# $\overline{\partial}$-Neumann 問題

## 序

$\overline{\partial}$-Neumann 問題は楕円型境界値問題の一種であり，$\overline{\partial}$ 方程式の $L^2$ 標準解の存在とその滑らかさを知ろうというものである．$\overline{\partial}$ 方程式 $\overline{\partial}f = u$ の $L^2$ 標準解は，複素 Laplace 作用素の逆作用素である ($\overline{\partial}$-)Neumann 作用素 $N$ を用いて $\overline{\partial}^* Nu$ と書ける．ただし，$\overline{\partial}^*$ は $\overline{\partial}$ 作用素の $L^2$ 共役を表す．よって $\overline{\partial}$-Neumann 問題は次の二つの部分に分けられる．

i) どのような領域上で Neumann 作用素が存在するか．

ii) Neumann 作用素は滑らかさ (=可微分性) をどれだけ上げるか．

J. J. Kohn[12, 13] は強擬凸領域においてこれらを解決した．以下では話を主に $\mathbb{C}^n$ の有界擬凸領域の場合に限り，i) については $\overline{\partial}$ 方程式論の解説とともに，ii) は主に Fu-Straube[9] にそいながら Neumann 作用素のコンパクト性に関する最近の結果を紹介する．

## 準備 (その 1) $\overline{\partial}$ 作用素とその $L^2$ 共役

$D$ を $\mathbb{C}^n$ の領域とする．開球 $\mathbb{B}^n := \{z \in \mathbb{C}^n \mid \|z\| < 1\}$ や多重円板 $\Delta^n := \{z \in \mathbb{C}^n \mid |z| := \max|z_i| < 1\}$ などを念頭に置けばよいが，とくにことわらなければ $\mathbb{B}^n \backslash \{0\}$ のようなものも含めている．

$C^\infty(D)(C^\infty(\overline{D}))$ で $D$ 上の ($\overline{D}$ 上の) $C^\infty$ 級複素数値関数の集合を表す．台がコンパクトな $C^\infty(D)$ の元全体を $C_0^\infty(D)$ で表す．$C_0^\infty(\overline{D})$ も同様．さらに非負整数 $p,q$ に対し

$$C^\infty_{(p,q)}(D) := \{\sum_{I,J} f_{IJ} dz_I \wedge d\bar{z}_J \mid f_{IJ} \in C^\infty(D)\}$$

$$C^\infty_{(p,q),0}(D) := \{f \in C^{p,q}(D) \mid \mathrm{supp} f \Subset D\}$$

とおく．$C^\infty_{(p,q)}(\overline{D})$，$C^\infty_{(p,q),0}(\overline{D})$ の定義も同様である．ただし $I,J$ はそれぞれ $(1,2,\ldots,n)$ 内の長さ $p,q$ の増大列を動く．

$C^\infty_{(p,q),0}(D)$ と $C^\infty_{(p,q),0}(\overline{D})$ は積分による内積ベクトル空間の構造を持っている．すなわち $f,g \in C^\infty_{(p,q),0}(\overline{D})$ に対して内積が

$$(f,g) = \int_D \sum_{I,J} f_{IJ} \bar{g}_{IJ} d\lambda$$

により定義される．ただし $d\lambda$ は $\mathbb{C}^n$ の通常の体積要素 (Lebesgue 測度) を表す．この内積に関するノルムを $\|\cdot\|$ で表す．すなわち

$$\|f\|^2 := (f,f) = \int_D \sum_{I,J} |f_{IJ}|^2 d\lambda.$$

このノルムによる $C^\infty_{(p,q),0}(\overline{D})$ の完備化を $L^2_{(p,q)}(D)$ で表す．$L^2_{(p,q)}(D)$ は Lebesgue の意味で $D$ 上 2 乗可積分な関数を係数にもつ $(p,q)$ 型微分形式の集合をみなすこともできる．$L^2_{(0,0)}(D)$ を単に $L^2(D)$ と書く．

$$L^2_{(p,q)}(D) = \left\{ \sum_{I,J} f_{IJ} dz_I \wedge d\bar{z}_J \,\middle|\, f_{IJ} \in L^2(D) \right\}$$

である．

定義．$D$ 上の $L^2\overline{\partial}$ 複体 とは

$$L^2(D) \xrightarrow{\overline{\partial}} L^2_{(0,1)}(D) \xrightarrow{\overline{\partial}} L^2_{(0,2)}(D) \xrightarrow{\overline{\partial}} \dots \xrightarrow{\overline{\partial}} L^2_{(0,n)}(D) \xrightarrow{\overline{\partial}} 0$$

をいう．ただし $\overline{\partial}$ は次式で定義する．

$$\overline{\partial}\left(\sum_J f_J d\overline{z}_J\right) = \sum_{j=1}^n \sum_J \frac{\partial f_J}{\partial \overline{z}_j} d\overline{z}_j \wedge d\overline{z}_J$$

ここで右辺は超関数の意味で定義されるが，$d\overline{z}_K$ $(|K| = |J|+1)$ の係数

$$\sum_{j,J} \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} K \\ j\,J \end{pmatrix} \frac{\partial f_J}{\partial \overline{z}_j}$$

がすべて $L^2(D)$ に属するような $L^2_{(0,q)}(D)$ の元 $\sum f_J d\overline{z}_J$ 全体の集合を $\overline{\partial}$ の定義域と定める．

$\overline{\partial}$ は Hilbert 空間 $L^2_{(0,q)}(D)$ から Hilbert 空間$L^2_{(0,q+1)}(D)$ への 稠密な定義域($\mathscr{D}om\overline{\partial}$ で表す) をもつ 閉作用素 である．

従って $\overline{\partial}$ は $L^2$ 共役 (随伴作用素とも言う) を持つ．すなわち

$L^2_{(0,q+1)}(D)$ から $L^2_{(0,q)}(D)$ への閉作用素 $\vartheta$ で

$$(\overline{\partial}f, g) = (f, \vartheta g) \quad (\forall f \in \mathscr{D}om\overline{\partial}, \forall g \in \mathscr{D}om\vartheta)$$

をみたすもののうち 最大の定義域をもつ ものが存在する．

$\overline{\partial}$ の $L^2$ 共役を $\overline{\partial}^*$ で表す．$g = \sum g_K d\overline{z}_K \in \mathscr{D}om\overline{\partial}^*$ に対し，$\overline{\partial}^* g$ における $d\overline{z}_j$ の係数は

$$-\sum_K \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} K \\ j\,J \end{pmatrix} \frac{\partial g_K}{\partial z_j}$$

となる．$\overline{\partial}$ の場合と違い，これらがすべて $L^2(D)$ に属するからといって $g$ が $\mathscr{D}om\overline{\partial}^*$ に属するとは限らない．$g$ が $\mathscr{D}om\overline{\partial}^*$ に属するためには '境界条件' が満たされていなければならない．具体的には，

$$\partial D = \rho^{-1}(0) \quad (\rho \in C^1(\mathbb{C}^n)_{\mathbb{R}}, d\rho|_{\partial D} \neq 0)$$

なる場合，すなわち $D$ の境界が $C^1$ 級の場合，

$$\mathscr{D}om\overline{\partial}^* \cap C^\infty_{(0,q),0}(\overline{D}) = \{f \in C^\infty_{(0,q),0}(\overline{D}) | \bigstar f|_{\partial D} = 0\}$$

となる．ただし

$$\bigstar\left(\sum_J f_J d\overline{z}_J\right) := \sum_{J^c} f_J d\overline{z}_1 \wedge \cdots \wedge d\overline{z}_n \wedge dz_{J^c} \quad (J^c \text{ は増大列で } \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} J\,J^c \\ 12\dots n \end{pmatrix} = 1 \text{ をみたすもの})$$

とおく．

## 準備 (その 2) 複素 Laplace 作用素とその自己共役性

上に定義した $\overline{\partial}$ 作用素は，像 (image) $\mathrm{Im}\overline{\partial}$ が核 (kernel) $\mathrm{Ker}\overline{\partial}$ に含まれるという性質をもっている．つまり $\overline{\partial}\circ\overline{\partial}=0$ が成立する．$\overline{\partial}$ のこの性質から複素 Laplace 作用素 $\square=\overline{\partial}\overline{\partial}^*+\overline{\partial}^*\overline{\partial}$ の自己共役性がしたがう．この議論は $\overline{\partial}$ の定義式を陽に用いない抽象論により実行でき，容易かつ有用であるからその要点を紹介しよう．

**定義．** $\mathscr{D}$ を $\mathbb{C}$ 上の内積ベクトル空間，$\langle\cdot,\cdot\rangle$ をその内積とする．線型写像 $T_0:\mathscr{D}\longrightarrow\mathscr{D}$ に対し，線型写像 $T_0':\mathscr{D}\longrightarrow\mathscr{D}$ で

$$\langle T_0f,g\rangle=\langle f,T_0'g\rangle\quad(\forall f,\forall g\in\mathscr{D})$$

