

高レイノルズ数乱流における
普遍統計法則の計算科学的検証

名古屋大学大学院工学研究科計算理工学専攻

森下 浩二

目次

第1章	序論	5
1.1	乱流とは	5
1.2	乱流の普遍統計法則	5
1.3	乱流の計算科学的研究	7
1.4	本論文の構成	10
第2章	高レイノルズ数乱流におけるエネルギー散逸率の間欠性	13
2.1	はじめに	13
2.2	解析方法	15
2.2.1	DNS データ	15
2.2.2	乗算過程	16
2.2.3	ランダムウォーク	17
2.2.4	エネルギー散逸率の空間平均	17
2.3	解析結果	20
2.3.1	確率密度関数	20
2.3.2	モーメント	25
2.3.3	相関	29
2.3.4	統計的非独立性の影響	32
2.3.5	簡単な近似	34
2.3.6	相関の相似性	38
2.4	まとめ	45
第3章	高レイノルズ数乱流におけるエンストロフィの生成と輸送	47
3.1	はじめに	47
3.2	エンストロフィの生成と流束	47
3.3	2点渦度相関の発展方程式	49
3.4	エンストロフィのスケールごとの表現	52
3.4.1	スペクトル空間、実空間でのエンストロフィ密度	52
3.4.2	実空間でのエンストロフィの流束と生成	53

3.5	準平衡領域でのエンストロフィの生成と流束の評価	54
3.5.1	慣性小領域での評価	54
3.5.2	散逸領域での評価	55
3.6	数値計算との比較	57
3.7	まとめ	64
第4章	高レイノルズ数壁乱流における局所等方性の検証	65
4.1	はじめに	65
4.2	チャンネル乱流	66
4.2.1	座標系	66
4.2.2	支配方程式	66
4.3	DNSの方法	68
4.3.1	時間発展	68
4.3.2	流れ方向及びスパン方向の空間離散化	68
4.3.3	壁垂直方向の空間離散化	71
4.3.4	計算条件	75
4.4	可視化	76
4.5	基礎統計量	78
4.5.1	平均速度分布	78
4.5.2	速度変動成分のRMS値	79
4.5.3	Taylor マイクロスケール	79
4.5.4	Taylor マイクロスケール・レイノルズ数	81
4.5.5	エネルギー散逸率とKolmogorovスケール	85
4.6	エネルギースペクトルと構造関数の Re_τ 依存性	87
4.6.1	速度の1次元スペクトル	87
4.6.2	速度構造関数	87
4.7	せん断パラメータ	92
4.8	局所等方性の検証	97
4.9	2次元エネルギースペクトル	100
4.10	まとめ	103
第5章	結論	105
付録A	チェビシェフ多項式	107
付録B	エネルギースペクトル	109

第1章 序論

1.1 乱流とは

気候変動や地球環境の変化などの地球規模の現象の予測や、航空機や自動車等の開発設計など、幅広い理学・工学分野で流れ場の予測・解明が重要な問題となっている。これらに見られる流れは、一般に複雑で乱れた流れ、乱流である。また、その乱流の多くは一般に非圧縮性の乱流であり、次式のような Navier-Stokes 方程式という決定論的な物理法則に従う現象として記述することが可能である。

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f}, \quad (1.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (1.2)$$

ここで、それぞれ \mathbf{u} は速度、 p は圧力、 ρ は密度、 ν は動粘性率、 \mathbf{f} は外力、式 (1.2) は非圧縮条件である。しかしながら、方程式の強非線形性に起因して、巨大自由度、多階層性、時間的・空間的な間欠性などの性質を有するため、乱流の運動の一つ一つを予測・解析することは一般に困難である。そのため、その統計的な理解・予測が重要となる。また、巨大自由度を持つ乱流場を理解・予測するためには、乱流場の適切な情報の縮約あるいはモデル化が必須である。その際、乱流場を特徴づける統計量が満たす何らかの普遍的な法則 (統計法則) が非常に有力な手がかりとなる。

1.2 乱流の普遍統計法則

乱流の統計的研究の基礎となった考えとして、Richardson によるエネルギーカスケードの描像 [1] がある。乱流中では一般に、エネルギーが巨視的なスケール L で外力により運動エネルギーとして注入され、そのエネルギーは渦同士の非線形相互作用によって、より小さなスケールへと



図 1.1: エネルギーカスケードの概念図。

移っていき、最終的には粘性が重要となる小さなスケール η で熱として $\langle \epsilon \rangle$ の割合で散逸し、熱エネルギーに変換される (図 1.1)。巨視的なスケールで注入されるエネルギーと、小さなスケールでの粘性によるエネルギー散逸率 $\langle \epsilon \rangle$ とが釣り合うことにより、乱流の準平衡状態が維持されることとなる。このような乱流中における、スケール間でのエネルギーの流れをエネルギーカスケードと呼ぶ。その結果として、乱流中には大小様々な大きさの渦が混在することとなり、これが乱流の重要な特徴の一つとなっている。

このエネルギーカスケードの過程を経ることで、渦は巨視的なスケールの情報を次第に失っていき、十分小さなスケールでは、巨視的な情報にはよらない統計的に一様かつ等方的な普遍平衡状態が実現すると期待される。Kolmogorov は、この直感的な考えから普遍平衡仮説として、レイノルズ数 (非線形性の強さを表す無次元パラメータ) の十分高い乱流の、境界から十分離れ十分小さなスケールでは局所等方性が満たされ、境界条件や外力の違いによらない普遍的な統計法則が存在するとした。さらに、十分小さなスケールの統計はエネルギー散逸率の平均 $\langle \epsilon \rangle$ と動粘性率 ν によって決定されるとし、次元解析によりさまざまな統計量に成り立つスケーリング則を予測した。これが 1941 年に発表された Kolmogorov による理論 [2] で、これを今後 K41 と呼ぶ。

Kolmogorov による予測は、平均や分散などの低次の統計量については実験・観測や数値計算による結果とよく一致していることが分かっている。例えば、K41 によると慣性小領域における 1 次元エネルギースペク

トル $E_{11}(k_1)$ は以下ようになる。

$$E_{11}(k_1) = C_1 \langle \epsilon \rangle^{2/3} k_1^{-5/3}. \quad (1.3)$$

ここで、 k_1 は波数の 1 成分、 C_1 は普遍定数である。また慣性小領域とは、乱流の巨視的なスケールよりは十分小さく、かつ粘性の影響を受けないくらいには十分大きいスケール領域のことをいう。この領域では、スケール間のエネルギーの輸送が Navier-Stokes 方程式の非線形項によってのみ行われる。K41 では、慣性小領域の統計はエネルギー散逸率の平均 $\langle \epsilon \rangle$ によってのみによって決まり動粘性率 ν にはよらないとされ、何らかの普遍的性質が存在すると期待されている。

図 1.2 にさまざまな実験・観測及び数値計算によって得られたエネルギースペクトルを示す。エネルギースペクトルは大きなスケール(低波数)では異なっているが、小さなスケールでは流れによらない普遍的な形となっていることが分かる。また、式 (1.3) と一致し $k_1^{-5/3}$ のべきが見られ、その波数領域はレイノルズ数が大きくなるほど広がっていることが確認できる。

乱流の普遍統計法則の追及のためには、普遍性が期待される慣性小領域が十分に広い必要がある。このような広い慣性小領域が存在するためには、乱流中の最大スケールと最小スケールとが十分に分離されている必要がある(図 1.3)。乱流中の最大スケールを L 、最小スケールを η とすると、その比は

$$\frac{L}{\eta} \propto Re^{3/4}, \quad (1.4)$$

のように、レイノルズ数 Re によって書けることが分かっている。すなわち、十分にスケールが分離され広い慣性小領域が存在するためには、十分高いレイノルズ数が必要となる。よって、乱流の普遍統計法則を探るには、スケール分離が進み十分に広い慣性小領域を持った高レイノルズ数乱流の解析が必要不可欠である。

1.3 乱流の計算科学的研究

近年のコンピュータ性能の飛躍的な向上にともない(図 1.4)、乱流現象の解明のためには、計算科学的手法に基づくデータ解析が有用な手段となってきた。特に、乱流の基礎方程式をモデル化することなく直接解く直接数値シミュレーション (Direct Numerical Simulation; DNS) は、

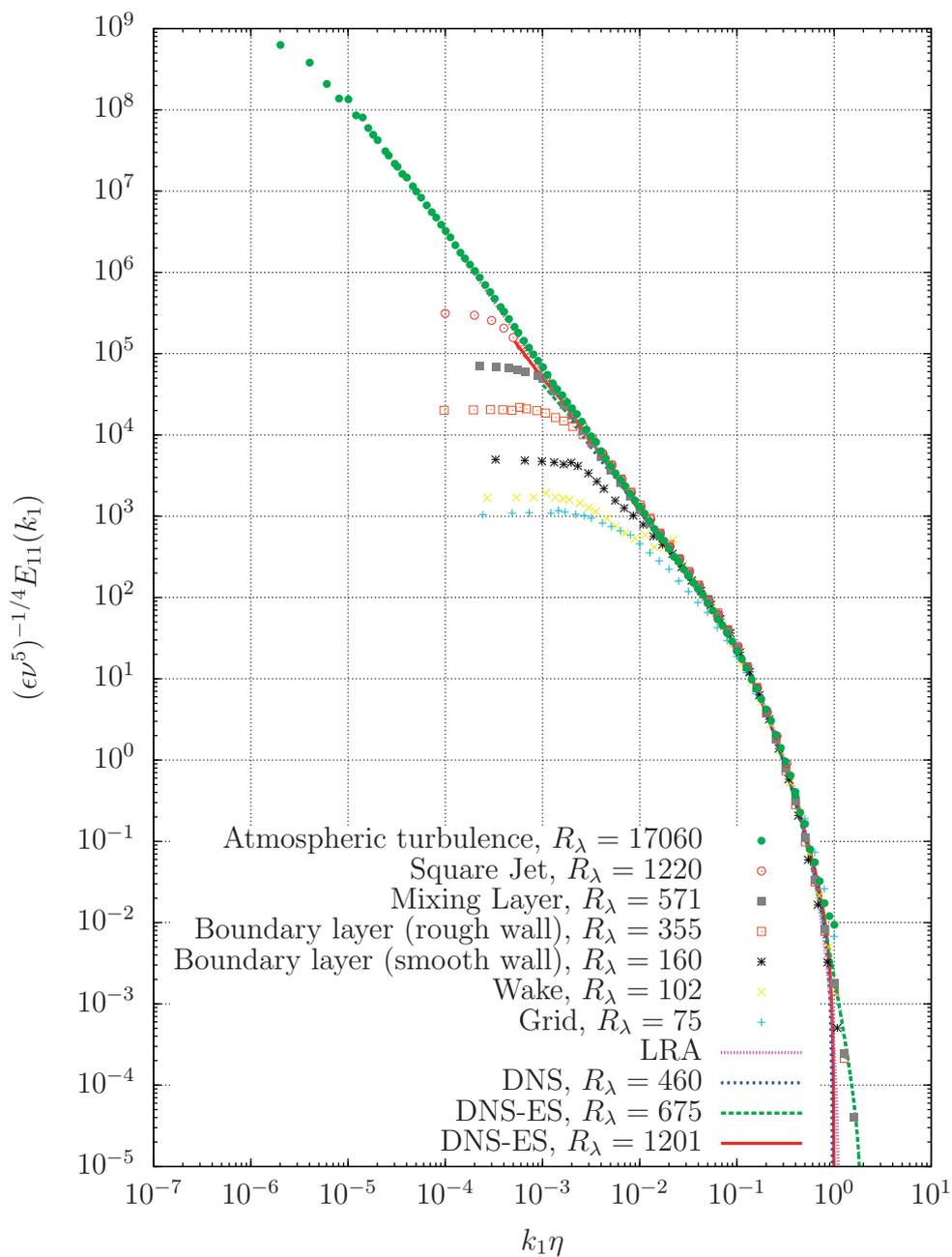


図 1.2: さまざまな実験・観測及び数値計算によって得られた 1 次元エネルギー・スペクトル ([3] より)。DNS-ES 以外は文献 [4] 中のデータの再プロットである。ここで、 R_λ は Taylor マイクロスケール・レイノルズ数である。

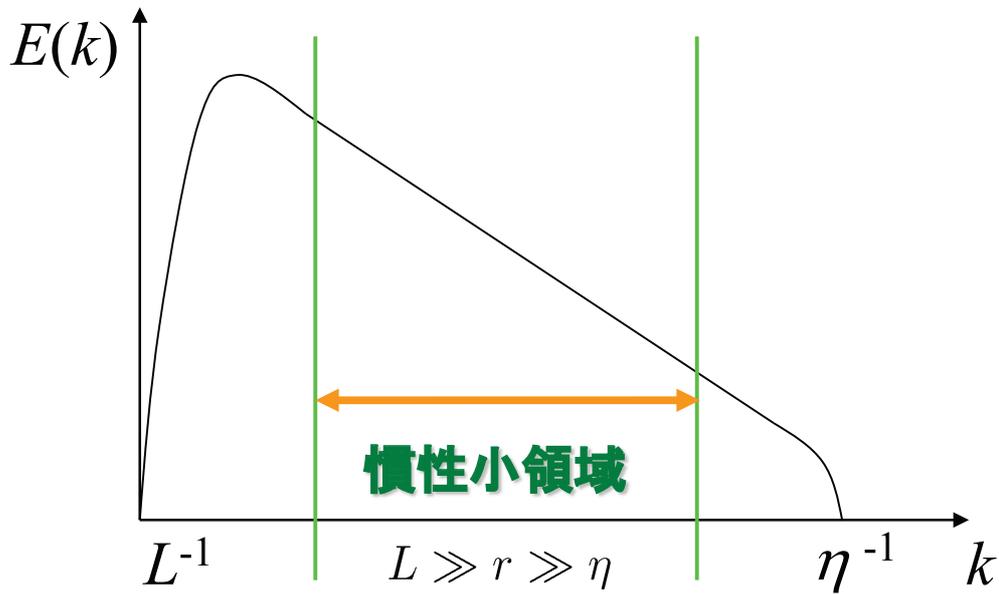


図 1.3: 慣性小領域とスケールの分離。



図 1.4: スーパーコンピュータの性能の発展 (<http://www.top500.org/>より)。横軸が年の経過、縦軸が計算性能を表す。スーパーコンピュータの性能は10年で約1000倍となっている。

実験とは異なり、よく制御された条件下で測定に伴う仮説や実験誤差なしに、詳細なデータを得ることが可能という利点をもつ。

一般に乱流の自由度は、レイノルズ数の4分の9乗に比例して増大する。そのため、乱流の普遍性が期待出来るような高いレイノルズ数の乱流場を得るためには、莫大な計算資源が必要となる。

かつてはDNSで到達可能なレイノルズ数は小さく、乱流の普遍性を探るには不十分であった。しかし、この制約は近年大きく緩和しつつある。たとえば、地球シミュレータ(ES)を用いて、従来と桁違いに大規模な非圧縮一様等方性乱流のDNSが実現されている[5, 6, 7]。このようなDNSデータは、高レイノルズ数乱流のもつ普遍的法則性の解明のための有用な手がかりを与えると期待される。

1.4 本論文の構成

本論文では、計算科学的手法による乱流の普遍統計法則の検証と追及を目的として行った以下の3つの研究について報告する。

- 3次元一様等方性乱流の大規模DNSデータの統計解析
 - 第2章 高レイノルズ数乱流におけるエネルギー散逸率の間欠性
 - 第3章 高レイノルズ数乱流におけるエンストロフィの生成と輸送
- 高レイノルズ数チャンネル乱流の大規模DNSの実現とその統計解析
 - 第4章 高レイノルズ数壁乱流における局所等方性の検証

以下に、それぞれの研究についての概要を述べる。

第2章 高レイノルズ数乱流におけるエネルギー散逸率の間欠性

K41による予測は、低次の統計量については実験・観測や数値計算による結果とよく一致している一方、高次の統計量になるほどは、そのズレが大きくなることが分かっている。これはエネルギー散逸率の間欠性によるものと考えられており[8]、K41を超えた普遍統計法則の追求のためにはエネルギー散逸率の統計についての理解が重要である。

この間欠性の効果をK41にどのように取り入れるかについて、過去さまざまな間欠性モデルが提案されてきた[9, 10, 11, 12]。これらの間欠性

モデルは共通して、乱流中の自己相似的なエネルギーカスケードを局所エネルギー散逸率の乗算過程として表現し、その乗算過程の統計的性質について適当な仮定をすることにより導かれている。しかし、その統計的仮定は必ずしも自明なものではなく、また過去の実験による検証も様々なされてきたが、未だに統一的な結論は出ていない [13, 14, 15, 16, 17, 18]。

本研究では、世界最大のレイノルズ数を実現した 3 次元一様等方性乱流の大規模 DNS データ [5, 6, 7] を用いて、エネルギー散逸率に関する統計について解析し、さらにその中で、過去、間欠性モデルの導出の際に用いられてきた統計的仮定についての検証を行った。

第 3 章 高レイノルズ数乱流におけるエンストロフィの生成と輸送

運動エネルギーのような保存量のカスケードの概念は、高レイノルズ数乱流の現象論において中心的なものとなっている。たとえば、エネルギーカスケードにおいては、小さなスケールへの運動エネルギーの流れがある。レイノルズ数が十分高ければ、慣性小領域ではカスケードを支配する動的プロセスは粘性によらないと考えられる。

しかしながら、渦度について考える場合はより複雑である。エンストロフィは、大きなスケールから小さなスケールへと輸送されるといったような、エネルギーとのいくつかの共通な性質を持っているが、渦の伸張が渦度の生成に寄与するために一般的なカスケードの考えは適用できない。さらに、エンストロフィの多くは小さなスケールで直接生成されるために、散逸するためにスケール間を移動する必要がない。それにもかかわらず、慣性領域では渦の伸張があり、その分のエンストロフィの小さなスケールへの輸送が必要である。

以上の考えのもと、本研究では高レイノルズ数乱流中における渦の伸張とカスケードの関係を明らかにするために、渦度を特徴づけるエンストロフィに着目し、その各スケールにおける生成と輸送を大規模乱流 DNS データによって評価し、理論による予測との比較を行った。

第 4 章 高レイノルズ数壁乱流における局所等方性の検証

自然界や工学分野において見られる乱流は一般に壁などの境界を有している。固体壁近くを流れる乱流は壁乱流と呼ばれ、その壁近傍の流れには粘性の影響を強く受ける境界層と呼ばれる領域が存在する。この境界層は身のまわりのいたるところで見られる。例えば、航空機・列車・自動車などの移動している物体近傍の流れや、水道や石油のパイプライン

等の管内流れなどに現れ、それらの性能や効率に深く関わっている。そのため、壁乱流の理解やその性質の解明は工学的応用の面でも非常に重要である。

K41の普遍平衡仮説の中では、レイノルズ数の十分高い乱流の、境界から十分離れ十分小さなスケールでは局所等方性が満たされるとされた。しかしながら、実際に近くに境界の存在する乱流において、局所等方性が満たされるためには、どれくらい境界から離れていれば十分なのか、また、どれくらいスケールが小さければ十分なのかということは必ずしも自明なことではない。

本研究では、壁乱流の中で最も基礎的な問題の一つであるチャンネル乱流のDNSコードを開発し、地球シミュレータを用いた大規模並列計算により、現在世界最大のレイノルズ数のチャンネル乱流DNSを実現し、そのデータ解析により、高レイノルズ数壁乱流における局所等方性の成立についての定量化を試みた。

第2章 高レイノルズ数乱流におけるエネルギー散逸率の間欠性

2.1 はじめに

乱流の統計的研究の基礎となったものとして、1941年のKolmogorovによる理論 (K41) がある [2]。その中でKolmogorovは、レイノルズ数の十分高い乱流の境界から十分離れ十分小さなスケールでは、境界条件や外力などの巨視的なスケールの振る舞いにはよらない普遍的な統計法則が存在すると仮定した。さらに、十分小さなスケールの統計はエネルギー散逸率の平均と動粘性率によって決定されるとし、次元解析により様々な統計量に成り立つスケージング則を予測した。Kolmogorovによる予測は、低次の統計量については、多くの実験や数値計算による観測結果と一致している。一方で、高次の統計量になるほど観測とのずれが大きくなることが分かっている。その理由は、エネルギー散逸率の空間的または時間的な強いゆらぎ (間欠性) を考慮していないためであると早くから指摘されてきた [8]。

エネルギー散逸率の間欠性をどう理論的に表現するかは、間欠性の問題として知られ、過去に多くの間欠性モデルが提案されてきた。例えば、主なものとして対数正規 (log-normal) モデル [9, 10]、 β モデル [11] やフラクタルモデル [12] などが挙げられる。これらの研究には、ある共通する考え方があり、それは乱流中での自己相似的なエネルギーカスケードを局所エネルギー散逸率 ϵ_n の乗算過程

$$\epsilon_{n+1} = \alpha_n \epsilon_n, \quad (2.1)$$

として表現するというものである (図 2.1)。ここで、 ϵ_n は各スケール r_n でのエネルギー散逸率の空間平均である。その際に乗算係数 α_n の統計について何らかの分布を仮定することにより、最終的にエネルギー散逸率

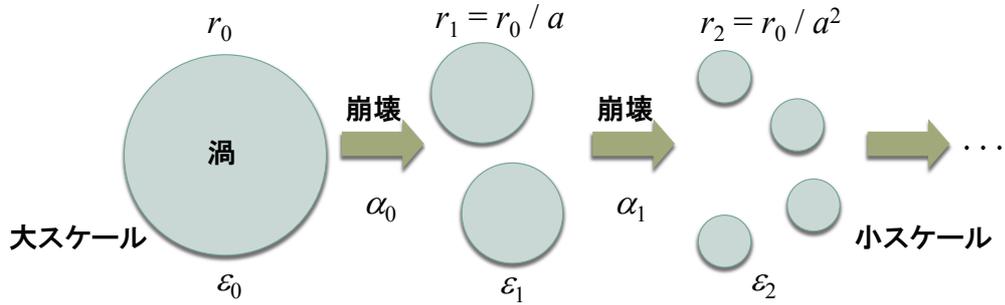


図 2.1: エネルギーカスケードと乗算過程の概念図。

の統計を決定している。そして、仮定する α_n の統計分布の違いにより、上述したようなさまざまな間欠性のモデルが導かれる。

過去提案された間欠性モデルの多くでは以下のような統計的過程をしている

- (i) α_n の統計がスケールによらない
- (ii) α_n は互いに統計的に独立である

しかしながら、これらの仮定は必ずしも自明なものではなく、その重要性といくつかの先駆的研究にも関わらず、実験あるいは DNS に基づく、乗算係数の統計についての知見は多くない。これは一つには実験的にはエネルギー散逸率の測定が困難なことによる。そのためこれまで散逸率そのものではなく速度勾配の自乗などの代用物 (surrogate) が測定されている [13, 14, 15, 16, 17, 18]。一方、DNS ではこのような測定の困難はないが、これまでの十分高いレイノルズ数の乱流の実現は困難であった。

そこで本研究では、世界最大のレイノルズ数を実現した 3 次元一様等方性乱流の大規模 DNS データ [5, 6, 7] を用いて、エネルギー散逸率に関する統計について解析し、さらにその中で、過去、間欠性モデルの導出の際に用いられてきた統計的仮定の検証をする。

2.2 解析方法

2.2.1 DNS データ

本研究の解析で用いるデータ [5, 6, 7] は、一辺が 2π の周期ボックス内で、Navier-Stokes 方程式

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial(u_i u_j)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \nabla^2 u_i + f_i, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0, \quad (2.3)$$

に従う非圧縮 3 次元一様等方性乱流の DNS により得られた乱流場である。ここで、 u_i, p, ν, ρ, f_i は、それぞれ速度、圧力、動粘性係数、密度および外力である。

DNS では、空間微分にはフーリエ・スペクトル法、時間積分には 4 次の Runge-Kutta 法を用い、その際、エイリアジング・エラーの除去には phase shift 法を用いている。また、統計的に準定常状態の乱流場を実現するために、外力項に負の粘性を用いている。それは、波数空間において外力を $\hat{f}_i(\mathbf{k}) = -c \hat{u}_i(\mathbf{k})$ として、 c を波数 $k < 2.5$ の範囲でのみ一定の値を持たせ、その値は全運動エネルギーが一定に保たれるように、すなわち $\langle u_i u_i \rangle / 2 = 0.5$ が満たされるように時間発展の各ステップで調整するというものである。DNS におけるパラメータ k_{\max} と動粘性係数 ν は $k_{\max} \eta$ の値により決定されている。一般に $k_{\max} \eta$ の値の値が小さいほうが実現できるレイノルズ数は大きくなるが、 $|k| < k_{\max}$ での波数打ち切りの影響が無視できなくなる。

表 2.1 に DNS の主なパラメータを示す。DNS は 2 つのグループからなり、Series 1 では $k_{\max} \eta$ の値を約 1、Series 2 では約 2 となるように ν を決めてある。ここで、Taylor マイクロスケール $\lambda = (15\nu u'^2 / \langle \epsilon \rangle)^{1/2}$ により定義されるレイノルズ数 R_λ は

$$R_\lambda = \frac{u' \lambda}{\nu}, \quad (2.4)$$

であり、 $3u'^2/2 = E$ である。また、積分長 L は

$$L \equiv \frac{\pi}{2u'^2} \int_0^{k_{\max}} E(k)/k dk, \quad (2.5)$$

で定義され、 $E(k)$ はエネルギー・スペクトルである。

表 2.1: DNS のパラメータ。

	N	R_λ	k_{\max}	$10^4\nu$	$\langle\epsilon\rangle$	L	λ	$10^3\eta$
Run256-1	256	167	121	7.0	0.0849	1.13	0.203	7.97
Run512-1	512	257	241	2.8	0.0902	1.02	0.125	3.95
Run1024-1	1024	471	483	1.1	0.0683	1.28	0.0897	2.10
Run2048-1	2048	732	965	0.44	0.0707	1.23	0.0558	1.05
Run4096-1	4096	1201	1930	0.173	0.0668	1.17	0.0360	0.528
Run256-2	256	94	121	20	0.0936	1.10	0.326	17.1
Run512-2	512	173	241	7.0	0.0795	1.21	0.210	8.10
Run1024-2	1024	268	483	2.8	0.0829	1.12	0.130	4.03
Run2048-2	2048	429	965	1.1	0.0824	1.01	0.0817	2.00
Run4096-2	4096	675	1930	0.44	0.0831	1.04	0.0515	1.01

本研究では、表 2.1 の内、Run256-1、Run512-1、Run1024-1、Run2048-1、Run256-2、Run512-2、Run1024-2、Run2048-2 のデータに対して解析を行なう。

2.2.2 乗算過程

半径 r の球内で体積平均したエネルギー散逸率 ϵ_r を以下のように定義する。

$$\epsilon_r(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{V_r} \int_{|\mathbf{y}| < r} \epsilon(\mathbf{x} + \mathbf{y}, t) d^3\mathbf{y}, \quad (2.6)$$

