  $L^4$  内の部分集合

$$\Lambda^+ := \{(t, x_1, x_2, x_3) \in L^4; (x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 = t^2, t > 0\}$$

<sup>4</sup>実は  $\nu$  は 3次元 de Sitter 時空  $S_1^3$  への写像を定めている. 詳しくは第4章を見よ.



上の半直線

$$s(f(p) + \nu(p)) \quad (s > 0)$$

へ漸近する。いま  $\Lambda^+$  上の原点を通る半直線と  $L^4$  における平面  $l = 1$  との交点を考えると、

$$S^2(1) = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; (x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 = 1 \right\}$$

が、 $\Lambda^+$  上の原点を通る半直線の全体の集合と同一視できる。これが  $\mathbb{H}^3$  の理想境界上の点に対応する。さらに  $S^2(1)$  を北極から立体射影すると、正の光錐  $\Lambda^+$  から  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$  への射影  $\Pi: \Lambda^+ \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  が定まる。この射影は

$$\Pi: \Lambda^+ \ni (t, x_1, x_2, x_3) \mapsto \frac{(x_1/t) + i(x_2/t)}{1 - (x_3/t)} = \frac{x_1 + ix_2}{t - x_3} \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

によって定まるが、 $L^4$  と  $\text{Herm}(2)$  との同一視のもと、 $\Lambda^+$  を  $\text{Herm}(2)$  の部分集合と考えたときには、この射影は

$$\Pi: \Lambda^+ \ni \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \mapsto \frac{x_{12}}{x_{22}} \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

となる。さらにいま

$$\Lambda^+ = \left\{ aa^* = \begin{pmatrix} |a_1|^2 & a_1 \bar{a}_2 \\ a_2 \bar{a}_1 & |a_2|^2 \end{pmatrix}; a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \right\}$$

と表示できることに注意すると、その射影  $\Pi$  は

$$\Pi(aa^*) = \frac{a_1}{a_2}$$

で与えられることがわかる。一方、(2.4.1) により、

$$f + \nu = \frac{2}{1 + |g|^2} F \begin{pmatrix} g \\ 1 \end{pmatrix} \left( F \begin{pmatrix} g \\ 1 \end{pmatrix} \right)^*$$

であるから、

$$F = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \tag{2.4.2}$$

$$G(p) = \Pi(f(p) + \nu(p)) = \frac{A(p)g(p) + B(p)}{C(p)g(p) + D(p)}$$

は曲面上の点  $f(p)$  から法線方向  $\nu$  に測地線を延ばしたとき、その測地線が理想境界にぶつかったときの点を与える。このようにして定まる  $M^2$  上の有理型関数  $G: M^2 \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  の

ことを双曲的 Gauss 写像 (hyperbolic Gauss map) という、ところで、微分方程式 (2.3.2) を書き換えると

$$dA = (Ag + B)\omega, \quad dC = (Cg + D)\omega$$

が得られるので、結局

$$G = \frac{dA}{dC} = \frac{dB}{dD} \quad (2.4.3)$$

なる表示が得られたことになる。単連結でない CMC-1 曲面について、その Weierstrass data は  $M^2$  上で一価でないかもしれないが、双曲的 Gauss 写像は  $M^2$  上で一価になるので、ちょうど極小曲面の Gauss 写像の役割を果たす。

## 2.5 双対性について

前節に引き続き、 $M^2$  を Riemann 面とし、共形的な CMC-1 はめ込み  $f: M^2 \rightarrow \mathbb{H}^3$  が与えられているものとし、曲面のリフトとして定まる null 正則写像

$$F = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}: M^2 \rightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$$

が定まる。ここで  $A, B, C, D$  は  $\tilde{M}^2$  上の正則関数である。null であることの定義から  $\det F_z = 0$  が成り立つので

$$A'D' - B'C' = 0 \quad (2.5.1)$$

をみたしているが、公式

$$(F^{-1})_z = -F^{-1}F_zF^{-1}$$

に着目すると、 $F$  の逆行列  $F^{-1}$  も null であることがわかる。しかも、 $F^{-1}$  の成分は、この場合、単に  $F$  の成分を並べ替えたものにすぎないので、 $F^{-1}$  も正則はめ込みである。そこで  $f$  に付随して定まる別の CMC-1 はめ込み

$$f^\sharp := F^{-1}(F^{-1})^*: \tilde{M}^2 \rightarrow \mathbb{H}^3$$

を  $f$  の双対 CMC-1 はめ込みあるいは 双対 CMC-1 曲面 (dual CMC-1 surface) という。  $f$  が単連結でない Riemann 面  $M^2$  上で定義されている場合には、双対曲面  $f^\sharp$  は一般に  $M^2$  上で多価となり、その定義域は、普遍被覆面  $\tilde{M}^2$  としなければならない。しかし、次のことを示すことができる。

命題 2.7. 双対 CMC-1 はめ込み  $f^\sharp$  の双曲的 Gauss 写像  $G^\sharp$  および第二 Gauss 写像  $g$  は以下の式で与えられる。

$$G^\sharp = g, \quad g^\sharp = G. \quad (2.5.2)$$

証明. (2.5.1) により

$$A'(C'D - D'C) = C'(A'D - B'C)$$

となり,

$$G = \frac{A'}{C'} = \frac{A'D - B'C}{C'D - D'C} \quad (2.5.3)$$

が成り立つ.  $F^\sharp := F^{-1}$  とする.  $F^\sharp$  に対して式 (2.3.2) を考えると,

$$(F^\sharp)^{-1}(F^\sharp)' = \alpha^\sharp, \quad \alpha^\sharp dz = \begin{pmatrix} g^\sharp & -(g^\sharp)^2 \\ 1 & -g^\sharp \end{pmatrix} \omega^\sharp \quad (2.5.4)$$

となる. 一方  $(F^\sharp)' = -F^{-1}F'F^{-1}$  に注意することで,

$$(F^\sharp)^{-1}(F^\sharp)' = -F^{-1}F'F^{-1} = -\begin{pmatrix} A'D - B'C & -A'B + B'A \\ C'D - D'C & -C'B + D'A \end{pmatrix} \quad (2.5.5)$$

となることが確かめられる. (2.5.3), (2.5.4) および (2.5.5) から

$$G = g^\sharp$$

であることがわかる. よって  $F$  を  $F^\sharp$  におきかえると  $G^\sharp = g$  となる.  $\square$

系 2.8. CMC-1 はめ込みの双曲的 Gauss 写像  $G$  と第二 Gauss 写像  $g$  は, 以下の式を満たす.

$$G = \frac{dA}{dC} = \frac{dB}{dD}, \quad (2.5.6)$$

$$g = -\frac{dB}{dA} = -\frac{dD}{dC}. \quad (2.5.7)$$

証明. 命題 2.7 の証明で示したことを用いて (2.5.6) を容易に導くことが可能である.  $g^\sharp = G$  であるから (2.5.6) において  $A, B, C, D$  を  $D, -B, -C, A$  に置き換えると (2.5.7) が得られる.  $\square$

ところで CMC-1 曲面の二つの Gauss 写像の間に以下の関係式が成り立つ.

系 2.9. CMC-1 はめ込み  $f$  の双曲的 Gauss 写像  $G$  と  $f$  の第二 Gauss 写像  $g$  は

$$\{g, z\}dz^2 - \{G, z\}dz^2 = 2Q$$

なる関係式を満たす. ここで局所複素座標  $z$  での微分  $d/dz$  をプライムであらわし, 与えられた有理型関数  $h$  に対して,

$$\{h, z\} := \left(\frac{h''}{h'}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{h''}{h'}\right)^2 \quad (2.5.8)$$

とにおいて, これは局所複素座標  $z$  に関する  $h$  の Schwarz 微分と呼ぶ<sup>5</sup>.

<sup>5</sup>Schwarz 微分の基本性質については, 本書の最後の付録をみよ.

証明. 本書の付録の公式 (3) を用いると差  $\{g, z\}dz^2 - \{G, z\}dz^2$  は局所座標  $z$  の選び方に依存しないことが示せる. 特に

$$\{g, z\}dz^2 - \{G, z\}dz^2 = -\{G, g\}dg^2$$

となるので  $\{G, g\}dg^2$  を計算すればよい. (2.5.3) により

$$G = \frac{A'}{C'} = \frac{A'D - B'C}{C'D - D'C}$$

が成り立つが

$$A'D - B'C = (AD - BC)' - AD' + BC' = -AD' + BC'$$

に注意すると (2.5.7) により

$$G = \frac{Ag + B}{Cg + D}$$

となる. いま  $G_g = dG/dg, G_{gg} = dG_g/dg$  などと記す.  $AD - BC = 1$  であるから

$$G_g = -\frac{1}{(Cg + D)^2}$$

となる. 両辺の対数をとって  $g$  で微分する. (2.5.7) により  $C_g g + D_g = 0$  および  $g_g = 1$  が成り立つことに注意すると

$$\frac{G_{gg}}{G_g} = \frac{-2C}{Cg + D}$$

である. 従って再び  $C_g g + D_g = 0$  に注意すると単純計算で

$$\{G, g\} = \left(\frac{G_{gg}}{G_g}\right)_g - \frac{1}{2} \left(\frac{G_{gg}}{G_g}\right)^2 = \frac{-2C_g}{Cg + D}$$

となることがわかる. 一方2次の正方行列の間の関係式

$$\frac{dF}{dg} = F \begin{pmatrix} g & -g^2 \\ 1 & -g \end{pmatrix} \frac{\omega}{dg}$$

の (2, 1) 成分を比較して  $C_g = (Cg + D)(\omega/dg)$  を得るので結局

$$-\{G, g\}dg^2 = -\frac{-2C_g}{Cg + D}dg^2 = \frac{\omega}{dg}dg^2 = \omega dg = Q$$

が示された. □

系 2.10. 双対 CMC-1 曲面  $f^\sharp$  の Hopf 微分は  $-Q$  となる. 特に  $f^\sharp$  の Weierstrass data は  $(G, -Q/dG)$  である.

証明. 双対 CMC-1 曲面  $f^\sharp$  の Hopf 微分は  $Q^\sharp$  とすると, 前命題と  $G^\sharp = g, g^\sharp = G$  なる関係により

$$2Q^\sharp = \{g^\sharp, z\}dz^2 - \{G^\sharp, z\}dz^2 = \{G, z\}dz^2 - \{g, z\}dz^2 = -2Q$$

となる. □

定理 2.11. 双対 CMC-1 曲面  $f^\sharp$  の誘導計量は  $M^2$  上で一価である. さらに,  $f$  の誘導計量が完備ならば, その双対 CMC-1 曲面  $f^\sharp$  の誘導計量も完備である. (特に,  $\mathbb{R}^3$  の極小曲面における藤本の定理<sup>6</sup>から, 「完備非平坦な CMC-1 はめ込みの双曲的 Gauss 写像の除外値数は高々4である。」ということが従う.)

証明. 系 2.10 により,  $f^\sharp$  の誘導計量  $ds^{2\sharp}$  は次のようになる.

$$ds^{2\sharp} = (1 + |G|^2)^2 \left| \frac{Q}{dG} \right|^2.$$

$G$  と  $Q$  は  $M^2$  上一価であることから,  $ds^{2\sharp}$  も  $M^2$  上一価である.

次に, 完備性の主張について証明する. この主張は, 有限全曲率の仮定のもとで筆者と山田氏との共著論文 [37] で示したが, その後すぐに Yu [41] がその仮定をはずしても証明できることを指摘した. ここでは, その Yu による証明を紹介する.  $\Delta$  を原点を中心とする十分小さい開円板とし,  $\Delta^* := \Delta \setminus \{0\}$  とする.  $f: \Delta^* \rightarrow \mathbb{H}^3$  を原点が完備であるような CMC-1 曲面とし,  $F$  をそのリフトとする.  $\Delta^*$  上で 0 に近づく径路  $\gamma$  をとる.  $L_{ds^2}(\gamma)$  を計量  $ds^2$  で測った  $\gamma$  の長さとしたとき, この主張を証明するため, その対偶である  $L_{ds^{2\sharp}}(\gamma) < \infty$  ならば  $L_{ds^2}(\gamma) < \infty$  を示す.

もし  $\gamma$  の  $f^\sharp$  による像が  $\mathbb{H}^3$  の中で非有界であるとする,  $L_{ds^{2\sharp}}(\gamma) = \infty$  となる. 従って,  $L_{ds^{2\sharp}}(\gamma) < \infty$  ならば,

$$f^\sharp = F^\sharp(F^\sharp)^*$$

は  $\gamma$  上有界である. いま, 2 次の正方行列  $a = (a_{ij})_{i,j=1,2}$  の大きさ  $|a|$  を

$$|a| := \sqrt{\sum_{i,j=1}^2 |a_{ij}|^2} = \sqrt{\text{Trace}(aa^*)}$$

で定義されているものとする,

$$|F^\sharp|^2 = \text{Trace}(F^\sharp(F^\sharp)^*) = \text{Trace}(f^\sharp)$$

<sup>6</sup> $\mathbb{R}^3$  の非平坦な完備極小曲面の Gauss 写像の除外値数は高々4であるという結果. 詳しくは, 文献 [9] をみよ.