をみたすものが存在するとき，$T_0$ は <u>形式的随伴作用素</u>(formal adjoint) をもつという．このとき $T_0'$ は一意的に定まり，$T_0$ の形式的随伴作用素と呼ばれる．形式的随伴作用素をもつ $\mathscr{D}$ 上の線型写像全体の集合を $\mathscr{A}(\mathscr{D})$ で表す．

$\mathscr{H}$ を $\mathscr{D}$ の完備化とし，$\mathscr{C}(\mathscr{H})$ を $\mathscr{A}(\mathscr{D})$ の元の $\mathscr{H}$ への閉拡張全体の集合とする．すなわち $T\in\mathscr{C}(\mathscr{H}):\Leftrightarrow$

$$\mathscr{D}\subset\mathscr{D}omT,\quad T|_{\mathscr{D}}\in\mathscr{A}(\mathscr{D})\quad \text{かつ}\quad \overline{G_T}=G_T$$

ただし，$G_T:=\{(f,Tf)|f\in\mathscr{D}omT\}(\subset\mathscr{H}\times\mathscr{H})$．$G_T$ を $T$ のグラフという．閉作用素とはグラフが閉集合であるものをいうのであった．概念としては閉作用素は連続線型写像の自然な拡張である．

**定義．** $\mathscr{C}(\mathscr{H})$ の元 $T$ が <u>自己共役</u>:$\Leftrightarrow T=T^*$

$\langle Tf,g\rangle=\langle f,Tg\rangle(\forall f,\forall g\in\mathscr{D}omT)$ のとき，$T$ は <u>対称作用素</u> であるという．$T$ が自己共役であるとは，$T$ が対称で，かつ $\mathscr{D}omT=\mathscr{D}omT^*$ が成り立つことと言ってもよい．

**補題 1.** $T_0\in\mathscr{A}(\mathscr{D}),T_0^2=0$ とし，$T\in\mathscr{C}(\mathscr{H})$ は $T_0$ の最大の閉拡張[*1] とするとき

a) $\mathscr{H}=(\mathrm{Ker}\,T\cap\mathrm{Ker}\,T^*)\oplus\overline{\mathrm{Im}\,T}\oplus\overline{\mathrm{Im}\,T^*}$

b) $T+T^*:\mathscr{D}omT\cap\mathscr{D}omT^*\longrightarrow\mathscr{H}$ は自己共役であり，

$$\begin{cases}\mathrm{Ker}(T+T^*)=\mathrm{Ker}\,T\cap\mathrm{Ker}\,T^*\\ \overline{\mathrm{Im}(T+T^*)}=\overline{\mathrm{Im}\,T}\oplus\overline{\mathrm{Im}\,T^*}\end{cases}$$

*Proof.* まず $\mathrm{Im}T$ と $\mathrm{Im}T^*$ が互いに直交することに注意しよう．実際，$f,g\in\mathscr{D}$ に対し，$\langle Tf,T^*g\rangle=\langle T_0f,T_0'g\rangle=\langle T_0^2f,g\rangle=0$ だから，$\mathscr{D}$ の稠密性と $T$ と $T^*$ の閉性から $\mathrm{Im}T\perp\mathrm{Im}T^*$ を得る．$\mathrm{Ker}\,T\cap\mathrm{Ker}\,T^*$ が $\mathrm{Im}\,T\oplus\mathrm{Im}\,T^*$ の直交補空間であることは自明．よって a) が成り立つ．b) の等式は，

$$\|(T+T^*)f\|^2=\|Tf\|^2+\|T^*f\|^2$$

による．$T+T^*$ が対称であることは明らかだから，自己共役性をいうには

$$\mathscr{D}om(T+T^*)^*=\mathscr{D}om(T+T^*)\quad(:=\mathscr{D}omT\cap\mathscr{D}omT^*)$$

を示せばよい．随伴作用素の定義を Riesz の表現定理を念頭に置いて言いかえれば

$$\mathscr{D}om(T+T^*)^*=\{f\in\mathscr{H}\,|\,\exists C_f>0,|\langle f,(T+T^*)g\rangle|\le C_f\|g\|,\forall g\in\mathscr{D}om(T+T^*)\}$$

---

[*1] $\langle\tilde{T}f,g\rangle=\langle f,T_0'g\rangle(f,g\in\mathscr{D})$ をみたす $\tilde{T}\in\mathscr{C}(\mathscr{H})$ のうち最大の定義域をもつものをいう．

となるが，同様に

$$\mathscr{D}om T^* = \{f \in \mathscr{H} \mid \exists C_f > 0, |\langle f, Tg\rangle| \le C_f\|g\|, \forall g \in \mathscr{D}om T\}$$

であり，$T = T^{**}$ なので

$$\mathscr{D}om T = \{f \in \mathscr{H} \mid \exists C_f > 0, |\langle f, T^*g\rangle| \le C_f\|g\|, \forall g \in \mathscr{D}om T^*\}.$$

よってこれらより直ちに $\mathscr{D}om T \cap \mathscr{D}om T^* \subset \mathscr{D}om(T+T^*)^*$.

$\mathscr{D}om T \cap \mathscr{D}om T^* \subset \mathscr{D}om(T+T^*)^*$ の証明　$\forall g \in \mathscr{D}om T$ に対し，これを

$$g = g' + g'',\quad g' \in \mathrm{Ker}\, T^*, g'' \in \overline{\mathrm{Im}\, T} \subset \mathrm{Ker}\, T \subset \mathscr{D}om T$$

と分解すると，$Tg'' = 0$ ゆえ $g' \in \mathscr{D}om T$．よって $g' \in \mathscr{D}om T \cap \mathscr{D}om T^*$．ゆえに $f \in \mathscr{D}om(T+T^*)^*$ ならば

$$|\langle f, Tg\rangle|^2 = |\langle f, Tg'\rangle|^2 = |\langle f, (T+T^*)g'\rangle|^2 \le C_f^2\|g'\|^2 \le C_f^2(\|g'\|^2 + \|g''\|^2) = C_f^2\|g\|^2.$$

ゆえに $f \in \mathscr{D}om T^*$．$T$ を $T^{**}$ とみなして同じ議論をたどれば $f \in \mathscr{D}om T$ を得る．　□

具体的には $L^2\bar\partial$ 複体における $\bar\partial$ を $\bigoplus_{g=0}^{n} L^2_{(0,q)}(D)$ からそれ自信への作用素とみたとき，上記の $T$ の条件を $\bar\partial$ はすべてみたすから $\bar\partial + \bar\partial^*$ は自己共役であり，これよりただちに $\bar\partial\bar\partial^* + \bar\partial^*\bar\partial$ $(= (\bar\partial + \bar\partial^*)^2)$ の自己共役性が得られる．

$\Box_q \doteq (\bar\partial\bar\partial^* + \bar\partial^*\bar\partial)|_{L^2_{(0,q)}(D)}$ とおく．$\Box_q$ は自己共役だから

$$L^2_{(0,q)}(D) = \mathrm{Ker}\,\Box_q \oplus \overline{\mathrm{Im}\,\Box_q}.$$

$\mathrm{Ker}\,\Box_0$ は $D$ 上の $L^2$ 正則関数の集合である，もし $\mathrm{Ker}\,\Box_q = \{0\}$ かつ $\overline{\mathrm{Im}\,\Box_q} = \mathrm{Im}\,\Box_q$ ならば，$N : L^2_{(0,q)}(D) \longrightarrow L^2_{(0,q)}(D)$ で $\Box_q N = \mathrm{Id}$ をみたすものが存在する．このとき $N (= N_q, q \ge 1)$ を Neumann 作用素という．

## $\bar\partial$-Neumann 問題と Levi 問題

Neumann 作用素の存在条件へと進む前に，多変数関数論における $\bar\partial$-Neumann 問題の位置づけについて述べておこう．

これからしばらく $D$ は $\mathbb{C}^n$ の有界領域であり，その境界 $\partial D$ は $C^\infty$ 級の実超曲面であるものとする．

$$\mathscr{H} = \{h \in L^2(D) \mid \bar\partial h = 0\}$$

とおく．$\mathscr{H}$ は $L^2(D)$ の閉部分空間である．

直交射影 $B : L^2(D) \longrightarrow \mathscr{H}$ を $D$ 上の Bergman 射影 という．$f \in L^2(D)$ に対し

$$Bf = f - u \Leftrightarrow u \perp \mathscr{H} \text{ かつ超関数の意味で} \bar\partial u = \bar\partial f$$

である．Bergman 射影は Levi 問題と大いに関係している．実際，$x \in \partial D$ に対し，$D$ 上の正則関数で $x$ を特異点にもつものを作るには，(i.e. $x$ をこえて解析接続できないものをつくるには) まず $x$ の十分小さな近傍 $U$ に対して，$D \cap U$ 上で正則で $x$ を特異点にもつような $D$ 上の $C^\infty$ 級関数 $f$ を $\bar\partial f \in C^\infty(\overline{D})$ であるようにとる．$L^2(D)$ の元 $u$ で $u \perp \mathscr{H}$ かつ $\bar\partial u = \bar\partial f$ をみたすものに対し，もしさらに $u \in C^\infty(\overline{D})$ ならば $f - u$ が求める関数である．