ここで、 $V_r = 4\pi r^3/3$ は半径 r の球の体積で、 $\epsilon(\mathbf{x}, t)$ は、位置 \mathbf{x} 、時間 t におけるエネルギー散逸率である。今後、 $\epsilon(\mathbf{x}, t)$ における \mathbf{x}, t は省略する。

$\epsilon_n \equiv \epsilon_{r_n}$, ($n = 0, 1, 2, \dots$) として、 ϵ_n を次のように分解する。

$$\frac{\epsilon_n}{\epsilon_0} = \frac{\epsilon_n}{\epsilon_{n-1}} \frac{\epsilon_{n-1}}{\epsilon_{n-2}} \dots \frac{\epsilon_1}{\epsilon_0}, \quad (2.7)$$

ここで、 r_n は n が大きくなるにつれて小さくなる長さスケールである。さらに、

$$\alpha_n \equiv \frac{\epsilon_{n+1}}{\epsilon_n}, \quad (2.8)$$

とすると、結局

$$\frac{\epsilon_n}{\epsilon_0} = \alpha_{n-1}\alpha_{n-2}\cdots\alpha_0, \quad (2.9)$$

となる。その結果 ϵ_n は

$$\epsilon_{n+1} = \alpha_n \epsilon_n, \quad (2.10)$$

に従う乗算過程と見ることが出来る。この種の考えは、Kolmogorov[9] と Oboukhov[10] により最初に導入された。

本研究では

$$r_n = r_0 a^{-n}, \quad (2.11)$$

とする。ここで、 $a(> 1)$ はスケール比、 r_0 はエネルギー保有渦の特徴的な長さスケールである。

2.2.3 ランダムウォーク

ここで、仮想的な位置 x_n 、時間 τ_n 、速度 u_n を以下のように導入する。

$$x_n \equiv \log \left(\frac{\epsilon_n}{\epsilon_0} \right), \quad (2.12)$$

$$\tau_n \equiv \log \left(\frac{r_0}{r_n} \right) = n \Delta \tau, \quad (\Delta \tau \equiv \log a) \quad (2.13)$$

$$u_n \equiv \frac{x_{n+1} - x_n}{\tau_{n+1} - \tau_n} = \frac{\log(\epsilon_{n+1}/\epsilon_n)}{\Delta \tau} = \frac{\log \alpha_n}{\log a}. \quad (2.14)$$

ここで、 \log は自然対数である。その結果、(2.9) は以下のように書き換えられる

$$x_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k \Delta \tau. \quad (2.15)$$

すると、位置 x_n は1次元ランダムウォークとみなすことが出来る。

本研究では、 ϵ_n 、 α_n の代わりに、それぞれの \log をとったものに対応する x_n 、 u_n について解析を行なう。

2.2.4 エネルギー散逸率の空間平均

式(2.6)で定義される ϵ_r の計算を、フーリエ変換を用いて効率的に行なう方法を考える。まず、以下のような関数を導入する。

$$G_r(\mathbf{x}) = \begin{cases} (2\pi)^3/V_r & (|\mathbf{x}| < r) \\ 0 & (|\mathbf{x}| \geq r). \end{cases} \quad (2.16)$$

すると、式 (2.6) は次のように書き換えられる。

$$\epsilon_r(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \epsilon(\mathbf{x} + \mathbf{y}) G_r(\mathbf{y}) d^3 \mathbf{y}. \quad (2.17)$$

ここで、 $\epsilon(\mathbf{x})$ 、 $G_r(\mathbf{x})$ のフーリエ変換

$$\hat{\epsilon}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \epsilon(\mathbf{x}) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) d^3 \mathbf{x}, \quad (2.18)$$

$$\hat{G}_r(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int G_r(\mathbf{x}) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) d^3 \mathbf{x}, \quad (2.19)$$

を用いると、式 (2.17) は以下のようにかける。

$$\begin{aligned} \epsilon_r(\mathbf{x}) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \left\{ \int \hat{\epsilon}(\mathbf{p}) e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y})} d^3 \mathbf{p} \right\} \left\{ \int \hat{G}_r(\mathbf{q}) e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{y}} d^3 \mathbf{q} \right\} d^3 \mathbf{y}, \\ &= \iint \hat{\epsilon}(\mathbf{p}) \hat{G}_r(\mathbf{q}) e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} \left\{ \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i(\mathbf{p} + \mathbf{q}) \cdot \mathbf{y}} d^3 \mathbf{y} \right\} d^3 \mathbf{p} d^3 \mathbf{q}, \\ &= \iint \hat{\epsilon}(\mathbf{p}) \hat{G}_r(\mathbf{q}) e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} \delta(\mathbf{p} + \mathbf{q}) d^3 \mathbf{p} d^3 \mathbf{q}, \\ &= \int \hat{\epsilon}(\mathbf{p}) \hat{G}_r(-\mathbf{p}) e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} d^3 \mathbf{p}, \\ &= \int \hat{\epsilon}(\mathbf{k}) \hat{G}_r^*(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d^3 \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

すなわち、 $\hat{\epsilon}(\mathbf{k}) \hat{G}_r^*(\mathbf{k})$ のフーリエ逆変換から $\epsilon_r(\mathbf{x})$ が求められる。ここで、* は複素共役を表し、また式変形には以下の等式を用いた。

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i(\mathbf{p} + \mathbf{q}) \cdot \mathbf{y}} d^3 \mathbf{y} = \delta(\mathbf{p} + \mathbf{q}), \quad (2.21)$$

ここで、 $\delta(\mathbf{p} + \mathbf{q})$ は Dirac の delta 関数である。

式 (2.20) の計算には、 $\hat{G}_r(\mathbf{k})$ が必要となるが、それは以下に示すのよ

うに解析的に計算できる。式 (2.16)、(2.19) より

$$\begin{aligned}
\hat{G}_r(\mathbf{k}) &= \frac{1}{V_r} \int_{|\mathbf{x}| < r} \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) d^3\mathbf{x}, \\
&= \frac{1}{V_r} \int_0^r ds \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi s^2 \sin\theta e^{-iks \cos\theta}, \\
&= \frac{2\pi}{V_r} \int_0^r ds \int_0^\pi d\theta s^2 \sin\theta e^{-iks \cos\theta}, \\
&= \frac{4\pi}{V_r} \int_0^r ds s^2 \frac{\sin(ks)}{ks}, \\
&= \frac{4\pi r^3}{V_r} \frac{\sin(kr) - kr \cos(kr)}{(kr)^3}, \\
&= 3 \frac{\sin(kr) - kr \cos(kr)}{(kr)^3}, \tag{2.22}
\end{aligned}$$

と求められる。ここで、 $k = |\mathbf{k}|$ である。

式 (2.17) は一種の畳み込み演算であり、それを直接計算しようとする
と計算量は $O(N^6)$ となり膨大な計算時間が必要となる。一方で式 (2.20) を
用いると、計算量はそれぞれ $\hat{\epsilon}(\mathbf{k})\hat{G}_r^*(\mathbf{k})$ の計算には $O(N^3)$ 、フーリエ (逆)
変換の計算には高速フーリエ変換 (FFT) を用いることにより $O(N^3 \log N)$
となり、結局全体では $O(N^3 \log N)$ ですみ、非常に効率的に計算ができる。

2.3 解析結果

2.3.1 確率密度関数

図 2.2 に式 (2.12) で定義される x_n の確率密度関数 (Probability Density Function; PDF) を、 $\tau \equiv \log(r_0/r_n) = t_n \equiv n \log 2, (n = 0, 1, 2, \dots, 8)$ に対して、Run2048-1 のデータについて求めたものを示す。ここで、 $r_0/\eta = (\pi/2) \times 10^3 \sim 1571$ である。 τ が大きくなる、つまりスケールが小さくなるにつれて、PDF の幅は広がっていき、ピークの値が減少していくことがわかる。

また、同じデータを標準偏差 σ_x で規格化した偏差 $x_n - \langle x_n \rangle$ について図示すると (図 2.3)、ある τ_n の範囲で互いによく重なり、またガウス分布 (Gaussian) に近いことが分かる。

次に、図 2.4 に式 (2.14) で定義される u_n の PDF を、 $\tau \equiv \log(r_0/r_n) = t_n \equiv n \log 2, (n = 0, 1, 2, \dots, 8)$ に対して、Run2048-1 のデータについて求めたものを示す。ここで、スケール比は $a = 2^{1/4}$ としている。 $\tau \geq t_6$ を除いて、 τ が大きくなるにつれて PDF の幅は広がっていくことが分かる。ここで、 $\tau = t_6$ は $r/\eta \sim 24.5$ に対応し、 $\tau \geq t_6$ は慣性領域 ($r/\eta > 50$) よりも小さいスケール領域である。また、 u_n の PDF は明らかに τ すなわちスケールに依存しており、これは、仮定 (i) 『 α_n の統計がスケールによらない』を支持しない結果であると言える。

Novikov[19] は、 ϵ は負の値を取らないという事実に基づいたある等式を導出した。この事実は、 $r^3 \epsilon_r$ が r の非減衰関数であることを示しており、これを u_n について表すと、任意の n と a に対して

$$u_n \leq 3, \quad (2.23)$$

となる。図 2.4 は、この不等式と一致しており、また $u_n > 1$ では P_u は非常に小さな値となっている。

次に、同じデータをそれぞれの標準偏差 σ_u で規格化したものを図 2.5 に示す。PDF は正規分布からは少しずれている。特に $\tilde{u} \equiv u - m_u < 0$ の領域では大きくずれており、そこでは、グラフの直線的な振る舞いが見られる。すなわち、

$$P_u(u) \propto \exp(\gamma \tilde{u} / \sigma_u), \quad (2.24)$$

という簡単な式で記述できる領域があることがわかる。ここで、 γ はグラフにおける直線の傾きに対応している。 γ の値を見積もると $\gamma \sim 3/2$ となる。

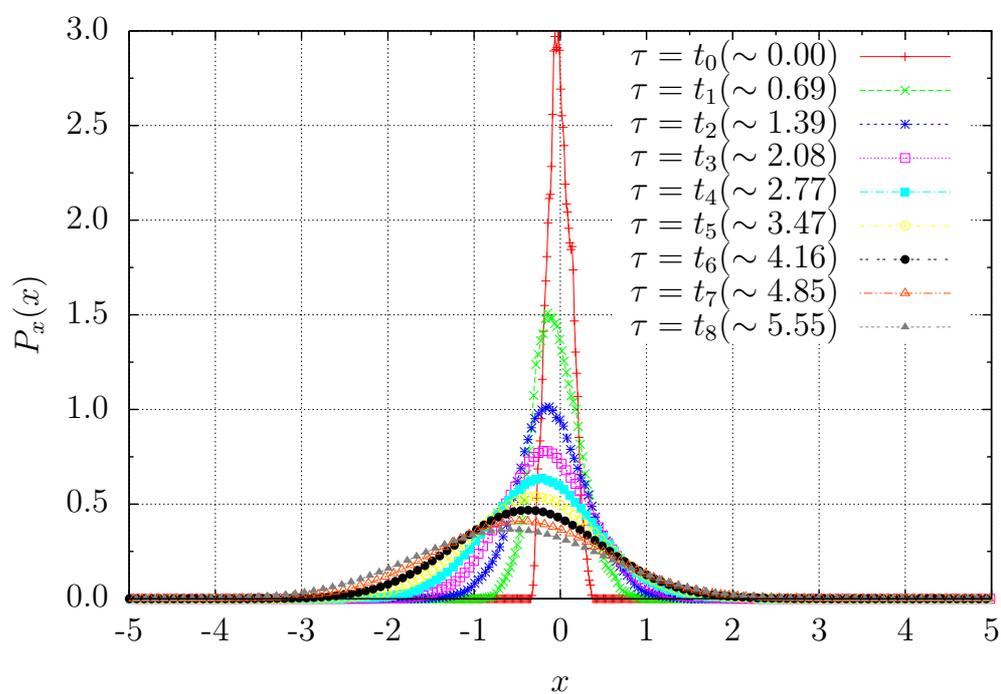


図 2.2: x_n の PDF $P_x(x)$. (Run2048-1, $R_\lambda = 732$)

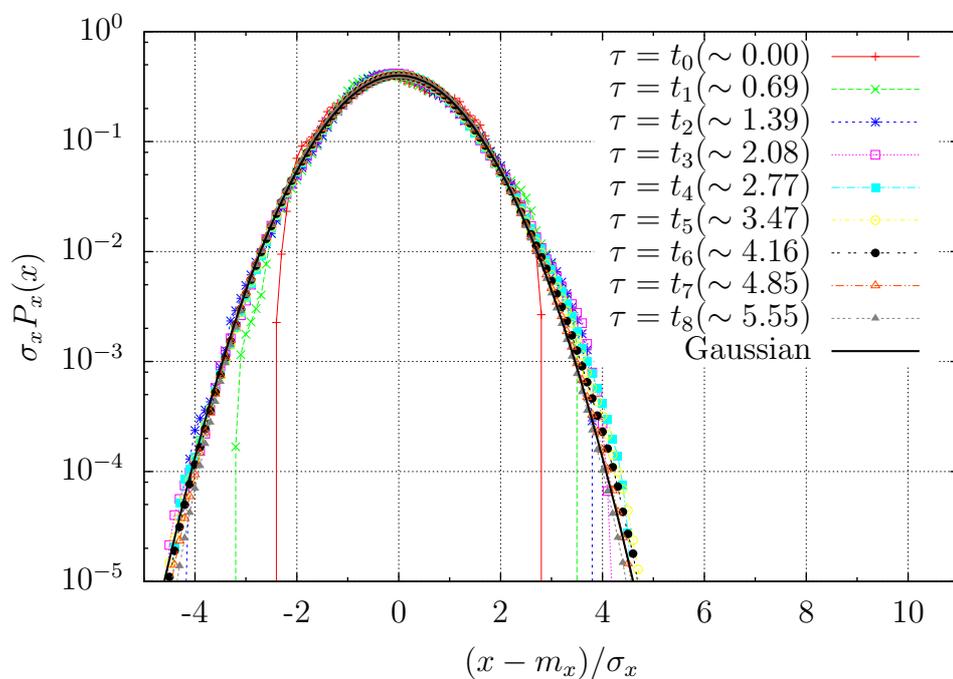


図 2.3: x_n の規格化した PDF $P_x(x)$. (Run2048-1, $R_\lambda = 732$)

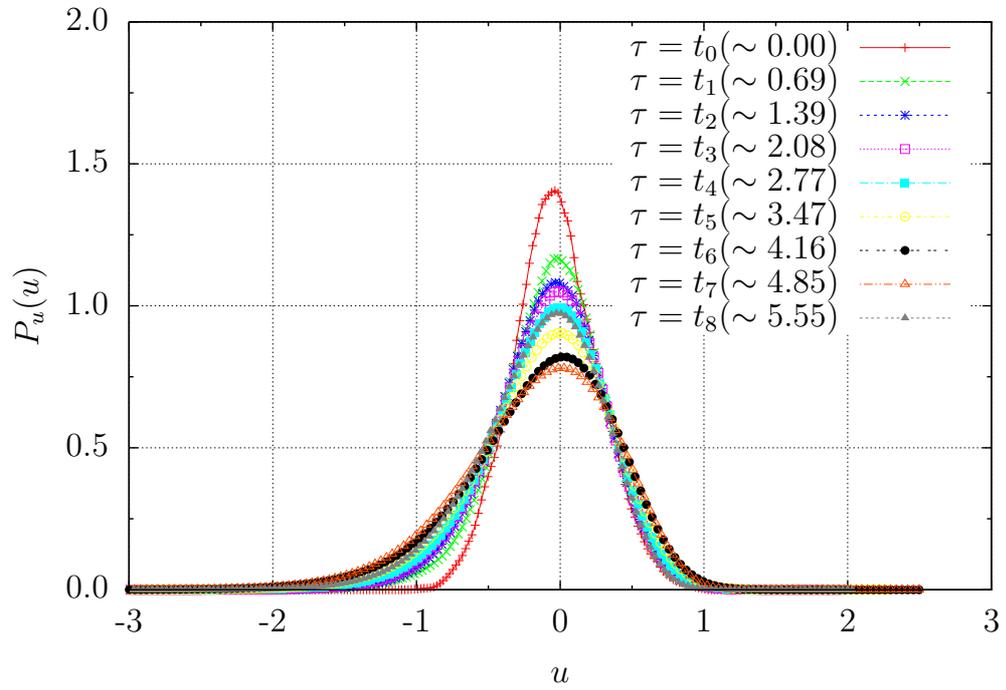


図 2.4: u_n の PDF $P_u(u)$. (Run2048-1, $R_\lambda = 732$, $a = 2^{1/4}$)

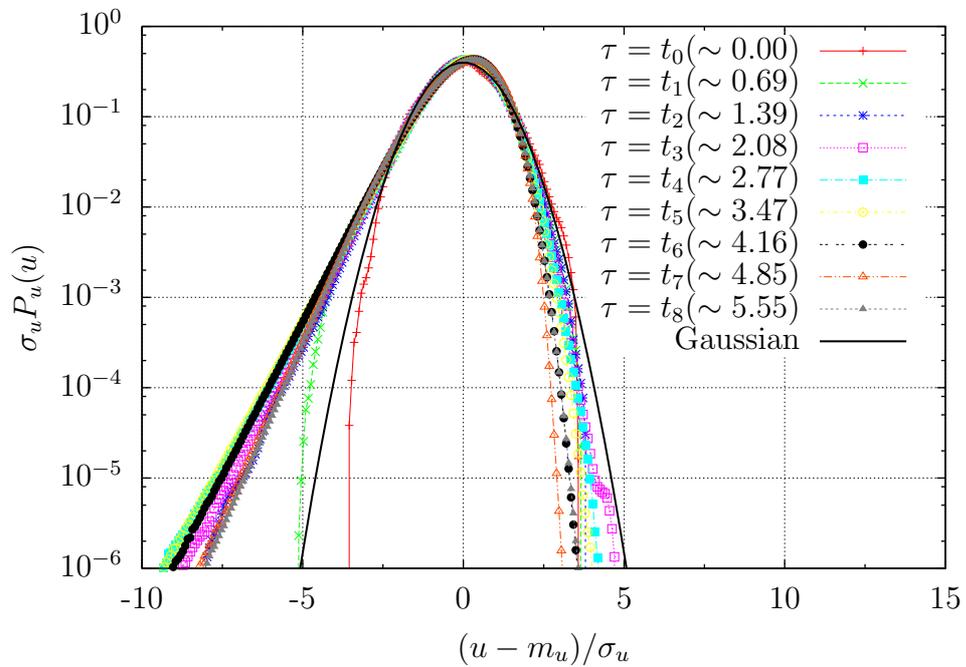


図 2.5: u_n の規格化した PDF $P_u(u)$. (Run2048-1, $R_\lambda = 732$)

u_n の統計はスケール比 a にも依存しているので、PDF のスケール比依存性について調べた。 u_n の PDF を $a = 2^{1/4}, 2^{1/2}, 2, 2^2$ に対して、Run2048-1 のデータについて求めたものを図 2.6、2.7 に示す。ここでスケールは、 $r/\eta \sim 1571$ および $r/\eta \sim 98.2$ に固定している。まず、大きなスケール (図 2.6) では PDF はスケール比 a にほとんど依存せず、また正規分布に非常に近いことがわかる。一方、小さなスケール (図 2.7) ではスケール比 a が小さくなり 1 に近づくとつれて、 $\tilde{u} < 0$ におけるグラフの直線性が良くなり、(2.24) に従う領域がより明瞭となることがわかる。

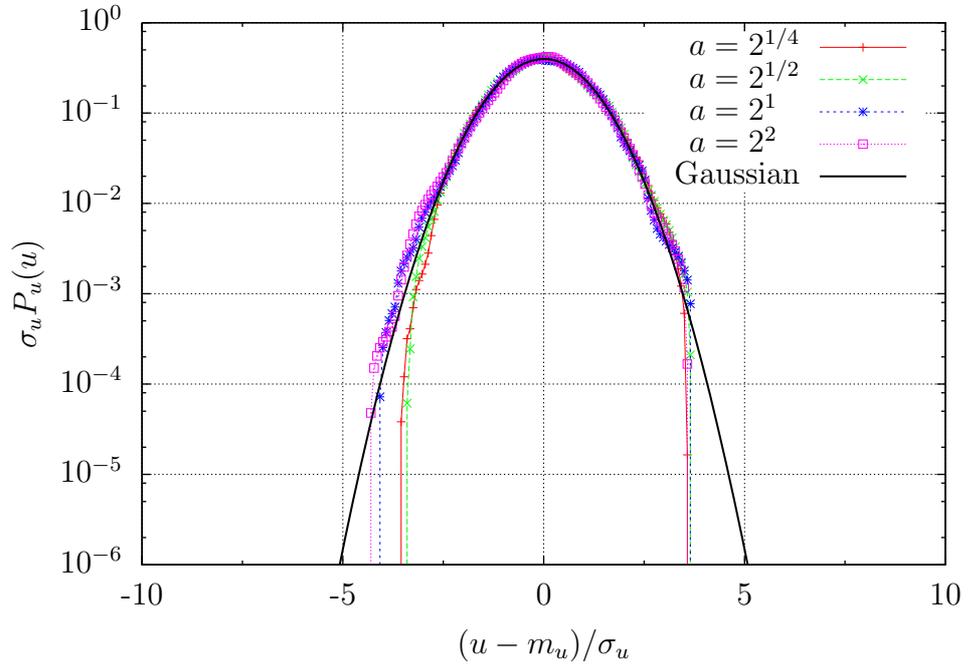


図 2.6: u_n の規格化した PDF $P_u(u)$. (Run2048-1, $R_\lambda = 732$, $r/\eta = 1571$)

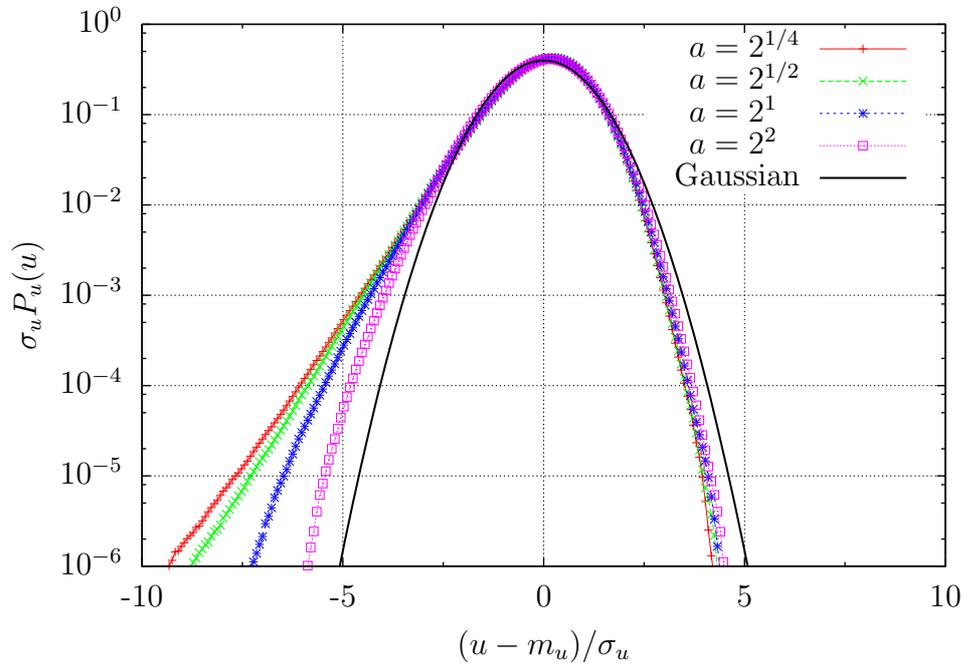


図 2.7: u_n の規格化した PDF $P_u(u)$. (Run2048-1, $R_\lambda = 732$, $r/\eta = 98.2$)

2.3.2 モーメント

u_n に関する定量的な評価を行なうために、 u の平均

$$m_u = \langle u_n \rangle, \quad (2.25)$$

と分散

$$\sigma_u^2 = \langle (u_n - m_u)^2 \rangle, \quad (2.26)$$

を求めたものをそれぞれ図 2.8、図 2.9 に示す。ともに、 τ すなわちスケールに依存しており、これは α_n の統計に関する scale-similarity の仮定 (i) を支持しない結果である。しかし、これはより高い R_λ において scale-similarity の満たされるスケール範囲が存在する可能性を完全に否定するものではない。実際、図 2.8、図 2.9 より、平均および分散は $\tau \sim 2$ あたりで R_λ の増加とともにグラフの傾きが単調に減少しフラットに近づいていることがわかる。

次に、同じデータを、横軸にスケール r を L で規格化したものを図 2.10、図 2.11 に、 η で規格化したものを図 2.12、図 2.13 にそれぞれ示す。ともに、 L で規格化した場合には大きなスケールで、 η で規格化した場合には小さなスケールで、 R_λ の値にかかわらず互いに重なることがわかる。また、 R_λ の増加とともにグラフの傾きが減少している領域は慣性小領域とほぼ一致している。

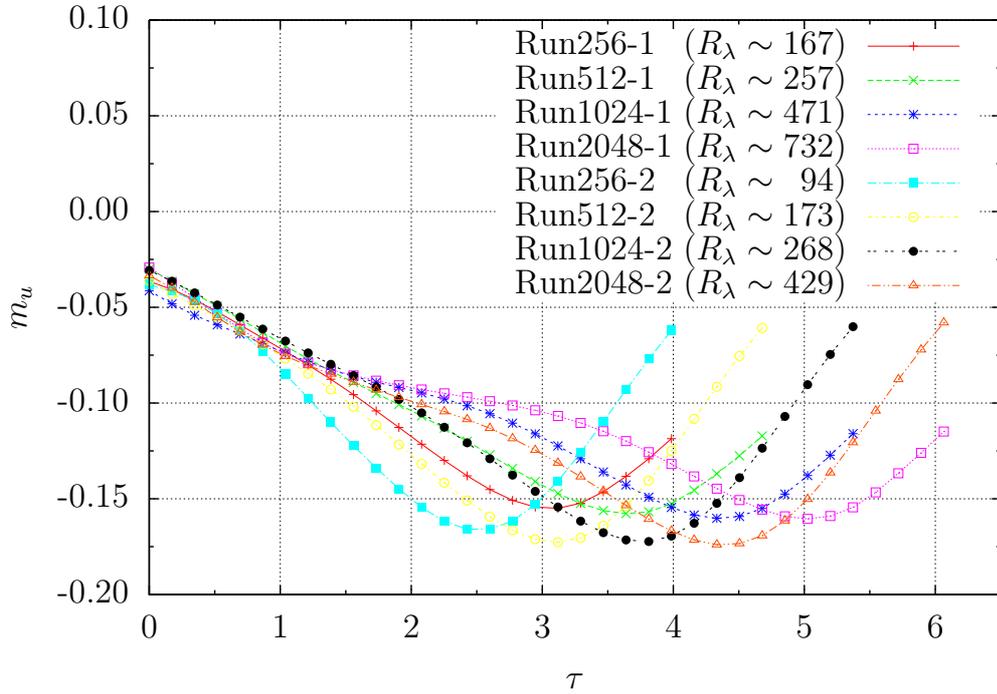


図 2.8: u_n の平均 m_u .