であるから、結局  $F^\sharp = F^{-1}$  は  $\gamma$  上有界である。  $F \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$  であるから、  $F$  も有界である。

以下、  $\gamma$  上で  $|F| \leq C$  とする。いま、  $-\alpha^\sharp dz = dFF^{-1}$  と表すと、

$$\alpha dz = F^{-1}dF = F^{-1}(dFF^{-1})F = F^{-1}(-\alpha^\sharp dz)F.$$

よって、  $\gamma$  上で  $|\alpha| \leq C^2|\alpha^\sharp|$  となり、

$$L_{ds^2}(\gamma) = \int_\gamma |\alpha dz| \leq C^2 \int_\gamma |\alpha^\sharp dz| = C^2 L_{ds^2}(\gamma) < \infty$$

である。 □

いま、 Riemann 面  $M^2$  から  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$  への null 正則写像

$$F = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} : M^2 \rightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$$

を固定する。定数行列  $a, b \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$  を勝手に選ぶと、新たに写像

$$aFb^{-1} : M^2 \rightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$$

が作られるが、 null であるという性質は、この  $F$  への  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$  の右側と左側からの作用に関して不変である。

**命題 2.12.** null 正則写像  $\tilde{F} := aFb^{-1}$  の双曲的 Gauss 写像  $\tilde{G}$  と第二 Gauss 写像  $\tilde{g}$  を、元の null 正則写像  $F$  の双曲的 Gauss 写像  $G$  と第二 Gauss 写像  $g$  で表すと以下のようになる。

$$\tilde{G} = \frac{a_{11}G + a_{12}}{a_{21}G + a_{22}}, \quad \tilde{g} = \frac{b_{11}g + b_{12}}{b_{21}g + b_{22}}, \quad (2.5.9)$$

但し

$$a = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$$

とする。

この命題の証明は読者の演習問題とする。(章末の演習問題 [7](#) を参照せよ。)

## 2.6 具体例

ここで、  $\mathbb{H}^3$  の CMC-1 曲面の具体例を幾つか紹介する。

例 2.13 (ホ口球面).  $M^2$  を複素平面  $\mathbb{C}$  とし,

$$g := 0, \quad \omega := dz$$

とおくと, これは (2.3.1) をみだし,  $(g, \omega)$  を Weierstrass data とする  $M^2$  上の平坦な CMC-1 はめ込みを定める. これをホ口球面 (horosphere) という (図 2.1 参照). この曲面のリフト  $F$  は

$$F := \begin{pmatrix} 1+z & 1 \\ z & 1 \end{pmatrix}$$

で与えられる. これは  $\mathbb{R}^3$  の「平面」の  $\mathbb{H}^3$  における対応物である.

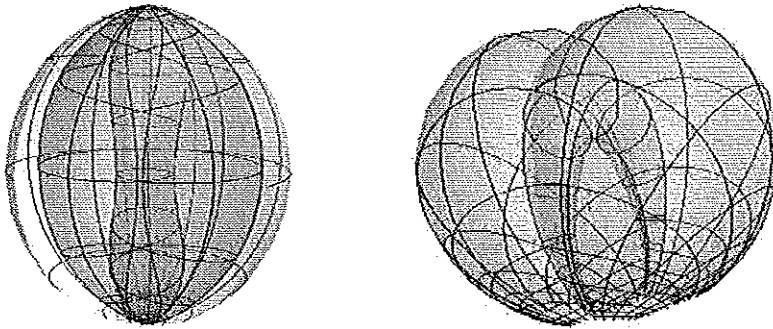


図 2.3: Enneper Cousin とその双対曲面

例 2.14 (Enneper cousin).  $M^2 = \mathbb{C}$  とし,

$$g := z, \quad \omega := dz$$

とおくと, これは (2.3.1) をみだし,  $(g, \omega)$  を Weierstrass data とする  $M^2$  上の CMC-1 はめ込みが定まる. この曲面のリフトは

$$F := \begin{pmatrix} \cosh z & \sinh z - z \cosh z \\ \sinh z & \cosh z - z \sinh z \end{pmatrix}$$

で与えられる. これは  $\mathbb{R}^3$  の Enneper 曲面の  $\mathbb{H}^3$  における対応物で, Bryant [2] により見出された.  $z = \infty$  が曲面のエンドであるが, 双曲的 Gauss 写像は  $G(z) = \tanh z$  となり  $z = \infty$  において真性特異点をもつ. Enneper cousin は,  $\mathbb{R}^3$  の Enneper 曲面と同じ第一基本形式をもつので有限全曲率をもつ. このように, 有限全曲率をもつ完備な CMC-1 曲面でも, その双曲的 Gauss 写像が真性特異点をもつことがありうる. これは  $\mathbb{R}^3$  の極小曲

面のときではありえない現象である。図 2.3 の左が Enneper cousin の絵であるが、これは途中でぎれており、実際は曲面が理想境界に無限回巻き付いていることに注意せよ。図 2.3 の右が Enneper cousin の双対であるが、実はこちらの方が、 $\mathbb{R}^3$  の Enneper 曲面に近い形状をしている。

例 2.15 (Catenoid cousin).  $M^2 = \mathbb{C} \setminus \{0\}$  とし、

$$g := z^{\mu+1}, \quad \omega := -\frac{\mu(\mu+2)}{4(1+\mu)} \frac{dz}{z^{\mu+2}}$$

とおくと、これは  $M^2$  の普遍被覆面上で (2.3.1) をみたし、 $(g, \omega)$  から定まる CMC-1 曲面は  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  上で一価な CMC-1 はめ込みを定める。ここで、実数  $\mu$  の動く範囲は  $-1 < \mu$  で  $\mu \neq 0$  とする。 $\mu$  が整数値でない場合には、曲面の Weierstrass data  $(g, \omega)$  は  $M^2$  上では多価関数となる<sup>7</sup>。この曲面のリフトは

$$F := \frac{1}{2\sqrt{\mu+1}} \begin{pmatrix} (\mu+2)z^{-\mu/2} & \mu z^{1+(\mu/2)} \\ \mu z^{-1-(\mu/2)} & (\mu+2)z^{\mu/2} \end{pmatrix}$$

で与えられる。これは  $\mathbb{R}^3$  のカテナイドの  $\mathbb{R}^3$  における対応物で、回転対称な曲面である。この表示は Bryant [2] により与えられた。図 2.4 のように  $-1 < \mu < 0$  のとき、曲面は埋め込みになっており、 $\mu > 0$  のときには自己交叉を有する。

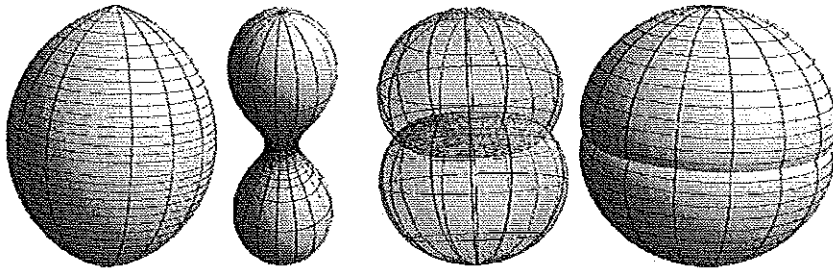


図 2.4:  $-1 < \mu < 0$  と  $\mu > 0$  の場合の catenoid cousin

<sup>7</sup>このように、一般に CMC-1 曲面の Weierstrass data は、曲面上で一価にならないため、先に注意したように (注意 2.6 参照) より複雑な具体例をつくる際には、場合によっては別の手段を用いる必要がある。



## 演習問題2

- [1]  $\mathbb{R}^3$  のときの曲面論の基本定理 (定理 2.1) を, 然るべき文献を調べて証明をつけよ.
- [2] 第 2 節の最初のように,  $L^4$  内の二葉双曲面の上側として実現した 3 次元双曲型空間  $\mathbb{H}^3$  に標準的な Lorentz 計量から誘導された計量を考えたとき,  $\mathbb{H}^3$  は定曲率  $-1$  の Riemann 多様体になることを示せ.
- [3]  $L^4$  内の 3 次元双曲型空間を, 南極  $(-1, 0, 0, 0)$  からの立体射影によって射影したとき, 原点を中心とする 3 次元単位球には Poincaré 計量

$$\frac{4}{(1 - X^2 - Y^2 - Z^2)^2} \left( (dX)^2 + (dY)^2 + (dZ)^2 \right)$$

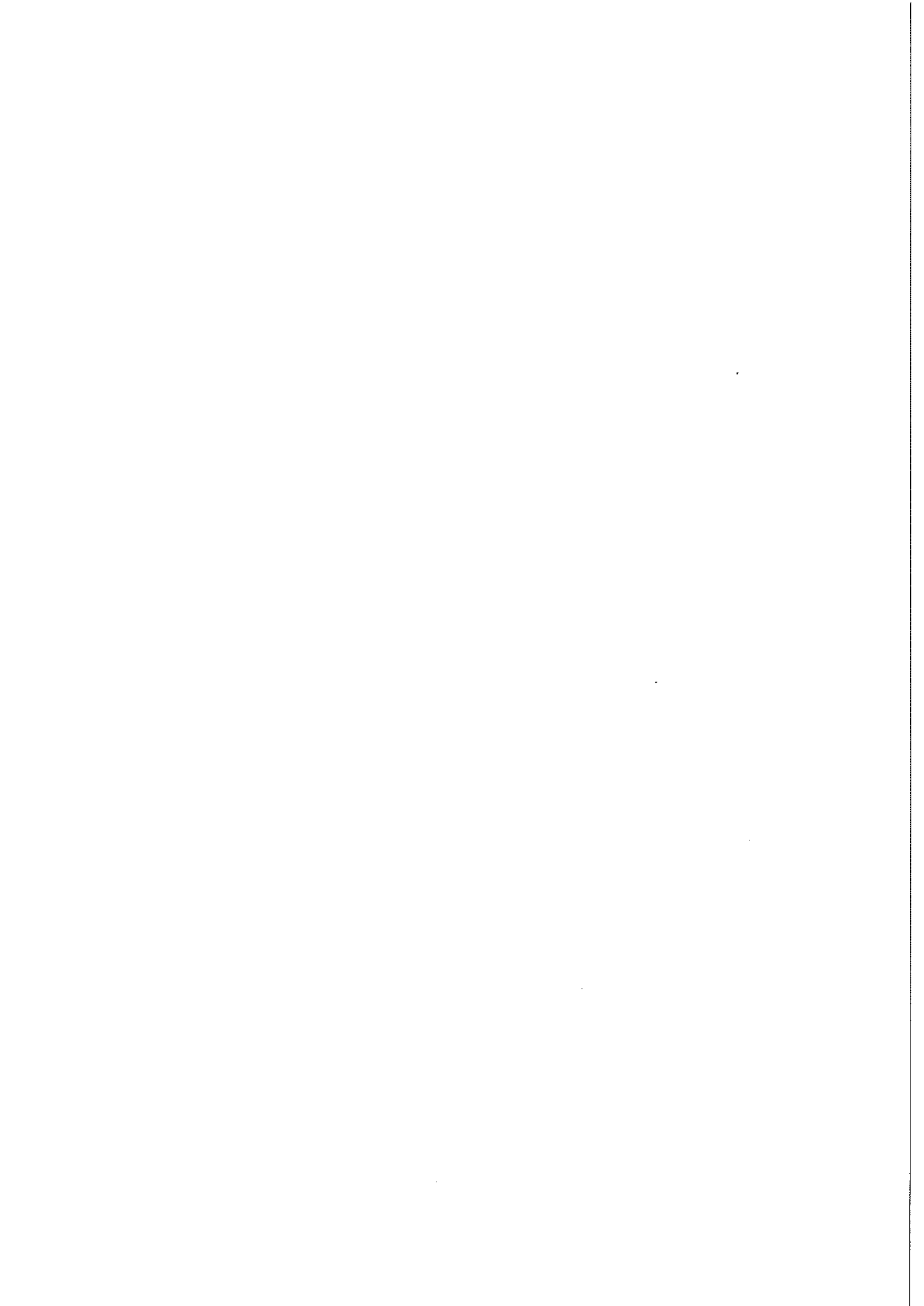
が誘導されることを示せ. (あるいは, この計量の断面曲率が  $-1$  であることを直接計算で確かめてもよい.)

- [4] 補題 2.3 をきちんと証明せよ.
- [5]  $L^4$  内の正の光錐  $\Lambda^+$  が

$$\Lambda^+ = \left\{ aa^* = \begin{pmatrix} |a_1|^2 & a_1 \bar{a}_2 \\ a_2 \bar{a}_1 & |a_2|^2 \end{pmatrix}; a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \right\}$$

と表示できることを示せ. 但し,  $L^4$  を  $\text{Herm}(2)$  と同一視して考える.

- [6] 本書末尾の付録の公式 (3) の証明を与えることにより, (2.5.8) で定義される Schwarz 微分について, 与えられた Riemann 面  $M^2$  上の二つの有理型関数  $g$  と  $h$  に対して, 差  $\{g, z\}dz^2 - \{h, z\}dz^2$  は局所座標  $z$  の選び方に依存しないことを確かめよ.
- [7] 命題 2.12 を証明せよ. (ヒント:  $G = dA/dC = dB/dD$  を用いよ.  $F$  を  $F^{-1}$  にすると  $G, g$  の役割が入れ替わるので  $g$  については直接的な計算を避けることができる.)
- [8]  $\mathbb{R}^3$  の極小曲面のヘリコイドに相当する CMC-1 曲面を具体的に構成せよ.



## 第3章 有限全曲率性

本章では、 $\mathbb{H}^3$  の完備かつ有限全曲率をもつ CMC-1 の曲面に関する性質、特に「Osserman 型の不等式」と「Bianchi-Small の公式」について紹介する。第1節では、対象としている曲面のエンドの特徴付けについて、その証明を含めて詳しく述べることにする。第2節では、双曲的 Gauss 写像に着目することで、極小曲面のときと同様に成り立つ、「Osserman 型の不等式」について、結果とその証明の概略を紹介する。第3節では、 $\mathbb{H}^3$  の CMC-1 曲面の微分型表現公式にあたる「Bianchi-Small の公式」を与え、 $\mathbb{R}^3$  の極小曲面の場合のときとの関係について紹介する。第4節では、その公式の応用として、対称性をもつ3つの埋め込まれた正則エンドをもつ CMC-1 曲面の存在性を示す。

### 3.1 第二 Gauss 写像 $g$ の有理性

$\mathbb{R}^3$  の極小曲面と同じく、 $\mathbb{H}^3$  の CMC-1 曲面の Gauss 曲率は非正なので、第1章第5節の事実 1.13 から直ちに次の命題が従う。

**命題 3.1.**  $f: M^2 \rightarrow \mathbb{H}^3$  を完備かつ有限全曲率をもつ CMC-1 はめ込みとすると、 $M^2$  はコンパクト Riemann 面  $\bar{M}^2$  から有限個の点  $p_1, \dots, p_n \in \bar{M}^2$  を除いた Riemann 面と正則同値である。

除かれた有限個の点  $p_1, \dots, p_n$  を、CMC-1 曲面のエンドという。1つのエンドに着目し、このエンドのまわりで曲面の Weierstrass data がどのような振る舞いをするのかを調べる。つまり、穴あき単位円板  $\mathbb{D}^* := \{z \in \mathbb{C}; 0 < |z| < 1\}$  上で定義された共形的な CMC-1 はめ込み  $f: \mathbb{D}^* \rightarrow \mathbb{H}^3$  を考える。正数  $\varepsilon \in (0, 1)$  をとると、 $f$  の

$$\bar{\mathbb{D}}^*(1 - \varepsilon) := \{z \in \mathbb{C}; 0 < |z| \leq 1 - \varepsilon\}$$

上での Gauss 曲率の面積要素による積分が有界のとき、有限全曲率 (finite total curvature) であるといい、原点に向かうすべての区分的になめらかな径路の長さが有界にならないとき、原点において完備 (complete) であるという。この節では、次の定理の証明の概略を述べる。

定理 3.2 (Bryant [2]). 原点において完備かつ有限全曲率をもつ共形的 CMC-1 はめ込み  $f: \mathbb{D}^* \rightarrow \mathbb{H}^3$  の第二 Gauss 写像  $g$  は, 原点の近傍において

$$g(z) = z^\mu g_0(z) \quad (\mu \in \mathbb{R})$$

なる表示をもつ. ここで  $g_0(z)$  は原点の近傍で定義され, かつ  $g_0(0) \neq 0$  を満たす正則関数である.