上の $u$ を $f$ で表すには

$$u = \bar\partial^* N \bar\partial f$$

とおけばよい．とくに $f \in C^\infty(D) \cap L^2(D)$ ならば

$$Bf = f - \overline{\partial}^* N \overline{\partial} f \quad \text{(Kohn の公式)}$$

となる．$\overline{\partial}^* N \overline{\partial} f$ の滑らかさはある種の二次形式の正値性から導くことができる．その二次形式は

$$Q(\varphi, \psi) := (\overline{\partial}\varphi, \overline{\partial}\psi) + (\overline{\partial}^*\varphi, \overline{\partial}^*\psi)$$

という形のもので，$\varphi$，$\psi$ は $C^\infty_{(0,1)(D)}$ の元で $\partial D$ 上で $\overline{\partial}$-*Neumann* 条件

$$\varphi \wedge \overline{\star\overline{\partial}\rho} = 0, \quad \overline{\partial}\varphi \wedge \overline{\star(\overline{\partial}\rho \wedge d\overline{z}_i)} = 0 \quad (\forall i)$$

をみたすものを動く．$Q(\varphi,\varphi)$ が $\varepsilon$ 次 Sobolev ノルム $\|\varphi\|_\varepsilon$ を押さえるかが問題だが，いわゆる楕円性条件

$$\|\varphi\|_1 \leq CQ(\varphi, \varphi)$$

は $n = 1$ と同値なのでつまらない．従って $Q$ の条件としては劣楕円性評価，即ち

$$\|\varphi\|_\varepsilon \leq CQ(\varphi, \varphi) \quad (0 < \varepsilon < 1)$$

の形のものが問題になる．実はこのとき $\overline{\partial}^* N \overline{\partial} f$ は $C^\infty$ 級で

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \Leftrightarrow D \text{ は強擬凸}$$

であることが知られている (J. J. Kohn)．$\partial D$ が複素円板を含む場合には上の評価式はどんな $\varepsilon$ に対しても成立しない．

## 一つの十分条件: 完備 Kähler 計量の存在

$D$ が $\mathbb{B}^n$ の場合，$\Delta^n$ の場合，$\mathbb{B}^n \setminus \{0\}$ の場合，Neumann 作用素 $N_q (q \geq 1)$ は存在するだろうか．答は **YES, YES, YES** である．なぜならこれらはみな $\mathbb{C}^n$ の有界領域で，しかもみな

**完備な Kähler 計量をもつ**

からである．これについて順を追って説明しよう．

**定義.** 複素多様体 $M$ 上の計量 $g = \sum_{\alpha,\beta} g_{\alpha\overline{\beta}} dz_\alpha \otimes d\overline{z}_\beta \quad (g_{\alpha\overline{\beta}} = \overline{g}_{\beta\overline{\alpha}})$ が Kähler 計量であるとは $\partial g_{\alpha\overline{\beta}}/\partial z_\gamma = \partial g_{\gamma\overline{\beta}}/\partial z_\alpha \quad (\forall \alpha, \beta, \gamma)$ が成り立つことをいう．$g$ が完備であるとは，$M$ 内の非相対コンパクトな任意の可微分曲線の $g$ に関する長さが $\infty$ であることをいう．完備な Kähler 計量を備えた複素多様体を完備 Kähler 多様体という．

**例.**

$$\mathbb{B}^n : \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \frac{\partial^2 \log(1 - \|z\|^2)^{-1}}{\partial z_\alpha \partial \overline{z}_\beta} dz_\alpha \otimes d\overline{z}_\beta$$

$$\Delta^n : \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{dz_\alpha \otimes d\overline{z}_\alpha}{(1 - |z_\alpha|^2)^2}$$

$$\mathbb{B}^n \setminus \{0\} : \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \frac{\partial^2 \log(\log \|z\|^{-1})^{-1}}{\partial z_\alpha \partial \overline{z}_\beta} dz_\alpha \otimes d\overline{z}_\beta$$

一般に，計量 $g$ を備えた複素多様体 $M$ とファイバー計量 $h$ を備えた正則ベクトル束 $E \longrightarrow M$ に対しても，$L^2(D)$ や $L^2_{(p,q)}(D)$ と同様に，$E$ の $L^2$ 切断の空間 $L^2(M,E,g,h)$ や $E$ 値 $L^2(p,q)$ 形式の空間 $L^2_{(p,q)}(M,E,g,h)$ および $L^2\overline{\partial}$ 複体

$$L^2(M,E,g,h) \xrightarrow{\overline{\partial}} L^2_{(0,1)}(M,E,g,h) \xrightarrow{\overline{\partial}} \cdots \xrightarrow{\overline{\partial}} L^2_{(0,n)}(M,E,g,h) \to 0$$

$(n = \dim M)$ が定義される．$L^2\overline{\partial}$ 複体として，より一般に

$$L^2_{(p,0)}(M,E,g,h) \xrightarrow{\overline{\partial}} L^2_{(p,1)}(M,E,g,h) \xrightarrow{\overline{\partial}} \cdots \xrightarrow{\overline{\partial}} L^2_{(p,n)}(M,E,g,h) \to 0$$

を考える．

簡単のため，以下では $\mathrm{rank} E = 1$ の場合に話を限る．

**定義.** $(E,h)$ が正であるとは，$h$ の曲率形式 $\sum_{\alpha,\beta}\Theta_{\alpha\overline{\beta}}dz_\alpha \wedge d\overline{z}_\beta$ の係数行列 $\Theta_{\alpha\overline{\beta}}$ が $M$ の各点で正定値であることをいう．

**例.**

$$M = \mathbb{B}^n,\quad E = \begin{array}{ccc} \mathbb{C}\times\mathbb{B}^n & \longrightarrow & \mathbb{B}^n \\ (\zeta,z) & \longmapsto & z \end{array},\quad h_s(\zeta,\xi) = (1-\|z\|^2)^s\zeta\overline{\xi}\quad (s>0) \Rightarrow$$

$$\Theta_{\alpha\overline{\beta}} = \frac{s\partial^2 \log(1-\|z\|^2)^{-1}}{\partial z_\alpha \partial\overline{z}_\beta} \Rightarrow (E,h_s)\text{ は正}$$

**定理 1.** $(M,g)$ を完備 Kähler 多様体，$(E,h)$ を $M$ 上の直線束とする．$h$ の曲率形式 $\sum_{\alpha,\beta}\Theta_{\alpha\overline{\beta}}dz_\alpha \wedge d\overline{z}_\beta$ に付随する計量を $g_h$ とおくと，$L^2\overline{\partial}$ 複体

$$L^2_{(n,0)}(M,E,g_h,h) \xrightarrow{\overline{\partial}} L^2_{(n,1)}(M,E,g_h,h) \xrightarrow{\overline{\partial}} \cdots \xrightarrow{\overline{\partial}} L^2_{(n,n)}(M,E,g_h,h) \to 0$$

は非輪状である．すなわち $q \geq 1$ のとき

$$\mathrm{Ker}\,\overline{\partial} \cap L^2_{(n,q)}(M,E,g_h,h) = \mathrm{Im}\,\overline{\partial} \cap L^2_{(n,q)}(M,E,g_h,h)$$

が成り立つ (Demailly[6], Ohsawa[17]).

一旦これを認めて Neumann 作用素の存在を導こう．

$T$ を補題 1 の通りとする．もし $\mathrm{Ker}T = \mathrm{Im}T$ なら $T+T^*$ は逆作用素をもつ．実際このとき Banach の開写像定理より

$$\exists C>0\quad \text{s.t.}\quad \|u\| \leq C\|Tu\| \quad (\forall u \in \mathscr{D}om T \cap (\mathrm{Ker}T)^\perp)$$

であるが，これは $v \perp \mathrm{Ker}T$ ならば $\mathscr{D}om T$ 上の関数 $w \mapsto (w,v)$ が $Tw$ に関して連続であることを意味しているので，Hahn-Banach の拡張定理より

$$\begin{cases} (w,v) = (Tw,u) & (\forall w \in \mathscr{D}om T) \\ \|u\| \leq C\|v\| \end{cases}$$

をみたす $u$ が存在する．すると $u \in \mathscr{D}om T^*$ かつ $v = T^*u$ となるのでとくに $\overline{\mathrm{Im}T^*}(=(\mathrm{Ker}T)^\perp) = \mathrm{Im}T^*$ がいえたことになる．

従って $\mathscr{H} = \mathrm{Im}T \oplus \mathrm{Im}T^* = \mathrm{Im}(T+T^*)$ となる．これと $\mathrm{Ker}T \cap \mathrm{Ker}T^* = \{0\}$ をあわせて $(T+T^*)^{-1}$ の存在が得られる．

定理 1 の仮定の下に $\bigoplus_{q=0}^{n} L^2_{(n,q)}(M,E,g_h,h)$ における $L^2_{(n,0)}(M,E,g_h,h) \cap \mathrm{Ker}\,\overline{\partial}$ の直交補空間を $\mathscr{H}$ とし，$T$ として $\overline{\partial}$ をとる．すると $\overline{\partial}$ は補題 1 の仮定をすべて満足する (Schwartz の超関数の概念の利点がここにもあらわれている)．