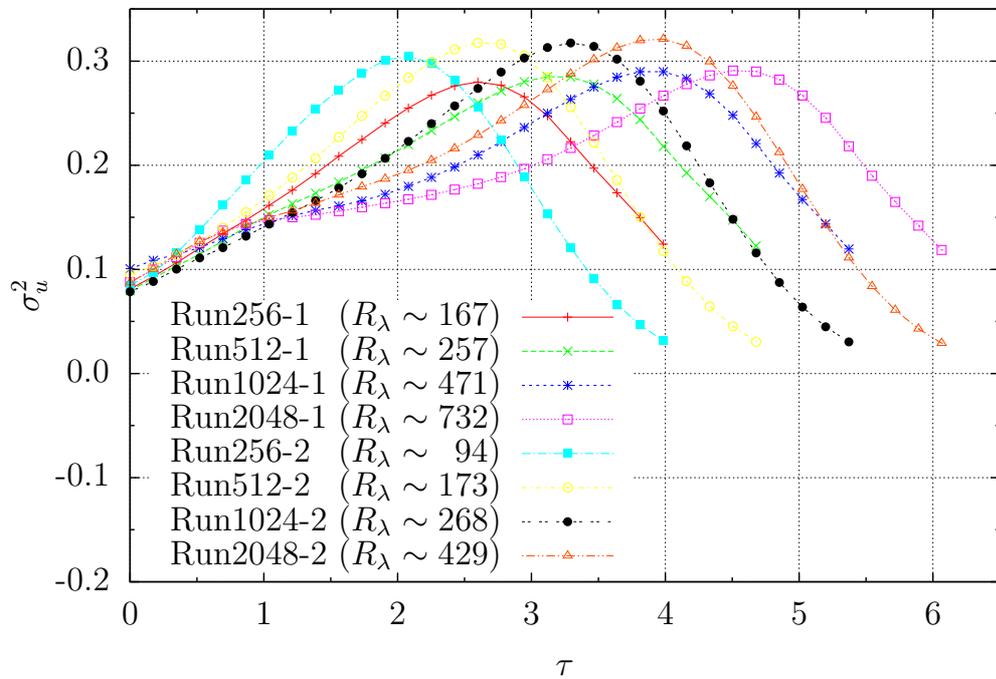
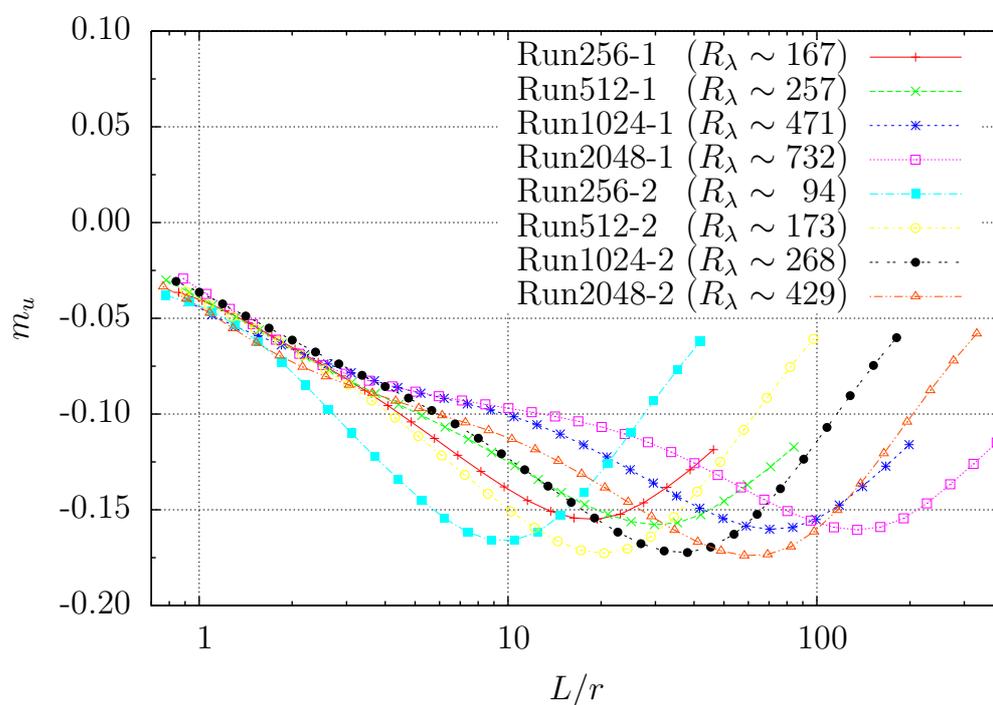
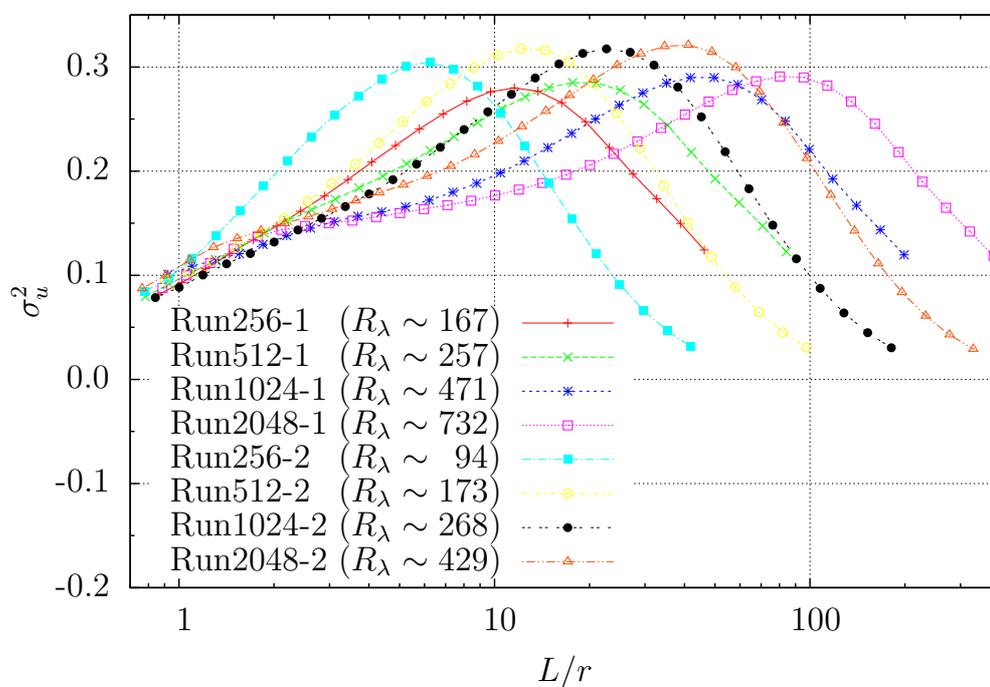


図 2.9: u_n の分散 σ_u^2 .

図 2.10: u_n の平均 m_u vs. L/r .図 2.11: u_n の分散 σ_u^2 vs. L/r .

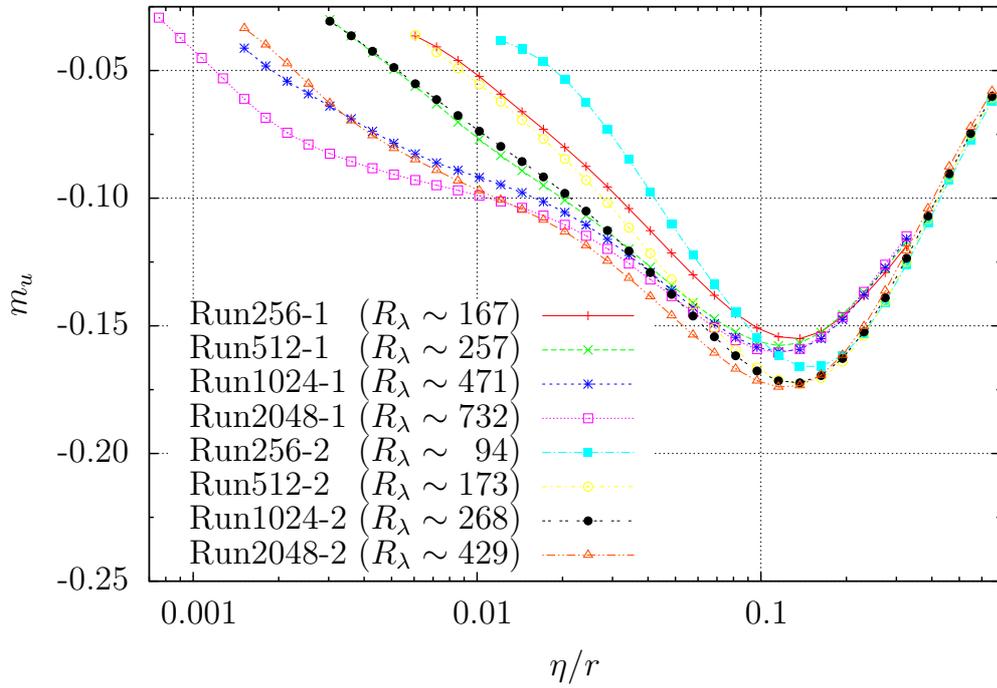


図 2.12: u_n の平均 m_u vs. η/r .

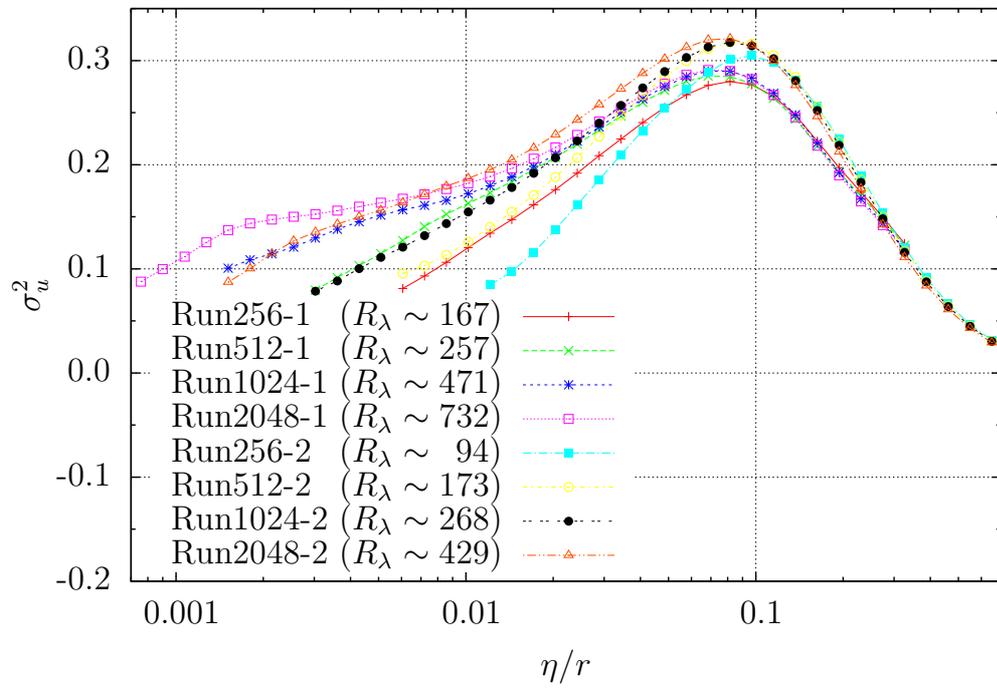


図 2.13: u_n の分散 σ_u^2 vs. η/r .

2.3.3 相関

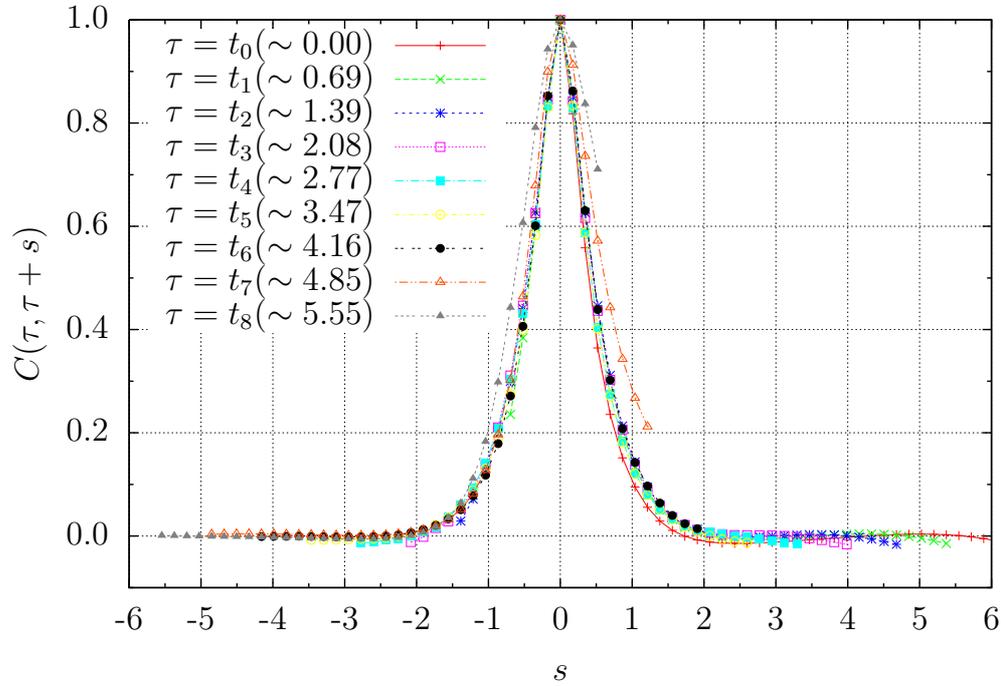


図 2.14: $\tilde{u}(\tau)$ と $\tilde{u}(\tau + s)$ の相関。(Run2048-1, $R_\lambda = 732$)

$\tilde{u}(\tau)$ と $\tilde{u}(\tau + s)$ の相関を以下の式で定義する

$$C(\tau, \tau + s) = \frac{\langle \tilde{u}(\tau) \tilde{u}(\tau + s) \rangle}{\sqrt{\langle \tilde{u}^2(\tau) \rangle} \sqrt{\langle \tilde{u}^2(\tau + s) \rangle}}, \quad (2.27)$$

図 2.14 に相関 $C(\tau, \tau + s)$ を $\tau = t_n \equiv n \log 2$, ($n = 0, 1, 2, \dots, 8$)、 $a = 2^{1/4}$ に対して、Run2048-1 のデータについて求めたものを示す。そのグラフの形は、 τ の非常に大きいところをのぞいて、 τ にほとんど依存しないことがわかる。つまり、相関 C の分布の形が相似的になるスケール領域が存在するということである。このことについては、2.3.6 節で更なる解析を行う。

ここで、 C の相関時間 τ_C を以下の式で定義する。

$$\tau_C \equiv \int_{-\infty}^0 C(\tau, \tau + s) ds. \quad (2.28)$$

Run2048-1 についての結果 (図 2.14) の $\tau = t_4 \sim 2.77$ における相関 C から τ_C の値を計算すると、 $\tau_C \sim 0.56$ となる。相関時間は有限の値であり、これは α_n が互いに統計的に独立であるという仮定 (ii) を支持しない結果である。また、 $\exp(0.56) \sim 2$ であるので、 $\tau_C \sim 0.56$ という値はスケール比 $r_n/r_m \sim 2$ に対応している。このことは、DIA[20] や LRA[21] などの完結 (closure) 理論により予測された Navier-Stokes 方程式における 3 波相互作用の局所性と矛盾しない結果である。

次に相関 C のスケール比 a 依存性について調べた。図 2.15、図 2.16 に相関 C を $a = 2^{1/4}, 2^{1/2}, 2, 2^2$ に対して、Run2048-1 のデータについて求めたものを示す。ここでスケールは、 $r/\eta \sim 1571$ および $r/\eta \sim 98.2$ に固定している。スケール比 a が減少して 1 に近づくにつれて、相関 C の形は s に依存した特定の関数に収束していくことがわかる。また $a = 2^{1/4}$ においてすでに、ある程度極限の関数に収束していることがわかる。

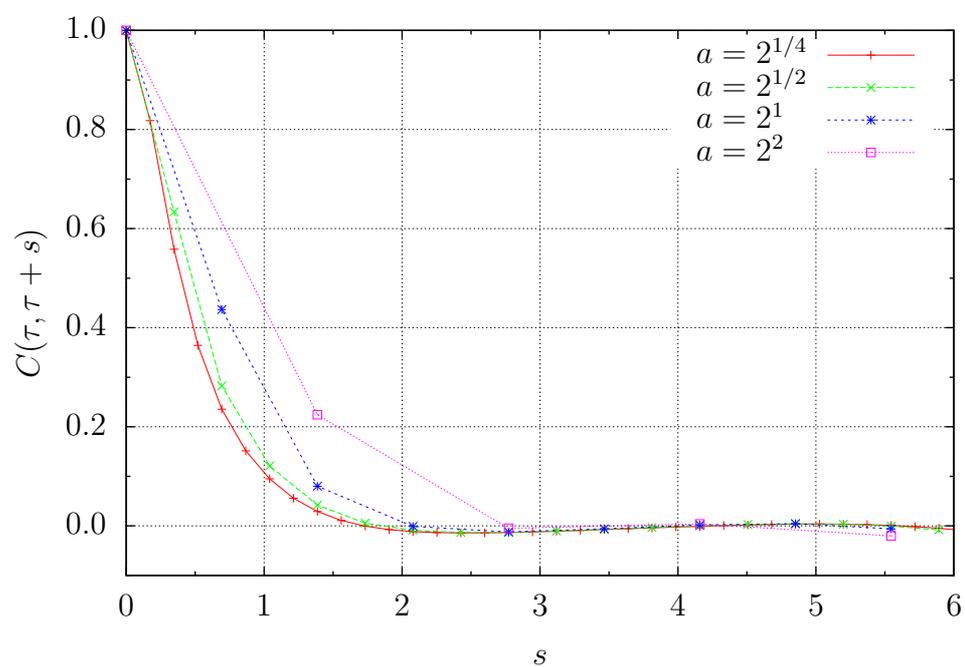


図 2.15: $\tilde{u}(\tau)$ と $\tilde{u}(\tau + s)$ の相関。(Run2048-1, $R_\lambda = 732$, $r/\eta = 1571$)

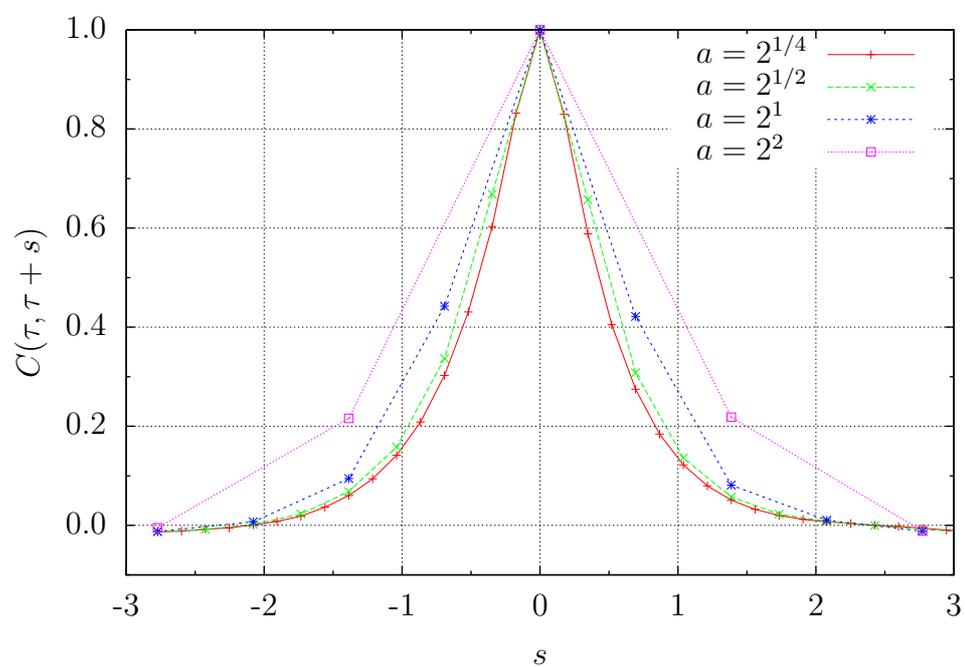
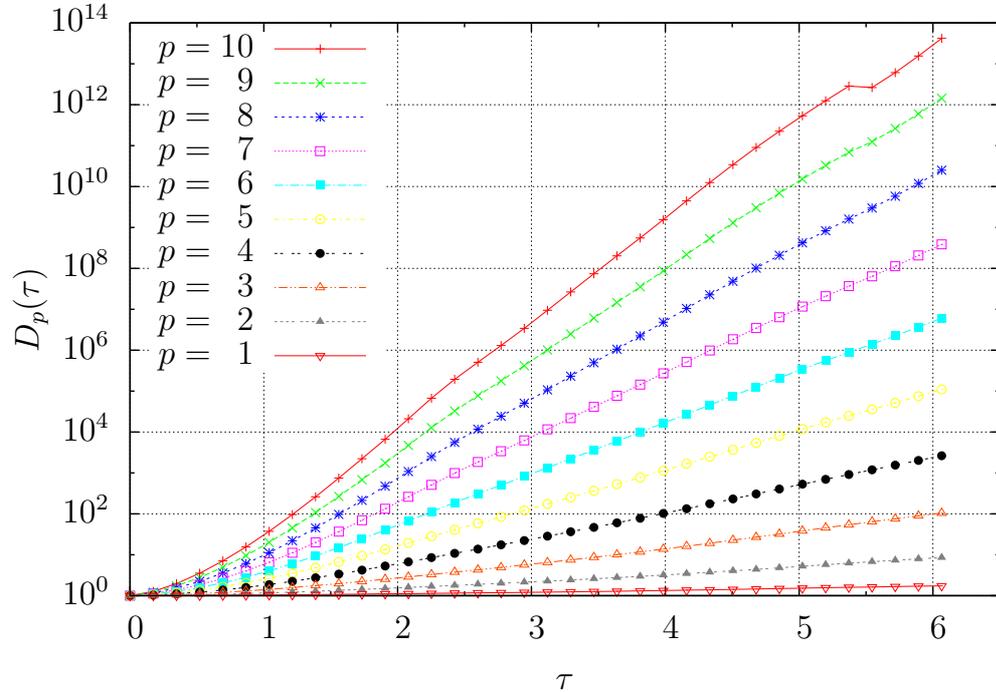


図 2.16: $\tilde{u}(\tau)$ と $\tilde{u}(\tau + s)$ の相関。(Run2048-1, $R_\lambda = 732$, $r/\eta = 98.2$)

2.3.4 統計的非独立性の影響

図 2.17: $D_p(\tau)$ vs. τ . (Run2048-1, $R_\lambda = 732$)

α_n が統計的に独立でないことが ϵ_n の統計に対してどの程度影響を与えるのかを調べるために、次のような量を定義する。

$$D_p(\tau_n) \equiv \frac{\langle (\epsilon_n / \epsilon_0)^p \rangle}{\langle (\alpha_0)^p \rangle \langle (\alpha_1)^p \rangle \dots \langle (\alpha_{n-1})^p \rangle}. \quad (2.29)$$

これは、もし α_n が互いに統計的に独立であれば、

$$D_p(\tau_n) = 1, \quad (2.30)$$

とならなければならない量である。すなわち、この量が 1 から離れた値になるほど非独立性の影響は大きいといえる。

図 2.17 に $D_p(\tau_n)$ の値を指数 $p = 1, 2, \dots, 10$ 、スケール比 $a = 2^{1/4}$ に対して、Run2048-1 のデータについて求めたものを示す。 $D_p(\tau_n)$ の値は 1 からはかけ離れており、特に τ や指数 p が大きいほどそれが顕著であることがわかる。この結果より、非独立性の影響は非常に大きいといえる。

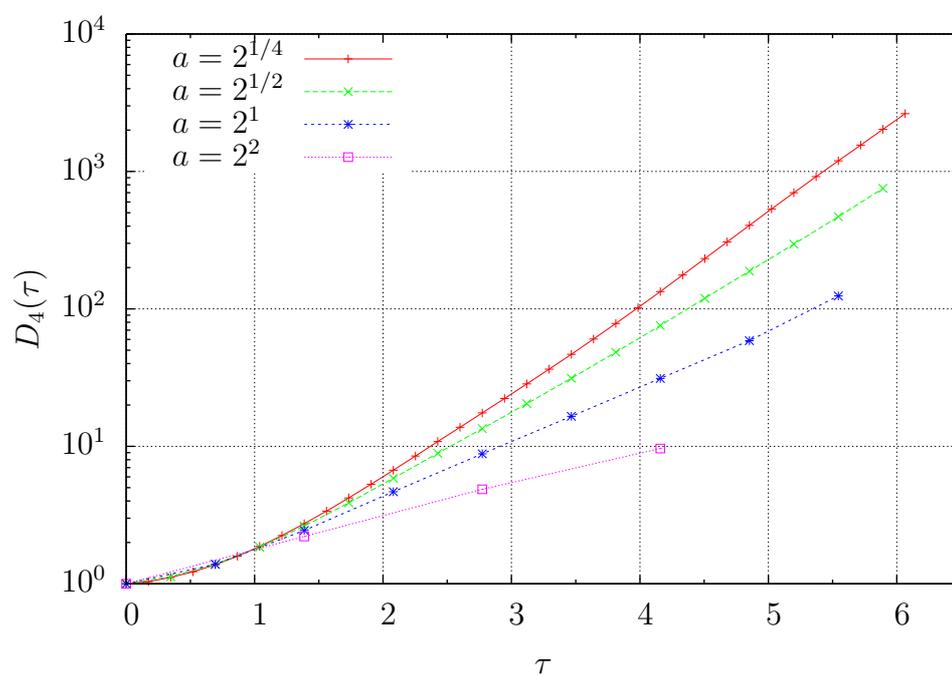


図 2.18: $D_4(\tau)$ vs. τ . (Run2048-1, $R_\lambda = 732$)

次に $D_p(\tau_n)$ のスケール比 a 依存性について調べた。図 2.18 に $D_p(\tau_n)$ を $a = 2^{1/4}, 2^{1/2}, 2, 2^2$ に対して、Run2048-1 で指数 $p = 4$ について求めた結果を示す。スケール比 a が小さくなるほど、 $D_p(\tau_n)$ は τ が大きくなるにつれてより速く増大していくことがわかる。つまり、スケール比が小さいほど非独立性の影響は大きくなることが分かった。