ここで, 第一基本形式  $ds^2$  の Gauss 曲率を  $K$  とし,  $d\sigma^2 := (-K)ds^2$  とおくと (2.3.10) なる表示が得られ, 2.3 節の最後に述べたように第二 Gauss 写像  $g$  は  $\tilde{\mathbb{D}}^*$  から単位球面  $S^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  への正則写像であり, この写像による  $S^2$  の定曲率 1 の Riemann 計量

$$d\sigma_0^2 := \frac{4dzd\bar{z}}{(1+|z|^2)^2} \quad (3.1.1)$$

の引き戻しが  $d\sigma^2$  であることがわかる. いま, 単位円板  $\mathbb{D}^*$  の普遍被覆面  $\tilde{\mathbb{D}}^*$  を考えて, その被覆変換群の生成元を  $\tau: \tilde{\mathbb{D}}^* \rightarrow \tilde{\mathbb{D}}^*$  とすると,

$$(g \circ \tau)^* d\sigma_0^2 = g^* d\sigma_0^2 = d\sigma^2$$

であることから

$$g \circ \tau = a * g, \quad a := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \text{SU}(2)$$

という形に表現される. 但し

$$a * g := \frac{a_{11}g + a_{12}}{a_{21}g + a_{22}}$$

と定義する. よく知られるように  $b \in \text{SU}(2)$  が存在し,  $bab^{-1}$  は対角行列にすることができる. 従って  $g$  を  $b * g$  に取り替えれば,

$$g \circ \tau = \begin{pmatrix} e^{i\lambda} & 0 \\ 0 & e^{-i\lambda} \end{pmatrix} * g \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

という形に表現される. すると,  $|g|$  は  $\mathbb{D}^*$  上の一価関数にすることができる. 但し, 値は  $0, \infty$  をとることがありえる. 定理の証明には, 次の命題を本質的に用いる. まず, 穴あき単位円板  $\mathbb{D}^*$  上で定義された定値でない実解析的写像

$$\varphi: \mathbb{D}^* \rightarrow P^1(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

を考える. この場合, 特に  $\varphi(z)$  の零点と極を考えることができる. 実解析性からこれらの点は孤立している. さらに関数の Taylor 展開の初項の次数を考えることで, 各零点における関数の位数を定義できる. また  $1/\varphi$  の零点の位数をもって, 極の位数も同様に定義される.

命題 3.3 (Cowen-Griffiths [4]).  $(\mathbb{C}; z)$  を複素平面とし,  $z = u + iv$  と書いているものとする.  $\varepsilon > 0$  を正数とし,  $\varphi(u, v)$  を穴あき円板  $\mathbb{D}^*(1 + \varepsilon)$  上で定義された定値でない実解析写像  $\varphi: \mathbb{D}^*(1 + \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  で, 積分

$$\int_{\mathbb{D}^*} \frac{\partial^2 \log(1 + \varphi^2)}{\partial z \partial \bar{z}} du \wedge dv$$

が有界であったとすると, このとき  $\varphi$  は原点の近傍で極をもたない, 但し  $\mathbb{D}^* := \mathbb{D}^*(1)$  とする.

証明. 概略を述べる. いま, 関数  $\varphi$  の極  $z = a$  において

$$0 < \lim_{z \rightarrow a} |z - a|^{\mu(a)} \varphi(z) < \infty$$

となる実数  $\mu(a) > 0$  を極  $z = a$  の位数と呼ぶことにする. 一方, 関数  $\varphi$  の極でない点  $z = a$  では  $\mu(a) = 0$  と定める. そして,

$$N(\varphi, t) := \int_1^t \frac{n(\varphi, \tau)}{\tau} d\tau, \quad n(\varphi, t) := \sum_{1/t < |p| < 1} \mu(p)$$

とおく. これに関して次の不等式が成り立つ.

$$2\pi N(\varphi, t) \leq \int_1^t \left( \int_{1/\tau < |z| \leq 1} \frac{\partial^2 \log(1 + \varphi^2)}{\partial z \partial \bar{z}} du \wedge dv \right) \frac{d\tau}{\tau} + C_1 \log t + C_2.$$

ここで,  $C_1, C_2$  は  $t$  に依存しない定数である. すると, 積分の有界性より, 正数  $M$  が存在して,

$$\int_1^t \left( \int_{1/\tau < |z| \leq 1} \frac{\partial^2 \log(1 + \varphi^2)}{\partial z \partial \bar{z}} du \wedge dv \right) \frac{d\tau}{\tau} \leq M \int_1^t \frac{d\tau}{\tau} \leq M \log t$$

なる評価が得られて

$$2\pi N(\varphi, t) \leq (M + C_1) \log t + C_2$$

なる評価となる. いま  $\varphi$  の極が原点に集積していたとする. すると, 任意の自然数  $m$  に対して, ある実数  $t_m > 1$  が存在して,  $t > t_m$  のとき  $n(\varphi, t) > m$  が成り立つ. よって,

$$\begin{aligned} (M + C_1) \log t + C_2 &\geq N(\varphi, t) = \int_1^t \frac{n(\varphi, \tau)}{\tau} d\tau \\ &\geq \int_{t_m}^t \frac{n(\varphi, \tau)}{\tau} d\tau \geq m \int_{t_m}^t \frac{d\tau}{\tau} = m(\log t - \log t_m). \end{aligned}$$

ところが,  $m$  はいくらでも大きくできるのでこれは矛盾する. 以上より  $\varphi$  の極は原点に集積しない.  $\square$

定理 3.2 の証明. 先の命題 3.3 を  $\varphi(z) = |g(z)|$  に適用すると, (2.3.10) により, 命題の仮定は  $f$  の有限全曲率性と同値である. よって  $|g|$  の極は原点に集積しない. 一方,  $h = 1/g$  とおくと,

$$1 + |h|^2 = \frac{1 + |g|^2}{|g|^2}$$

であるから

$$d\sigma^2 = \frac{4dg d\bar{g}}{(1 + |g|^2)^2} = \frac{4dh d\bar{h}}{(1 + |h|^2)^2}$$

となり,  $g$  の代わりに同じ論法を  $1/g$  にも適用することができ,  $g$  の零点も原点に集積しないことがわかる. すると, 原点のまわりを反時計まわりに 1 回転する充分小さな径路  $\gamma$  による  $g$  の位数

$$\mu := \frac{1}{2\pi} \operatorname{Im} \int_{\gamma} \log g(z) dz$$

が定まり, 関数

$$k(z) := \exp\left(\frac{1}{\mu} \log g(z)\right)$$

が原点のまわりの充分小さな穴あき円板で定義され, さらに  $\mu$  のとり方から  $k(z)$  は一価である.  $f$  が有限全曲率ならば,  $d\sigma^2$  は, この円板上で有限面積となり, 特に  $g$  の各点における逆像の個数は有限となる. すると  $k(z)$  の逆像の個数も有限となり, Picard の大定理 (事実 1.14) により  $k(z)$  は高々極をもち, そのことから定理の主張が導かれる.  $\square$

さらに次の定理が成り立つ.

定理 3.4 (Bryant [2]). 原点において完備かつ有限全曲率をもつ共形的な CMC-1 はめ込み  $f: \mathbb{D}^* \rightarrow \mathbb{H}^3$  の Hopf 微分  $Q = \omega dg$  は原点の近傍で高々極をもつ.

証明. いま, 定理 3.2 により, 原点のまわりに適当な複素座標をとることで,  $g = z^{\mu+1}$  と表示できる.  $g$  は  $1/g$  と置き換えることができるので,  $\mu+1 > 0$  としてよい.  $m = [\mu] + 1$  とすると, この表示のもとでは

$$\begin{aligned} d\sigma^2 &= \frac{4(\mu+1)^2 |z|^{2\mu}}{(1 + |z|^{2\mu+2})^2} |dz|^2 \geq \frac{4(\mu+1)^2 |z|^{2\mu}}{2^2} |dz|^2 \\ &= (\mu+1)^2 |z|^{2\mu} |dz|^2 \geq (m+1)^2 |z|^{2m} |dz|^2 \end{aligned}$$

なる評価が成り立つので, 恒等式 (2.3.11) により

$$ds^2 \leq 4 \left| \frac{Q}{(m+1)z^m dz} \right|^2.$$

となる. よって,  $ds^2$  が完備であれば, 右辺の計量も完備なので, 第 1 章第 5 節の事実 1.16 から  $Q/z^m$  も高々極しかもたないことがわかる.  $\square$

Enneper cousin(例 2.14) のように, 完備かつ有限全曲率をもつ CMC-1 曲面でも, 双曲的 Gauss 写像がエンドにおいて真性特異点をもつことがある. このようなエンドを非正則エンド (irregular end) といい, そうでないとき正則エンド (regular end) という.

命題 3.5 (Bryant [2]). 原点において完備かつ有限全曲率をもつ共形的な CMC-1 はめ込み  $f: \mathbb{D}^* \rightarrow \mathbb{H}^3$  が原点に正則なエンドをもつための必要充分条件は, Hopf 微分  $Q$  が原点で高々 2 位の極をもつことである.

証明. この命題は Schwarz 微分の性質を用いて示すことができる.  $f$  の有限全曲率性により, 定理 3.2 により,  $g$  は原点で有限位数をもつ. 前章の第 5 節において

$$\{g, z\}dz^2 - \{G, z\}dz^2 = 2Q$$

なる関係式を指摘した. ここで  $d/dz$  をプライムで表すことにして

$$\{G, z\} := \left(\frac{G''}{G'}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{G''}{G'}\right)^2$$

である. いま  $h_0(z)$  を原点で零にならない正則関数が存在して

$$g = z^\mu h_0(z)$$

と書けているので  $z$  を新しい局所座標  $z \exp((1/\mu) \log h_0)$  に取り替えることで, 最初から

$$g = z^\mu$$

と書けていたとして一般性を失わない. 本書末尾の付録に記したように,

$$\{z^\mu, z\} = \frac{1 - \mu^2}{2z^2}$$

が成り立つので, もし  $G$  が原点で有限位数ならば,  $Q$  は高々 2 位の極しかもちえない. 逆に  $Q$  が高々 2 位の極しかもたなかったとする.

$$r(z) := \frac{1}{2}\{G, z\}$$

とおくと  $2r(z)dz^2 := \{g, z\}dz^2 - 2Q$  となり,  $g$  は原点で有限位数なので  $\{g, z\}dz^2$  は原点で高々 2 位の極しか持たないので,  $r(z)$  も, 原点で高々 2 位の極しか持ち得ない. いま

$$u''(z) + r(z)u(z) = 0 \tag{3.1.2}$$

なる常微分方程式の一次独立な解  $u(z), v(z)$  を任意にとると, 末尾の付録の命題 A.2 により

$$\{u/v, z\} = \{G, z\}$$

となる. 従って末尾の付録の命題 A.1 により  $ad - bc \neq 0$  なる複素数  $a, b, c, d$  が存在して

$$G = \frac{a(u/v) + b}{c(u/v) + d}$$

と書ける. 一般性を失うことなく  $ad - bc = 1$  としてよい. そこで  $f$  を  $\mathbb{H}^3$  の等長変換で動かした CMC-1 はめ込み

$$\hat{f} := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} f \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^*$$

を考えると, そのリフトは

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} F$$

となる. 但し  $F$  は元の  $f$  のリフトである. よって命題 2.12 により,  $\hat{f}$  の双曲的 Gauss 写像は  $u/v$  に一致する. したがって必要ならば  $f$  を  $\hat{f}$  にとりかえることにより  $G = u/v$  として一般性を失わない.

一方, 常微分方程式 (3.1.2) は  $r(z)$  が原点で高々2位の極をもつならば, 原点に零点をもたない正則関数  $u_0(z)$  と  $v_0(z)$  が存在して

$$u(z) = z^\alpha u_0(z), \quad v(z) = z^\beta v_0(z) + cu(z) \log z$$

という形で表されることが知られている. (詳しくは, 文献 [26] の Appendix およびそこに掲載してある文献をみよ.) ここで  $\alpha, \beta$  は2次方程式

$$t^2 - t + r_{-2} = 0$$

の解である. 但し,

$$r(z) = \frac{r_{-2}}{z^2} + (\text{高次の項})$$

である. さらに  $c$  は対数項の係数とよばれ, 2根の差  $\alpha - \beta$  が整数の場合のみに現れる.  $\alpha - \beta$  は整数でないとする

$$G = z^{\alpha-\beta} \frac{u_0(z)}{v_0(z)}$$

と書けるので  $z=0$  のまわりで  $G$  は一価関数にはなりえない. したがって  $\alpha - \beta \in \mathbb{Z}$  である. すると対数項の係数  $c$  が現れる可能性が生ずる. いま  $c$  が零でないとする,

$$\frac{1}{G} = z^{\beta-\alpha} \frac{v_0(z)}{u_0(z)} + c \log z$$

と書ける. 関数  $z^{\beta-\alpha}(v_0(z)/u_0(z))$  は  $z=0$  のまわりで一価であるから,  $\log z$  の多価性により,  $G(z)$  は,  $z=0$  のまわりで  $G$  は一価関数にはなりえない. 従って,  $c=0$  となり, 特に  $G$  は  $z=0$  に高々極しかもたないことがわかる.  $\square$



すべてのエンドが正則な例（種数が高いものも含む）は数多く構成することができる (cf. [25]). また似たような手法で, すべてのエンドが非正則で対称性が高い例（種数1のものも含まれる）も構成することができる (cf. [27]).