定理 1 より $\mathrm{Ker}\,\overline{\partial} = \mathrm{Im}\,\overline{\partial}$ となるから上により $(\overline{\partial}+\overline{\partial}^*)^{-1}$ が存在する．よってこの場合，$(\overline{\partial}+\overline{\partial}^*)^{-2}$ を $\bigoplus_{q=1}^{n} L^2_{(n,q)}(M,E,g_h,h)$ 上に制限したものが Neumann 作用素である．

さて有界領域 $D$ に対し，$h = e^{-\|z\|^2}$ として定理 1 をあてはめると，$h$ の曲率形式は $\sum dz_\alpha \wedge d\bar{z}_\alpha$ だから，$D$ 上の通常の $L^2\overline{\partial}$ 複体 (最初の定義したもの) は $D$ が完備な Kähler 計量をもつとき非輪状である．したがって上の議論から次を得る．

**定理 2.** $\mathbb{C}^n$ の有界領域が完備な Kähler 計量をもてば (Euclid 計量に関する) Neumann 作用素が存在する．

**定理 1 の証明 (概要)** 任意の整数 $\varepsilon$ に対し，$g_h + \varepsilon g$ は完備な Kähler 計量である．この計量に対して，

(1) $$(\sqrt{-1}\sum_{\alpha,\beta}\Theta_{\alpha\overline{\beta}}dz_\alpha \wedge d\bar{z}_\beta \Lambda_\varepsilon u, u) \leq \|\overline{\partial}u\|^2 + \|\overline{\partial}^* u\|^2 \quad \forall u \in C^\infty_{(n,q),0}(M,E) \quad (q \geq 1)$$

が成立する．ただし $\Lambda_\varepsilon$ は $g_h + \varepsilon g$ の基本形式を $\omega_\varepsilon$ としたとき $(\omega_\varepsilon \wedge u, v)_{(\varepsilon)} = (u, \Lambda_\varepsilon v)_{(\varepsilon)}$ ($(\cdot,\cdot)_{(\varepsilon)}$ は内積で $g_h + \varepsilon g$ に関するもの) で定義される作用素を表す．

(1) は Kähler 計量 $g_h + \varepsilon g$ と $E$ 値形式に作用する $\overline{\partial}$ に関する中野の公式

(2) $$\square - \overline{\square} = [\sqrt{-1}\Theta, \Lambda_\varepsilon]$$

から直ちに従う．ただし，$\Theta$ は $\sum_{\alpha,\beta}\Theta_{\alpha\overline{\beta}}dz_\alpha \wedge d\bar{z}_\beta$ を左から (外積で) かける作用素であり，$\square := \overline{\partial}\overline{\partial}^* + \overline{\partial}^*\overline{\partial}$, $\overline{\square} := (T+T^*)^2$ ($T$ は補題 1 で $T_0 = h^{-1} \circ \partial \circ h$ とおいて得られる作用素) とおく．

Cauchy-Schwartz の不等式と (1) をあわせて

(3) $$|(u,v)_{(\varepsilon)}|^2 \leq \|u\|^2_{(0)}(\|\overline{\partial}v\|^2_{(\varepsilon)} + \|\overline{\partial}^* v\|^2_{(\varepsilon)}) \quad (\forall u, \forall v \in C^\infty_{(n,q),0}(M,E))$$

がえられ，従って計量の完備性より同じ不等式が $\forall u \in L^2_{(n,q)}(M,E,g_h,h)$ ，$\forall v \in \mathscr{D}om\overline{\partial} \cap \mathscr{D}om\overline{\partial}^* \cap L^2_{(n,q)}(M,E,g_h+\varepsilon g,h)$ に対して成り立つ (ただし $q \geq 1$)．よって Hahn-Banach の拡張定理により，$q \geq 1$ のとき

(4) $\forall u \in L^2_{(n,q)}(M,E,g_h,h) \cap \mathrm{Ker}\,\overline{\partial}$ に対し

$$\exists f_\varepsilon \in L^2_{(n,q-1)}(M,E,g_h+\varepsilon g,h) \quad \text{s.t.} \quad \overline{\partial}f_\varepsilon = u \quad \text{かつ} \quad \|f_\varepsilon\|_{(\varepsilon)} \leq \|u\|_{(0)}.$$

$\varepsilon < \varepsilon'$ のとき $\|f\|_{(\varepsilon)} \geq \|f\|_{(\varepsilon')}$ ($\forall f \in L^2_{(n,q-1)}(M,E,g_h+\varepsilon g,h)$) であることは容易にわかるから，$f_{1/k}$ ($k = 1,2,\ldots$) の部分列で $\forall\varepsilon > 0$ に対して $L^2_{(n,q-1)}(M,E,g_h+\varepsilon g,h)$ 内で弱極限をもつものが存在する．極限の共通性と $g_h + \varepsilon g \to g_h (\varepsilon \to 0)$ より，その極限を $f_0$ とおくと $L^2_{(n,q-1)}(M,E,g_h+\varepsilon g,h) \ni f_0$ であり，$\overline{\partial}f_0 = u$ かつ $\|f_0\|_{(0)} \leq \|u\|_{(0)}$ が成立する．よってとくに $\mathrm{Ker}\,\overline{\partial} \cap L^2_{(n,q)}(M,E,g_h,h) = \mathrm{Im}\,\overline{\partial} \cap L^2_{(n,q)}(M,E,g_h,h)$ である． □

このように完備 Kähler 計量の存在から $\overline{\partial}$ 方程式の $L^2$ 可解性や Neumann 作用素の存在が導かれるわけだが，次のステップとしては $N$ の解析的諸性質を掘り下げることが問題になる．$N$ はいわゆる特異積分作用素と同種のものだが，その存在証明が上のように抽象的なので，具体的な表示式をいじって何かを導くことは直接には無理である．しかし上の議論により，少なくとも $N$ と $\overline{\partial}$ の $L^2$ 標準解作用素との関係は明瞭である．具体的には，$N_q$ と $N_{q+1}$ が存在するという前提の下で公式

$$N_q = (\overline{\partial}^* N_q)^*(\overline{\partial}^* N_q) + (\overline{\partial}^* N_{q+1})(\overline{\partial}^* N_{q+1})^*$$

が成立する．この式からたとえば次の二つが互いに同値であることが直ちにわかる．

a) $N_q$ は $L^2_{(0,q)}(D)$ からそれ自身へのコンパクト作用素[*2]である．
b) $\overline{\partial}^* N_q : L^2_{(0,q)}(D) \to L^2_{(0,q-1)}(D)$ および $\overline{\partial}^* N_{q+1} : L^2_{(0,q+1)}(D) \to L^2_{(0,q)}(D)$ はコンパクト作用素である．

ただし $D$ は $\mathbb{C}^n$ の有界領域で，完備な Kähler 計量をもつものとする．

## コンパクト性の帰結

次節で Neumann 作用素のコンパクト性と $D$ の境界の幾何学的性質との関連について述べるが，その前にコンパクト性の御利益をいくつか並べておこう．

Kohn-Nirenberg[14] の古典的定理によれば，$C^\infty$ 級の境界をもつ有界擬凸領域 $D$ 上の Neumann 作用素 $N_q$ がコンパクトならば $N_q$ は大域正則性 (global regularity) をもつ．より正確には $W^s(D)$ を $D$ 上の $s$ 次の $L^2$Sobolev 空間とし，$W^s_{(0,q)}(D)$ を $W^s(D)$ に係数をもつ $D$ 上の $(0,q)$ 形式の空間とするとき，次が成立する．

**定理 3.** $D$ を $\mathbb{C}^n$ の有界擬凸領域で，$\partial D$ が $C^\infty$ 級の実超曲面であるものとし，$1 \le q \le n$ とする．このとき，$N_q$ が $L^2_{(0,q)}(D)$ 上のコンパクト作用素ならば $N_q$ は $W^s_{(0,q)}(D)(s \ge 0)$ からそれ自身へのコンパクト作用素である．

**注意 1.** $D$ が $C^1$ 級の境界をもつ領域ならば，擬凸性と完備 Kähler 性は同値である．従って上の状況では $N_q$ はすべての $q \ge 1$ について存在している．

**注意 2.** もしある $s \ge 0$ に対して $N_q$ が $W^s_{(0,q)}(D)$ からそれ自身へのコンパクト作用素ならば，$N_q$ は $L^2_{(0,q)}(D)$ でもコンパクトである (従って $N_q$ はすべての $W^s_{(0,q)}(D)$ でコンパクトになる)．

定理 3 と Kohn の公式により次を得る．

**定理 4.** $D$ が有界，擬凸かつ $C^\infty$ 級の境界をもち，$N_1$ がコンパクトならば $D$ 上の Bergman 射影 $B$ に対し

$$B(C^\infty(\overline{D})) \subset C^\infty(\overline{D}) \tag{5}$$

が成立する

(5) は S. Bell の条件，または条件 R とよばれる．

**定理 5.** (Bell[1]) $C^\infty$ 級の境界をもつ有界擬凸領域 $D_1, D_2$ が条件 R をみたせば，任意の双正則写像 $\varphi : D_1 \longrightarrow D_2$ は $\overline{D}_1$ から $\overline{D}_2$ への $C^\infty$ 級写像へと拡張できる．