2.3.5 簡単な近似

ϵ の統計についての知見を得るために、次の恒等式について考える。

$$\frac{d\hat{\epsilon}(\tau)}{d\tau} = u(\tau)\hat{\epsilon}(\tau). \quad (2.31)$$

ここで、 $u(\tau) = d \log \hat{\epsilon}(\tau) / d\tau$ 、 $\tau = \log(r_0/r)$ 、 $\hat{\epsilon}(\tau) = \epsilon_r$ である。 $\hat{g}(\tau) \equiv \hat{\epsilon}^p(\tau)$ とすると、式 (2.31) から次の関係式が得られる。

$$\frac{d\hat{g}}{d\tau} = pu\hat{g} = pm_u\hat{g} + p\tilde{u}\hat{g}. \quad (u = m_u + \tilde{u}) \quad (2.32)$$

この式は、ランダム乗算過程のプロトタイプであり、 \tilde{u} の統計が与えられた際の $\langle \hat{g} \rangle$ についてのさまざまな近似が知られている [23]。ここで、その中でもっとも単純なものである、次の式を基にした一種のクロージャ近似を考える。

$$\frac{d\langle \hat{g} \rangle}{d\tau} = pm_u \langle \epsilon^p \rangle + p^2 \int_0^\tau G_p(\tau, s) \langle \tilde{u}(\tau)\tilde{u}(s)\hat{g}(s) \rangle ds. \quad (2.33)$$

また、作業仮説としてゼロキュムラント近似

$$\langle \tilde{u}(\tau)\tilde{u}(s)\hat{g}(s) \rangle \sim \langle \tilde{u}(\tau)\tilde{u}(s) \rangle \langle \hat{g}(s) \rangle, \quad (2.34)$$

を用いる。ここで、

$$G_p(\tau, s) \equiv \exp[p \int_s^\tau m_u(s') ds'], \quad (2.35)$$

である。式 (2.33) は、 $\hat{\epsilon}(0)$ の変動が無視できるとしたときに厳密に得られる。また、式 (2.34) は $\langle \tilde{u} \rangle = 0$ とし、キュムラント $\langle \tilde{u}\tilde{u}\hat{g} \rangle_C \equiv \langle \tilde{u}\tilde{u}\hat{g} \rangle - \langle \tilde{u}\tilde{u} \rangle \langle \hat{g} \rangle - \langle \tilde{u} \rangle \langle \tilde{u}\hat{g} \rangle - \langle \tilde{u} \rangle \langle \tilde{u}\hat{g} \rangle + 2 \langle \tilde{u} \rangle \langle \tilde{u} \rangle \langle \hat{g} \rangle$ がゼロであるとして得られる。

近似 (2.34) は、位置

$$\xi(s) = \int_0^s u(s') ds', \quad (2.36)$$

が瞬間速度 $\tilde{u}(s)$ 、 $\tilde{u}(\tau)$ と統計的に独立であると仮定することによっても得られる。式 (2.32) から $\hat{g}(s) = \exp[p\xi(s)]\hat{\epsilon}^p(0)$ であるので、この仮定は、 $\hat{g}(s)$ が $\tilde{u}(s)$ および $\tilde{u}(\tau)$ と統計的に独立であることを意味している。

この後示すように、その簡単さにも関わらず、近似 (2.33)、(2.34) は、 $|p|$ がだいたい 4 まで DNS の結果とよく一致する。Kolmogorov の理論 [9]

によると n 次の速度構造関数 S_n のスケーリングは $\langle \hat{\epsilon}^{n/3} \rangle$ によって得られ、実験や DNS において、たとえば S_{12} のような高次の構造関数の信頼性のある統計を得ることは簡単ではない。その意味で $p = 4 (= 12/3)$ は決して小さくはない。

τ_p と τ_D を、それぞれ $\langle \hat{g}(s) \rangle$ と $\langle \tilde{u}(\tau)\tilde{u}(s) \rangle$ の特徴的な時間スケールとする。もし $\tau_p \gg \tau_D$ であれば、式 (2.33)、(2.34) は $\langle \hat{\epsilon}^p \rangle = \langle \hat{g} \rangle$ に対して

$$\frac{d\langle \hat{\epsilon}^p \rangle}{d\tau} = pm_u \langle \hat{\epsilon}^p \rangle + p^2 F_p \langle \hat{\epsilon}^p \rangle, \quad (2.37)$$

となる。ここで

$$F_p = \int_0^\tau G_p(\tau, s) \langle \tilde{u}(\tau)\tilde{u}(s) \rangle ds, \quad (2.38)$$

である。

$\delta \equiv |pm_u|\tau_D \ll 1$ のとき、 G_p の p への依存を無視できるので、 $F_p \sim F$ とする。ここで F は p と独立である。すると、 $p = 1$ に対する式 (2.37) から $m_u + F = 0$ であり、 $\langle \hat{\epsilon} \rangle$ は τ と独立であるので、

$$\frac{d\langle \hat{\epsilon}^p \rangle}{d\tau} = m_u p(1-p) \langle \hat{\epsilon}^p \rangle, \quad (2.39)$$

を得る。もし m_u が定数であれば、式 (2.39) は対数正規理論 [9] と一致する。

DNS データから、式 (2.33) 中の統計量の大きさについての情報が得られる。たとえば、Run2048-1 の $a = 2^{1/4}$ に対する $\tau = t_4$ におけるデータから

$$m_u \sim -0.10, \quad \sigma_u \sim 0.43, \quad \tau_D \sim 0.54, \quad (2.40)$$

が得られる。ここで

$$\tau_D \equiv \int_{-\infty}^0 \langle \tilde{u}(\tau)\tilde{u}(\tau+s) \rangle ds / \sigma_u^2, \quad (2.41)$$

である。

近似 (2.39) から $\tau_p \sim 1/|m_u p(p-1)|$ であり、(2.40) の値を用いると、式 (2.37) を導く際に用いた仮定 $\tau_D \ll \tau_p$ の、式 (2.39) との整合性は $|p(p-1)| \ll 1/(0.10 \times 0.54) \sim 18.5$ を必要とし、一方、 $\delta \equiv |pm_u|\tau_D \ll 1$ との整合性は $|p| \ll 1/(0.10 \times 0.54) \sim 18.5$ を必要とする。また、(2.40) の数値をから $F \sim F_0 \sim \sigma_u^2 \tau_D \sim 0.10$ であり、これは近似 $m_u + F = 0$ と矛盾しない。

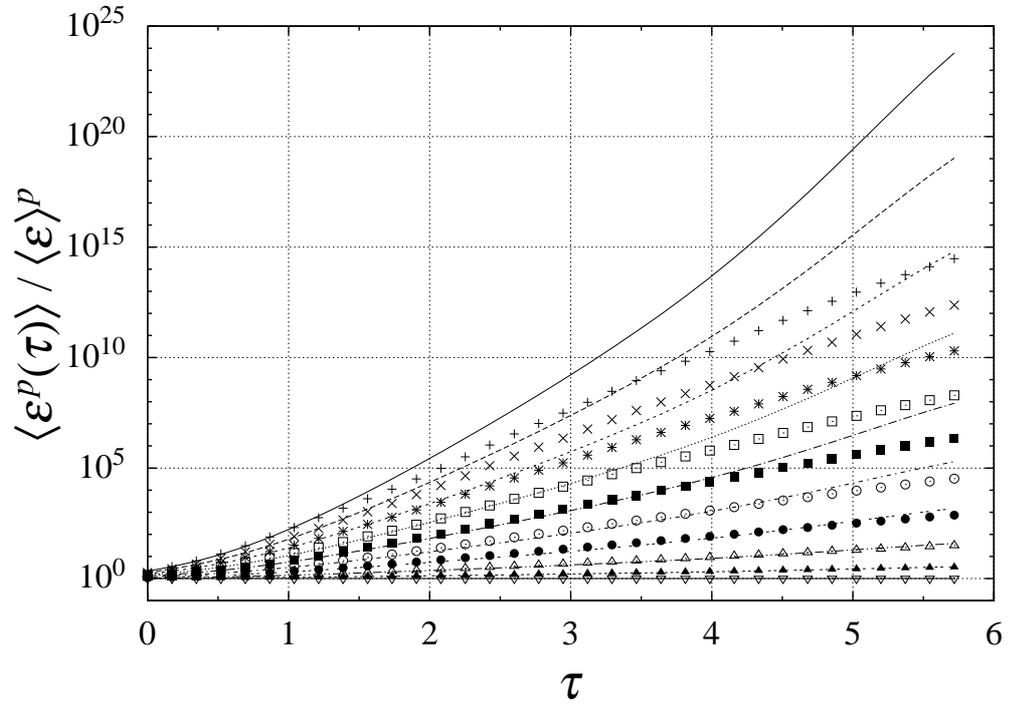


図 2.19: $\langle \epsilon \rangle^p$ により規格化した $\langle \epsilon^p(\tau) \rangle$ の τ 依存性。シンボルが Run2048-1 の DNS による値、曲線が式 (2.39) により得られる近似値。([24] より)

図 2.19 に式 (2.39) を用いて得られる $\langle \epsilon^p \rangle$ に対する近似と、Run2048-1 の DNS データによる測定結果との比較を示す。ここで、式 (2.39) の m_u には DNS により得られた値を用いた。 τ および p の小さい領域では、理論による近似と DNS データは非常によく一致していることがわかる。

次に、傾き

$$S(p) \equiv \frac{1}{\langle \hat{\epsilon}^p \rangle} \frac{d \langle \hat{\epsilon}^p \rangle}{d\tau} = \frac{d[\log \langle \hat{\epsilon}^p \rangle]}{d\tau}, \quad (2.42)$$

についての、理論による近似と Run2048-1 の DNS データによる測定結果との $\tau = t_4$ における比較を図 2.20 に示す。近似は、 $|p| < 5$ で DNS とよく一致していることがわかる。

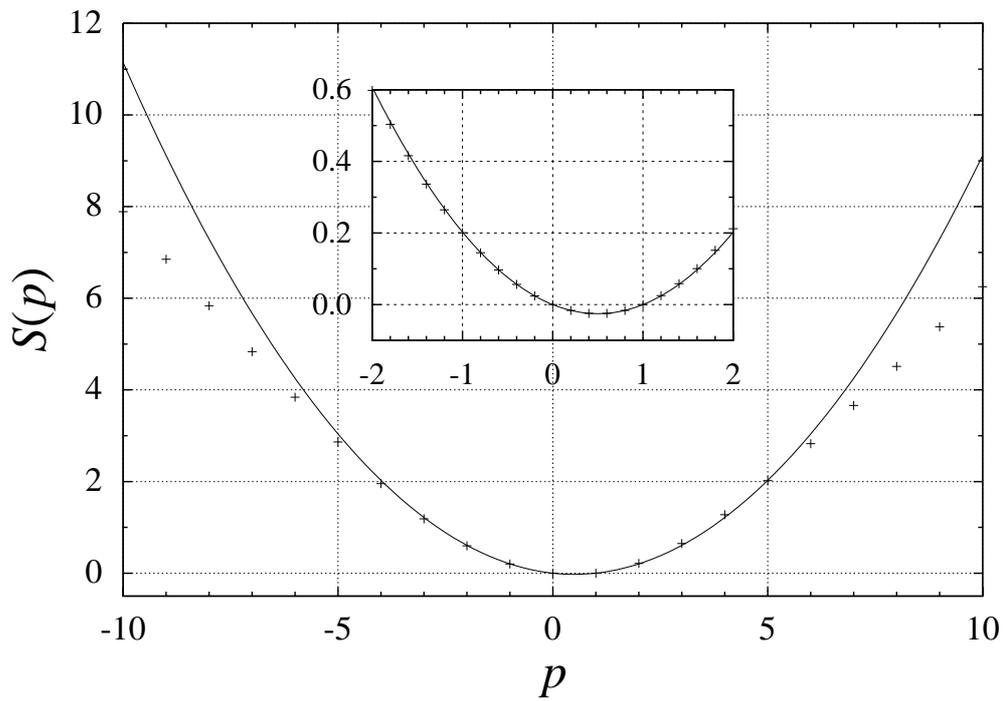


図 2.20: $\tau = t_4$ における傾き $S(p) = d[\log \langle e^p \rangle] / d\tau$ の p 依存性。シンボルが Run2048-1 の DNS による値、曲線が式 (2.39) により得られる近似値。([24] より)

2.3.6 相関の相似性

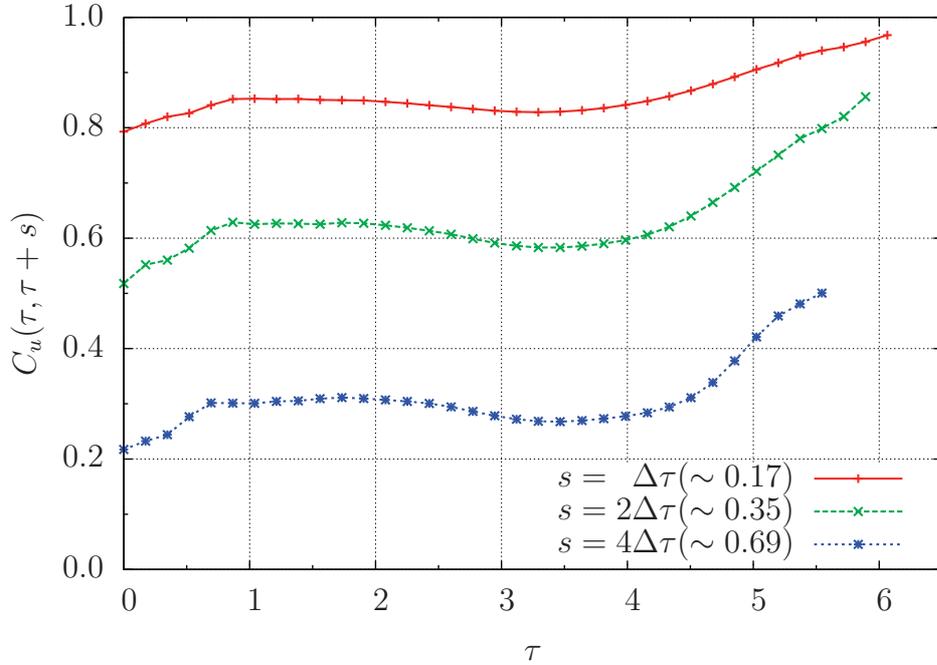


図 2.21: $\tilde{u}(\tau)$ と $\tilde{u}(\tau + s)$ の相関 $C_u(\tau, \tau + s)$ の τ 依存性。(Run2048-1)

2.3.3 節では、 $\tilde{u}(\tau)$ と $\tilde{u}(\tau + s)$ の間の相関

$$C_u(\tau, \tau + s) = \frac{\langle \tilde{u}(\tau) \tilde{u}(\tau + s) \rangle}{\sqrt{\langle \tilde{u}^2(\tau) \rangle} \sqrt{\langle \tilde{u}^2(\tau + s) \rangle}}, \quad (2.43)$$

の s への依存性が τ にほとんどよらないという意味での相似領域が存在することがわかった。

このことをより明確にするために、 $C_u(\tau, \tau + s)$ を τ の関数として $s = \Delta\tau, 2\Delta\tau, 4\Delta\tau$ に対してプロットした結果を図 2.21 に示す。ここで、 $a = 2^{1/4}$ 、 $\Delta\tau = \log a = \log 2^{1/4}$ である。どの s についても $1 < \tau < 4$ の領域で C_u はほとんど τ に依存せず、特に $1 < \tau < 2$ ではほぼ一定の値をとることがわかる。この結果は、相関がスケールに依存しない相似領域の存在を示している。

次に、 u の間の相関についてのより詳細な情報を得るために、 $\tilde{u}(\tau)$ と $\tilde{u}(\tau + s)$ の間の結合確率密度関数 (joint PDF) を、 $s = \Delta\tau, 2\Delta\tau, 4\Delta\tau$ に

対して $\tau = t_n \equiv n \log 2$, ($n = 0, 1, 2, \dots, 8$) について求めた結果をそれぞれ図 2.22、図 2.23、図 2.24 に示す。まず s が大きくなるにつれて、joint PDF の形は円形に近くなり、より相関が低くなっていることが確認できる。また、 $\tau = t_3, t_4, t_5, t_6$ についての joint PDF は、 s によらず互いによく似た形をしており、この結果は相関 C_u における相似性の存在と一致している。ここで、 $t_3 \sim 2.08$ 、 $t_6 \sim 4.16$ であり、これは相関 C_u についての相似領域とほぼ一致している。

また、すべての τ および s において、 $\tilde{u} < 0$ よりも $\tilde{u} > 0$ での相関のほうが高くなっていることが確認できる。カスケード過程において、 $\tilde{u} < 0$ は $\alpha \lesssim 1$ で ϵ が減少、 $\tilde{u} > 0$ は $\alpha \gtrsim 1$ で ϵ が増加している領域にそれぞれ対応するので、この結果は、 ϵ が減少している領域で引き続き減少する傾向よりも、 ϵ が増加している領域で引き続き増加する傾向のほうが強いことを示唆している。つまり、エネルギーカスケードが進みスケールが小さくなるにつれて、エネルギー散逸率の空間的な揺らぎはさらに強調されていき、より間欠性が強くなるということである。

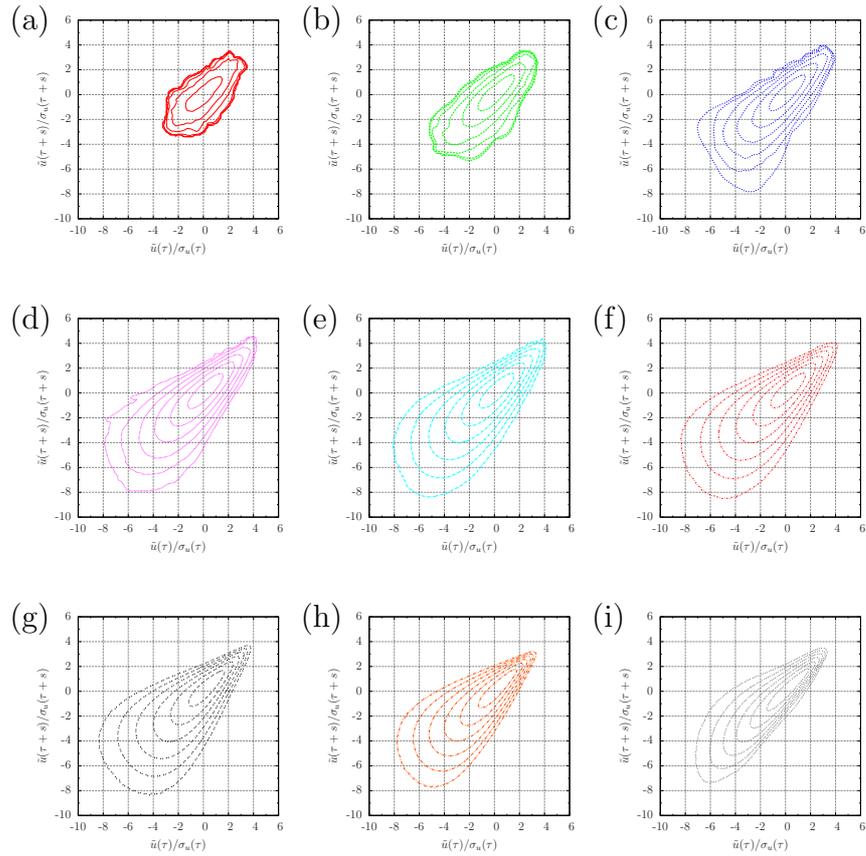


図 2.22: $\tilde{u}(\tau)$ と $\tilde{u}(\tau + s)$ の Joint PDF. ($s = \Delta\tau$) (a) $\tau = t_0$, (b) $\tau = t_1$, (c) $\tau = t_2$, (d) $\tau = t_3$, (e) $\tau = t_4$, (f) $\tau = t_5$ (g) $\tau = t_6$, (h) $\tau = t_7$, and (i) $\tau = t_8$.

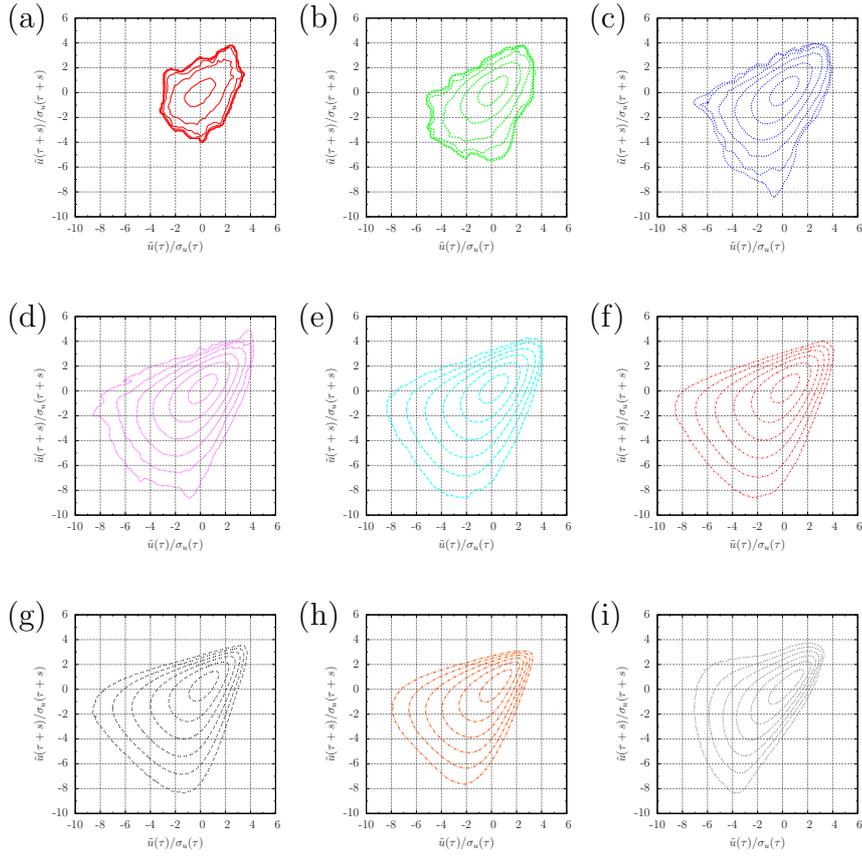


図 2.23: $\tilde{u}(\tau)$ と $\tilde{u}(\tau + s)$ の Joint PDF. ($s = 2\Delta\tau$) (a) $\tau = t_0$, (b) $\tau = t_1$, (c) $\tau = t_2$, (d) $\tau = t_3$, (e) $\tau = t_4$, (f) $\tau = t_5$ (g) $\tau = t_6$, (h) $\tau = t_7$, and (i) $\tau = t_8$.

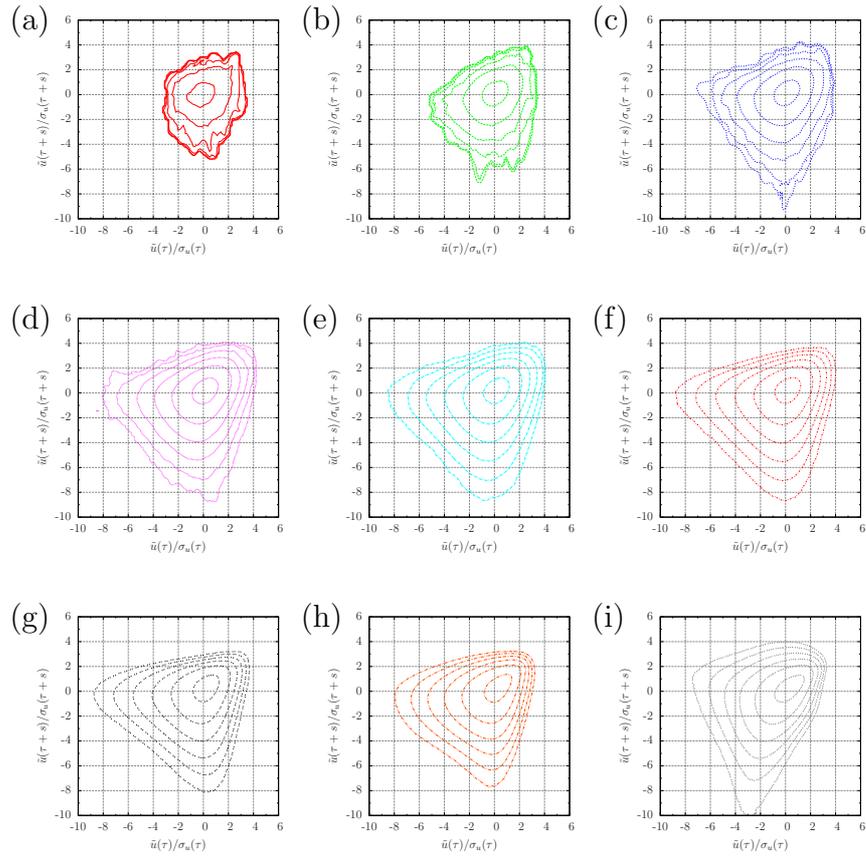


図 2.24: $\tilde{u}(\tau)$ と $\tilde{u}(\tau + s)$ の Joint PDF. ($s = 4\Delta\tau$) (a) $\tau = t_0$, (b) $\tau = t_1$, (c) $\tau = t_2$, (d) $\tau = t_3$, (e) $\tau = t_4$, (f) $\tau = t_5$ (g) $\tau = t_6$, (h) $\tau = t_7$, and (i) $\tau = t_8$.