## 3.2 Osserman 型の不等式

極小曲面のときと同様に以下の定理が成り立つ.

定理 3.6 ([37]). 完備かつ有限全曲率をもつ CMC-1 はめ込み  $f: M^2 \rightarrow \mathbb{H}^3$  の双曲的 Gauss 写像  $G: M^2 \rightarrow S^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  の写像度<sup>1</sup> を  $\deg G$  で表し, エンドの数を  $n$  とすると,

$$2 \deg G \geq -\chi(M^2) + n$$

が成り立つ. 等号は, 各エンドが正則で自己交叉しないときに成り立つ.

この不等式を示した論文 [37] で, 山田氏と筆者は非正則のエンドは必ず自己交叉をもつことを予想したが, 後に Collin, Hauswirth と Rosenberg [5] と Yu [42] により, それぞれ別の手法で肯定的に解決された. また, Yu [41] により, 上の定理の「有限全曲率性」の仮定を外せることが指摘されている.

証明. 概略に留める. ポイントは,  $F$  と  $F^{-1}$  の双対性に気づくことである. 最大の難所はエンドの形状解析である. 第2章定理 2.11 で指摘したように,  $f$  が完備であるならば, その双対  $f^\sharp$  も完備であり, その Weierstrass data  $(G, -Q/dG)$  に対して, 極小曲面のときの Osserman の不等式の証明がそのまま通用する. 従って鍵となるのは, 以下の補題である. (不等式の証明では  $G$  はすべてのエンドで真性特異点をもたないとしてよい. エンドの数は有限個なので, 曲面を  $\mathbb{H}^3$  における等長変換で少し動かして, すべてのエンドにおいて  $G$  は, そのエンドで極をもたないことを仮定できる.) 等号成立は  $-Q/dG$  がエンドでちょうど2位の極をもつことである. この条件がエンドが自己交叉しないことと同値であることを示すことにより, 等号条件が示される. 等号条件についての詳細は文献 [34] および [37] をみよ.  $\square$

補題 3.7 (Umehara-Yamada [37]).  $f: M^2 \rightarrow \mathbb{H}^3$  を完備かつ有限全曲率をもつ CMC-1 はめ込みとし,  $G$  をその双曲的 Gauss 写像,  $Q$  をその Hopf 微分とする. もしも, すべてのエンドにおいて  $G$  が真性特異点も極も, もたなかったとせよ. すると  $\omega^\sharp = \hat{\omega}^\sharp dz (:= -Q/dG)$  は各エンドに2位以上の極をもつ.

<sup>1</sup> $G$  があるエンドで真性特異点をもつ場合には  $\deg G = \infty$  とする. すべてのエンドが正則のときには,  $G$  は  $M^2$  のコンパクト化  $\bar{M}^2$  から  $S^2$  への写像と思える. この場合, 各  $p \in S^2$  に対して重複度の数えた  $G$  の逆像の個数  $\#G^{-1}(p)$  は,  $p \in S^2$  の取り方によらない, これを  $G$  の写像度とよんでいる.

証明. ここの概略のみに留める.  $f$  の null 正則リフトを

$$F := \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

と書くと,  $A, B$  は微分方程式

$$X'' - \frac{(\hat{\omega}^\sharp)'}{\hat{\omega}^\sharp} X' + qX = 0 \quad (Q = q(z)dz^2)$$

をみたく (文献 [26] p31 の (E.1)<sup>♯</sup> 式をみよ). 但しプライムは  $d/dz$  を表すものとする.  $\hat{\omega}^\sharp$  があるエンドで, ちょうど 1 位の極をもったとすると, 上の微分方程式の決定方程式は重根となり, 対数項が必ず生じる. これは  $f = FF^*$  の一価性に矛盾する.  $\square$

ここで, CMC-1 曲面の研究の上で重要な具体例をその絵と一緒に 2 つほど紹介する. 1 つは, 3 つのエンドで対称性をもつ山田氏と発見した例である. 3 つの正則エンドをもち, Osserman 型の不等式の等号を満たすものは山田氏との結果 [38] で一部の例外を除き分類がなされている. その後, Bobenko 等 [3] により, それらは超幾何関数を用いて具体的な表示が得られている.

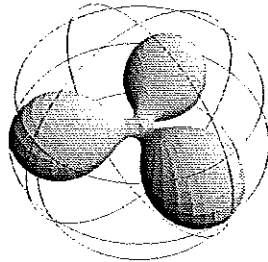


図 3.1: CMC-1 trinoid

もう 1 つは種数 1 で 2 つのエンドをもつ Rossmann-佐藤の例 [24] である. このような例は  $\mathbb{R}^3$  の極小曲面では存在しない. 実際, 極小曲面では, R. Schoen の結果 [28] で 2 つの embedded end をもち完備かつ有限全曲率をもつはめ込まれた極小曲面はカテノイドに限ることが知られている.

### 3.3 CMC-1 曲面の微分型表現公式

$SL(2, \mathbb{C})$  への null 正則写像の成分を

$$F = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \tag{3.3.1}$$

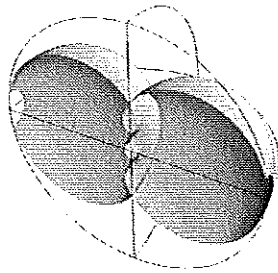


図 3.2: Rossmann-佐藤曲面 (図は佐藤勝憲氏による.)

で表すと, (2.5.6) と (2.5.7) により, 二つの Gauss 写像  $G$  と  $g$  は  $A, B, C, D$  の微分の比で表すことができた. ここでは,  $F$  に対して

$$G = \frac{dA}{dC} = \frac{dB}{dD}, \quad g = -\frac{dB}{dA} = -\frac{dD}{dC}$$

とにおいて, これを null 正則写像  $F$  の双曲的 Gauss 写像および第二 Gauss 写像とよぶことにする. (実際, これは (2.5.6) と (2.5.7) の導出法からわかるように, 任意の null 正則写像  $F$  に対して定義可能である.)

逆に, Small [29] は  $G$  と  $g$  から次の形で  $F$  を表せることを示した.

$$F = \begin{pmatrix} G \frac{da}{dG} - a & G \frac{db}{dG} - b \\ \frac{da}{dG} & \frac{db}{dG} \end{pmatrix}, \quad \left( a := \sqrt{\frac{dG}{dg}}, b := -ga \right) \quad (3.3.2)$$

但し  $a$  の定義式には根号が入っており, 零点において分岐を選ぶ際に  $\pm$  の不定性が生じる可能性があるので,  $F$  を  $SL(2, \mathbb{C})$  への写像ではなく特殊線形群の射影化

$$PSL(2, \mathbb{C}) := SL(2, \mathbb{C}) / \{\pm 1\}$$

に値をもつ写像と考える必要がある. 実際に,

$$db \left( G \frac{da}{dG} - a \right) - \left( G \frac{db}{dG} - b \right) da = b(da) - a(db) = (-ga)da + a(adg - gda) = a^2 dg = dG$$

であるから, (3.3.2) で与えられる  $F$  の行列式は 1 である. 一方

$$dF = \begin{pmatrix} dG \frac{da}{dG} + Gd \left( \frac{da}{dG} \right) - da & dG \frac{db}{dG} + Gd \left( \frac{db}{dG} \right) - db \\ d \left( \frac{da}{dG} \right) & d \left( \frac{db}{dG} \right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Gd \left( \frac{da}{dG} \right) & Gd \left( \frac{db}{dG} \right) \\ d \left( \frac{da}{dG} \right) & d \left( \frac{db}{dG} \right) \end{pmatrix}$$

であるから  $F$  が null であることもわかる. さらに  $F$  の双曲的 Gauss 写像が  $G$  であることもこの式からただちにわかる. 今度は  $F$  の第二 Gauss 写像を計算する.  $d/dG$  をプライムで表すと  $a = \sqrt{1/g'}$  となり

$$-d\left(\frac{db}{dG}\right)/d\left(\frac{da}{dG}\right) = \frac{(-b)''}{a''} = \frac{(g'a + ga')'}{a''} = \frac{g''a + 2g'a' + ga''}{a''} = g + \frac{g''a + 2g'a'}{a''}$$

であるが, ここで

$$a(g''a + 2g'a') = g''a^2 + \frac{1}{2}g'(a^2)' = g''\frac{1}{g'} + \frac{1}{2}g'\left(\frac{1}{g'}\right)' = g''\frac{1}{g'} + \frac{1}{2}g'\frac{-2g''}{(g')^2} = 0$$

であるから  $F$  の第二 Gauss 写像は  $g$  であることも確かめられた.

3次元双曲型空間  $\mathbb{H}^3$  は

$$\mathbb{H}^3 = \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})/\mathrm{SU}(2) = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})/\mathrm{PSU}(2)$$

とも表されるので, ここでは  $F$  の値域の微妙な違いはあまり気にしないことにする (但し  $\mathrm{PSU}(2) := \mathrm{SU}(2)/\{\pm 1\}$  とする). 公式 (3.3.2) は積分を用いない Bryant の表現公式の亜種で, 具体例を構成する上で有用である. 見かけは異なるが, これと本質的に同等の式を Bianchi が全く異なる方法で与えていることも注意しておこう. その意味で, この公式を Bianchi-Small の表現公式と呼ぶことにする. 詳しくは, 文献 [19] を見よ. この公式の立場から, 第1章第4節で紹介した  $\mathbb{C}^3$  の null 正則写像での微分型公式

$$F = \begin{pmatrix} -1 & g & (1-g^2)/2 \\ i & -ig & i(1+g^2)/2 \\ 0 & -1 & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \quad \left( h_1 = \frac{dh}{dg}, h_2 = \frac{dh_1}{dg} \right)$$

の再解釈ができる. 実際

$$g = G + th \quad (t \in \mathbb{R})$$

とし, さらに

$$h_1 := dh/dG, \quad h_2 := dh_1/dG$$

とにおいて, Bianchi-Small の公式に代入すると

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{A-D}{t} = h_1 - Gh_2, \quad (3.3.3)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{B+C}{t} = h - Gh_1 - \frac{(1-G^2)h_2}{2}, \quad (3.3.4)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{B-C}{t} = -ih + iGh_1 - i\frac{(1+G^2)h_2}{2}, \quad (3.3.5)$$

となり、極小曲面の微分型公式が Bianchi-Small の公式の極限と解釈される。但し  $A, B, C, D$  は (3.3.1) で定まる  $F$  の成分とする。

$SL(2, \mathbb{C})$  を 3次元双曲型空間  $\mathbb{H}^3(-c^2)$  の複素化とみなして文献 [33] の方法で、Poincaré 球の複素化の中で適当にスケールした後に極限をとると、これが  $SL(2, \mathbb{C})$  の Abel 群  $\mathbb{C}^3$  への変形 (崩壊) となり、上の極限は、この変形に対応する Bianchi-Small の公式の極小曲面の微分型公式への崩壊と解釈される。

### 3.4 Bianchi-Small の公式の応用

この節では、前節の結果を用いて、Riemann 面上の円錐的特異点をもつ擬 Hermite 計量と、与えられた双曲的 Gauss 写像をもつ CMC-1 はめ込みとは 1 対 1 に対応することを示す。まず、円錐的特異点を定義する。

定義. Riemann 面  $M^2$  上の対称テンソル  $d\sigma^2$  が擬 Hermite 計量 (pseudo-Hermitian metric) であるとは、この計量が複素構造と適合する、つまり  $M^2$  の複素構造を  $J$  とすると

$$d\sigma^2(JX, JY) = d\sigma^2(X, Y) \quad (X, Y \in T_p M^2)$$

が、 $M^2$  の各点  $p$  で成り立ち、しかも  $d\sigma^2$  が半正定値であるときをいう。

擬 Hermite 計量  $d\sigma^2$  が与えられたとき、この計量が正定値でなくなる点を、擬計量  $d\sigma^2$  の特異点 (singular point) という。さらに、 $d\sigma^2$  の特異点  $p \in M^2$  が円錐的特異点 (conical singular point) であるとは、点  $p$  を原点とする局所複素座標近傍  $(U; z)$  をとると数  $\mu > -1$  と正数  $C > 0$  が存在して

$$\lim_{z \rightarrow 0} |z|^{-2\mu} d\sigma^2 = C |dz|^2 \quad (\mu \neq 0)$$

となるときをいう。  $\mu$  を  $d\sigma^2$  の (特異点  $p$  における) 位数といい、 $2\pi(\mu + 1)$  を、円錐的特異点における円錐角 (conical angle) という。

このとき、以下のことが知られている。

事実 3.8. (Trojanov [30])  $\bar{M}^2$  をコンパクト Riemann 面とし、 $d\sigma^2$  を擬 Hermite 計量、特異点は有限個で、それらを  $p_1, \dots, p_n$  とし、各  $p_j$  は位数  $\mu_j$  の円錐的特異点であるとする。このとき、計量  $d\sigma^2$  の  $\bar{M}^2 \setminus \{p_1, \dots, p_n\}$  における Gauss 曲率を  $K$  とすると、

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\bar{M}^2 \setminus \{p_1, \dots, p_n\}} K dA_{d\sigma^2} = \chi(\bar{M}^2) + \mu_1 + \dots + \mu_n \quad (3.4.1)$$

が成り立つ。但し  $dA_{d\sigma^2}$  は計量  $d\sigma^2$  の面積要素である。

また、以下の補題が成り立つ。

補題 3.9.  $M^2$  を Riemann 面,  $d\sigma^2$  を  $M^2$  上の擬 Hermite 計量とし, 特異点は有限個で, それらを  $p_1, \dots, p_n$  とする. いま  $d\sigma^2$  は,  $M_*^2 := M^2 \setminus \{p_1, \dots, p_n\}$  上で定曲率 1 をもつとせよ. すると,  $M_*^2$  の普遍被覆面  $\tilde{M}_*^2$  から単位球面  $S^2$  への局所等長写像  $h: \tilde{M}_*^2 \rightarrow S^2$  が存在する, つまり

$$\pi^* d\sigma^2 = h^* ds_0^2$$

が成り立つ. さらに立体射影によって  $S^2$  を Riemann 球面  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$  と同一視したとき,  $h$  は  $\tilde{M}_*^2$  上の有理型関数として選ぶことができる. 但し,  $ds_0^2$  は単位球面  $S^2$  の自然な定曲率 1 の Riemann 計量とし, また被覆空間としての自然な射影を  $\pi: \tilde{M}_*^2 \rightarrow M_*^2$  とし,  $\tilde{M}_*^2$  には, 計量  $\pi^* d\sigma^2$  が Riemann 計量として付随しているものとする.