Neumann 作用素のコンパクト性はこのように大域正則性をつうじて Levi 問題や複素共形幾何 (擬共形幾何) と関係している．その他にも Toeplitz 作用素の Fredholm 理論が $N_q$ のコンパクト性から導かれる (U. Venugopalkrishna[22]，D. Catlin - J. D'Angelo[5]，G. M. Henkin - A. Iordan[11])．例えば次の命題が成り立つ (証明は容易)．

---

[*2] コンパクト作用素: $X$ が有限次元線型空間ならば $X$ における線型作用素が全射であることと単射であるとは同等である．$X$ が無限次元であるときこれはもはや無条件では正しくない．作用素が $1+K$ の形をしており，$K$ が連続核を持つ積分作用素であるとき，I. Fredholm は行列式の理論を展開し，この同等性をとりもどした (数学辞典 p.353)．Banach 空間 $X$ から Banach 空間 $Y$ への線型作用素 $T$ が コンパクト あるいは 完全連続 であるとは $X$ の任意の有界集合が $T$ によって $Y$ の相対コンパクト集合にうつされること，いいかえれば，任意の有界点列 $\{x_n\}$ の像 $\{Tx_n\}$ が強収束する部分列を含むことである．コンパクト作用素は有界，したがって連続となるが，さらに弱収束点列を強収束点列にうつす．$X$ が反射的ならば，この性質をもってコンパクト作用素の定義としてもよい (同上 p.354)．

**命題 1.** $D$ は $\mathbb{C}^n$ の有界擬凸領域とし，ある $q \geq 1$ に対して $L^2$ 標準解作用素 $\overline{\partial}^* N_q$ がコンパクトであるとする．$M$ を $D$ 上の関数で，$M, M_{z_\alpha}, M_{\bar{z}_\alpha} (1 \leq \alpha < n)$ はすべて有界なものとする．このとき $(q-1)$ 次 Bergman 射影 $B_{q-1}$ [*3] と $M$ による乗法作用素との交換子 $[B_{q-1}, M]$ は $L^2_{(0,q-1)}(D)$ 上コンパクトである．

## コンパクト性評価式と局所化原理

以下の話で中心的な役割を果たすのは次の補題である．

**補題 2.** $D$ は $\mathbb{C}^n$ の有界擬凸領域とする．$q \geq 1$ に対し以下は同値である．

(6) $N_q$ は ($L^2_{(0,q)}(D)$ で) コンパクト作用素である．
(7) 自然な入射

$$\mathscr{D}om\overline{\partial} \cap \mathscr{D}om\overline{\partial}^* \cap L^2_{(0,q)}(D) \hookrightarrow L^2_{(0,q)}(D)$$

はグラフノルム $\|\overline{\partial}u\| + \|\overline{\partial}^* u\|$ に関してコンパクトである．
(8) 任意の整数 $\varepsilon$ に対し，正数 $C_\varepsilon$ が存在して

$$\|u\|^2 \leq \varepsilon(\|\overline{\partial}u\|^2 + \|\overline{\partial}^* u\|^2) + C_\varepsilon \|u\|^2_{-1}$$

がすべての $u \in \mathscr{D}om\overline{\partial} \cap \mathscr{D}om\overline{\partial}^* \cap L^2_{(0,q)}(D)$ に対して成立する．
(9) $L^2$ 標準解作用素 $\overline{\partial}N_q$ と $\overline{\partial}^* N_{q+1}$ はコンパクト作用素である．

とくに (8) はコンパクト性の判定条件として重要であり，(8) が成立することを，<u>コンパクト性評価式</u> が成り立つという．一般に，$L^2_{(0,q)}(D)$ の $W^{-1}_{(0,q)}(D)$ へのうめこみはコンパクトである (Rellich の補題)．(6) と (7) はその理由によって同値である．(6) と (9) が同値であることはすでに述べた．(7) と (8) の同値性を [14] の Lemma 1.1 に従って証明しよう．

(7) $\Leftrightarrow$ (8)　(8) $\Rightarrow$ (7) は自明である (仮定より $N_q$ が存在することに注意せよ)．(8) の必要性を示そう．仮にある $\varepsilon > 0$ に対して (8) が成立しなかったとすると，列 $u_n \in \mathscr{D}om\overline{\partial} \cap \mathscr{D}om\overline{\partial}^* \cap L^2_{(0,q)}(D)$ で

$$\|\overline{\partial}u_n\|^2 + \|\overline{\partial}^* u_n\|^2 \leq 1 \tag{10}$$

$$1 \geq \|u_n\|^2 \geq \varepsilon + n\|u_n\|^2_{-1} \quad n = 1, 2, \ldots \tag{11}$$

をみたすものが存在する．(10) と (7) より $u_n$ の適当な部分列がノルム $\| \|, \| \|_{-1}$ に関して $L^2_{(0,q)}(D)$ のある元 $u$ に収束するが (11) より $\|u_n\|_{-1} \to 0$ なので $u = 0$ でなければならない．ところが再び (11) を用いると，$\|u_n\| \geq \varepsilon$ なので $\|u\| \geq \varepsilon$ となって矛盾である．□

現実に (8) が示せるような状況では，右辺によって $L^2$ ノルムだけでなく，Sobolev ノルムがある程度押さえられる．そのような場合には $N$ の局所正則性 (local regularity) が得られる．一般にも大域正則性と違って Neumann 作用素のコンパクト性は次の意味で局所化可能である．

**補題 3.** $D$ は $\mathbb{C}^n$ の有界擬凸領域であり，$q \geq 1$ とするとき，

(12) もし $D$ のすべての境界点に対し，その擬凸な近傍 $U$ で $U \cap D$ の Neumann 作用素 $N_q$ がコンパクトであるものが存在すれば，$D$ の Neumann 作用素 $N_q$ もコンパクトである．

---

[*3] $B_{q-1} := I - \overline{\partial}^* N_q \overline{\partial}$

(13) $D$ の Neumann 作用素 $N_q$ がコンパクトであり，$U$ が $C^\infty$ 級の境界をもつ強擬凸領域で，$D\cap U$ が領域になるならば，$D\cap U$ の Neumann 作用素 $N_q$ もコンパクトである．

(12) の証明　$\|u_k\|\leq 1$ $(k=1,2,\ldots)$ とする．$\overline{D}$ の適当な擬凸開被覆 $\{U_\alpha\}$ とそれに付随する 1 の分解 $\{\rho_\alpha\},\{\lambda_\alpha\}$ で $\lambda_\alpha|_{\mathrm{supp}\rho_\alpha}=1$ をみたすものをとり，$U_\alpha\cap D$ の Neumann 作用素を $N_{q,\alpha}$ とすると，

$$\Box\left(\sum_\alpha \lambda_\alpha N_{q,\alpha}\rho_\alpha u_k\right)=\sum_\alpha[\Box,\lambda_\alpha]N_{q,\alpha}\rho_\alpha u_k+u_k$$

となり，右辺第一項が収束部分列を含むからよい． □

(13) の証明のため，次節で道具立てをする．

## 基本 $L^2$ 評価式と Catlin の性質 P

$D$ は $\mathbb{C}^n$ の有界領域で $C^2$ 級の境界をもつものとし，$\rho$ は $\overline{D}$ の近傍上で定義された $C^2$ 級関数で $D=\{z|\rho(z)<0\}$ かつ $\partial D$ 上で $|d\rho|=1$ をみたすとする．

$C^2(\overline{D})$ に属する実数値関数 $\varphi$ に対し，荷重つきの内積

$$(f,g)_\varphi:=\int_D e^{-\varphi}f\overline{g}d\lambda$$

およびその $(0,q)$ 形式への拡張 (同じ記号で表す) に関する $\overline{\partial}$ の $L^2$ 共役を $\overline{\partial}^*_\varphi$ で表す．

命題 2. (cf. [20],[16]) $u\in C^1_{(0,q)}(\overline{D})\cap\mathscr{D}om\overline{\partial}^*, q\geq 1$ とし，$a$ は $C^2(\overline{D})$ に属する非負実数値関数とする．このとき

$$\begin{aligned}(14)\quad \|\sqrt{a}\overline{\partial}u\|^2_\varphi+\|\sqrt{a}\overline{\partial}^*_\varphi u\|^2_\varphi &=\sum_K\sum_{j,k=1}^n\int_{\partial D}a\frac{\partial^2\rho}{\partial z_j\partial\overline{z}_k}u_{jK}\overline{u}_{kK}e^{-\varphi}d\sigma\\ &+\sum_J\sum_{j=1}^n\int_D a\left|\frac{\partial u_J}{\partial\overline{z}_j}\right|^2e^{-\varphi}d\lambda+2\mathrm{Re}\left(\sum_K\sum_{j=1}^n u_{jK}\frac{\partial a}{\partial z_j}d\overline{z}_K,\overline{\partial}^*_\varphi u\right)_\varphi\\ &+\sum_K\sum_{j,k=1}^n\int_D\left(a\frac{\partial^2\varphi}{\partial z_j\partial\overline{z}_k}-\frac{\partial^2 a}{\partial z_j\partial\overline{z}_k}\right)u_{jK}\overline{u}_{kK}e^{-\varphi}d\lambda\end{aligned}$$