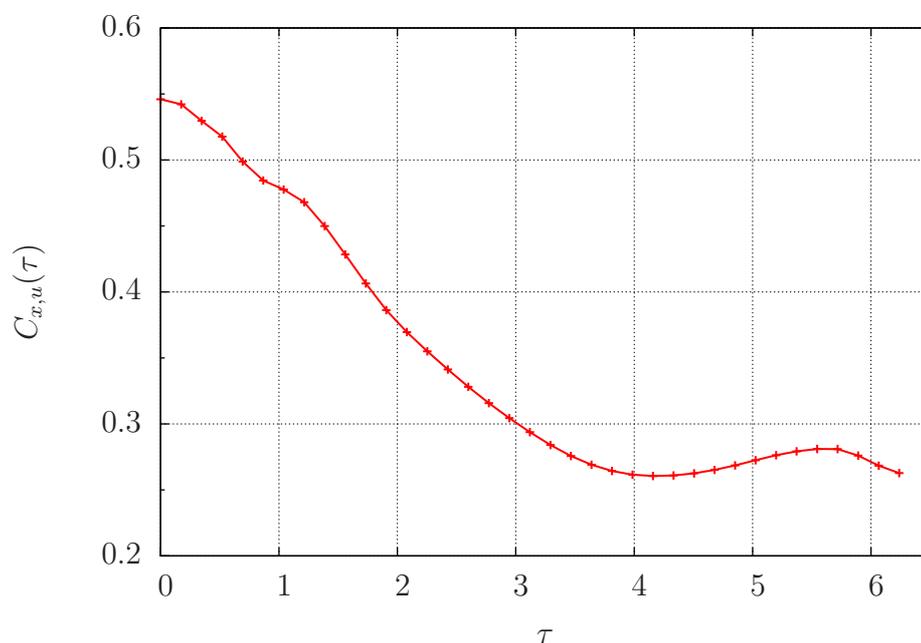


図 2.25: $\tilde{x}(\tau)$ と $\tilde{u}(\tau)$ の相関 $C_{x,u}(\tau)$ の τ 依存性。 (Run2048-1)

$\tilde{x}(\tau)$ と $\tilde{u}(\tau)$ の相関

$$C_{x,u}(\tau) = \frac{\langle \tilde{x}(\tau) \tilde{u}(\tau) \rangle}{\sqrt{\langle \tilde{x}^2(\tau) \rangle} \sqrt{\langle \tilde{u}^2(\tau) \rangle}}, \quad (2.44)$$

を τ の関数としてプロットした結果を図 2.25 に示す。ここで、 $\tilde{x} = x - \langle x \rangle$ である。 τ が大きくすなわちスケールが小さくなるほど相関は低くなっていくが、ゼロにはならず、ある有限の値でとどまり、相関 $C_{x,u}(\tau)$ が τ にほとんどよらない相似領域が存在することがわかる。相関 $C_{x,u}$ が高いということは、 ϵ が大きいほどより大きく増加し、逆に ϵ が小さいほどより大きく減少する傾向が強いということを意味する。結果は、スケールが小さくなるほどこの傾向は小さくなるが、まったくなくなるわけではないということを示している。

次に、 $\tilde{x}(\tau)$ と $\tilde{u}(\tau)$ の間の joint PDF を $\tau = t_n \equiv n \log 2$, ($n = 0, 1, \dots, 8$) について求めた結果を図 2.26 に示す。 τ が大きくなるにつれてそれぞれの joint PDF は互いに似た形になり、この結果は相関 $C_{x,u}$ における相似性の存在と一致している。

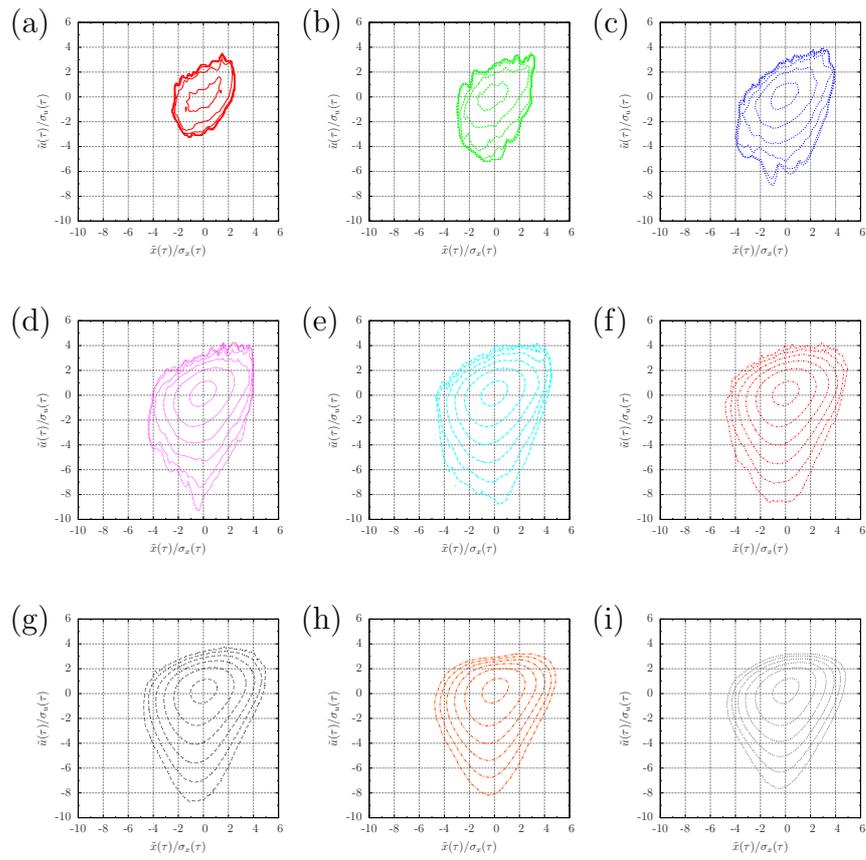


図 2.26: $\tilde{x}(\tau)$ と $\tilde{u}(\tau)$ の Joint PDF. (a) $\tau = t_0$, (b) $\tau = t_1$, (c) $\tau = t_2$, (d) $\tau = t_3$, (e) $\tau = t_4$, (f) $\tau = t_5$ (g) $\tau = t_6$, (h) $\tau = t_7$, and (i) $\tau = t_8$.

2.4 まとめ

本研究では、世界最大のレイノルズ数を実現した3次元一様等方性乱流の大規模DNSデータ [5, 6, 7] を用いて、エネルギー散逸率に関する統計について解析し、さらにその中で、過去、間欠性モデルの導出の際に用いられてきた、以下の統計的仮定についての検証を行った。

- (i) α_n の統計がスケールによらない。
- (ii) α_n は互いに統計的に独立である。

解析の結果、以下のことが示された。

- (a) x_n の PDF はスケールが小さくなるほど Gaussian に近くなる。これは、対数正規モデル [9, 10] による予測と一致する。
- (b) u_n の PDF $P_u(u)$ は $P_u(u) \propto \exp(\gamma\tilde{u}/\sigma_u)$ という単純な式に従う領域があり、また、スケール比 a が 1 に近づくとつれ上式に従う領域がより明瞭となる。また、PDF はスケールに依存しており、これは、 α_n についての仮定 (i) を支持しない結果である。
- (c) u_n の平均及び分散は、スケールに依存しており、これは、 α_n についての仮定 (i) を支持しない結果である。
- (d) u_n の相関は、その形がスケールにはほとんど依存せず、スケール比 a が 1 に近づくとつれて s に依存したある関数に収束していく。また、相関時間は有限の値となり、これは、 α_n についての仮定 (ii) を支持しない結果である。
- (e) α_n が互いに統計的に独立でないことによる ϵ_n の統計へ影響は、非常に大きくなる。また、スケールや指数 p が大きいほど、また、スケール比 a が小さくなるほどその影響は大きくなる。
- (e) 仮定 (i)、(ii) を用いないエネルギー散逸率についての簡単なモデルによる近似と DNS データによる測定結果は、指数 $|p| < 5$ で良く一致している。
- (f) $\tilde{u}(\tau)$ と $\tilde{u}(\tau + s)$ の間の相関が s によらずスケールに依存しない相似領域が存在する。その領域では、それぞれの間の joint PDF についても相似的な形となる。同様の結果が、 $\tilde{x}(\tau)$ と $\tilde{u}(\tau)$ の間の相関及び joint PDF にも見られる。

第3章 高レイノルズ数乱流におけるエンストロフィの生成と輸送

3.1 はじめに

運動エネルギーのような保存量のカスケードの概念は、高レイノルズ数乱流の現象論において中心的なものとなっている。たとえば、エネルギーカスケードにおいては、小さなスケールへの運動エネルギーの流れがある。レイノルズ数が十分高ければ、慣性小領域ではカスケードを支配する動的プロセスは粘性によらないと考えられる。

しかしながら、渦度について考える場合はより複雑である。エンストロフィは、大きなスケールから小さなスケールへと輸送されるといったような、エネルギーとのいくつかの共通な性質を持っているが、渦の伸張が渦度の生成に寄与するために一般的なカスケードの考えは適用できない。さらに、エンストロフィの多くは小さなスケールで直接生成されるために、散逸するためにスケール間を移動する必要がない。それにもかかわらず、慣性領域では渦の伸張があり、それが破壊されるのならばその分のエンストロフィの小さなスケールへの輸送が必要である。

3.2 エンストロフィの生成と流束

幾分か大雑把であるが、エネルギーとエンストロフィのスケールごとの変動を特徴づける単純な方法を以下に示す。まず、渦度場を次のように2つの部分に分ける。

$$\omega = \omega^L + \omega^S. \quad (3.1)$$

ここで、 ω^L は、あるスケール r より大きな渦構造からくる ω への寄与である。もちろん、このような分解は一意には決まらず、フィルターのかけ

方による。とりあえずここでは、一般的な方法である ω と適当なフィルターとの畳みこみにより ω^L を構成する。このようなプロセスは、 ω^L と陰的に ω^S の両方がソレノイダルであることを保証する [25]。このとき、Biot-Savart の法則から、次の式によりソレノイダルな速度場を構成することができる。

$$\omega^L = \nabla \times \mathbf{u}^L, \quad (3.2)$$

$$\omega^S = \nabla \times \mathbf{u}^S. \quad (3.3)$$

スケールごとのエネルギーの変動を考えるために、 \mathbf{u}^L および \mathbf{u}^S と Navier-Stokes 方程式との内積の集団平均を考える。式変形により以下の式が得られる。

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\langle \frac{1}{2} (\mathbf{u}^L)^2 \right\rangle + \left\langle \mathbf{u}^L \cdot \frac{\partial \mathbf{u}^S}{\partial t} \right\rangle = - \langle S_{ij}^L \tau_{ij}^S - S_{ij}^S \tau_{ij}^L \rangle + \nu(\sim), \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\langle \frac{1}{2} (\mathbf{u}^S)^2 \right\rangle + \left\langle \mathbf{u}^S \cdot \frac{\partial \mathbf{u}^L}{\partial t} \right\rangle = \langle S_{ij}^L \tau_{ij}^S - S_{ij}^S \tau_{ij}^L \rangle + \nu(\sim). \quad (3.5)$$

ここで、 $\tau_{ij}^L = -u_i^L u_j^L$ 、 $\tau_{ij}^S = -u_i^S u_j^S$ であり、 $\nu(\sim)$ は粘性項を表しその詳細はここでは重要ではないため省略する。また、 S_{ij} は変形速度テンソルである。適切なフィルターの選択により、左辺のクロス項を 0 にすることができる [25]。そのような場合には以下の様にかける。

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\langle \frac{1}{2} (\mathbf{u}^L)^2 \right\rangle = -\Pi_V - \nu \langle (\omega^L)^2 \rangle, \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\langle \frac{1}{2} (\mathbf{u}^S)^2 \right\rangle = \Pi_V - \nu \langle (\omega^S)^2 \rangle, \quad (3.7)$$

$$\Pi_V(r) = \langle S_{ij}^L \tau_{ij}^S - S_{ij}^S \tau_{ij}^L \rangle. \quad (3.8)$$

明らかに、 $\Pi_V(r)$ はスケール r を過ぎる大きなスケールから小さなスケールへのエネルギーの流束を表している。

次に、同じ議論をエンストロフィにも適用する。 ω^L および ω^S と

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \omega = \omega \cdot \nabla \mathbf{u} + \nu \nabla^2 \omega, \quad (3.9)$$

の内積から以下の式が得られる。

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\langle \frac{1}{2} (\omega^L)^2 \right\rangle = -F(r) + G^L(r) - \nu \langle (\nabla \times \omega^L)^2 \rangle, \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\langle \frac{1}{2} (\omega^S)^2 \right\rangle = F(r) + G^L(r) - \nu \langle (\nabla \times \omega^S)^2 \rangle. \quad (3.11)$$

ここで、

$$F(r) = \langle \boldsymbol{\omega}^L \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\omega}^S) \rangle = - \langle \boldsymbol{\omega}^S \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\omega}^L) \rangle, \quad (3.12)$$

$$G^L(r) = \langle \boldsymbol{\omega}^L \cdot (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \mathbf{u}) \rangle = \langle \omega_i^L \omega_j S_{ij} \rangle, \quad (3.13)$$

$$G^S(r) = \langle \boldsymbol{\omega}^S \cdot (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \mathbf{u}) \rangle = \langle \omega_i^S \omega_j S_{ij} \rangle, \quad (3.14)$$

である。 $G^L(r)$ と $G^S(r)$ はそれぞれ、大きなスケールおよび小さなスケールにおける渦線の伸張によるエンストロフィの生成を表している。 $G^S(0) = 0$ であり、また

$$G^S + G^L = \langle \omega_i \omega_j S_{ij} \rangle, \quad (3.15)$$

である。

$G^L(r)$ と $G^S(r)$ はともに、式(3.9)の右辺の渦伸張を表す項からくる。また、エネルギーカスケードの古典的な描像から $G^L(r) > 0$ 、 $G^S(r) > 0$ である。一方 $F(r)$ は、式(3.9)の左辺の移流項から生じ、また式(3.10)と式(3.11)とは異なる符号で表れているので、慣性によるスケール r を過ぎるエンストロフィの輸送または流束を表している。

以上の解析を一般的なスペクトル的なアプローチと比較することは有益なことである。 $E(k)$ をエネルギースペクトルとすると、

$$\frac{\partial}{\partial t} [k^2 E] = \frac{\partial \Pi_\omega}{\partial k} - 2\nu k^4 E, \quad (3.16)$$

と書ける。ここで、

$$\Pi_\omega(k) = \frac{2k}{15\pi} \int_0^\infty \Pi^*(r) (kr)^3 j_3(kr) dr, \quad (3.17)$$

$$\Pi^* = -\frac{5}{4} \frac{1}{r^6} \frac{\partial}{\partial r} r^6 \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \langle (\Delta u_x)^3 \rangle \right], \quad (3.18)$$

である。また、 j_3 は球ベッセル関数、 $\langle (\Delta u_x)^3 \rangle$ は3次の縦速度構造関数であり、 $\Pi_\omega(k)$ と Π^* とはハンケル変換のペアである。スペクトル的な輸送項 $\partial \Pi_\omega / \partial k$ は2つの異なるプロセス、流束・生成を合わせたものである。 $\Pi_\omega(k)$ は0から k の範囲のエンストロフィの生成率から、より小さいスケールへのエンストロフィの流束を引いたものを表す。これを $\Pi_\omega(k \sim \pi/r) \approx G^L(r) - F(r)$ と表す。

3.3 2点渦度相関の発展方程式

ここでは、2点渦度相関 $\langle \omega_i \omega'_j \rangle$ の発展方程式について解析する。ここで、 ω, ω' はそれぞれ位置 $x, x+r$ における渦度とする。これまでの解析

とは違い、渦度の移流と伸張を分けて考える。また、ここでは、慣性の効果に興味があるので、粘性項は省略する。

式 (3.9) から以下の式が得られる。

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \omega_i \omega'_j \rangle = \frac{\partial}{\partial r_k} [\langle \omega_i u_k \omega'_j \rangle + \langle \omega_j u_k \omega'_i \rangle] - \frac{\partial}{\partial r_k} [\langle \omega_k u_i \omega'_j \rangle + \langle \omega_k u_j \omega'_i \rangle]. \quad (3.19)$$

ここで、右辺の第1項は $\mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\omega}$ 、第2項は $\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \mathbf{u}$ からそれぞれ生じる。

まず $i = j$ の場合について考える。

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}' \rangle = -\nabla \cdot \langle (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}') \Delta \mathbf{u} \rangle + 2\nabla \cdot \langle (\Delta \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega}') \boldsymbol{\omega} \rangle. \quad (3.20)$$

ここで、 $\Delta \mathbf{u} = \mathbf{u}' - \mathbf{u}$ である。式 (3.20) において、速度ではなく速度差で表しているため、それぞれの項はガリレイ不変である。次に式 (3.19)、(3.20) を以下のように書き換える。

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \omega_i \omega'_j \rangle = -F_{ij} + G_{ij}, \quad (3.21)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}' \rangle = -F_{ii} + G_{ii}. \quad (3.22)$$

ここで、

$$F_{ij} = -\frac{\partial}{\partial r_k} [\langle \omega_i u_k \omega'_j \rangle + \langle \omega_j u_k \omega'_i \rangle], \quad (3.23)$$

$$G_{ij} = -\frac{\partial}{\partial r_k} [\langle \omega_k u_i \omega'_j \rangle + \langle \omega_k u_j \omega'_i \rangle], \quad (3.24)$$

$$F_{ii} = \nabla \cdot \langle (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}') \Delta \mathbf{u} \rangle, \quad (3.25)$$

$$G_{ii} = 2\nabla \cdot \langle (\Delta \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega}') \boldsymbol{\omega} \rangle, \quad (3.26)$$

である。 $F(r)$ は F_{ii} 、 $G^L(r)$ は G_{ii} からそれぞれ得ることができる。 F_{ii} および G_{ii} について第一に興味があるが、まずは $\langle \omega_i u_j \omega'_k \rangle$ の一般的な表現を見つけることから始める。

等方性と連続性から $\langle \omega_i u_j \omega'_k \rangle$ を、 $r = |\mathbf{r}|$ の2つのスカラー関数 D 、 $B - C$ によって以下のように書くことができる。

$$\begin{aligned} \langle \omega_i u_j \omega'_k \rangle = & \left[\frac{D'}{r} r_i r_j r_k - \frac{(r^3 D)'}{2r^2} (r_i \delta_{jk} + r_j \delta_{ik}) + D r_k \delta_{ij} \right] \\ & + \frac{1}{2} (B - C) (r_i \delta_{jk} - r_j \delta_{ik}). \end{aligned} \quad (3.27)$$

ここで、' は r についての微分を表す。また、 D 、 $B - C$ は以下の式で定義される。

$$4rD = \langle \omega_x \Delta u_x \omega'_x \rangle (r \hat{e}_x), \quad (3.28)$$

$$4(B - C) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r^4 u^3 K). \quad (3.29)$$

$K(r)$ は縦速度 3 重相関関数

$$\langle u_x^2 u'_x \rangle (r \hat{e}_x) = u^3 K(r) = \frac{1}{6} \langle (\Delta u_x)^3 \rangle (r \hat{e}_x), \quad (3.30)$$

である。式 (3.29) は以下のように書くことができる。

$$B - C = -\frac{1}{30r^4} \frac{\partial}{\partial r} (r^5 \Pi^*). \quad (3.31)$$

ここで、 Π^* は既に定義したように以下のようなものである。

$$\Pi^*(r) = -\frac{5}{4} \frac{1}{r^6} \frac{\partial}{\partial r} r^6 \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{6} \langle (\Delta u_x)^3 \rangle \right] = -\frac{15}{2} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r^4} \frac{\partial}{\partial r} (r^4 u^3 K). \quad (3.32)$$

F_{ii} 、 G_{ii} は $B - C$ の代わりに Π^* をもちいて以下のように書ける。

$$F_{ii} = \frac{2}{15} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r^5 \left[15D - \frac{1}{2} \Pi^* \right] = \mathcal{L} \left[15D - \frac{1}{2} \Pi^* \right], \quad (3.33)$$

$$G_{ii} = \frac{2}{15} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r^5 \left[15D + \frac{1}{2} \Pi^* \right] = \mathcal{L} \left[15D + \frac{1}{2} \Pi^* \right]. \quad (3.34)$$

ここで、 \mathcal{L} は線形演算子

$$\mathcal{L}[\sim] = \frac{2}{15} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r^5 [\sim], \quad (3.35)$$

である。このように、 F_{ii} 、 G_{ii} は 2 つのスカラー関数 $D(r)$ 、 $\Pi^*(r)$ によって決定される。このあと示すように、式 (3.33)、(3.34) は $F(r)$ と $G^L(r)$ を表現するのに用い、以下のように書ける。

$$F(r) = 15D - \frac{1}{2} \Pi^*, \quad (3.36)$$

$$G(r) = 15D + \frac{1}{2} \Pi^*. \quad (3.37)$$

3.4 エンストロフィのスケールごとの表現

3.4.1 スペクトル空間、実空間でのエンストロフィ密度

次に、エンストロフィのスケールごとの表現について考える。一般的な方法は、エネルギースペクトル $E(k)$ によるスペクトル的なアプローチである。 $kE(k)$ はスケール $r \sim \pi/k$ におけるエネルギーを表し、 $k^3E(k)$ は同じスケールにおけるエンストロフィと関連付けられる。このアプローチは以下のことを基にして合理化される。

(i) $k^2E(k) > 0$,

(ii) $\int_0^\infty k^2E(k)dk = \frac{1}{2}\langle\omega^2\rangle$,

(iii) サイズ l_e のランダムな局所的 Gaussian 渦の集まりは、以下のようなエンストロフィスペクトルを形成する。

$$k^2E(k) = \frac{4\langle\omega^2\rangle l_e}{15\sqrt{\pi}}(kl_e/2)^2 \exp[-(kl_e/2)^2]. \quad (3.38)$$

このスペクトルは $k = 2\sqrt{3}/l_e \approx \pi/l_e$ でシャープなピークを持つ [25]。

一般的なスペクトル的なアプローチでは、つぎに Karman-Howarth 方程式 [26] のフーリエ変換

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{k}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r^4 u^3 K) \sin(kr) dr - 2\nu k^2 E(k), \quad (3.39)$$

について考える。より良い表現は

$$\frac{\partial}{\partial t}[k^2 E] = \frac{\partial \Pi_\omega}{\partial k} - 2\nu k^4 E, \quad (3.40)$$

である。ここで、

$$\Pi_\omega(k) = \frac{2k}{15\pi} \int_0^\infty \Pi^*(r)(kr)^3 j_3(kr) dr, \quad (3.41)$$

である。

フーリエ空間を避ける、別の方法について考える [27]。 $k^2E(r)$ とのアナロジーから、

$$\Omega(r) = -\frac{15}{4} \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \langle(\Delta u_x)^2\rangle, \quad (3.42)$$

で定義される $\Omega(r)$ について考察する。ここで、 $\Delta u_x = u_x(\mathbf{x} + r\hat{e}_x) - u_x(\mathbf{x})$ は縦速度差である。以下のことがすぐに確かめられる。

- (i) $\int_0^r \Omega(r) dr > 0$,
- (ii) $\int_0^\infty \Omega(r) dk = \frac{1}{2} \langle \omega^2 \rangle$,
- (iii) サイズ l_e のランダムな局所的 Gaussian 渦の集まりは、以下のような表現を与える。

$$r\Omega(r) = \langle \omega^2 \rangle (r/l_e)^2 \exp[-(r/l_e)^2]. \quad (3.43)$$

この関数は $r = l_e$ でピークを持つ。

明らかに、 $k^2 E(k)$ がエンストロフィのスケールごとの変動の大雑把な見積もりを与えたのとほとんど同じような方法で、 $\Omega(r)$ をエンストロフィ密度と考えることができる。定義 (3.42) と $\langle \omega \cdot \omega' \rangle = -\nabla^2 \langle \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}' \rangle$ から

$$\langle \omega \cdot \omega' \rangle = \mathcal{L} \left[\int_r^\infty \Omega dr \right] = \mathcal{L} \left[\left\langle \frac{1}{2} (\omega^L)^2 \right\rangle \right], \quad (3.44)$$

と書ける。ここで、 \mathcal{L} は式 (3.35) で定義された線形演算子である。

Karman-Howarth 方程式から、式 (3.40)、(3.41) の $\Omega(r)$ に対するアナロジーが得られる。そして、以下の式が導かれる。

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} = -\frac{\partial \Pi^*}{\partial r} + 2\nu \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r^6} \frac{\partial}{\partial r} (r^6 \Omega). \quad (3.45)$$

$\Pi^*(r \rightarrow \infty) = 0$ であるので、 $\Pi^*(r)$ は、慣性プロセスによるスケール r 以上のエンストロフィの増加率を表す。よって、 $\Pi^*(0) = \langle \omega_i \omega_j S_{ij} \rangle$ であり、このことは定義からも直接確かめられる。

3.4.2 実空間でのエンストロフィの流束と生成

式 (3.45) の積分から

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^\infty \Omega dr = \Pi^* - 2\nu \frac{1}{r^6} \frac{\partial}{\partial r} (r^6 \Omega), \quad (3.46)$$

となり、式 (3.10) と比べることにより、

$$\Pi^*(r) = G^L(r) - F(r), \quad (3.47)$$

が得られる。すなわち、粘性効果がなければ、スケール r 以上のエンストロフィの増加率は、正味の生成量からスケール r を過ぎるより小さなスケールへの流束を引いたものに等しいということである。

式 (3.22)、(3.33)、(3.34) および (3.44) から

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}' \rangle = -F_{ii} + G_{ii} + 2\nu \nabla^2 \langle \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}' \rangle, \quad (3.48)$$

が得られる。ここで、

$$\langle \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}' \rangle = \mathcal{L} \left[\int_r^\infty \Omega dr \right], \quad (3.49)$$

$$F_{ii}(r) = \mathcal{L} \left[15D - \frac{1}{2} \Pi^* \right], \quad (3.50)$$

$$G_{ii}(r) = \mathcal{L} \left[15D + \frac{1}{2} \Pi^* \right], \quad (3.51)$$

である。式 (3.48) を積分し演算子 \mathcal{L} を消すことにより

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_r^\infty \Omega dr = - \left(15D - \frac{1}{2} \Pi^* \right) + \left(15D + \frac{1}{2} \Pi^* \right) - 2\nu \frac{1}{r^6} \frac{\partial}{\partial r} (r^6 \Omega), \quad (3.52)$$

を得る。さらに、式 (3.46)、(3.47) と式 (3.52) を比較することにより以下の結果を得る。

$$F(r) = 15D - \frac{1}{2} \Pi^*, \quad (3.53)$$

$$G^L(r) = 15D + \frac{1}{2} \Pi^*. \quad (3.54)$$

$D(r)$ と $\Pi^*(r)$ による、エンストロフィの流束と生成についての陽的な表現を得ることができた。

3.5 準平衡領域でのエンストロフィの生成と流束の評価

3.5.1 慣性小領域での評価

Kolmogorov の 4/5 則

$$\langle (\Delta u_x)^3 \rangle = -\frac{4}{5} \epsilon r, \quad \eta \ll r \ll L, \quad (3.55)$$

を式 (3.32) に代入することにより $\Pi^* = 0$ となる。しかし、 $4/5$ 則は $r/L \ll 1$ での r/L についての展開の最高次の項に過ぎない。Karman-Howarth 方程式を積分することにより

$$\langle (\Delta u_x)^3 \rangle = -\frac{4}{5}\epsilon r - \frac{3}{r^4} \int_0^r r^4 \frac{\partial}{\partial t} \langle (\Delta u_x)^2 \rangle dr + 6\nu \frac{\partial}{\partial r} \langle (\Delta u_x)^2 \rangle, \quad (3.56)$$

を得る。慣性小領域では、 $2/3$ 則より以下のような形に書き換えられる。

$$\langle (\Delta u_x)^3 \rangle = -\frac{4}{5}\epsilon r [1 - \gamma_t (r/L)^{2/3}], \quad (3.57)$$

ここで、 γ_t は $O(1)$ の正の係数である。新しい寄与 $\gamma_t (r/L)^{2/3}$ は Karman-Howarth 方程式の項 $\partial \langle (\Delta u_x)^2 \rangle / \partial t$ から生じている。