上記の補題で定まる正則写像

$$h: \tilde{M}_*^2 \rightarrow S^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

のことを, (定曲率 1 の) 擬 Hermite 計量  $d\sigma^2$  の展開写像 (developping map) とよぶ. 一般には, 展開写像は一意に定まらないが, 単位球面  $S^2$  の等長変換の合成に関する不定性を除けば一意に定まる.

証明. 曲面論の基本定理を用いる.  $d\sigma^2$  を第一基本形式とし, 第二基本形式も同じく  $d\sigma^2$  とすると,  $d\sigma^2$  はそれ自身が誘導する Levi-Civita 接続に対して平行であるから, 第二基本形式としての  $d\sigma^2$  は Codazzi の方程式を満たす. 一方, 第一基本形式としての  $d\sigma^2$  は Gauss 曲率が 1 であり, 第二基本形式としての  $d\sigma^2$  が導く形作用素は単位行列であるから, 行列式は 1 であり, Gauss 曲率に一致するので Gauss 方程式もみたされている. よって, その第一基本形式, 第二基本形式ともに  $d\sigma^2$  となる等長はめ込み

$$\Phi: \tilde{M}_*^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

が存在する. すると  $\Phi$  は Gauss 曲率が 1 で, かつ全臍的であるから  $\Phi$  の像は半径 1 の球面に含まれる. 必要ならば, さらに  $\Phi$  を対心写像と合成することで  $\tilde{M}_*^2$  から  $S^2$  への向きを保つ写像にできる. すると立体射影による同一視  $S^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  のもとで  $\Phi$  が目的の展開写像  $h$  を与えていることがわかる.  $\square$

さて,  $M^2$  を Riemann 面とし,  $d\sigma^2$  を擬 Hermite 計量, 特異点は有限個で, それらを  $p_1, \dots, p_n$  とし,  $M_*^2 := M^2 \setminus \{p_1, \dots, p_n\}$  上で定曲率 1 をもつとせよ. すると補題 3.9 により  $M_*^2$  の普遍被覆面  $\tilde{M}_*^2$  から単位球面  $S^2$  への正則写像  $h: \tilde{M}_*^2 \rightarrow S^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  が存

在する.  $h$  は  $\tilde{M}_*^2$  上の有理型関数とみなすことができるので, その Schwarz 微分が考えられるが,

$$d\sigma^2 = e^{2\theta} |dz|^2$$

と書いていたとすると  $h$  が展開写像であることから (3.1.1) より

$$d\sigma^2 = h^* d\sigma_0^2 = \frac{4dh d\bar{h}}{(1+|h|^2)^2}$$

となる. 特に正則関数の  $d/dz$  による微分をプライムで表すと

$$2\theta = \log 4 + (\log h') + \overline{(\log h')} - 2 \log(1+h\bar{h})$$

である. すると  $\bar{h}_z = 0$  であるから,

$$\begin{aligned} \theta_z &= \frac{h''}{2h'} - \frac{\bar{h}h'}{1+|h|^2}, \\ \theta_{zz} &= \frac{h'''}{2h'} - \frac{1}{2} \left( \frac{h''}{h'} \right)^2 - \frac{\bar{h}h''}{1+|h|^2} + \frac{\bar{h}^2(h')^2}{(1+|h|^2)^2} \end{aligned}$$

となり

$$2(\theta_{zz} - (\theta_z)^2) = \frac{-3(h'')^2 + 2h'h'''}{2(h')^2} = \{h, z\}$$

が得られる. 特に, Schwarz 微分は  $h$  の取り方に依存せず計量にのみ依存することがわかる (この関係式は, 第 2 章の始めに基本文献としてあげた, Bryant [2] の CMC-1 曲面に関する論文で指摘された). そこで,

$$\{d\sigma^2, z\} := \{h, z\}$$

とおくと, 次が成り立つ.

**定理 3.10.** ([36])  $M^2$  を Riemann 面とし,  $G$  を  $M^2$  上の有理型関数とする. また  $d\sigma^2$  を  $M^2$  上の擬 Hermite 計量で, 有限個の点に円錐的特異点をもつとし,

$$Q := \frac{1}{2} \left( \{d\sigma^2, z\} dz^2 - \{G, z\} dz^2 \right)$$

とおくと

$$ds^2 := 4|Q|^2/d\sigma^2$$

で定義される擬 Hermite 計量は,  $M^2$  の有限個の点  $p_1, \dots, p_n$  を除けば, 有限確定値をとり, しかも正定値になる. すると, 共形的な CMC-1 はめ込み

$$f: \tilde{M}^2 \setminus \{p_1, \dots, p_n\} \rightarrow \mathbb{H}^3$$

で,  $f$  の双曲的 Gauss 写像が  $G$  で,  $ds^2$  を第一基本形式にもつものが一意的に存在する.

この結果を示すのに、最初、筆者等は曲面論の基本定理を用いたのだが、以下のように Bianchi-Small 公式 (3.3.2) の簡単な応用として証明することができる。

証明.  $d\sigma^2$  を擬 Hermitian 計量, 特異点は有限個で, それらを  $p_1, \dots, p_n$  とし,  $M_*^2 := M^2 \setminus \{p_1, \dots, p_n\}$  とおく.  $h$  を計量  $d\sigma^2$  の展開写像とすると, Bianchi-Small の公式により,  $G$  を双曲的 Gauss 写像, そして  $h$  を第二 Gauss 写像とする null 正則写像

$$F : \tilde{M}_*^2 \rightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$$

が定まる. いま, 基本群  $\pi_1(M_*^2)$  を普遍被覆面  $\tilde{M}_*^2$  の被覆変換群と同一視すると,  $h \circ T$  も擬計量  $d\sigma^2$  の展開写像となるから  $b = (b_{ij})_{i,j=1,2} \in \mathrm{SU}(2)$  が存在して,

$$h \circ T = \frac{b_{11}h + b_{12}}{b_{21}h + b_{22}}$$

と書ける. すると (2.5.9) により  $F \circ T = Fb$  あるいは  $F \circ T = -Fb$  となる. どちらの場合でも  $f = FF^*$  とおけば

$$f \circ T = (F \circ T)(F \circ T)^* = Fbb^*F^* = FF^* = f$$

となり,  $f$  は  $M_*^2$  から  $\mathbb{H}^3$  への  $C^\infty$  級写像を定める.  $f$  の Hopf 微分は  $Q$  であるから,  $\{h, z\} = \{d\sigma^2, z\}$  に注意して, (2.9) と (2.3.11) によりこの写像の第一基本形式は

$$ds^2 = 4|Q|^2/d\sigma^2$$

である. これが正定値でなくなる可能性のある点は  $Q$  の零点のみであるから, そのような点は有限個である. 一方, たとえ  $d\sigma^2$  の特異点  $p_1, \dots, p_n$  であっても,  $ds^2$  がそこで正定値であれば,  $f$  はその点でも CMC-1 はめ込みを与えているから,  $f$  が定義されない  $M^2$  上の点は

$$ds^2 = 4|Q|^2/d\sigma^2$$

が定義されない点か, もしくは  $ds^2$  の特異点かのいずれかである. □

例 3.11 (catenoid cousin). 例 2.15 で紹介した catenoid cousin の第二 Gauss 写像は  $g = z^{\mu+1}$  ( $\mu > -1, \mu \neq 0$ ) であるから対応する計量

$$d\sigma^2 = \frac{4(\mu+1)^2|z|^{2\mu}}{(1+|z|^{2\mu+2})^2}|dz|^2$$

は  $z = 0, \infty$  に位数  $\mu$  の (円錐角  $2\pi(\mu+1)$ ) の円錐の特異点をもつ計量となる.  $-1 < \mu < 0$  のとき, この計量はラグビーボールのような形をした曲面として  $\mathbb{R}^3$  に実現することができる. 詳しくは [40, §8] をみよ. 定理 3.10 において, この  $d\sigma^2$  と  $G = z$  の対から作られる CMC-1 曲面が例 2.15 で紹介した catenoid cousin と再解釈することができる.



例 3.12 (3つの正則エンドをもつ CMC-1 曲面). 一般に球面測地三角形とは, 球面上の同一大円上にない3点を, 最短測地線で結び, 内角が  $\pi$  を超えない方の領域をさす. ここでは頂角が  $2\pi/3$  の球面二等辺三角形  $\triangle ABC$  を考える.

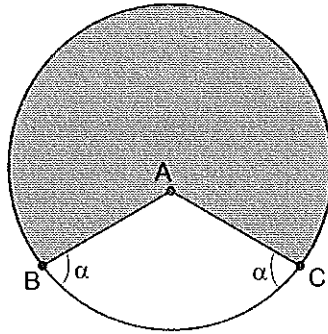


図 3.3: 頂角  $2\pi/3$  の球面二等辺三角形

この三角形の底角を  $\alpha$  とすると, 球面三角法による解析により, その動く範囲は

$$\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{5\pi}{6}$$

である. いま, この三角形の底辺を延長して半球を作り, この半球から  $\triangle ABC$  を除いてできる, 頂角  $4\pi/3$  で底角  $\beta = \pi - \alpha$  の (一般化された) 球面三角形を  $T$  で表す. (図 3.3 では  $T$  は灰色で表示した.) このとき,  $T$  の底角  $\beta$  の動く範囲は  $\alpha$  と同じく

$$\frac{\pi}{6} < \beta < \frac{5\pi}{6}$$

である. いま  $T$  を3つ集めて, 二等辺三角形としての斜辺を貼り合わせて, 中心に  $4\pi$  の円錐角をもち, 内角が  $2\beta$  の正三角形を構成し  $T_3$  で表す. いま  $\beta \neq \pi/2$  とする.  $T_3$  を2枚用意し, 辺々貼り合わせると, 3つの円錐角  $4\beta$  の特異点と2つの円錐角  $4\pi$  の特異点をもつ定曲率1の曲面ができる. 構成法から, この計量は2面体群  $D_3$  の作用で不変な計量となる. よく知られるように種数0の閉 Riemann 面の複素構造は一意的であるから, この曲面は  $P^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\} \cong S^2$  上に5つの円錐的特異点をもつ定曲率1の計量  $d\sigma^2$  と同一視することができる.  $D_3$ -対称性により, 円錐角  $4\pi$  の特異点は  $z = 0, \infty$  に配置し, 残りの円錐角  $4\beta$  の特異点は

$$z = 1, \quad \zeta, \quad \zeta^2 \quad \text{但し, } \zeta := \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{3}i).$$

に配置することができる. 一方

$$G = z^2$$



図 3.4:  $\beta < \pi/2$  と  $\beta > \pi/2$  の場合のエンド 3 つの CMC-1 曲面

とおくと, 系 2.9 により

$$2Q = \{d\sigma^2, z\}dz^2 - \{G, z\}dz^2$$

は  $z = 0, \infty$  に高々 1 位の極しかもたない.  $\{G, z\}$  の極は  $G$  の分岐点であり, 一方  $\{d\sigma^2, z\}$  の極は, 計量  $d\sigma^2$  が退化する点だけであるから,  $Q$  は  $z = 1, \zeta, \zeta^2$  に 2 位の極をもち, 他には極を持たない. Riemann-Roch の定理 (文献 [6] 参照) により,

$$(Q \text{ の零点の位数の総和}) - (Q \text{ の極の位数の総和}) = -4$$

である.  $4|dG|^2/(1+|G|^2)^2$ ,  $d\sigma^2$  は共に  $2\pi/3$  の回転に関して不変であるから,  $z = 0, \infty$  以外の点で  $Q$  の零点の位数の総和は常に 3 の倍数である. よって,  $z = 0, \infty$  は  $Q$  の零点でなければならない. その位数を  $d$  とする. 一方,  $Q$  の  $z = 0, \infty$  以外の零点の位数の総和を  $3m$  とすると