が成立する．ただし $K,J$ は長さ $q-1$ の増大列 $(\subset\{1,2,\ldots,n\})$ を動き，$jK$ を並べかえて増大列にしたものを $\widehat{K}$ としたとき

$$u_{jK}:=\mathrm{sgn}\binom{jK}{\widehat{K}}u_{\widehat{K}}$$

とおく

歴史的には (14) は $a\equiv 1$ かつ $\varphi\equiv 0$ の場合，C. B. Morrey, Jr., J. J. Kohn, M. E. Ash らによって確立され，それを $\varphi$ を含む形にしたのは L. Hörmander であるとされる (小平，中野，Andreotti-Vesentini らがこの文脈で言及されないのは変かもしれないが)．ちなみに $a$ は [18] の $\eta$ にあたる．Hörmander は (14) の右辺第 4 項の $\partial^2\varphi/\partial z_j\partial\overline{z}_k$ を活用したが，以下では $\varphi\equiv 0$ とおいてしまう．

$a=1-e^b$ $(b\leq 0)$，$\varphi\equiv 0$ とおいて Cauchy-Schwartz の不等式を用いると

$$\|\sqrt{a}\overline{\partial}u\|^2+\|\sqrt{a}\overline{\partial}^*u\|^2\geq\sum_K\sum_{j,k=1}^n\int_D e^b\frac{\partial^2 b}{\partial z_j\overline{\partial}_k}u_{jK}\overline{u}_{kK}d\lambda-\|e^{b/2}\overline{\partial}^*u\|^2$$

となる．$a+e^b=1, a\leq 1$ より

$$\|\overline{\partial}u\|^2+\|\overline{\partial}^*u\|^2\geq\sum_K\sum_{j,k=1}^n\int_D e^b\frac{\partial^2 b}{\partial z_j\partial\overline{z}_k}u_{jK}\overline{u}_{kK}d\lambda. \tag{15}$$

これを Catlin(型) の不等式という．$b\leq 0$ であることを忘れてはいけない．(15) より，$D$ の直径を $\delta$ とし，$D$ の一点 $p$ を固定して

$$b(z)=-1+\frac{\|z-p\|^2}{\delta^2}$$

とおくと

$$\|u\|^2\leq\frac{\delta^2 e}{q}(\|\overline{\partial}u\|^2+\|\overline{\partial}^*u\|^2) \tag{16}$$

が得られる (ここの計算は Boas-Straube[3] によるものである)．

不等式 (15) を用いることにより，かなり広い範囲の擬凸領域に対してコンパクト性評価式が成立することがわかる．

**定義.** $\mathbb{C}^n$ の有界擬凸領域 $D$ の境界 $\partial D$ が性質 $(P_q)$ をもつとは，$\forall M>0$ に対し $\partial D$ の近傍 $U$ と $\lambda\in C^2(U\cap D)$ で次をみたすものが存在することをいう．

(i) $0\leq\lambda\leq 1$
(ii) $\left(\frac{\partial^2\lambda}{\partial z_j\partial\overline{z}_k}\right)_{j,k=1}^n$ の固有値を下から順に $q$ 個加えたものは $M$ 以上である．

性質 $(P_q)$ は D. Catlin[4] によって導入された．

**定理 6.** $D$ を $\mathbb{C}^n$ の有界擬凸領域とし，$q\geq 1$ とする．このとき，もし $\partial D$ が性質 $(P_q)$ をもてば $N_q$ はコンパクトである．

この結果は E. Straube[21] による．ただし $\partial D$ が $C^\infty$ 級のときにこれを初めて証明したのは Catlin であった．
**定理 6 の証明** ($\partial D$ が $C^2$ 級の場合)　$\overline{\partial}+\overline{\partial}^*$ の内部楕円型正則性 ($\Leftarrow$ Sobolev ノルムの一般論) により，$\partial D$ の任意の近傍 $W$ と任意の正数 $\varepsilon$ に対して適当な正数 $C_{\varepsilon,W}$ をとれば

$$\|w\|^2\leq\varepsilon(\|\overline{\partial}w\|^2+\|\overline{\partial}^*w\|^2)+C_{\varepsilon,W}\|w\|_{-1}^2\quad\forall w\in C^\infty_{(0,q),0}(D\backslash\overline{W})\quad(q\geq 1) \tag{17}$$

となる．そこであらかじめ上の定義における $M$ と $U$ を $M\geq\frac{e}{\varepsilon}$ となるように選んでおいてから，$W$ を $W\Subset U$ となるようにとる．すると $C^\infty_{(0,q)}(\overline{D})$ の元 $u$ は

$$u=w_1+w_2\quad w_1\in C^\infty_{(0,q),0}(D\backslash\overline{W}),\operatorname{supp}w_2\in U\cap\overline{D}$$

と分解できるから，(17) と (15) ($b=\lambda-1$ とおく．ここで $\partial D\in C^2$ が必要) をあわせるとコンパクト性評価式が得られる．□

$\partial D$ が $C^2$ 級でない場合には $D$ を滑らかな境界をもつ領域によって内部から近似する (境界値問題においてこの方法が通用する場合としない場合があるのだが，この場合はうまくいく)．

強擬凸領域が性質 $(P_1)$ をもつことは自明である．注目に値するのは有限型擬凸領域が性質 $(P_1)$ をもつことであるが，その証明はそう簡単ではない ([4] を見よ)．しかしさらに興味深いことは，性質 $(P_1)$ は領域がもっと弱擬凸でも成り立つことである．たとえば，$\partial D$ が有限個の点を除いて強擬凸なら性質 $(P_1)$ をもつ (読者にとって好適な演習問題であろう)．より一般には無限型の境界点の集合の 2 次元 Hausdorff 測度が 0 ならば，性質 $(P_1)$ が成り立つことが知られている ([2],[19])．さらに系統的な研究成果については [19] を参照されたい．

## コンパクトな Neumann 作用素の局所化

**補題 3, (13) の証明** $N_q$ はコンパクト，$U$ は $D\cap U$ が連結であるような強擬凸領域とする．$D\cap U$ 上でコンパクト性評価式が成り立つことを示そう．

$u\in \mathscr{D}om\overline{\partial}\cap \mathscr{D}om\overline{\partial}^*\cap L^2_{(0,q)}(D\cap U)$ とする．$U$ は強擬凸だから ($\partial U$ は) 性質 $(P_1)$ をもち，一般に $(P_1)\Rightarrow (P_2)\Rightarrow\cdots\Rightarrow(P_n)$ だから性質 $(P_q)$ を持つ．よって $\partial U$ 上で 1 になる適当な切除関数 (cut-off function) $\varphi_\varepsilon$ と，$d\varphi_\varepsilon$ の台上で 1 であり，台が $U$ に含まれる切除関数 $\chi_\varepsilon$ に対して

$$\begin{aligned}\|u\|^2_{D\cap U} &\lesssim \|\varphi_\varepsilon u\|^2_{D\cap U}+\|(1-\varphi_\varepsilon)u\|^2_{D\cap U}\\ &\lesssim \varepsilon\left(\|\overline{\partial}(\varphi_\varepsilon u)\|^2_{D\cap U}+\|\overline{\partial}^*(\varphi_\varepsilon u)\|^2_{D\cap U}\right)+\|(1-\varphi_\varepsilon)u\|^2_{D\cap U}\\ &\lesssim \varepsilon\left(\|\overline{\partial}u\|^2_{D\cap U}+\|\overline{\partial}^*u\|^2_{D\cap U}\right)+C_\varepsilon\|\chi_\varepsilon u\|^2_{D\cap U}+\|(1-\varphi_\varepsilon)u\|^2_{D\cap U}\end{aligned}$$

となる．ただし $C_\varepsilon := \max|d\varphi_\varepsilon|$．

ここで最後の式にあらわれる $\chi_\varepsilon u$ と $(1-\varphi_\varepsilon)u$ に注目すると，これらは $D$ 上の $(0,q)$ 形式であって $\mathscr{D}om\overline{\partial}^*$ にふくまれている．従ってこれらにコンパクト性評価式を適用することができる．$\varepsilon$ を固定して，十分小さい $\varepsilon'$ に対するこれらの評価式と上の評価式をあわせると ($\varepsilon'$ が十分小さいと '誤差項' は $\|u\|^2_{D\cap U}$ に吸収されるので) 求めたかったコンパクト性評価式が得られる． □

## 付着円板とコンパクト性

先に言及したように，劣楕円性評価式は境界が複素円板を含むときには成り立たない．ではコンパクト性評価式についてはどうだろうか (円板の 2 次元 Hausdorff 測度が 0 でないことに注意)．これついて知られていることはまだ十分であるとはいえない．以下に断片的な結果を記して今後の研究を待つことにしたい．