式 (3.57) を式 (3.32) に代入すると、 $\Pi^*(r)$ はゼロではなく

$$\Pi^*(r) \sim -\frac{\epsilon}{L^{2/3} r^{4/3}}, \quad \eta \ll r \ll L, \quad (3.58)$$

となる。一方、式 (3.28) から $rD(r) \sim \omega_r^2 v_r$ と評価できる。ここで、 $v_r \sim \epsilon^{1/3} r^{1/3}$ 、 $\omega_r \sim \epsilon^{1/3} r^{-2/3}$ はそれぞれ、スケール r における特徴的な速度、渦度である。このとき、 $D \sim \epsilon/r^2$ であるので、

$$G^L(r) \sim F(r) \sim \epsilon/r^2, \quad \eta \ll r \ll L, \quad (3.59)$$

となる。さらに、 $\Pi^* = -F + G^L$ および式 (3.58)、(3.59) より

$$F(r) = G^L(r) [1 + O((r/L)^{2/3})] \sim \epsilon/r^2, \quad \eta \ll r \ll L, \quad (3.60)$$

を得る。

3.5.2 散逸領域での評価

次に散逸領域 $r \sim \eta$ における $G^L(r)$ と $F(r)$ の形について調べる。式 (3.19) から $F_{ii}(0) = 2\langle \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\omega}) \rangle = 0$ 、 $G_{ii}(0) = 2\langle \boldsymbol{\omega} \cdot (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \mathbf{u}) \rangle$ である。さらにこれらは r についての偶関数であるので

$$F_{ii}(r \rightarrow 0) = O(r^2), \quad (3.61)$$

$$G_{ii}(r \rightarrow 0) = 2\langle \omega_i \omega_j S_{ij} \rangle + O(r^2), \quad (3.62)$$

と書ける。これらを式 (3.33)、(3.34) に代入し積分することにより $G^L(0) = \langle \omega_i \omega_j S_{ij} \rangle$ および $F(0) = 0$ が得られる。これらは $\Pi^*(0) = \langle \omega_i \omega_j S_{ij} \rangle$ と、

$r \rightarrow 0$ でエンストロフィの流束がゼロになるということと矛盾しないものである。 $r \sim \eta$ の場合を考えると、式 (3.28)、(3.32) から D 、 Π^* は散逸領域で次のようなスケールを持つことが分かる。

$$D(r) \sim \Pi^*(r) \sim \langle \omega_i \omega_j S_{ij} \rangle \sim \epsilon / \eta^2. \quad (3.63)$$

よって、以下の結果を得る。

$$F(r) \sim G^L(r) \sim \epsilon / \eta^2 \sim \langle \omega_i \omega_j S_{ij} \rangle, \quad r \sim \eta. \quad (3.64)$$

式 (3.64) の特筆すべき特徴のひとつは、散逸領域でのエンストロフィの流束および生成は慣性小領域でのそれよりも $(r/\eta)^2$ のファクターだけ大きいということである。これは、渦度が主にスケール η にあるという事実を反映している。

3.6 数値計算との比較

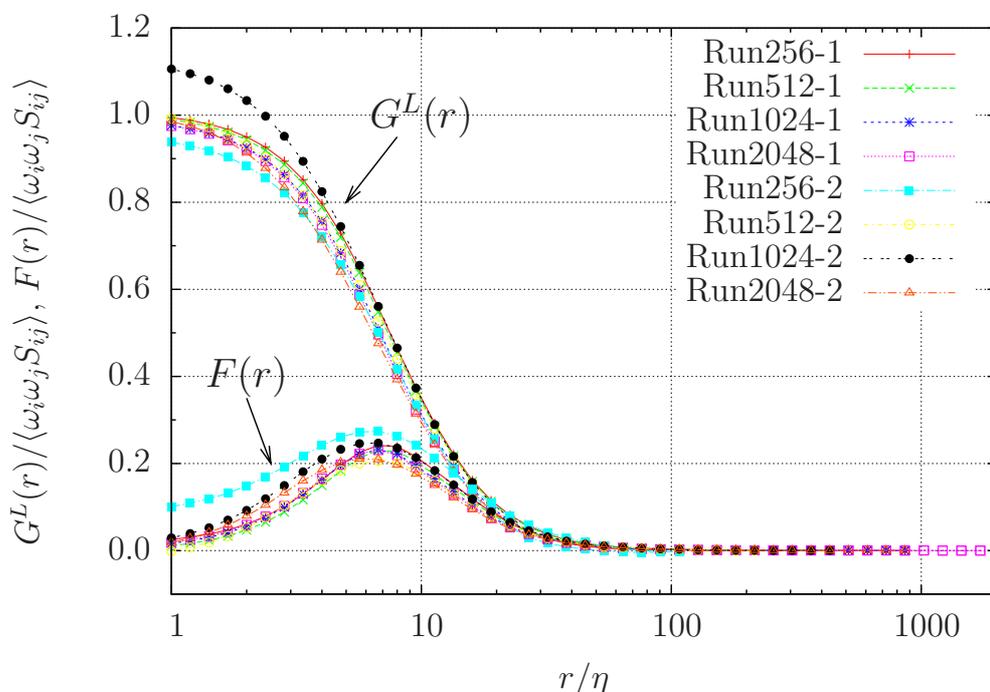


図 3.1: $\langle \omega_i \omega_j S_{ij} \rangle$ により規格化した $G^L(r)$ と $F(r)$ の r/η 依存性。(lin-log plot) ([28] より)

2.2.1 節で示した一様等方性乱流の DNS データ [5, 6, 7] を用いて、解析結果と数値計算との比較を行った。

図 3.1 は、 $G^L(r)$ と $F(r)$ を r/η の関数として求めたものである。期待されたように、 $G^L(r)$ と $F(r)$ は正の値を持ち、また $G^L(0) = \langle \omega_i \omega_j S_{ij} \rangle$ および $F(0) = 0$ であることが確認できる。さらに、これらの関数は散逸領域が支配的であることがわかる。 $F(r)$ の最大値は $r/\eta \approx 6$ にあり、また $G^L(r)$ の勾配の最大値も $r \sim 6\eta$ にある。このことは、最も活発なエントロフィの生成は、エントロフィ流束が最大となるスケールと大体同じところで起きていることを示唆している。

同じデータの log-log プロットを図 3.2 に示す。慣性小領域では、 $G^L(r)$ と $F(r)$ はほぼ等しく、式 (3.59)、(3.60) で予想されたように、 $F(r) \approx G^L(r) \sim \epsilon/r^2$ のスケーリングを持っていることが確認できる。 r^{-2} となるスケール領域が、特に高い R_λ に対して非常に広い範囲で明確に出ている

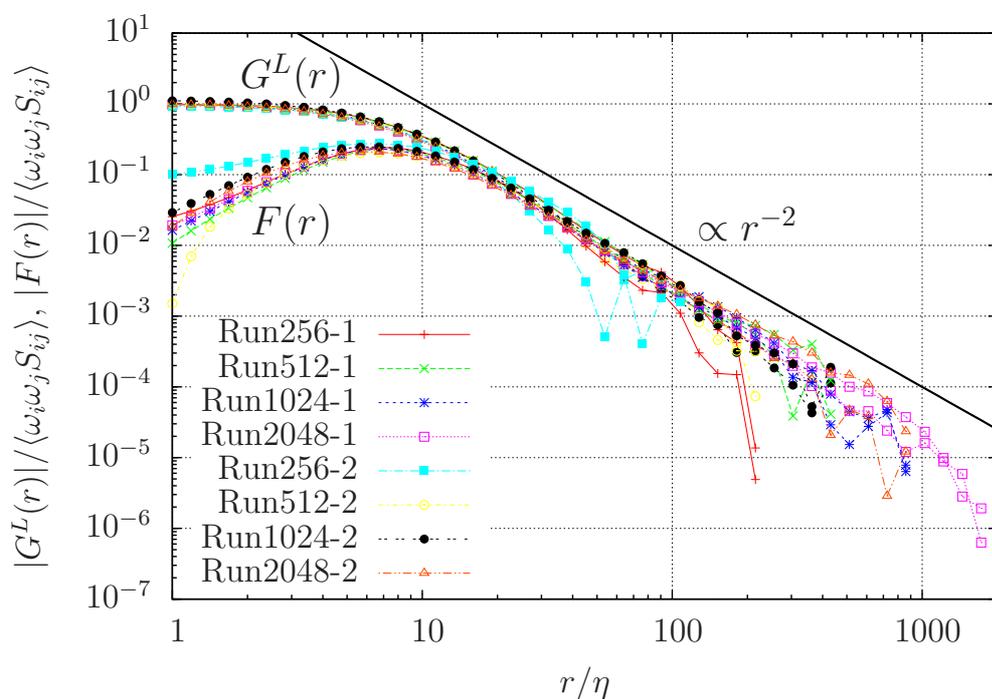


図 3.2: $\langle \omega_i \omega_j S_{ij} \rangle$ により規格化した $G^L(r)$ と $F(r)$ の r/η 依存性。(log-log plot) ([28] より)

ことは興味深い結果である。これは、 $E \sim k^{-5/3}$ が成り立つ範囲 [6] よりも広い。

図 3.3、3.4 に $\Pi^*(r) = G^L(r) - F(r)$ を示す。散逸領域における $\Pi^*(r)$ の形は lin-log プロット (図 3.3) で見ることができ、一方、 $|\Pi^*|$ の log-log プロット (図 3.4) から慣性小領域での振る舞いが分かる。グラフでは明確ではないが Π^* は散逸領域の外で負になっており、高 R_λ では、符号の反転は $r/\eta \approx 50$ で起きている。この符号の反転は、 $|\Pi^*|$ の log-log プロット (図 3.4) での $|\Pi^*|$ のシャープなくぼみとして表れている。慣性領域では $\Pi^*/\langle \omega_i \omega_j S_{ij} \rangle$ は大体 $r^{-4/3}$ でスケールされていることが分かる。 $\langle \omega_i \omega_j S_{ij} \rangle \sim \epsilon/\eta^2$ であり、また ν は慣性領域では関係のない量であるので、

$$\Pi^*/\langle \omega_i \omega_j S_{ij} \rangle \sim -(r/\eta)^{-2}(r/L)^{2/3} \sim -\epsilon/(r^{4/3}L^{2/3}), \quad (3.65)$$

と書けることを示唆している。

図 3.5 は同じデータから求めた $rd\Pi^*/dr$ である。この量はスケール空

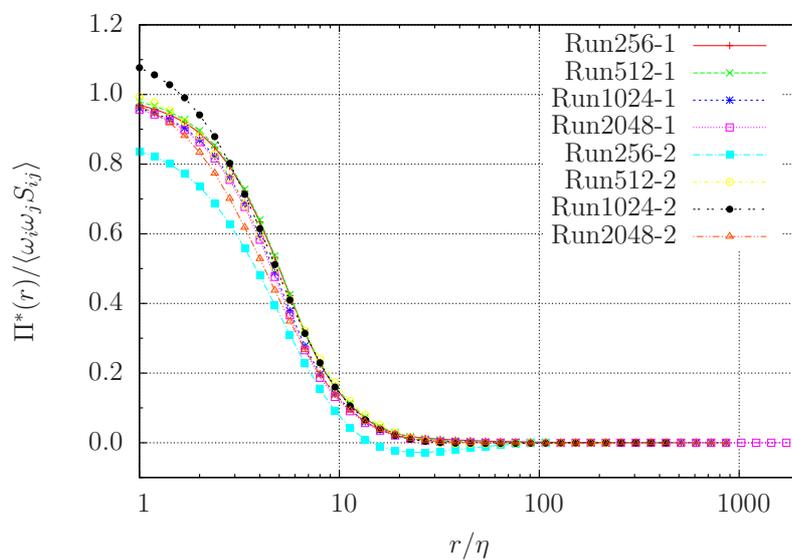


図 3.3: $\langle \omega_i \omega_j S_{ij} \rangle$ により規格化した $\Pi^*(r) = G^L(r) - F(r)$ の r/η 依存性。 ([28] より)

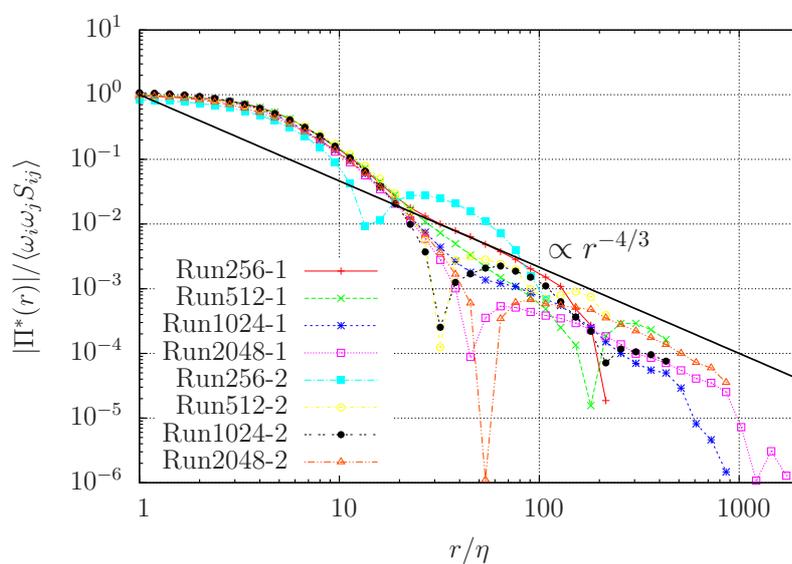


図 3.4: $\langle \omega_i \omega_j S_{ij} \rangle$ により規格化した $|\Pi^*|$ の r/η 依存性。 ([28] より)

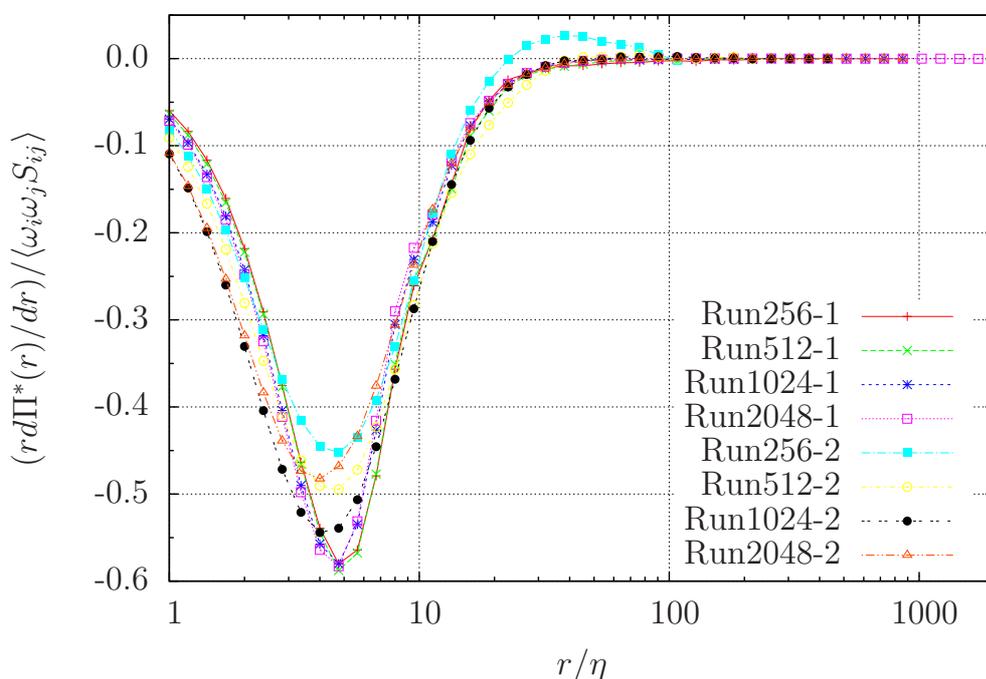


図 3.5: $\langle \omega_i \omega_j S_{ij} \rangle$ により規格化した $rd\Pi^*/dr$ の r/η 依存性。 ([28] より)

間における局所エンストロフィ散逸の大きさを与える。ピークは $r/\eta \approx 5$ にあり、これはエンストロフィ流束の最大値の場所と近く、また、エネルギー散逸のピークと比べるとかなり小さい (エネルギー散逸の最大値はだいたい $r \approx 14\eta$ である [25])。

次に、アンサンブル平均をとる前の $\Pi^*(r)$ の統計について調べる。 $\hat{\Pi}^*$ を Π^* の平均をする前の量とする。図 3.6、3.7 はそれぞれ、 $R_\lambda = 429, 732$ での、さまざまな r/η についての $\hat{\Pi}^*(r)$ の PDF である。PDF は明らかに非ガウシアンであり、テント状の形をしており、加速度や速度勾配の PDF と非常に似ている。また PDF の形は、 $\hat{\Pi}^*(r)$ の瞬間の値は正よりも負の値の方が多いことを示している。いいかえると、このことは渦管の伸張よりも圧縮の方が多く起きていることを示唆している

図 3.8 に $\hat{\Pi}^*(r)$ の分散 $\sigma_{\Pi}^2 = \langle (\hat{\Pi}^* - \langle \hat{\Pi}^* \rangle)^2 \rangle$ を示す。規格化された分散は、Kolmogorov スケーリングを用いた場合には R_λ にほとんど依存しないことが分かり、また慣性領域では $\sigma_{\Pi}^2 / \langle \omega_i \omega_j S_{ij} \rangle^2 \sim (r/\eta)^{-10/3}$ に従っている。よって、平衡領域での $\hat{\Pi}^*(r)$ の統計量は、大きなスケールには敏感ではないと言える。しかし、このことは正確には正しくない。慣性領域

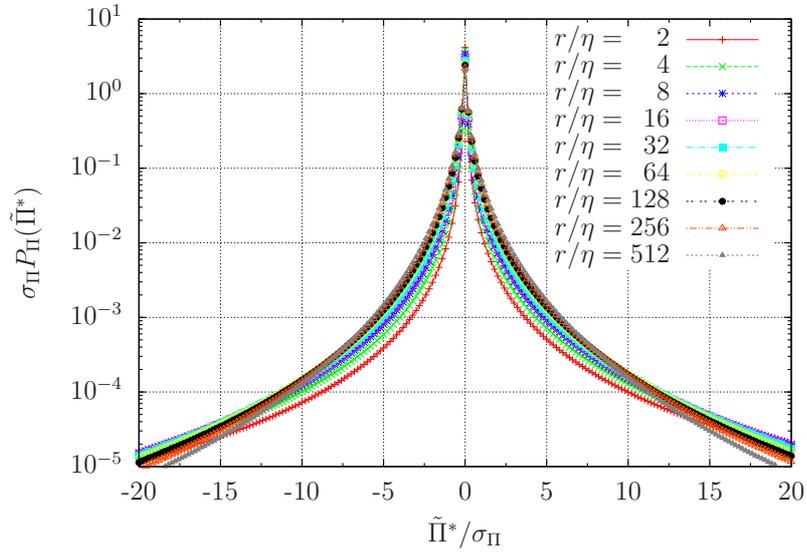


図 3.6: $\tilde{\Pi}^*(r)$ の PDF. ($R_\lambda = 429$) ([28] より)

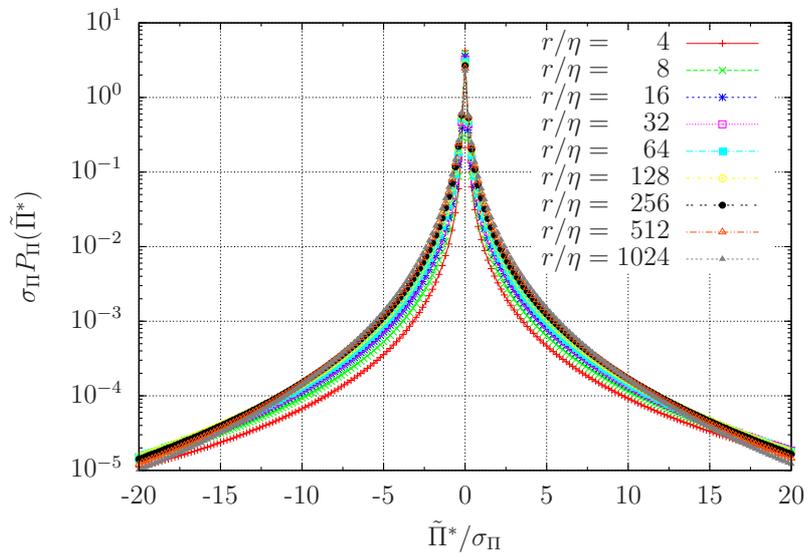


図 3.7: $\tilde{\Pi}^*(r)$ の PDF. ($R_\lambda = 732$) ([28] より)

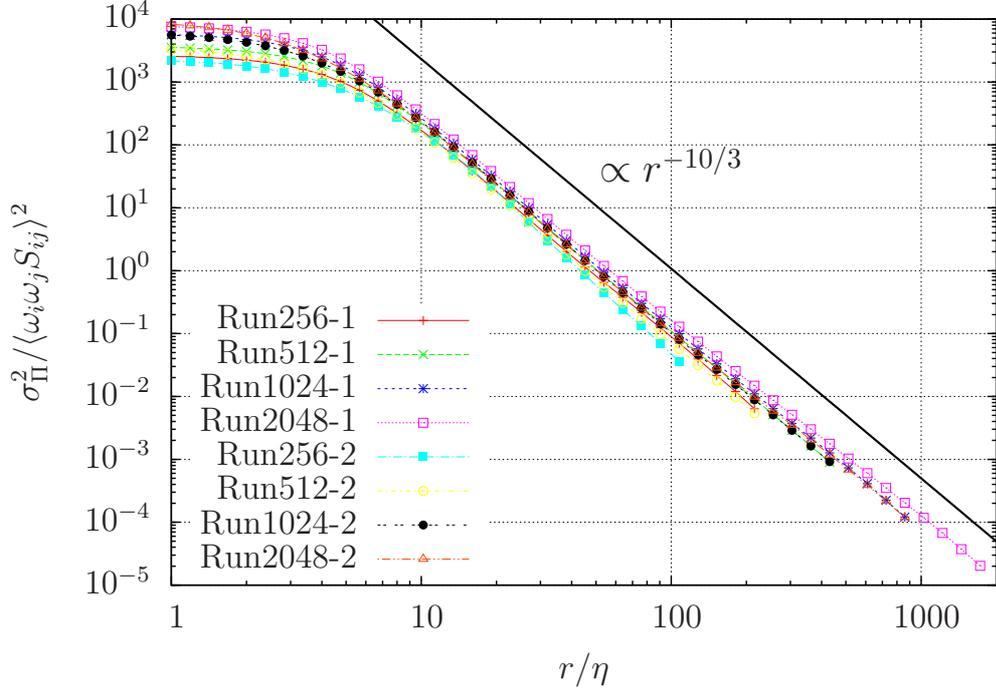


図 3.8: $\langle \omega_i \omega_j S_{ij} \rangle^2$ により規格化した分散 σ_{Π}^2 の r/η 依存性。 ([28] より)

でのスケージング $\sigma_{\Pi}^2 \sim r^{-10/3}$ から、 ν を変数として消去するためには、

$$\sigma_{\Pi}^2 / \langle \omega_i \omega_j S_{ij} \rangle^2 \sim (r/\eta)^{-4} (r/L)^{2/3}, \quad (3.66)$$

となる必要がある。式 (3.66) でのファクター $(r/L)^{2/3}$ の出現は、シミュレーションで用いた外力や大スケールの非等方性の影響によるものである。

最後に、図 3.9、3.10 に、平均をとる前の F_{ii} 、 G_{ii} の PDF を示す。 F_{ii} 、 G_{ii} は、

$$F_{ii} = \nabla \cdot \langle (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}') \Delta \mathbf{u} \rangle, \quad (3.67)$$

$$G_{ii} = 2 \nabla \cdot \langle (\Delta \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega}') \boldsymbol{\omega} \rangle, \quad (3.68)$$

のように定義され、 F 、 G^L とは $F = \mathcal{L}^{-1}[F_{ii}]$ 、 $G = \mathcal{L}^{-1}[G_{ii}]$ で関連付けられる。よって、 \tilde{F}_{ii} 、 \tilde{G}_{ii} の統計は \tilde{F} 、 \tilde{G}^L の統計の指標となる。 $\hat{\Pi}^*(r)$ と同じように、PDF はテント状の形をしていることが分かる。

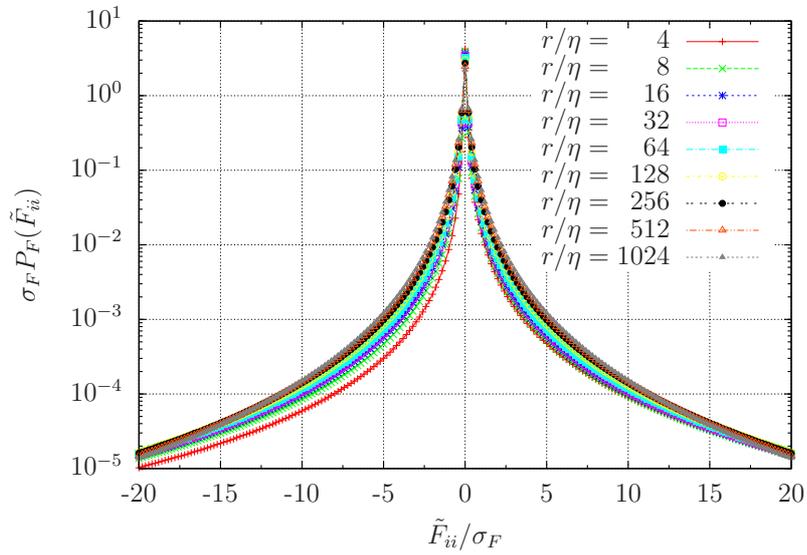


図 3.9: \tilde{F}_{ii} の PDF. (Run 2048-1) ([28] より)

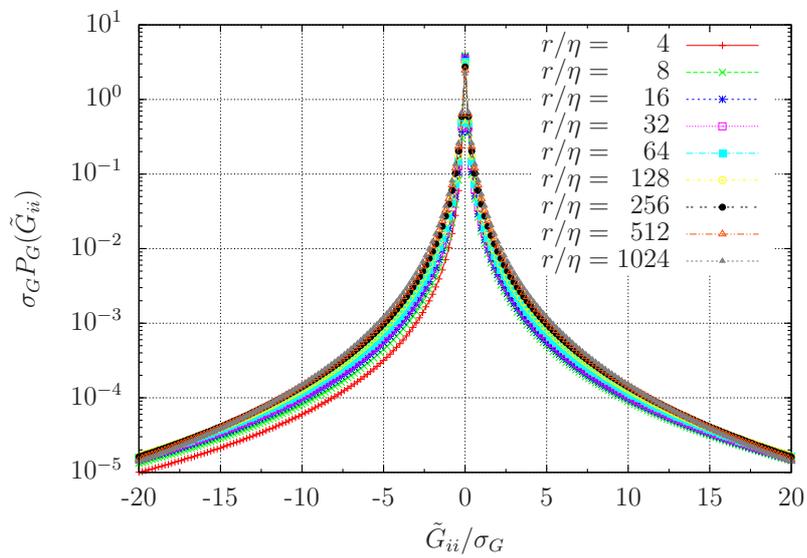


図 3.10: \tilde{G}_{ii} の PDF. (Run 2048-1) ([28] より)