$$(Q \text{ の零点の位数の総和}) = 2d + 3m, \quad (Q \text{ の極の位数の総和}) = 3 \times 2 = 6$$

となるから

$$2d + 3m = 2 \quad (d, m \geq 0)$$

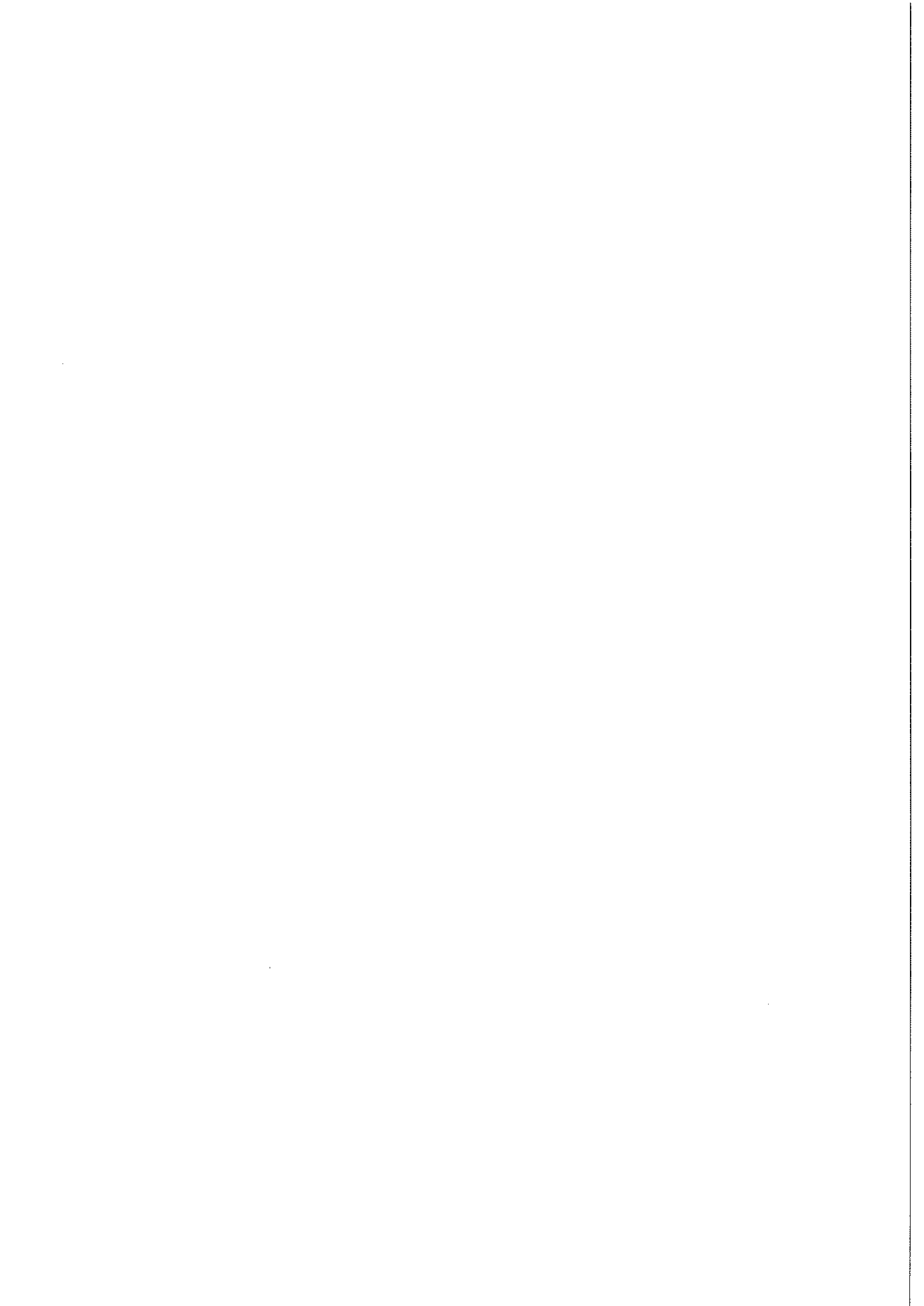
となり,  $d, m$  がともに整数なので

$$d = 1, \quad m = 0$$

であることがわかる. 特に  $Q$  は  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  に零点を持たないので  $ds^2 = 4|Q|^2/d\sigma^2$  は  $\mathbb{C} \cup \{\infty\} \setminus \{1, \zeta, \zeta^2\}$  で正定値である.  $Q$  の  $z = 1, \zeta, \zeta^2$  における極の位数が 2 であることから  $ds^2$  が完備であることが示されて,  $\mathbb{H}^3$  に 3 つの正則なエンドをもち, 2 面体群  $D_3$  の対称性をもつ完備 CMC-1 曲面の存在が示されたことになる.

## 演習問題 3

- 1 例 2.15 の catenoid cousin の全曲率を求めよ.
- 2  $U$  を  $\mathbb{C}$  の領域とし  $G = z$  として  $g$  を  $U$  上の有理型関数とした場合に極限の計算 (3.3.3), (3.3.4) および (3.3.5) を直接計算で確かめよ.
- 3 補題 3.7 をきちんと証明せよ.



## 第4章 発展的課題

本章では、3次元双曲型空間  $\mathbb{H}^3$  の平均曲率1の曲面の平行曲面を考えると、Bryant型の線形 Weingarten 曲面が得られること、そしてこの種の線形 Weingarten 曲面は以下の3つの重要な曲面のクラスが自然に付随していることを解説する。この話題についての基本文献は Gálvez, Martínez and Milán [11] である。

- $\mathbb{H}^3$  の CMC-1 曲面
- $\mathbb{H}^3$  の平坦 (つまり Gauss 曲率が零の) 曲面
- 3次元 de Sitter 時空の CMC-1 曲面

後半の2つの曲面については、ここで初登場であるが  $\mathbb{H}^3$  の CMC-1 曲面の Bryant の表現公式と極めて類似の表現公式が成り立つ。但し、これら2つの曲面は、ある種の完備性を仮定して大域的な振る舞いを調べようとする、曲面に特異点が生じてしまう、という特性をもつ。ここでは、この特異点を含む新たな曲面論を平面曲線の平行曲線を最初の例に挙げることで、読者に実感をこめて紹介したく思っている。

### 4.1 平行曲線と平行曲面

与えられた正則平面曲線  $\gamma(t)$  を、法線方向に一定距離、動かした曲線

$$\gamma_\delta(t) = \gamma(t) + \delta n(t) \quad (\delta \in \mathbb{R}).$$

を平行曲線 (parallel curve) という。正則曲線の平行曲線は一般にはフロントにはなるが正則曲線とは限らない。Huygens の原理によれば、平行曲線は、初期曲線を波面と考えたときの波の時間発展である。図 4.1 は楕円の平行曲線の時間発展である。

このように平行曲線には自然に特異点 (曲線がはめ込みでなくなる点) が生ずるが、このような特異点を内包する形で、抽象的に「波面 (wave front)」の概念 (ここではその定義を述べないことにする) を定式化することができる (詳しくは文献 [32] をみよ)。

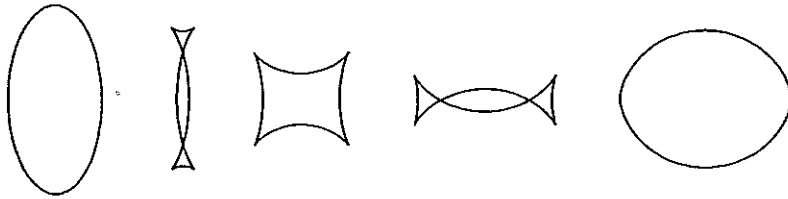


図 4.1: 楕円の平行曲線

さて、曲線の場合と同様に  $\mathbb{R}^3$  内にはめ込まれた曲面

$$f: M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

に大域的に定義された単位法線ベクトル場  $\nu$  が存在したとすると、

$$f_t := f + t\nu$$

によって曲線の場合と同じく平行曲面が定まる。この場合にも時間発展と共に、特異点が生ずる可能性があるが、興味深い事実として以下が知られている。

**事実 4.1.**  $f$  を平均曲率  $1/2$  の曲面とすると、 $f + \nu$  は Gauss 曲率が  $1$  の曲面となる。

このように、平行曲面を考えると、一見、異なる対象と思われる曲面同士の間意外な関係が見えてくる。但し、特異点も一緒に扱わねばならない。例えば、平均曲率が正で一定の回転面は Delauney 曲面とよばれる。より詳しく楕円（双曲線）を直線  $L$  に沿って滑ることなく回転させたときの焦点の軌跡を、直線  $L$  に沿って回転させて得られる Delauney 曲面を unduloid (nodoid) とよぶ。下図は、この2種の Delauney 曲面の右隣に、それぞれ、その平行曲面として得られる（特異点をもつ）Gauss 曲率一定曲面を配置したものである。unduloid は自己交叉をもたず、対応する Gauss 曲率一定曲面は円錐的特異点をもつ（図 4.2 左側）。nodoid は自己交叉をもち、対応する Gauss 曲率一定曲面はカスプ辺とよばれる特異点をもつ（図 4.2 右側）。

## 4.2 $\mathbb{H}^3$ における曲面の単位法線ベクトル場

今度は、平行曲面を 3次元双曲型空間で考えてみよう。

$$f: M^2 \rightarrow \mathbb{H}^3$$

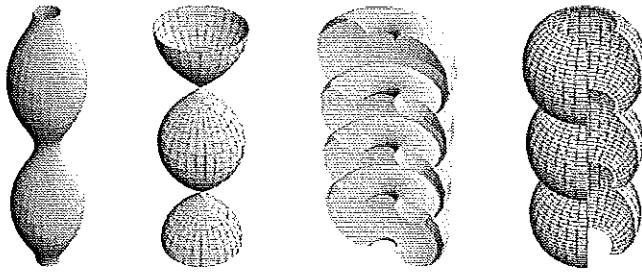


図 4.2: Delauney 曲面とその平行曲面

をはめ込みとし,  $f$  には単位法線ベクトル場  $\nu$  が大域的に存在しているものと仮定しよう. 第 2 章で既に述べたように  $\mathbb{H}^3$  は 4 次元時空  $L^4$  の二葉双曲面の上半分として実現され,  $\mathbb{H}^3 \subset L^4$  と見なすことができる. つまり

$$\mathbb{H}^3 = \left\{ (t, x_1, x_2, x_3) \in L^4; (x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 - t^2 = -1, t > 0 \right\}$$

で与えられる. 一方,  $L^4$  において, 一葉双曲面

$$S_1^3 = \left\{ (t, x_1, x_2, x_3) \in L^4; (x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 - t^2 = 1 \right\}$$

は 3 次元 de Sitter 時空とよばれ, Lorentz 計量をもつが, この計量に関して定曲率 1 の時空を与える. さて,  $\mathbb{H}^3$  の曲面  $f$  の単位法線ベクトル場  $\nu$  は  $L^4$  において始点を原点に平行移動することができ,

$$\nu: M^2 \rightarrow S_1^3$$

なる写像を誘導する. つまり  $f$  がはめ込みであるとする, 単位法線ベクトル場  $\nu$  は  $S_1^3$  の曲面と見なすことができる. 但し,  $\nu$  は一般に特異点をもつ可能性がある. このとき, 以下のことが知られている (詳しくは文献 [11], [16] および [17] をみよ.).

- $\mathbb{H}^3$  の CMC-1 曲面の単位法線ベクトル  $\nu$  は 3 次元 de Sitter 時空  $S_1^3$  への写像と考えると, それがはめ込みを与える点で, 2 つの主曲率の逆数の和の平均が 1 になる.
- $\mathbb{H}^3$  の平坦曲面の単位法線ベクトル  $\nu$  は  $S_1^3$  への写像と考えると, それがはめ込みを与える点で, 平坦つまり Gauss 曲率が 0 となる.
- $\mathbb{H}^3$  の曲面で, 「2 つの主曲率の逆数の和の平均が 1 になるもの」を考えると, その単位法線ベクトル  $\nu$  は,  $S_1^3$  への写像と考えると, それがはめ込みを与える点で, 平均曲率が 1 で一定の曲面となる.

このように 3 次元双曲型空間  $\mathbb{H}^3$  の曲面は, その単位法線ベクトルを通じて自然に 3 次元 de Sitter 時空  $S_1^3$  の曲面と密接に関係している.

### 4.3 Bryant 型の線形 Weingarten 曲面

前節に引き続き,  $f: M^2 \rightarrow \mathbb{H}^3$  をはめ込みとし,  $f$  には単位法線ベクトル場  $\nu$  が大域的に存在しているものと仮定しよう. 各実数  $t \in \mathbb{R}$  に対して,  $f$  の像を波面と思ったとき,  $t$  時間後の波の時間発展として, 以下のような  $f$  の平行曲面  $f_t: M^2 \rightarrow \mathbb{H}^3$  が定義される.

$$f_t = (\cosh t)f + (\sinh t)\nu, \quad \nu_t = (\cosh t)\nu + (\sinh t)f$$

ここで,  $\nu_t: M^2 \rightarrow S^2_1$  は  $f_t$  の単位法線ベクトル場を与える.

定義. はめ込み  $f: M^2 \rightarrow \mathbb{H}^3$  の平均曲率を  $H$  とし, Gauss 曲率を  $K$  とする. もし同時に 0 にならない実数  $a, b$  が存在して,

$$a(H - 1) + bK = 0$$

が  $M^2$  上で成り立つならば  $f$  をホロ球面型の線形 Weingarten 曲面 (horospherical linear Weingarten surface) と呼ぶ. さらに,  $b/a \neq -1/2$  のとき  $f$  は Bryant 型の線形 Weingarten 曲面 (linear Weingarten surface of Bryant type) と呼ぶ.

平均曲率  $H$  には正負の不定性があるが, 上の定義は,  $H, -H$  のどちらかを選ぶことで  $a(H - 1) + bK = 0$  が成り立つときに, ホロ球面型の線形 Weingarten 曲面と呼ぶ, ということを意味している.

$K \neq 0$  のとき,  $H, K$  が上の線形関係をみたせば,  $-H, K$  はそのような関係をみたさず, この意味で, この種の (はめ込まれた) 曲面は自動的に向き付け可能になることが知られている. また,  $b/a = -1/2$  の場合のホロ球面型の線形 Weingarten 曲面は Bryant 型の表現公式を持たず, 例外的な扱いが必要である. これに関しては文献 [14] と [31] を参照されたい.

このとき, 次のことが成り立つことが知られている.

事実 4.2.  $f: M^2 \rightarrow \mathbb{H}^3$  を, Bryant 型の線形 Weingarten 曲面とすると, 次のことが成り立つ.

- $K = 0$  (つまり  $a = 0$ ) ならば,  $f$  の平行曲面は (その正則点で) すべて平坦になる (cf. [10], [20]).
- $a \neq 0$  かつ  $b/a > -1/2$  ならば, 実数  $t$  が存在し,  $f_t$  の特異点は孤立特異点のみとなり, それ以外の点で  $f_t$  は  $\mathbb{H}^3$  の平均曲率 1 の曲面となる (cf. [17]).
- $a \neq 0$  かつ  $b/a < -1/2$  ならば, 実数  $t$  が存在し,  $\nu_t$  は孤立特異点のみとなり, それ以外の点で  $\nu_t$  は  $S^2_1$  の平均曲率 1 の曲面となる (cf. [17]).