**命題 3.** $D$ は $\mathbb{C}^2$ の有界擬凸領域で Lipshitz 連続な境界をもつものとする．このとき，もし $\partial D$ が複素円板を含めば $N_1$ はコンパクトではない．

証明は [9] を見よ．

では 3 次元以上の領域については何もわからないかというとそうではない．たとえば多重円板に対しては (Corona 問題という例外はあるが) 何でもわかって然るべきであるし，この問題についてもそうである．より一般に，凸領域に関する明解な結果が Fu-Straube[9] によって得られている．

**定理 7.** $\mathbb{C}^n$ の有界凸領域 $D$ と $1\le q\le n$ に対して以下は同値である．

(18) $N_q$ はコンパクト作用素である．

(19) $\partial D$ は $q$ 次元以上の複素解析的部分集合を含まない．

(20) $\partial D$ は性質 $(P_q)$ をもつ．

**系.** $\Delta^n$ 上の Neumann 作用素 $N_q$ は $1\le q\le n-1$ のときコンパクトでなく，$q=n$ のときコンパクトである．

*Proof.* $K_\Omega(z,w)$ で $\Omega$ の Bergman 核を表す．

**補題 4.** $\Omega$ を $\mathbb{C}^n$ の凸領域とすると，

(1) $\forall p_0 \in \partial\Omega, \forall p_1 \in \Omega$ に対し，$\exists C>0\ \exists\delta_0>0$ s.t. $\forall\delta\in(0,\delta_0)$

$$K_\Omega(p_\delta,p_\delta)\geq CK_\Omega(p_{2\delta},p_{2\delta}).$$

ただし，$p_\delta=p_0+\delta(p_1-p_0)/\|p_1-p_0\|$.

(2) $\forall\{p_j\}\subset\Omega$ s.t. $\lim_{j\to\infty}p_j=p_0$, $\lim_{j\to\infty}\frac{K_\Omega(z,p_j)}{\sqrt{K_\Omega(p_j,p_j)}}=0$ (広義一様)

(1) の証明　$U$ を，$p_0$ を中心とし，半径 $r$ が $\min(\mathrm{dist}(p_1,\partial\Omega),\|p_1-p_0\|/2)$ に等しい開球とし，$\vec{n}=(p_1-p_0)/\|p_1-p_0\|$ とおく．$\Omega$ の凸性から $T_\delta(\Omega\cap U)\subseteq\Omega\ (0<\forall\delta<\|p_1-p_0\|/2)$．ただし $T_\delta(z)=z+\delta\vec{n}$ とおく．

$\delta_0=r/2$ とおくと，$0\leq\forall\delta\leq\delta_0$ に対し

$$\begin{aligned}K_\Omega(p_\delta,p_\delta)\geq CK_{\Omega\cap U}(p_\delta,p_\delta)&=CK_{T_\delta(\Omega\cap U)}(p_{2\delta},p_{2\delta})\\&\geq CK_\Omega(p_{2\delta},p_{2\delta}).\quad\text{(Bergman 核の局所化原理と領域単調性)}\end{aligned}$$

(2) の証明　(Bergman 計量の完備性の証明と同様) $0\in\Omega$ として示せば十分 (伸張 $p\to tp$ を使う)．各点収束がいえれば正則性から広義一様収束がいえることに注意 ($K_\Omega(\cdot,p_j)/\sqrt{K_\Omega(p_j,p_j)}$ の $L^2$ ノルムは 1)．

$f(w)=K_\Omega(z,w)$ とおくと $t\nearrow1$ のとき $\|f(w)-f(tw)\|_\Omega\to0$．$0<t<1$ に対して

$$\frac{|f(p_j)|}{\sqrt{K_\Omega(p_j,p_j)}}\leq\frac{|f(p_j)-f(tp_j)|}{\sqrt{K_\Omega(p_j,p_j)}}+\frac{|f(tp_j)}{\sqrt{K_\Omega(p_j,p_j)}}\leq\|f(w)-f(tw)\|_\Omega+\frac{|K_\Omega(z,tp_j)|}{\sqrt{K_\Omega(p_j,p_j)}}.$$

$\Omega$ が凸であることからとくに外部錐体条件がみたされるので $K_\Omega(p_j,p_j)\to\infty\ (j\to\infty)$ となる (これについては例えば Jarnicki-Pflungs の本，Invariant Distances and Metrics in Complex Analysis, 1993, の Thm 6.1.17 を参照)．

従ってまず $j\to\infty$ としてその後 $t\nearrow1$ とすることにより (2) を得る．□

定理の (18)⇒(19) の証明　背理法による．$\partial\Omega$ が $\mathbb{C}^n$ の $q$ 次元アファイン部分空間の開集合をふくみ，しかも $(0,q)$ 形式に対して $\bar\partial$ 方程式のコンパクト解作用素 $S_q$ が存在すると仮定しよう．座標をアファイン変換することにより $\{(z',0)\in\mathbb{C}^n|\ |z'|<2\}\subset\partial\Omega$ であるとして構わない．ただし $z'=(z_1,\dots,z_q)$ とおく．$z''=(z_{q+1},\dots,z_n)$，$\Omega_1=\{z''\in\mathbb{C}^{n-q}|\ (0,z'')\in\Omega\}$ とおく．

$\Omega$ は凸だから $\Omega_1$ は $\mathbb{C}^{n-q}(z'')$ の (空でない) 開集合である．$\Omega_2=\{z''\in\mathbb{C}^{n-q}|\ 2z''\in\Omega_1\}$ とおく．すると $\{z'\in\mathbb{C}^q|\ |z'|<1\}\times\Omega_2$ は $\Omega$ にふくまれる．何となればこの集合の任意の点は，$\{|z'|<2\}\times\{0\}$ のある点と $\{0\}\times\Omega_1$ のある点をむすぶ線分の中点であるから．$p_0\in\Omega_2$，$p_j=p_0/j$，$j\in\mathbb{N}$ とおく．

$$f_j(z'')=\frac{K_{\Omega_1}(z'',p_j)}{\sqrt{K_{\Omega_1}(p_j,p_j)}}$$

とおくと，$\|f_j\|_{\Omega_1}=1$ であり，$j\gg1$ のとき

$$\|f_j(z'')\|^2_{\Omega_2}=\frac{\|K_{\Omega_1}(\cdot,p_j)\|^2_{\Omega_2}}{K_{\Omega_1}(p_j,p_j)}\geq\frac{K_{\Omega_1}(p_j,p_j)}{K_{\Omega_2}(p_j,p_j)}=2^{-2(n-q)}\frac{K_{\Omega_1}(p_j,p_j)}{K_{\Omega_1}(2p_j,2p_j)}\geq C.$$

最初の不等式は $K_{\Omega_1}(p_j,p_j)\leq\sqrt{K_{\Omega_2}(p_j,p_j)}\|K_{\Omega_1}(\cdot,p_j)\|_{\Omega_2}$ と同値だが，これは $K_{\Omega_1}(\cdot,p_j)$ に $K_{\Omega_2}(p_j,\cdot)$ を再生核として作用させた式にコーシー・シュワルツの不等式をあわせて得られる．またその次の等式は Bergman の変換則であり，最後の不等式は補題の (1) から得られる．一方，補題の (2) の式より，$\Omega_1$ 上の広義一様に $f_j\to0$ なので $f_j$ のいかなる部分列も $L^2(\Omega_2)$ 内で収束することはない．

大沢・竹腰の $L^2$ 拡張定理により $\Omega$ 上の，$L^2$ 正則関数の列 $F_j(z',z'')$ で $F_j(0,z'')=f_j(z'')$ かつ $\|F_j\|_\Omega \le C$ をみたすものが存在する．つぎに Catlin のアイディア (Ann. Math. Stud. Vol. 100, pp. 93-100) を用いる．つまりこのような $F_j$ に対して $(0,q)$ 形式 $\alpha_j = F_j(z',z'')d\bar{z}_1\wedge\cdots\wedge d\bar{z}_q$ を考えるのである．明らかに $\bar{\partial}\alpha_j=0$ かつ $\|\alpha_j\|_{L^2_{(0,q)}(\Omega)} \le C$ であるから $g_j = S_q\alpha_j$ とおけば $\bar{\partial}g_j=\alpha_j$ であり，かつ $S_q$ がコンパクトならば $g_j$ は強収束する部分列をもつはずである．ところが簡単な考察により，

$$\|f_j - f_k\|_{\Omega_2} \le C\|g_j - g_k\|_{L^2_{(0,q-1)}(\Omega)} \quad (j,k\text{ は十分大}) \tag{21}$$