3.7 まとめ

本研究では、高レイノルズ数乱流中における渦の伸張とカスケードの関係を明らかにするために、渦度を特徴づけるエンストロフィに着目し、その各スケールにおける生成と輸送を、世界最大のレイノルズ数を実現した3次元一様等方性乱流の大規模DNSデータ [5, 6, 7] によって評価し、理論による予測との比較を行った。その結果、主に以下のことが示された。

- (a) エンストロフィの生成 $G^L(r)$ 、輸送 $F(r)$ は散逸領域が支配的である。 $F(r)$ の最大値は $r/\eta \approx 6$ にあり、また $G^L(r)$ の勾配の最大値も $r \sim 6\eta$ にある。このことは、最も活発なエンストロフィの生成は、エンストロフィ流束が最大となるスケールと大体同じところで起きていることを示唆している。慣性小領域では、理論で予想されたように $G^L(r)$ と $F(r)$ はほぼ等しく、 $F(r) \approx G^L(r) \sim \epsilon/r^2$ のスケーリングを持っている。
- (b) エンストロフィの増加率 $\Pi^*(r) = G^L(r) - F(r)$ は慣性小領域において $r^{-4/3}$ のスケーリングを持つ。局所エンストロフィ散逸 $r d\Pi^*/dr$ のピークは $r/\eta \approx 5$ にあり、これはエンストロフィ輸送が最大値となるスケールと近く、また、エネルギー散逸のピーク ($r \approx 12\eta$) と比べるとかなり小さい。
- (c) アンサンブル平均をとる前の $\Pi^*(r)$ のPDF は非ガウシアンであり、テント状の形をしており、加速度や速度勾配のPDF と非常に似ている。またPDFの形は、 $\hat{\Pi}^*(r)$ の瞬間の値は正よりも負の値の方が多くを示しており、このことは渦管の伸張よりも圧縮の方が多く起きていることを示唆している。

第4章 高レイノルズ数壁乱流における局所等方性の検証

4.1 はじめに

1941年のKolmogorovによる普遍平衡仮説(K41)[2]によると、十分高いレイノルズ数の乱流の十分小さなスケールでは、外力や境界条件の詳細に依存しない普遍的な統計法則が存在すると考えられている。また、非一様性乱流である壁乱流においても、レイノルズ数が十分高ければ、大きなスケールのジオメトリの影響を受けないくらいには十分壁に近く、かつ局所等方性が満たされるほど十分壁から離れている領域でK41が成立すると考えられている[32]。

K41の普遍平衡仮説の中では、レイノルズ数の十分高い乱流の、境界から十分離れ十分小さなスケールでは局所等方性が満たされるとされた。実際に近くに境界の存在する乱流において、局所等方性が満たされるためには、どれくらい境界から離れていけば十分なのか、また、どれくらいスケールが小さければ十分なのかということは必ずしも自明なことではない。

これまで、実験や数値計算により、壁乱流における局所等方性の成立についての数多くの検証が行われてきている[29, 30, 31, 32]。しかし、実験では高レイノルズ数の乱流が実現可能であるが、測定できる物理量には制限があるために、Taylor仮説に基づいて時系列データを空間データに置き換えるなどの近似を行っており、必ずしも厳密なものとは言えない。一方、数値計算では、さまざまな物理量が厳密に測定可能であるが、これまで実現可能なレイノルズ数は低く限られていた。

本研究では、壁乱流の中で最も基礎的な問題の一つであるチャンネル乱流のDNSコードを開発し、地球シミュレータを用いた大規模並列計算により、世界最大のレイノルズ数のチャンネル乱流DNSを実現を目指す。さらに、そのデータ解析により、高レイノルズ数壁乱流における局所等方性の成立についての定量化を試みる。

4.2 チャネル乱流

4.2.1 座標系

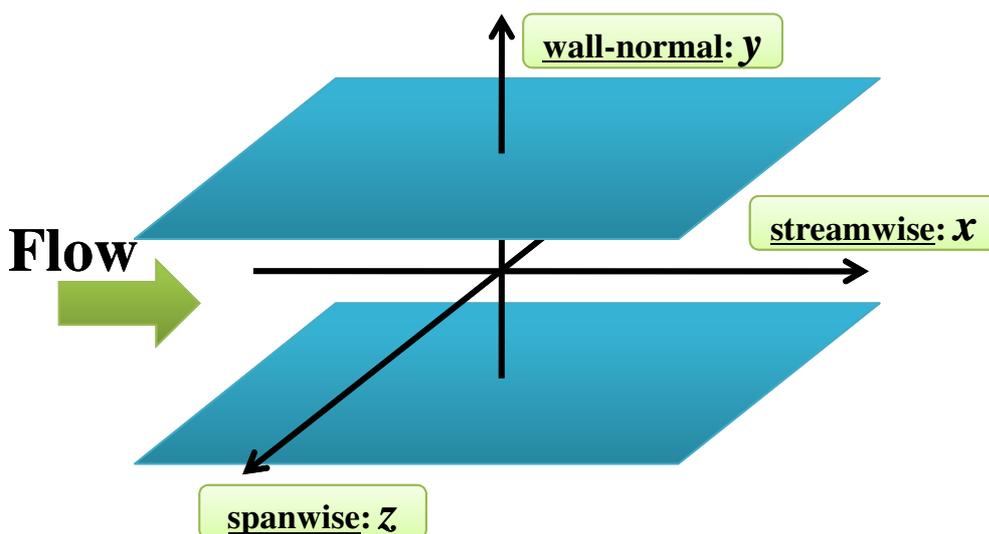


図 4.1: チャネル乱流の座標系。

座標系は、流れ方向に x 、壁垂直方向に y 、スパン方向に z をそれぞれとり、2枚の平板間隔を $2h$ とする (図 4.1)。 x, z 方向には流れ場が統計的に一様であるとして周期境界条件を課し、 y 方向には壁上ですべりなし条件を課す。また、流れは x 方向の平均圧力勾配によって駆動され、その大きさは体積流量の時間変化が一定となるように動的に決める。

4.2.2 支配方程式

基礎方程式には 3次元非圧縮 Navier-Stokes 方程式

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\nabla \left(p + \frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 \right) + \mathbf{H} + \frac{1}{Re_\tau} \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (4.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (4.2)$$

を用いる。ここで、 $\mathbf{u} = (u, v, w)$ は速度、 p は圧力、 $\mathbf{H} \equiv \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} = (H_x, H_y, H_z)$ は非線形項、 $\boldsymbol{\omega} \equiv \nabla \times \mathbf{u} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ は渦度である。ま

た、摩擦レイノルズ数

$$Re_\tau \equiv \frac{u_\tau h}{\nu}, \quad (4.3)$$

であり、ここで、 ν は動粘性係数、 u_τ は

$$u_\tau^2 = \nu \left(\frac{dU}{dy} \right)_{y=\pm h}, \quad (4.4)$$

で定義される壁摩擦速度である。

式(4.1)、(4.2)は、次のような、 v (速度の y 成分)に対する4階の偏微分方程式と g (渦度の y 成分)に対する2階の偏微分方程式に変形することができる。

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = h_v + \frac{1}{Re_\tau} \nabla^2 \phi, \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial g}{\partial t} = h_g + \frac{1}{Re_\tau} \nabla^2 g. \quad (4.6)$$

ここで、

$$\phi \equiv \nabla^2 v, \quad (4.7)$$

$$g \equiv \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \quad (4.8)$$

$$h_g \equiv \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x}, \quad (4.9)$$

$$h_v \equiv -\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_z}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) H_y, \quad (4.10)$$

である。また、平板上での滑りなし条件および非圧縮条件から、境界条件は以下ようになる。

$$u(x, y = \pm h, z) = v(x, y = \pm h, z) = w(x, y = \pm h, z) = 0, \quad (4.11)$$

$$g(x, y = \pm h, z) = 0, \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} v(x, y = \pm h, z) = 0. \quad (4.13)$$

4.3 DNSの方法

以下、本研究で行ったDNSの方法について述べる。DNSはKimら[33]の方法に基づき、Navier-Stokes方程式及び非圧縮条件を、速度の壁垂直成分のラプラシアンおよび渦度の壁垂直成分についての方程式に変形した式(4.5)、(4.6)を基にして行った。

4.3.1 時間発展

時間発展には、Jiménezら[34]と同様に、非線形項に3段のルンゲ・クッタ法、粘性項に陰的オイラー法をそれぞれ用いた。式(4.5)、(4.6)に適用すると以下ようになる。

$$\begin{cases} \phi^{(k+1)} = \phi^{(k)} + \left(h_v^{(k)} + \frac{1}{Re_\tau} \nabla^2 \phi^{(k+1)} \right) \alpha_k \Delta t, \\ g^{(k+1)} = g^{(k)} + \left(h_g^{(k)} + \frac{1}{Re_\tau} \nabla^2 g^{(k+1)} \right) \alpha_k \Delta t. \end{cases} \quad (k = 1, 2, 3) \quad (4.14)$$

ここで、

$$(f^{(1)}, f^{(2)}, f^{(3)}, f^{(4)}) = (f_n, f_{n+1/3}, f_{n+2/3}, f_{n+1}), \quad f = \{\phi, g, h_v, h_g\}, \quad (4.15)$$

とした。下付き n は n ステップ目の変数であることを表す。また、係数 α は以下のように与えられる。

$$\alpha_1 = \frac{1}{3}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{2}, \quad \alpha_3 = 1. \quad (4.16)$$

4.3.2 流れ方向及びスパン方向の空間離散化

流れ方向 (x) 及びスパン方向 (z) の空間離散化にはフーリエ・スペクトル法を用いた。各変数 f を、以下のように x, z 方向についてフーリエ級数展開する。

$$f(x, y, z) = \sum_{k_x} \sum_{k_z} \hat{f}(k_x, y, k_z) e^{-i(k_x x + k_z z)}. \quad (4.17)$$

すると式(4.14)は、 $\phi = \nabla^2 v$ と境界条件を考慮すると、以下のような各波数 k_x, k_z のフーリエ係数についての y に関する1次元常微分方程式に

帰着する。

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 \hat{\phi}^{(k+1)}}{dy^2} - \left((k_x^2 + k_z^2) + \frac{Re_\tau}{\alpha_k \Delta t} \right) \hat{\phi}^{(k+1)} = -Re_\tau \left(\hat{h}_v^{(k)} + \frac{\hat{\phi}^{(k)}}{\alpha_k \Delta t} \right), \\ \frac{d^2 \hat{v}^{(k+1)}}{dy^2} - (k_x^2 + k_z^2) \hat{v}^{(k+1)} = \hat{\phi}^{(k+1)}, \\ \text{B.C. } \hat{v}^{(k+1)}(k_x, y = \pm h, k_z) = 0, \\ \frac{d\hat{v}^{(k+1)}}{dy}(k_x, y = \pm h, k_z) = 0, \end{array} \right. \quad (4.18)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 \hat{g}^{(k+1)}}{dy^2} - \left((k_x^2 + k_z^2) + \frac{Re_\tau}{\alpha_k \Delta t} \right) \hat{g}^{(k+1)} = -Re_\tau \left(\hat{h}_g^{(k)} + \frac{\hat{g}^{(k)}}{\alpha_k \Delta t} \right), \\ \text{B.C. } \hat{g}^{(k+1)}(k_x, y = \pm h, k_z) = 0. \end{array} \right. \quad (4.19)$$

ここで、B.C. は境界条件を表す。また、非線形項のフーリエ係数 \hat{h}_v, \hat{h}_g は以下の式で与えられる。

$$\hat{h}_v = \frac{d}{dy} (ik_x \hat{H}_x + ik_z \hat{H}_z) - (k_x^2 + k_z^2) \hat{H}_y, \quad (4.20)$$

$$\hat{h}_g = -ik_z \hat{H}_x + ik_x \hat{H}_z, \quad (4.21)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{H}_x = \widehat{v\omega_z} - \widehat{wg}, \\ \hat{H}_y = \widehat{w\omega_x} - \widehat{u\omega_z}, \\ \hat{H}_z = \widehat{ug} - \widehat{v\omega_x}. \end{array} \right. \quad (4.22)$$

式 (4.22) の計算の際にはエイリアジング誤差が生じる。そのエイリアジング誤差の除去のために、本研究では 3/2 則を用いた。

\hat{g} についての常微分方程式 (4.19) は、Dirichlet 境界値問題として解くことが可能である。一方、 $\hat{\phi}$ 及び \hat{v} についての常微分方程式 (4.18) は、境界条件が $\hat{\phi}$ に対しては直接与えられない。そのため、 \hat{v} に対する 4 つの境界条件を満たすように $\hat{\phi}$ 及び \hat{v} を求める。その際には、Kim ら [33] と同様に解の線形性を利用した次のような方法を用いた。

まず、 $\hat{\phi}^{(k+1)}, \hat{v}^{(k+1)}$ をそれぞれ、特解 $\hat{\phi}_p^{(k+1)}, \hat{v}_p^{(k+1)}$ と 2 つの同次解 $\hat{\phi}_1^{(k+1)}, \hat{v}_1^{(k+1)}$ 及び $\hat{\phi}_2^{(k+1)}, \hat{v}_2^{(k+1)}$ の線形結合として以下のように表す。

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\phi}^{(k+1)} = \hat{\phi}_p^{(k+1)} + C_1 \hat{\phi}_1^{(k+1)} + C_2 \hat{\phi}_2^{(k+1)}, \\ \hat{v}^{(k+1)} = \hat{v}_p^{(k+1)} + C_1 \hat{v}_1^{(k+1)} + C_2 \hat{v}_2^{(k+1)}. \end{array} \right. \quad (4.23)$$

ここで、 C_1, C_2 は定数である。すると、式 (4.18) は次のような3つの方程式系に分解できる。

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 \hat{\phi}_p^{(k+1)}}{dy^2} - \kappa_\phi \hat{\phi}_p^{(k+1)} = -Re_\tau \left(\hat{h}_v^{(k)} + \frac{\hat{\phi}^{(k)}}{\alpha_k \Delta t} \right), \\ \text{B.C. } \hat{\phi}_p^{(k+1)}(y = \pm h) = 0, \\ \frac{d^2 \hat{v}_p^{(k+1)}}{dy^2} - \kappa_v \hat{v}_p^{(k+1)} = \hat{\phi}_p^{(k+1)}, \\ \text{B.C. } \hat{v}_p^{(k+1)}(y = \pm h) = 0. \end{array} \right. \quad (4.24)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 \hat{\phi}_1^{(k+1)}}{dy^2} - \kappa_\phi \hat{\phi}_1^{(k+1)} = 0, \\ \text{B.C. } \hat{\phi}_1^{(k+1)}(y = +h) = 0, \\ \hat{\phi}_1^{(k+1)}(y = -h) = 1, \\ \frac{d^2 \hat{v}_1^{(k+1)}}{dy^2} - \kappa_v \hat{v}_1^{(k+1)} = \hat{\phi}_1^{(k+1)}, \\ \text{B.C. } \hat{v}_1^{(k+1)}(y = \pm h) = 0. \end{array} \right. \quad (4.25)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 \hat{\phi}_2^{(k+1)}}{dy^2} - \kappa_\phi \hat{\phi}_2^{(k+1)} = 0, \\ \text{B.C. } \hat{\phi}_2^{(k+1)}(y = +h) = 1, \\ \hat{\phi}_2^{(k+1)}(y = -h) = 0, \\ \frac{d^2 \hat{v}_2^{(k+1)}}{dy^2} - \kappa_v \hat{v}_2^{(k+1)} = \hat{\phi}_2^{(k+1)}, \\ \text{B.C. } \hat{v}_2^{(k+1)}(y = \pm h) = 0. \end{array} \right. \quad (4.26)$$

ここで、

$$\left\{ \begin{array}{l} \kappa_\phi = (k_x^2 + k_z^2) + \frac{Re_\tau}{\alpha_k \Delta t}, \\ \kappa_v = k_x^2 + k_z^2, \end{array} \right. \quad (4.27)$$

とした。

次に、 $\hat{v}^{(k+1)}$ についての境界条件

$$\left. \frac{d\hat{v}^{(k+1)}}{dy} \right|_{y=+h} = 0, \quad \left. \frac{d\hat{v}^{(k+1)}}{dy} \right|_{y=-h} = 0, \quad (4.28)$$

を式 (4.23) に適用すると、以下の関係式を得る。

$$\begin{cases} \left. \frac{d\hat{v}^{(k+1)}}{dy} \right|_{y=+h} = \left. \frac{d\hat{v}_p^{(k+1)}}{dy} \right|_{y=+h} + \left. \frac{d\hat{v}_1^{(k+1)}}{dy} \right|_{y=+h} + \left. \frac{d\hat{v}_2^{(k+1)}}{dy} \right|_{y=+h} = 0, \\ \left. \frac{d\hat{v}^{(k+1)}}{dy} \right|_{y=-h} = \left. \frac{d\hat{v}_p^{(k+1)}}{dy} \right|_{y=-h} + \left. \frac{d\hat{v}_1^{(k+1)}}{dy} \right|_{y=-h} + \left. \frac{d\hat{v}_2^{(k+1)}}{dy} \right|_{y=-h} = 0. \end{cases} \quad (4.29)$$

そして、式 (4.24)、(4.25)、(4.26) の解を用いて、連立方程式 (4.29) を解くことにより定数 C_1, C_2 を決め、最終的に、式 (4.23) から求めるべき解 $\hat{\phi}^{(k+1)}, \hat{v}^{(k+1)}$ を得る。

4.3.3 壁垂直方向の空間離散化

結局、式 (4.19)、(4.24)、(4.25)、(4.26) はいずれも、各フーリエモードでの、以下のような y に対する 1 次元 Helmholtz 方程式の Dirichlet 境界地問題に帰着する。

$$\begin{cases} f^{(2)}(y) - \kappa f(y) = r(y), & (-1 < y < 1) \\ \text{B.C. } f(-1) = A, f(1) = B. \end{cases} \quad (4.30)$$

ここで、

$$f^{(2)} \equiv \frac{d^2 f}{dy^2}, \quad (4.31)$$

とし、 $\kappa (> 0)$, A, B は定数とする。

本研究では、式 (4.30) の解法として以下に示すチェビシェフ・タウ法を用いた。まず、 $f(y), r(y)$ をそれぞれ次のようにチェビシェフ多項式展開する。(付録 A 参照)

$$f(y_k) = \sum_{n=0}^{N-1} f_n T_n(y_k), \quad (4.32)$$

$$r(y_k) = \sum_{n=0}^{N-1} r_n T_n(y_k). \quad (4.33)$$

ここで、 $T_n(y)$ は n 次のチェビシェフ多項式、 f_n, r_n はチェビシェフ係数、 y_k は N 次のチェビシェフ多項式 $T_N(y)$ のゼロ点である。

式(4.32)、(4.33)とチェビシェフ多項式の直交関係を用いると、式(4.30)は以下のようなチェビシェフ係数に関する連立方程式で表わされる。

$$f_n^{(2)} - \kappa f_n = r_n. \quad (n = 0, 1, \dots, N-1) \quad (4.34)$$

ここで、

$$f^{(2)}(y_k) = \sum_{n=0}^{N-1} f_n^{(2)} T_n(y_k), \quad (4.35)$$

とした。連立方程式(4.34)を解くことで、式(4.30)の解を求めることが可能である。しかしながら、チェビシェフ多項式は一般に式(4.30)の境界条件を満たさない。よって、連立方程式(4.34)を解くことで求まる式(4.30)の解も境界条件を満たさない。そこで、式(4.30)の境界条件をチェビシェフ係数で表わした式

$$\begin{cases} f(-1) = \sum_{n=0}^{N-1} f_n (-1)^n = A, \\ f(1) = \sum_{n=0}^{N-1} f_n = B, \end{cases} \quad (4.36)$$

を式(4.34)の $n = N-2, N-1$ の代わりに用いる。ここで、以下の関係式を用いた。

$$T_n(\pm 1) = (\pm 1)^n. \quad (4.37)$$

結局、以下のようなチェビシェフ係数に関する連立方程式を解くことになる。

$$\begin{cases} f_n^{(2)} - \kappa f_n = r_n, & (n = 0, 1, \dots, N-3) \\ \sum_{n=0}^{N-1} f_n (-1)^n = A, & \sum_{n=0}^{N-1} f_n = B. \end{cases} \quad (4.38)$$

以上のように、変数をチェビシェフ多項式展開し、そのチェビシェフ係数についての連立方程式を立て、さらに、高次 ($n = N-2, N-1$) の係数についての方程式を、境界条件を満たす関係式に置き換えることにより常微分方程式を解く手法をチェビシェフ・タウ法と言う。

連立方程式(4.38)を解くために、チェビシェフ係数について成り立つ以下の関係式を用いる。

$$\frac{c_{n-2}}{4n(n-1)} f_{n-2}^{(2)} - \frac{1}{2(n-1)(n+1)} f_n^{(2)} + \frac{1}{4n(n+1)} f_{n+2}^{(2)} = f_n. \quad (4.39)$$

ここで、

$$c_n = \begin{cases} 2, & (n = 0) \\ 1, & (n > 0) \end{cases} \quad (4.40)$$

である。連立方程式 (4.38) は、式 (4.39) を用いると以下のような f_n のみの連立方程式に書き換えられる。

$$\begin{cases} \frac{\kappa c_{n-2}}{4n(n-1)} f_{n-2} - \left(1 + \frac{\kappa d_{n+2}}{2(n-1)(n+1)}\right) f_n + \frac{\kappa d_{n+4}}{4n(n+1)} f_{n+2} \\ = -\frac{c_{n-2} r_{n-2}}{4n(n-1)} + \frac{d_{n+2} r_n}{2(n-1)(n+1)} + \frac{d_{n+4} r_{n+2}}{4n(n+1)}, & (n = 2, 3, \dots, N-1) \\ \sum_{n=0}^{N-1} f_n (-1)^n = A, & \sum_{n=0}^{N-1} f_n = B. \end{cases} \quad (4.41)$$

ただし、

$$d_n = \begin{cases} 1, & (n < N) \\ 0, & (n \geq N) \end{cases} \quad (4.42)$$

とする。

さらに、式 (4.41) を偶数添え字と奇数添え字に分けることにより、それぞれ次のような 3 重対角+1 行の連立方程式になる。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & & \cdots & & 1 & 1 \\ \kappa\alpha_2 & \kappa\beta_2 - 1 & \kappa\gamma_2 & & & & \\ & \kappa\alpha_4 & \kappa\beta_4 - 1 & \kappa\gamma_4 & & & \mathbf{0} \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \kappa\alpha_{N-6} & \kappa\beta_{N-6} - 1 & \kappa\gamma_{N-6} & \\ \mathbf{0} & & & & \kappa\alpha_{N-4} & \kappa\beta_{N-4} - 1 & 0 \\ & & & & & \kappa\alpha_{N-2} & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} f_0 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N-4} \\ f_{N-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (A+B)/2 \\ -\alpha_2 r_0 - \beta_2 r_2 - \gamma_2 r_4 \\ -\alpha_4 r_2 - \beta_4 r_4 - \gamma_4 r_6 \\ \vdots \\ -\alpha_{N-6} r_{N-8} - \beta_{N-6} r_{N-6} - \gamma_{N-6} r_{N-4} \\ -\alpha_{N-4} r_{N-6} - \beta_{N-4} r_{N-4} \\ -\alpha_{N-2} r_{N-4} \end{pmatrix} \quad (4.43)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \kappa\alpha_3 & \kappa\beta_3 - 1 & \kappa\gamma_3 & & \\ & \kappa\alpha_5 & \kappa\beta_5 - 1 & \kappa\gamma_5 & \mathbf{0} \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \kappa\alpha_{N-5} & \kappa\beta_{N-5} - 1 & \kappa\gamma_{N-5} \\ \mathbf{0} & & & \kappa\alpha_{N-3} & \kappa\beta_{N-3} - 1 & \mathbf{0} \\ & & & & \kappa\alpha_{N-1} & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} f_1 \\ f_3 \\ \vdots \\ f_{N-3} \\ f_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(A-B)/2 \\ -\alpha_3 r_1 - \beta_3 r_3 - \gamma_3 r_5 \\ -\alpha_5 r_3 - \beta_5 r_5 - \gamma_5 r_7 \\ \vdots \\ -\alpha_{N-5} r_{N-7} - \beta_{N-5} r_{N-5} - \gamma_{N-5} r_{N-3} \\ -\alpha_{N-3} r_{N-5} - \beta_{N-3} r_{N-3} \\ -\alpha_{N-1} r_{N-3} \end{pmatrix} \quad (4.44)$$

ここで、

$$\alpha_n = \frac{c_{n-2}}{4n(n-1)}, \quad \beta_n = -\frac{1}{2(n-1)(n+1)}, \quad \gamma_n = \frac{1}{4n(n+1)}, \quad (4.45)$$

とした。

式(4.43)、(4.44)はそれぞれ、ガウスの消去法を下の行から適用することにより解いていく。

表 4.1: DNS のパラメータ。

	Re_τ	L_x/h	L_z/h	$N_x \times N_y \times N_z$	Δx^+	Δy_c^+	Δz^+
Case 1	320	π	$\pi/2$	$128 \times 192 \times 128$	7.9	7.9	3.9
Case 2	640	π	$\pi/2$	$256 \times 384 \times 256$	7.9	7.9	3.9
Case 3	1280	π	$\pi/2$	$512 \times 768 \times 512$	7.9	7.9	3.9
Case 4	2560	π	$\pi/2$	$1024 \times 1536 \times 1024$	7.9	7.9	3.9

4.3.4 計算条件

本研究で行った DNS の計算条件を Table. 4.1 に示す。摩擦レイノルズ数 Re_τ 及び格子点数 N_x, N_y, N_z は、格子点間隔が $\Delta x^+ \sim 8, \Delta y_c^+ \sim 8, \Delta z^+ \sim 4$ となるように決めた [35]。ここで Δy_c^+ は壁垂直方向 (y) のチャンネルの中心部での格子点間隔であり、上付きの $+$ は壁面摩擦速度 u_τ と動粘性係数 ν による規格化を表す。時間刻み幅 dt は、CFL 条件 (< 0.5) を満たすように毎ステップ決めた。各種統計量は、統計的に準定常状態に達した乱流場において 20 wash out 以上の時間平均をとった。なお、ここで 1 wash out とは平均流量が x 方向に 1 周期分 (L_x) 流れるのにかかる時間である。