特に、次の系が成り立つ。

系 4.3.  $\mathbb{H}^3$  の CMC-1 曲面の平行曲面は、(その特異点以外の点で) Bryant 型の線形 Weingarten 曲面を定め、 $a \neq 0$  かつ  $b/a < -1/2$  を満たす。

以上により、3つの曲面のクラス

- $\mathbb{H}^3$  の CMC-1 曲面
- $\mathbb{H}^3$  の 平坦曲面
- $S_1^3$  の CMC-1 曲面

が、線形 Weingarten 曲面の「家」の中にまるで兄弟のように一緒に暮らしていることが理解できるだろう。以下、 $\mathbb{H}^3$  の 平坦曲面と  $S_1^3$  の CMC-1 曲面の特徴について少し解説しよう。

## 4.4 $\mathbb{H}^3$ の平坦な曲面

$\mathbb{H}^3$  の CMC-1 はめ込みは  $SL(2, \mathbb{C})$  の null 正則はめ込みの  $\mathbb{H}^3 = SL(2, \mathbb{C})/SU(2)$  への射影として得られるが、 $\mathbb{H}^3$  の平坦なはめ込みは  $SL(2, \mathbb{C})$  の正則な Legendre はめ込みの  $\mathbb{H}^3$  への射影として得られる。そこでまず、Legendre はめ込みを定義する。

$$\mathbb{C}^4 \ni (A, B, C, D) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$$

という同一視によって、 $(A, B, C, D)$  を 2次の複素正方行列の全体  $M_2(\mathbb{C})$  上の複素座標系と見なすことができる。そこで  $M_2(\mathbb{C})$  上の 1次微分形式

$$DdA - BdC$$

を  $SL(2, \mathbb{C})$  へ制限した正則 1次微分形式を  $\eta$  で表すと

$$\eta \wedge d\eta$$

は  $SL(2, \mathbb{C})$  上の至る所消えない 3次の正則微分形式となる。つまり  $\eta$  は  $SL(2, \mathbb{C})$  上の複素接触 1次微分形式を与える。いま、Riemann 面  $M^2$  から  $SL(2, \mathbb{C})$  への正則はめ込み  $F: M^2 \rightarrow SL(2, \mathbb{C})$  が Legendre であるとは、 $\eta$  の  $F$  による引き戻しが恒等的に消えるとき、つまり  $F^*\eta = 0$  が成り立つときをいう。簡単な計算で次の命題が確かめられる。

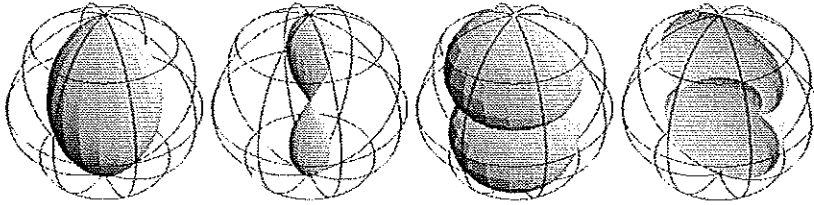


図 4.3: ホロ球以外の平坦な回転面 (最右端は3番目の切り口)。

命題 4.4. 正則なはめ込み  $F: M^2 \rightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$  に対して  $F$  が Legendre であることと  $F^{-1}dF$  の対角成分が 0 であることは同値である。

この命題により

$$F^{-1}dF = \begin{pmatrix} 0 & \theta \\ \omega & 0 \end{pmatrix}$$

と書くことができる。ここに  $\omega, \theta$  は Riemann 面  $M^2$  上の正則 1 次微分形式である。次が知られている。

事実 4.5. (Gálvez, Martínez and Milán [10]) 正則な Legendre はめ込み  $F: M^2 \rightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$  の  $\mathbb{H}^3$  への射影は  $|\theta/\omega| = 1$  となる点を除いて、平坦なはめ込みを定める。逆に  $\mathbb{H}^3$  のはめ込まれた平坦な曲面は局所的にはすべて正則な Legendre はめ込みの射影として得られる。

ここで、Riemann 面の複素構造は、対応する平坦な曲面の第一基本形式ではなく第二基本形式を Kähler 計量とするような複素構造として特徴づけられる。 $|\theta/\omega| = 1$  となる点は、平坦な曲面の特異点であり、この種の曲面を解析する上で避けることができない重要な研究対象である。実際、図 4.3 は、 $\mathbb{H}^3$  の平坦な回転面の例であるが、中央の砂時計形の曲面には円錐的特異点が、右の雪ダルマ形の曲面にはカスプ辺とよばれる特異点が現れている。

$\mathbb{H}^3$  の平坦な曲面に対しても CMC-1 曲面とよく似た理論が構築できて、曲面の特異点の解析、あるいは、ある種の特異点を許す完備な曲面の族について、CMC-1 曲面のときと同様に Osserman 型の不等式が示すことができ、さらに、等号条件はエンドが自己交叉しないことと同値であることが示せる。詳しくは文献 [20] と [21] を参照されたい。

## 4.5 $S_1^3$ の平均曲率 1 の曲面

3次元双曲型空間は,

$$\mathbb{H}^3 = \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})/\mathrm{SU}(2)$$

と表されて,  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$  の null 正則はめ込みの射影として CMC-1 曲面が得られた. 同じく 3次元 de Sitter 時空は,

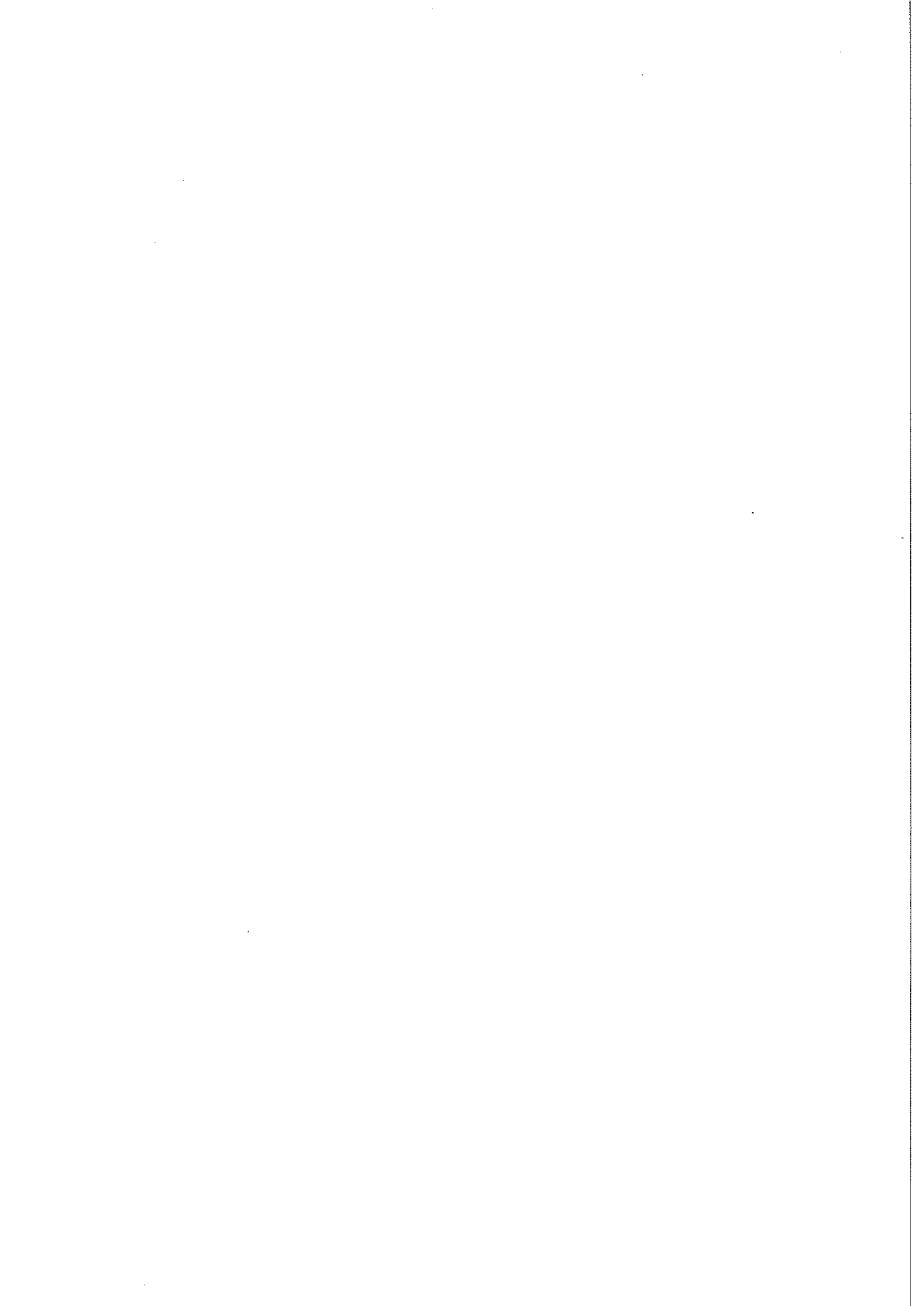
$$S_1^3 = \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})/\mathrm{SU}(1, 1)$$

と表されて<sup>1</sup>,  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$  の null 正則はめ込みの射影として  $S_1^3$  の CMC-1 曲面が得られることが知られている (相山-芥川 [1]). 但し, この場合も  $\mathbb{H}^3$  の平坦な曲面と同様に, 射影として得られた曲面には特異点が生じる可能性がある. しかし, この場合にも,  $\mathbb{H}^3$  の CMC-1 曲面とよく似た理論が構築できて, 曲面の特異点の解析, あるいは, ある種の特異点を許す完備な曲面の族について Osserman 型の不等式が示すことができ, さらに等号条件はエンドが自己交叉しないことと同値であることが示せる. 詳しくは, 2つの文献 [7] と [8] を参照されたい. 特に  $S_1^3$  の CMC-1 曲面についてはまだ未解明の問題<sup>2</sup>が山積しており, 将来の研究対象として有望である.

---

<sup>1</sup>Lie 群  $\mathrm{SU}(1, 1)$  は  $ae_3a^* = e_3$  を満たす 2 次の正方行列  $a$  の集まりである. 但し  $e_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  とする.

<sup>2</sup>実際, 文献 [8] に記されているように, 許容的な特異点を許す場合に, CMC-1 曲面でコンパクトなものが存在するかどうかは不明である.



## 付録：Schwarz 微分とその基本性質

$D$  を  $\mathbb{C}$  の領域とし  $f(z), g(z)$  を  $D$  上の定値でない 2 つの正則関数とする。このとき、両者の間に Schwarz 微分を以下の式で定義する。

$$\{f, g\} = \frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2} \left( \frac{f''}{f'} \right)^2 = \left( \frac{f''}{f'} \right)' - \frac{1}{2} \left( \frac{f''}{f'} \right)^2$$

ここでプライムは  $d/dg$  を表す、つまり

$$f' := df/dg, \quad f'' := df'/dg, \quad f''' := df''/dg$$

とする。特に  $g = z$  のとき、 $\{f, z\}$  は (2.5.8) で定義した Schwarz 微分に他ならない。Schwarz 微分は、非調和比の無限小版として導入され、非調和比と同じく「Möbius 変換で不変である」という性質を有する。以下の公式は基本的である。

$$\{e^z, z\} = -\frac{1}{2}, \quad \{z^\mu, z\} = \frac{1-\mu^2}{2z^2}, \quad \{\log z, z\} = \frac{1}{2z^2},$$

但し  $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  とする。さらに以下の公式も、定義から直接計算で導くことができる。

- (1)  $\left\{ \frac{af+b}{cf+d}, z \right\} = \{f, z\}$  が成り立つ。但し  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  ( $ad - bc \neq 0$ ) とする。
- (2)  $f, g, h$  を共に  $D$  上の正則関数とすると  $\{f, g\} = (dh/dg)^2 (\{f, h\} - \{g, h\})$  が成り立つ。
- (3) 特に  $h = f$  とすると  $\{f, g\} = -(df/dg)^2 \{g, f\}$  が成り立つ。
- (4) 特に (2) で  $g = (af+b)/(cf+d)$  かつ  $h = z$  とおくと、(1) より、

$$\left\{ \frac{af+b}{cf+d}, g \right\} = \{f, g\}$$

が成り立つ。但し  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  ( $ad - bc \neq 0$ ) とする。

まず、上記主張 (4) の逆が成り立つ。

命題 A.1  $\{f, z\} = \{g, z\}$  ならば  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  ( $ad - bc \neq 0$ ) が存在して、 $f = \frac{ag+b}{cg+d}$  と書ける。

(証明) 仮定より

$$\{f, g\} = (dz/dg)^2(\{f, z\} - \{g, z\}) = 0$$

である.  $f, g$  共に解析関数であるから, ある点  $z_0 \in D$  の近傍で示せばよい. すると  $dg/dz$  の零点は孤立しているので,  $dg/dz$  が  $z_0$  で消えないとしてよい. すると逆関数定理により  $g$  自体が  $z = z_0$  付近の複素座標近傍であったとして一般性を失わない. よって, 以下  $g = z$  として議論する.  $\varphi = f''/f'$  とおくと  $\varphi' - (1/2)\varphi^2 = 0$  より

$$\left(\frac{1}{\varphi}\right)' = -\frac{\varphi'}{\varphi^2} = -\frac{1}{2}$$

であるから  $c_1 \in \mathbb{C}$  が存在し,  $\frac{1}{\varphi} = -\left(\frac{z}{2} + c_1\right)$  と書ける. つまり

$$(\log f')' = \frac{f''}{f'} = -\frac{2}{z + 2c_1} = -2(\log(z + 2c_1))'$$

であるから  $c_2 \in \mathbb{C}$  が存在し,  $f' = \frac{c_2}{(z + 2c_1)^2}$  となり  $c_3 \in \mathbb{C}$  が存在し,

$$f = \frac{-c_2}{z + 2c_1} + c_3$$

となるので, これで示された. □

命題 A.2  $g(z)$  を  $D$  上の正則関数とし, 線形常微分方程式

$$X'' + \frac{g}{2}X = 0$$

の一次独立な解  $u(z), v(z)$  が ( $D$  上の正則関数として) 与えられているとき,

$$f(z) = u(z)/v(z)$$

とおくと  $\{f, z\} = g$  が成り立つ.