であることがわかるから，$f_j$ が強収束部分列をもつことになってしまい，上に述べた $f_j$ の性質と矛盾する．

(21) の証明　$\hat{g}_j$ を $g_j$ から $d\bar{z}_j$ $(q+1\le j\le n)$ を含む項を除いて得られる $(0,q-1)$ 形式とする．$z''\in\Omega_2$ を固定するごとに $\alpha_j$ および $\hat{g}_j$ はそれぞれの変数 $z'=(z_1,\ldots,z_q)$ $(|z'|<1)$ に関する $(0,q)$ 形式および $(0,q-1)$ 形式とみなせ，その意味で $\bar{\partial}_{z'}\hat{g}_j=\alpha_j$ が成立する．ただし $\bar{\partial}_{z'}$ は変数 $z'$ に関する $\bar{\partial}$ 作用素を表す．$\chi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を $0\le\chi\le 1$，$\chi|_{(\infty,1/2)}=1$，$\chi|_{(3/4,\infty)}=0$ をみたす $C^\infty$ 級関数とし，$\beta=\chi(|z'|)d\bar{z}_1\wedge\cdots\wedge d\bar{z}_q$ とおく．

正則関数に関する平均値の性質より $\forall z''\in\Omega_2$ に対し

$$|f_j(z'')-f_k(z'')| = C\left|\int_{|z'|<1}\langle\alpha_j-\alpha_k,\beta\rangle dV(z')\right| = C\left|\int_{|z'|<1}\langle\hat{g}_j-\hat{g}_k,\vartheta\beta\rangle dV(z')\right| \quad (\vartheta\text{ は }\bar{\partial}_{z'}\text{ の形式的共役})$$
$$\le C\left\{\int_{|z'|<1}|\hat{g}_j-\hat{g}_k|^2 dV(z')\right\}^{1/2}.$$

ただし $\langle\cdot,\cdot\rangle$ は $\mathbb{C}^q$ 上の微分形式に対する標準的な内積を表す．これを $z''$ に関して積分すれば (21) が得られる．□

Reinhardt 領域や Hartogs 領域の場合はどうだろうか．

例．$D=\{(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2\,|\,|z_1|^2+|z_2|^2<1, 0<|z_1|<1\}$
$N_1$ はコンパクトだが，$\partial D\supset\{z_1=0,|z_2|<1\}$．

このような (つまらない) 反例があるので，Reinhardt 領域についての結果は次の通りである ([11],[9])．

**定理 8.** $D$ は $\mathbb{C}^n$ の有界 Reinhardt 領域で，$\partial D$ は $q$ 次元以上の複素解析的部分集合を含まないとすると，Neumann 作用素 $N_q$ はコンパクトである．

Hartogs 領域に関しては P. Matheos [15] による次の結果が著しい．

**定理 9.** $\mathbb{C}$ のコンパクト集合 $W$ で細位相*4 に関して内点をもつものに対し，有界擬凸 Hartogs 領域 $D=\{(z,w)\in\mathbb{C}^2\,|\,z\in D_1, |w|<e^{-\Phi(z)}\}$ ($D_1$ は $\mathbb{C}$ の領域，$\Phi$ は劣調和) で，$\partial D$ は $C^\infty$ 級であり，強擬凸でない点の射影は $W$ に一致するもので，しかも Neumann 作用素 $N_1$ がコンパクトでないものが存在する．

Neumann 作用素のコンパクト性を掘り下げてポテンシャル論に突き当たったとは面白い．

## 補足: Hörmander の条件 $Z(q)$ について

歴史的には Neumann 作用素のコンパクト性は劣楕円型評価式の一つの帰結であり，幾何学的な判定条件は主に劣楕円性に関するものであった．その中で特に有名なのが Hörmander の条件 $Z(q)$ である．

*4 細位相: すべての劣調和関数が連続になるような位相のうちで最強 (=最小) のものをいう．

**定義.** $D$ は $\mathbb{C}^n$ 内の $C^2$ 級の境界をもつ有界領域で，$\rho$ をその定義関数とする．$D$ が $Z(q)$ を満たすとは，$D$ の各境界点における $\rho$ の Levi 形式が $n-q$ 個以上の正固有値又は $q+1$ 個以上の負固有値を持つことをいう

**定理 10.** $D$ が $Z(q)$ をみたせば，$N_q$ はコンパクトである．

最近，T. Hefer と I. Lieb[10] は，Henkin-Ramirez 型の積分核が $\overline{\partial}$ 方程式のコンパクトな解作用素を与えることを利用してこれを拡張した．

**定義.** 有界領域 $D$ が狭義 $q$ 擬凸であるとは，$\partial D$ の近傍 $U$ と $C^2$ 級実数値関数 $\rho$ が存在して

$$D \cap U = \{z \in U | \rho(z) < 0\}$$

かつ

$$\left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}\right) \text{は少なくとも } n-q+1 \text{ 個の正固有値をもつ}$$

となることをいう ($\partial D$ 上で $d\rho \neq 0$ となることは要請しない)．

**定理 11.** (cf.[10]) $D$ が狭義 $q$ 擬凸ならば $N_q$ はコンパクトである．

弱 $q$ 擬凸領域は難しいのであまり結果が出ない (これは独り言)．

# 参考文献


[1] Steven R. Bell, *The Bergman kernel function and proper holomorphic mappings*, Trans. Amer. Math. Soc. **270** (1982), 585–591.

[2] Harold P. Boas, *Small sets of infinite type are benign for the $\overline{\partial}$-Neumann problem*, Proc Amer. Math. Soc **103** (1988), 569–578.

[3] Harold P. Boas and Emil J. Straube, *Global regularity of the $\overline{\partial}$-Neumann problem: a survey of the $L^2$-sobolev theory*, Several Complex Variables (M. Schneider and Y.-T. Siu, eds.), Math. Sci. Res. Inst. Publ. 37, Cambridge University Press, 1999.

[4] David Catlin, *Global regularity of the $\overline{\partial}$-Neumann problem*, Complex Analysis of Several Variables (Yum-Tong Siu, ed.), Proc. Symp. Pure Math. 41, Amer. Math. Soc.,Providence, RI, 1984, pp. 39–48.

[5] David Catlin and John D'Angelo, *Positivity conditions for bihomogeneous polynomials*, Math. Res. Lett. **4** (1997), 555–567.

[6] Jean-Pierre Demailly, *Estimations $L^2$ pour l'operateur $\overline{\partial}$ d'un fibré vectoriel holomorphe semi-positif au desses d'une variété kählerienne compléte*, Ann Sci. Ecole Norm. Sup. **15** (1982), 457–511.

[7] G. B. Folland and J. J. Kohn, *The Neumann problem for the Cauchy-Riemann complex*, Ann. of Math. Stud. 75, Princeton University Press, 1972.

[8] Siqi Fu and Emil J. Straube, *Compactness of the $\overline{\partial}$-Neumann problem on convex domains*, J. Func. Anal. **159** (1998), 621–641.

[9] ______, *Compactness in the $\overline{\partial}$-Neumann problem*, Complex Analysis and Geometry, Ohio State Univ. Math. Res. Inst. Publ. 9, Walter de Gruyter, 2001, pp. 141–160.

[10] Torsten Hefer and Ingo Lieb, *On the compactness of the $\overline{\partial}$-Neumann operator*, Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse IX (2000), no. 3, 415–432.

[11] G. M. Henkin and A. Iordan, *Compactness of the Neumann operator for hyperconvex domains with non-smooth B regular boundary*, Math. Ann. **307** (1997), 151–168.

[12] J. J. Kohn, *Harmonic integrals on strongly pseudo-convex manifolds I*, Ann. of Math. **78** (1963), 112–148.

[13] ———, *Harmonic integrals on strongly pseudo-convex manifolds II*, Ann. of Math. **79** (1964), 450–472.

[14] J. J. Kohn and L. Nirenberg, *Non-coercive boundary value problem*, Comm. Pure. Appl. Math. **18** (1965), 443–492.

[15] Peter Matheos, *A Hartogs domain with no analytic discs in the boundary for which the $\overline{\partial}$-Neumann problem is not comact*, to appear in J. Geom. Anal.

[16] Jeffrey D. McNeal, *On large values of $L^2$ holomorphic functions*, Math. Res. Lett. **3** (1996), no. 2, 247–259.

[17] T. Ohsawa, *Vanishing theorems on complete Kähler manifolds*, Publ. RIMS, Kyoto Univ **20** (1984), 21–38.

[18] T. Ohsawa and Kensho Takegoshi, *On the extension of $L^2$ holomorphic functions*, Math. Z. **195** (1987), 197–204.

[19] Nessim Sibony, *Une classe de domaines pseudoconvexes*, Duke Math. J. **55** (1987), 299–319.

[20] Yum-Tong Siu, *The Fujita conjecture and the extension theorem of Ohsawa-Takegoshi*, Geometric complex analysis (Hayama, 1995) (J. Noguchi et al., ed.), World Scientific, Singapore, 1996, pp. 577–592.

[21] Emil J. Straube, *Plurisubharmonic functions and subellipticity of the $\overline{\partial}$-Neumann problem on non-smooth domains*, Math. Res. Lett. **4** (1997), 459–467.

[22] U. Venugopalkrishna, *Fredholm operators associated with strongly pseudoconvex domains in $\mathbb{C}^n$*, J. Funct. Anal. **9** (1972), 349–373.