(証明) 実際  $d/dz$  をプライムで表すと

$$(uv' - v'u)' = uv'' - vu'' = \frac{-g}{2}(uv - vu) = 0$$

であるから  $c \in \mathbb{C}$  が存在し,  $uv' - v'u = c$  である. したがって,

$$f' = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2} = \frac{c}{v^2}$$

であり  $\frac{f''}{f'} = -2\frac{v'}{v}$  であるから

$$\{f, z\} = -2\frac{v''}{v} = g$$

となって示された. □

## 参考文献

- [1] R. Aiyama and K. Akutagawa, *Kenmotsu-Bryant type representation formulas for constant mean curvature surfaces in  $H^3(-c^2)$  and  $S_1^3(c^2)$* , Ann. Global Anal. Geom. **17** (1998), 49–75.
- [2] R. Bryant, *Surfaces of mean curvature one in hyperbolic space*, Astérisque **154–155** (1987), 321–347.
- [3] A. I. Bobenko, T. V. Pavlyukevich and B. A. Springborn, *Hyperbolic constant mean curvature one surfaces: spinor representation and trinoids in hypergeometric functions*, Math. Z. **245** (2003), 63–91.
- [4] M. J. Cowen and P. A. Griffiths, *Holomorphic curves and metrics of negative curvature*, J. Analyse Math., **29** (1976), 93–153.
- [5] P. Collin, L. Hauswirth and H. Rosenberg, *The geometry of finite topology Bryant surfaces*, Ann. of Math. **153** (2001), 623–659
- [6] H. M. Farkas and I. Kra, *Rieman Surfaces*, (Graduate Text in Math. 71) Springer-Verlag New York, Inc. (1991).
- [7] S. Fujimori, *Spacelike CMC 1 surfaces with elliptic ends in de Sitter 3-Space*, Hokkaido Math. J., **35** (2006), 289–320.
- [8] S. Fujimori, W. Rossman, M. Umehara, K. Yamada and S.-D. Yang, *Spacelike mean curvature one surfaces in de Sitter 3-space*, to appear in Communications in Analysis and Geometry (<http://arxiv.org/abs/0706.0973>).
- [9] H. Fujimoto, *On the number of exceptional values of the Gauss map of minimal surfaces*, J. Math. Soc. Japan, **40** (1988), 235 – 247.
- [10] J. A. Gálvez, A. Martínez and F. Milán, *Flat surfaces in hyperbolic 3-space*, Math. Ann. **316** (2000), 419–435.

- [11] J. A. Gálvez, A. Martínez and F. Milán, *Complete linear Weingarten surfaces of Bryant type. A Plateau problem at infinity*, Trans. Amer. Math. Soc. **356** (2004) 3405–3428.
- [12] A. Huber, *On subharmonic functions and differential geometry in the large*, Comment. Math. Helv., **32** (1957), 13–72.
- [13] F. Martin, *Complete nonorientable minimal surfaces in  $\mathbb{R}^3$* , Global theory of minimal surfaces, Clay Math. Proc., 2, Amer. Math. Soc., Providence, RI (2005), 371–380.
- [14] S. Izumiya, K. Saji, and M. Takahashi, *Horospherical flat surfaces in Hyperbolic 3-space*, preprint.
- [15] 小林昭七, 曲線と曲面の微分幾何, 裳華房 (1995)
- [16] M. Kokubu, *Surfaces and fronts with harmonic-mean curvature one in hyperbolic three-space*, to appear in Tokyo J. Math., math.DG/0504124.
- [17] M. Kokubu and M. Umehara, *Orientability of linear Weingarten surfaces, spacelike CMC-1 surfaces and maximal surfaces*, preprint.
- [18] M. Kokubu, M. Umehara, and K. Yamada, *Minimal surfaces that attain equality in the Chern-Osserman inequality*, Contemporary Mathematics 308 Differential Geometry and Integrable systems, (M. Guest, R. Miyaoka, Y. Ohnita ed.) American Mathematical Society (2002) 223-228.
- [19] M. Kokubu, M. Umehara and K. Yamada, *An elementary proof of Small's formula for null curves in  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$  and an analogue for legendrian curves in  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$* , Osaka J. Math. **40** (2003), 697–715.
- [20] M. Kokubu, M. Umehara and K. Yamada, *Flat fronts in hyperbolic 3-space*, Pacific J. Math. **216** (2004), 149–175.
- [21] M. Kokubu, W. Rossman, M. Umehara and K. Yamada, *Flat fronts in hyperbolic 3-space and their caustics*, J. Math. Soc. Japan **59** (2007), 265–299.
- [22] H. B. Lawson Jr, *Lectures on Minimal Submanifolds (Vol.1)*, Publish or Perish Inc. (1980).



- [23] R. Osserman, *A survey of minimal surfaces, second edition*, Dover Publications Inc. (1986).
- [24] W. Rossman and K. Sato, *Constant mean curvature surfaces with two ends in hyperbolic space*, Experiment. Math. **7** (1998), 101–119.
- [25] W. Rossman, M. Umehara and K. Yamada *Irreducible constant mean curvature 1 surfaces in hyperbolic space with positive genus*, Tohoku Math. J. **49** (1997), 449–484.
- [26] W. Rossman, M. Umehara, K. Yamada, *Mean curvature 1 surfaces in hyperbolic 3-space with low total curvature I*, Hiroshima Math. J. **34** (2004), 21–56.
- [27] W. Rossman, M. Umehara and K. Yamada, *Constructing of mean curvature 1 surfaces in  $\mathbb{H}^3$  with irregular ends*, Clay Math. Proc., 2, Amer. Math. Soc., Providence RI, 2005.
- [28] R. Schoen, *Uniqueness, Symmetry, and Embeddedness of Minimal Surfaces*, J. Differential Geom. **18** (1983), 791–809.
- [29] A. J. Small, *Surfaces of Constant Mean Curvature 1 in  $\mathbb{H}^3$  and Algebraic Curves on a Quadric*, Proc. Amer. Math. Soc. **122** (1994), 1211–1220.
- [30] M. Troyanov, *Metric of constant curvature on a sphere with two conical singularities*, in “Differential Geometry”, Lect. Notes in Math. vol. 1410, Springer-Verlag (1989), 296–306.
- [31] C. Takizawa and K. Tsukada, *Horocyclic surfaces in Hyperbolic 3-space*, preprint.
- [32] 梅原雅顕, 「特異点をもつ曲線と曲面の幾何」, 慶応大学の講義ノートとして出版予定.
- [33] M. Umehara and K. Yamada, *A parametrization of the Weierstrass formulae and perturbation of some complete minimal surfaces of  $\mathbb{R}^3$  into hyperbolic 3-space*, J. Reine Angew. Math. **432** (1992), 93–116.
- [34] M. Umehara and K. Yamada: *Complete surfaces of constant mean curvature one in the hyperbolic 3-space*, Ann. of Math. **137** (1993), 611–638.
- [35] 梅原雅顕・山田光太郎, 双曲型空間の平均曲率 1 をもつ曲面の幾何, 数学 47 卷 (1995), 145–157.

- [36] M. Umehara and K. Yamada, *Surfaces of constant mean curvature  $c$  in  $H^3(-c^2)$  with prescribed hyperbolic Gauss map*, Math. Ann. **304** (1996), 203–224.
- [37] M. Umehara and K. Yamada, *A duality on CMC-1 surfaces in hyperbolic space and a hyperbolic analogue of the Osserman inequality*, Tsukuba J. Math. **21** (1997), 229–237.
- [38] M. Umehara and K. Yamada, *Metrics of constant curvature 1 with three conical singularities on the 2-sphere*, Illinois J. Math. **44**(2000), 72–94.
- [39] M. Umehara and K. Yamada, *Maximal surfaces with singularities in Minkowski space*, Hokkaido Math. J. **35** (2006), 13–40.
- [40] 梅原雅顯・山田光太郎, *曲線と曲面, 微分幾何的アプローチ*, 裳華房 (2002)
- [41] Z. Yu, *Value distribution of hyperbolic Gauss maps*, Proc. Amer. Math. Soc. **125** (1997), 2997–3001.
- [42] Z. Yu, *Surfaces of constant mean curvature one in hyperbolic three-space with irregular ends*, Tohoku Math. J. **53** (2001), 305–318.

名古屋大学数学レクチャーノート

No. 1	Selberg 理論入門 久保田富雄	1966 年	50 頁
No. 2	Prolongations of Geometric Structures Akihiko Morimoto	1969 年	193 頁
No. 3	Complex White Noise and Infinite Dimensional Unitary Group Takeyuki Hida	1971 年	53 頁
No. 4	On Some Questions of the Theory of Probability Measures on Banach Spaces N. Vakhania	1973 年	17 頁
No. 5	The Estimation of the Rate of Convergence in the Central Limit Theorem V.V. Sazonov	1975 年	38 頁
No. 6	2階偏微分方程式の幾何学的理論 — Darboux-Goursat 理論の現代的入門 — 土屋昭博 (青本和彦記)	1980 年	202 頁
No. 7	Finely Harmonic Functions B. Fuglede	1983 年	124 頁
No. 8	数の幾何学と類体論 (Geometry of numbers and class field theory) 久保田富雄	1985 年	41 頁
No. 9	Gauge 場についてのある考察 —非 Abel Poincaré Lemma— 浅田 明	1985 年	29 頁
No.10	古典 2 次形式に関する考察 久保田富雄	1992 年	37 頁
No.11	Infinite Dimensional Stochastic Analysis Hui-Hsiung Kuo	1993 年	39 頁

## 多元数理講義録

Vol. 1	Dedekind 和に関連した話題 — $L$ -関数の特殊値との関係を中心に— 伊藤 博	1998 年	24 頁
Vol. 2	代数的確率論入門 —独立性の諸概念— アカルディ・ルイジ、尾畑伸明	1999 年	193 頁
Vol. 3	Singular Hermitian Metrics and Algebraic Geometry 辻 元 (Appendix —大沢健夫)	2001 年	158 頁
Vol. 4	多変数複素解析三講 多重複素 Green 関数から導入される擬計量 東川和夫 多様体上の Levi 問題—総説と最近の結果— 大沢健夫 $\partial$ -Neumann 問題 大沢健夫	2002 年	54 頁
Vol. 5	Vortices and Seiberg-Witten Equations (based on lectures at Nagoya University) Armen G. Sergeev (notes taken by Yuuji Tanaka)	2002 年	87 頁
Vol. 6	代数幾何学勉強会講義録	2006 年	84 頁
Vol. 7	Kähler Geometry of Loop Spaces	2009 年	226 頁
Vol. 8	Singularity Seminar 2008 organized by Yukari Ito and Osamu Iyama	2009 年	85 頁
Vol. 9	3次元双曲型空間の平均曲率 1 の曲面 梅原雅顕 (川上 裕 記)	2009 年	74 頁

(以下続刊)

Lecture Notes in Mathematics, Nagoya University

No. 1	Introduction to Selberg Theory (in Japanese) T. Kubota	1966	50 pages
No. 2	Prolongations of Geometric Structures A. Morimoto	1969	193 pages
No. 3	Complex White Noise and Infinite Dimensional Unitary Group T. Hida	1971	53 pages
No. 4	On Some Questions of the Theory of Probability Measures on Banach Spaces N. Vakhania	1973	17 pages
No. 5	The Estimation of the Rate of Convergence in the Central Limit Theorem V.V. Sazonov	1975	38 pages
No. 6	Geometric Theory on Partial Differential Equations of Second Order (in Japanese) — A New Introduction to Darboux-Goursat Theory — A. Tsuchiya (Notes by K. Aomoto)	1980	202 pages
No. 7	Finely Harmonic Functions B. Fuglede	1983	124 pages
No. 8	Geometry of Numbers and Class Field Theory (in Japanese) T. Kubota	1985	41 pages
No. 9	An Essay on Gauge Field (in Japanese) —Non-Abelian Poincaré Lemma — A. Asada	1985	29 pages
No.10	An Essay on Quadratic Forms of Classical Type (in Japanese) T. Kubota	1992	37 pages
No.11	Infinite Dimensional Stochastic Analysis Hui-Hsiung Kuo	1993	39 pages

Graduate School Lectures in Mathematics, Nagoya University

Vol. 1	Topics on Dedekind Sums (in Japanese) —Relations to Special Values of $L$ -functions— H. Ito	1998	24 pages
Vol. 2	Introduction to Algebraic Probability Theory (in Japanese) —Concepts of Independence— Luigi Accardi and Nobuaki Obata	1999	193 pages
Vol. 3	Singular Hermitian Metrics and Algebraic Geometry Hajimi Tsuji (Appendix—Takeo Ohsawa)	2001	158 pages
Vol. 4	Three Lectures on Several Complex Variables (in Japanese) A Pseudometric Induced by Pluricomplex Green Function Kazuo Azukawa Levi Problem on Manifolds —A Survey and Recent Results— Takeo Ohsawa $\bar{\partial}$ -Neumann Problem Takeo Ohsawa	2002	54 pages
Vol. 5	Vortices and Seiberg-Witten Equations (based on lectures at Nagoya University) Armen G. Sergeev (notes taken by Yuuji Tanaka)	2002	87 pages
Vol. 6	Lectures on Algebraic Geometry	2006	84 pages
Vol. 7	Kähler Geometry of Loop Spaces Armen G. Sergeev	2009	226 pages
Vol. 8	Singularity Seminar 2008 organized by Yukari Ito and Osamu Iyama	2009	85 pages
Vol. 9	Surfaces of constant mean curvature one in hyperbolic 3-space Masaaki Umehara (notes taken by Yu Kawakami)	2009	74 pages

(to be continued)