4.4 可視化

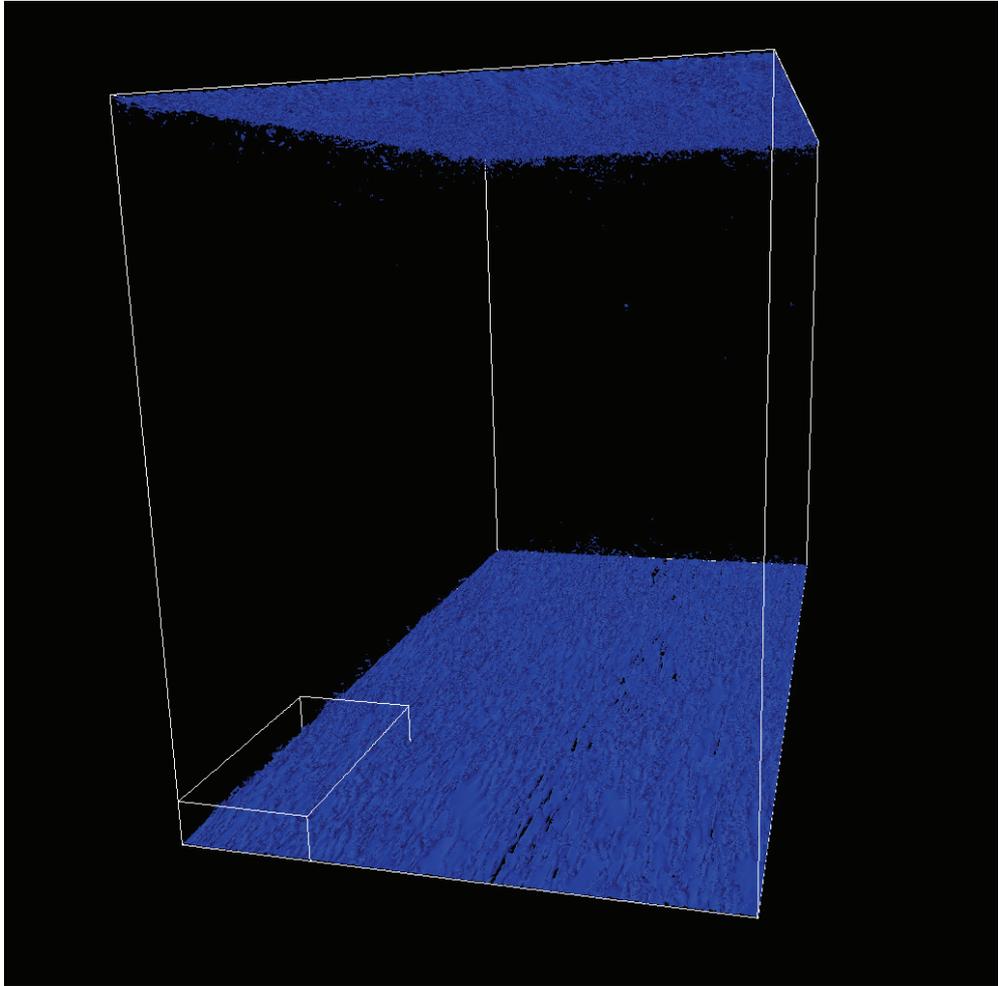


図 4.2: 渦度の強い領域を表す渦度場の等置面。(Case 4)

Case 4 の乱流場における渦度の強い領域を可視化したものを図 4.2 に、その壁付近の拡大を図 4.3 にそれぞれ示す。渦度の強い領域は、壁付近に集中していることが確認できる。

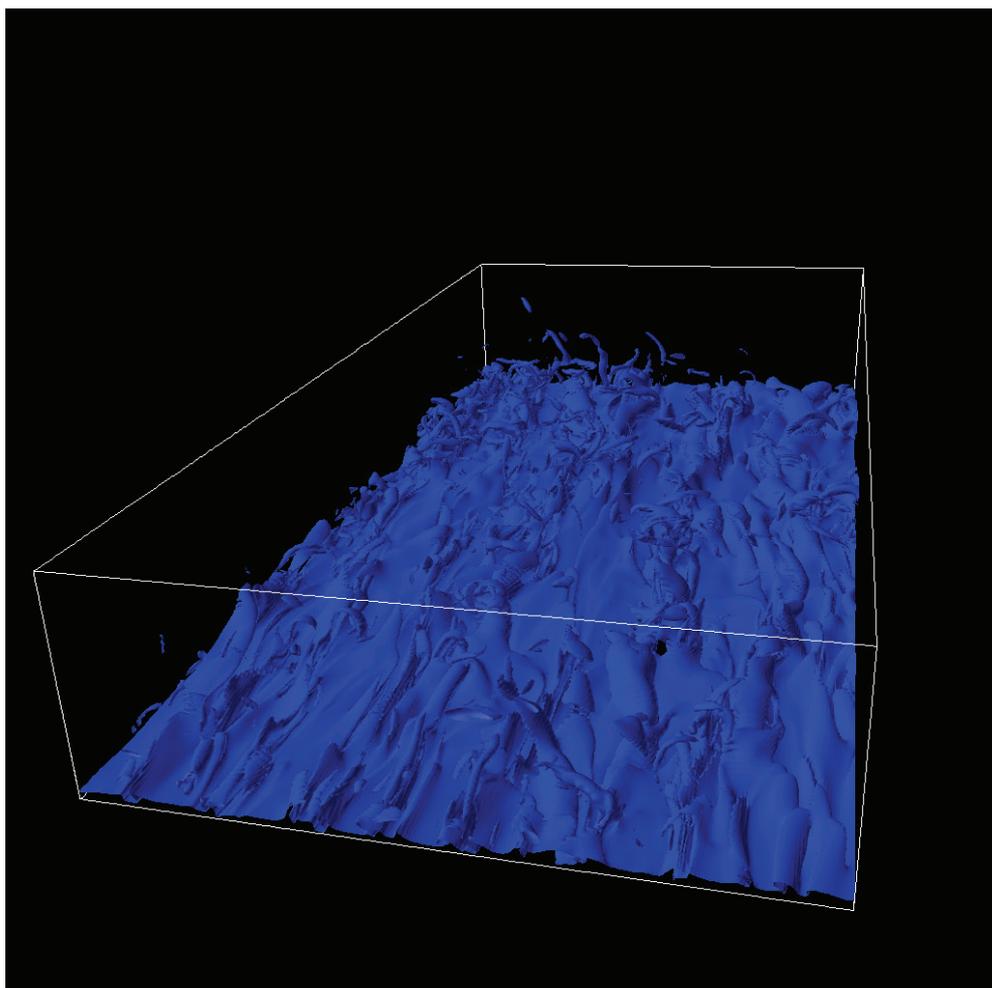


図 4.3: 渦度の強い領域を表す渦度場の等置面の拡大図。(Case 4)

4.5 基礎統計量

4.5.1 平均速度分布

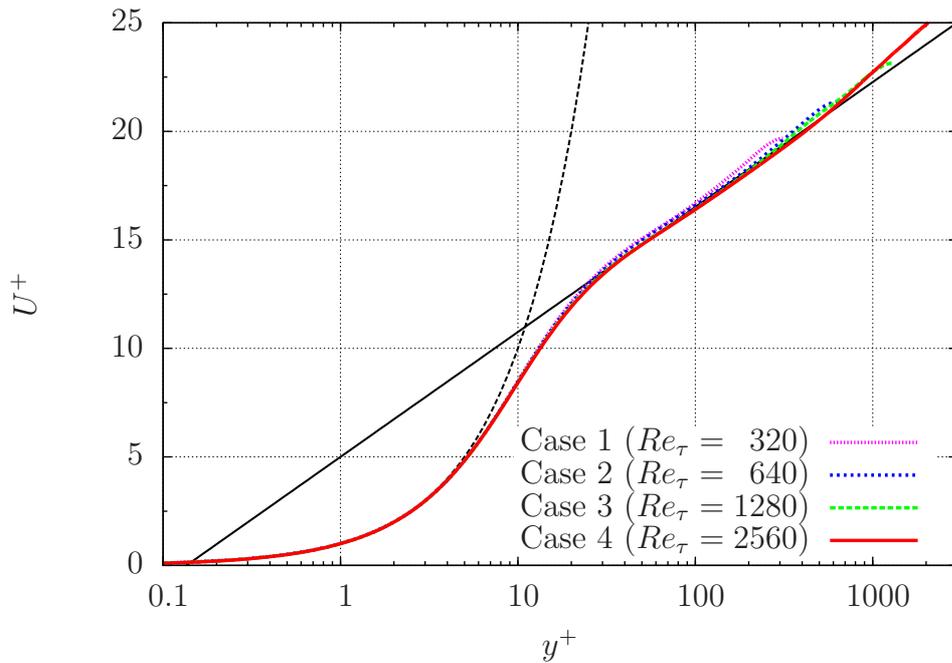


図 4.4: 平均速度分布。実線は対数法則 $U^+ = (1/0.4) \log y^+ + 5.0$ 、波線は壁法則 $U^+ = y^+$ をそれぞれ表す。

図 4.4 に流れ方向の平均速度 U の y^+ 依存性を示す。各ケースの分布は互いによく一致しており、粘性底層 ($y^+ < 5$) においては壁法則

$$U^+ = y^+, \quad (4.46)$$

が満たされていることが分かる。また、いわゆる対数法則

$$U^+ = \frac{1}{\kappa} \log y^+ + A, \quad (4.47)$$

が満たされる対数領域が存在し、レイノルズ数が大きくなるほどその領域が広がっていくことが分かる。ここで、 κ, A は定数で、特に κ は Kármán 定数と呼ばれる。図 4.4 では、 $\kappa = 4.0$ 、 $A = 5.0$ とした。Case 4 では対数領域は $40 < y^+ < 600$ であることが確認できる。

4.5.2 速度変動成分の RMS 値

流れ方向の速度変動成分 u 、壁垂直方向の速度変動成分 v 、スパン方向の速度変動成分 w の RMS 値をそれぞれ以下のように定義する。

$$u'(y) = \langle u(x, y, z)u(x, y, z) \rangle^{1/2}, \quad (4.48)$$

$$v'(y) = \langle v(x, y, z)v(x, y, z) \rangle^{1/2}, \quad (4.49)$$

$$w'(y) = \langle w(x, y, z)w(x, y, z) \rangle^{1/2}. \quad (4.50)$$

ここで、 $\langle \cdot \rangle$ は x - z 平面での平均を表す。

図 4.5 に各方向の RMS 値の y^+ 依存性を示す。流れ方向の RMS 値 u' は $y^+ \sim 15$ あたりにピークを持ち、その値は Re_τ の増大とともに大きくなっていくことが分かる。ただ、 Re_τ 依存性は小さいと言える。

次に対数領域における振る舞いをみると、流れ方向および壁垂直方向の RMS 値 u' 、 v' は Re_τ が大きくなるほど y^+ 依存性が小さくなっていくことが分かる。一方、スパン方向の RMS 値 w' についてはそのような傾向は見られない。

4.5.3 Taylor マイクロスケール

各方向の速度変動成分の 2 点縦速度相関をそれぞれ以下の式で定義する。

$$R_{uu}^{(x)}(y, r) = \frac{\langle u(x+r, y, z)u(x, y, z) \rangle}{\langle u(x, y, z)^2 \rangle}, \quad (4.51)$$

$$R_{vv}^{(z)}(y, r) = \frac{\langle v(x, y+r, z)v(x, y, z) \rangle}{\langle v(x, y+r, z) \rangle^{1/2} \langle v(x, y, z) \rangle^{1/2}}, \quad (4.52)$$

$$R_{ww}^{(z)}(y, r) = \frac{\langle w(x, y, z+r)w(x, y, z) \rangle}{\langle w(x, y, z)^2 \rangle}. \quad (4.53)$$

それぞれの縦速度相関について、Taylor マイクロスケール $\lambda_{uu}^{(x)}$ 、 $\lambda_{vv}^{(y)}$ 、 $\lambda_{ww}^{(z)}$ が以下の式で定義される。

$$\left. \frac{d^2 R_{uu}^{(x)}(y, r)}{dr^2} \right|_{r=0} = -\frac{2}{[\lambda_{uu}^{(x)}(y)]^2}, \quad (4.54)$$

$$\left. \frac{d^2 R_{vv}^{(y)}(y, r)}{dr^2} \right|_{r=0} = -\frac{2}{[\lambda_{vv}^{(y)}(y)]^2}, \quad (4.55)$$

$$\left. \frac{d^2 R_{ww}^{(z)}(y, r)}{dr^2} \right|_{r=0} = -\frac{2}{[\lambda_{ww}^{(z)}(y)]^2}. \quad (4.56)$$

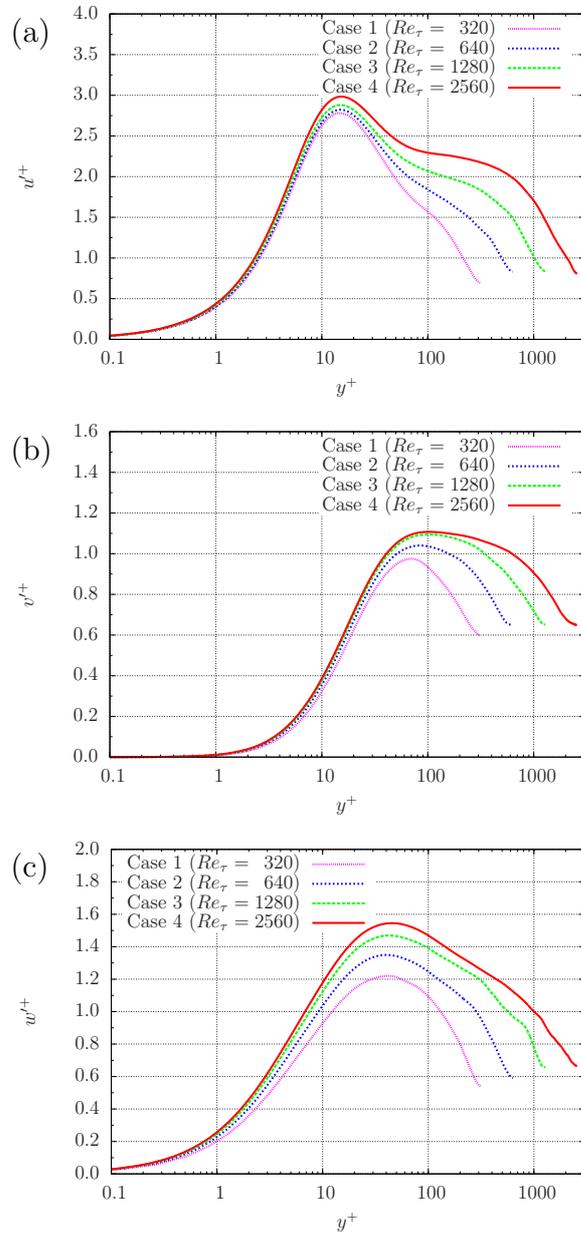


図 4.5: 速度変動成分の RMS 値の y^+ 依存性。(a) 流れ方向、(b) 壁垂直方向、(c) スパン方向。

流れ方向およびスパン方向については、一様性より

$$\lambda_{uu}^{(x)}(y) = \sqrt{\frac{u'^2}{\langle (\partial u / \partial x)^2 \rangle}}, \quad (4.57)$$

$$\lambda_{ww}^{(z)}(y) = \sqrt{\frac{w'^2}{\langle (\partial w / \partial z)^2 \rangle}}, \quad (4.58)$$

となる。

図 4.6 に各方向の Taylor マイクロスケールの y^+ 依存性を示す。壁付近では y^+ 依存性は小さいが、対数領域に入ると y^+ とともに大きくなっていくことが分かる。

次に、 Re_τ 依存性についてみると、壁垂直方向およびスパン方向の Taylor マイクロスケール $\lambda_{vv}^{(y)}$ 、 $\lambda_{ww}^{(z)}$ の Re_τ 依存性は非常に小さいことが分かる。一方、流れ方向の Taylor マイクロスケール $\lambda_{uu}^{(x)}$ では Re_τ 依存性が見られ、 Re_τ の増大とともに $\lambda_{uu}^{(x)}$ の値は、壁付近では小さくなり、逆に対数領域では大きくなるということが分かる。

4.5.4 Taylor マイクロスケール・レイノルズ数

各方向の速度変動成分について Taylor マイクロスケール・レイノルズ数を以下のように定義する。

$$R_{\lambda_{uu}^{(x)}}(y) = \frac{\lambda_{uu}^{(x)}(y)u'}{\nu}, \quad (4.59)$$

$$R_{\lambda_{vv}^{(y)}}(y) = \frac{\lambda_{vv}^{(y)}(y)v'}{\nu}, \quad (4.60)$$

$$R_{\lambda_{ww}^{(z)}}(y) = \frac{\lambda_{ww}^{(z)}(y)w'}{\nu}. \quad (4.61)$$

図 4.7 に各方向の Taylor マイクロスケール・レイノルズ数の y^+ 依存性を示す。流れ方向の Taylor マイクロスケール・レイノルズ数 $R_{\lambda_{uu}^{(x)}}$ は、Case 1 を除いて、異なる y^+ で二つのピークを持つことがわかる。これは、低レイノルズ数の DNS による結果 [36] と一致する。一つ目のピークの場所は Re_τ にほぼよらず $y^+ \sim 10$ で見られ、乱流エネルギーの生成が活発に起き、速度の RMS 値が極大値をとる緩和層にほぼ一致する。また、そのピークの値は Case 1 を除いて Re_τ にほとんど依存していない。二つ目のピークはレイノルズ数が低い Case 1 では見られないが、レイノ

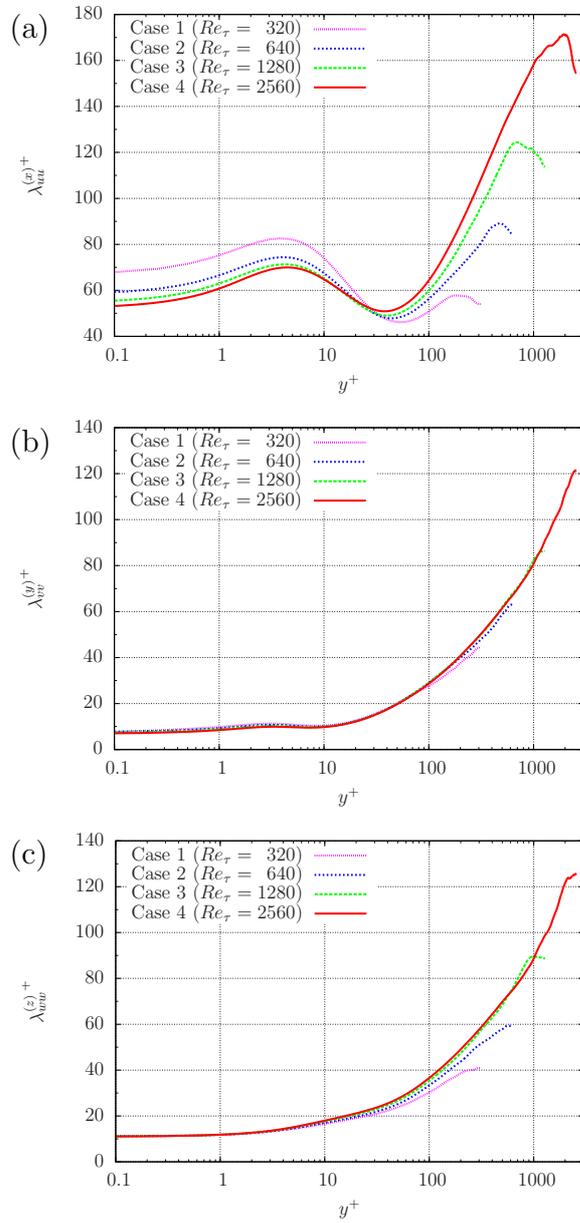


図 4.6: Taylor マイクロスケールの y^+ 依存性。(a) 流れ方向、(b) 壁垂直方向、(c) スパン方向。

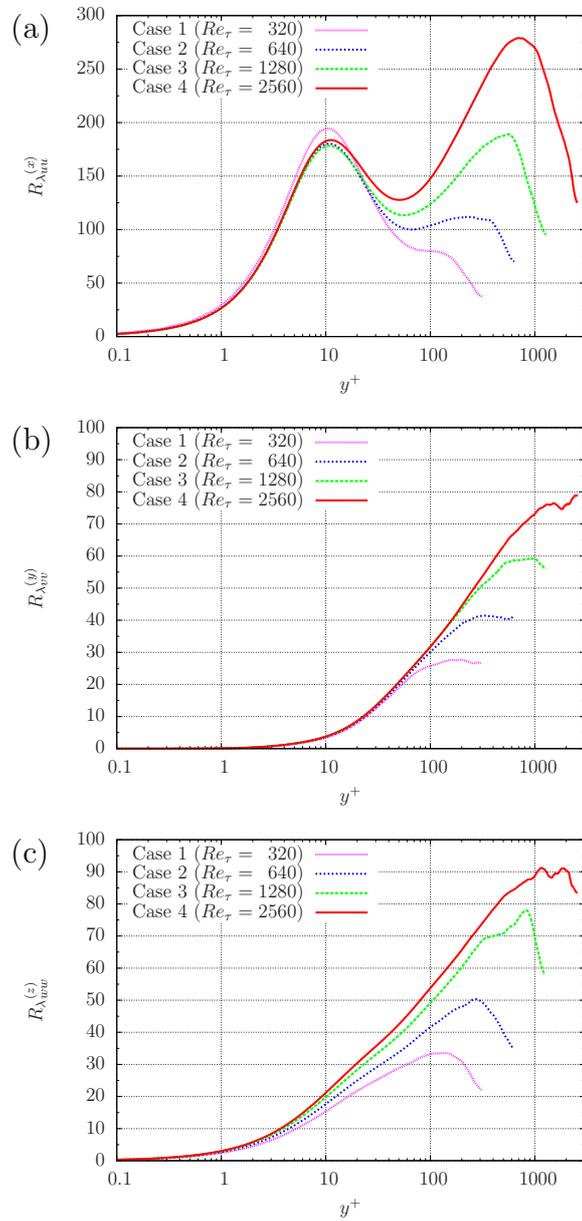


図 4.7: Taylor マイクロスケール・レイノルズ数の y^+ 依存性。(a) 流れ方向、(b) 壁垂直方向、(c) スパン方向。

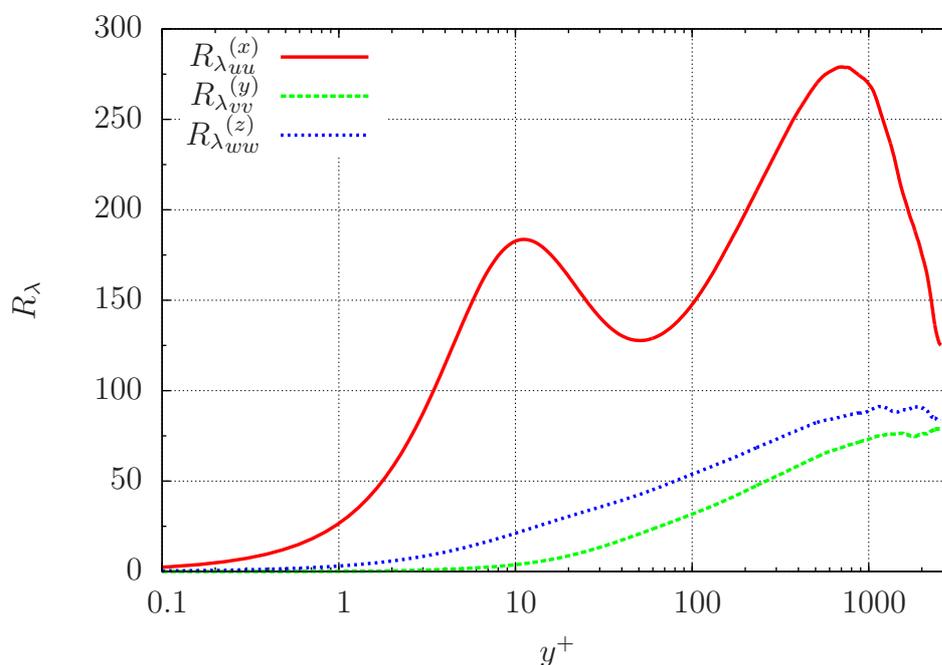


図 4.8: Taylor マイクロスケール・レイノルズ数の y^+ 依存性。(Case 4)

ルズ数がより高い他の Case では見られる。 Re_τ が高くなるにつれてピークをとる y^+ は大きくなり、また、そのピークの値も大きくなることからわかる。対数領域においては、 $R_{\lambda_{uu}}^{(x)}$ は y^+ とともに増加し、対数領域の外側でピークの値をとっている。

一方、壁垂直方向およびスパン方向の Taylor マイクロスケール・レイノルズ数 $R_{\lambda_{vv}}^{(y)}$ 、 $R_{\lambda_{ww}}^{(z)}$ では流れ方向の Taylor マイクロスケール・レイノルズ数 $R_{\lambda_{uu}}^{(x)}$ で見られたような $y^+ \sim 10$ でのピークはないことがわかる。対数領域においては流れ方向の Taylor マイクロスケール・レイノルズ数 $R_{\lambda_{uu}}^{(x)}$ とほぼ同じような振る舞いを示し、対数領域の外側でピークの値をとるのも同様である。しかし、そのピークの値は流れ方向と比べると小さく(図 4.8)、これは速度成分についての非等方性が強いことを示している。

4.5.5 エネルギー散逸率と Kolmogorov スケール

図 4.9 に以下の式で定義されるエネルギー散逸率 ϵ の y^+ 依存性を示す。

$$\epsilon(y) = 2\nu \langle S_{ij} S_{ij} \rangle, \quad (4.62)$$

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (4.63)$$

壁付近では y^+ 依存性は小さいことが分かる。対数領域では、エネルギーの生成と散逸の釣り合いの式

$$\langle uv \rangle \frac{dU}{dy} \simeq \epsilon, \quad (4.64)$$

と対数則

$$U^+ = \frac{1}{\kappa} \log y^+ + A, \quad (4.65)$$

より

$$\epsilon^+ \simeq (\kappa y^+)^{-1}, \quad (4.66)$$

と書ける。図 4.9 から、 Re_τ が大きくなるに従い式 (4.66) に一致して行く傾向が確認できる。

図 4.10 に Kolmogorov スケール

$$\eta(y) = \left(\frac{\nu^3}{\epsilon(y)} \right)^{1/4}, \quad (4.67)$$

の y^+ 依存性を示す。エネルギー散逸率と同様に壁付近では y^+ 依存性は小さいことが分かる。また、対数領域では、定義 (4.67) と式 (4.66) より

$$\eta^+ \simeq (\kappa y^+)^{1/4}, \quad (4.68)$$

と書ける。図 4.10 から、 Re_τ が大きくなるに従い式 (4.68) に一致して行く傾向が確認できる。

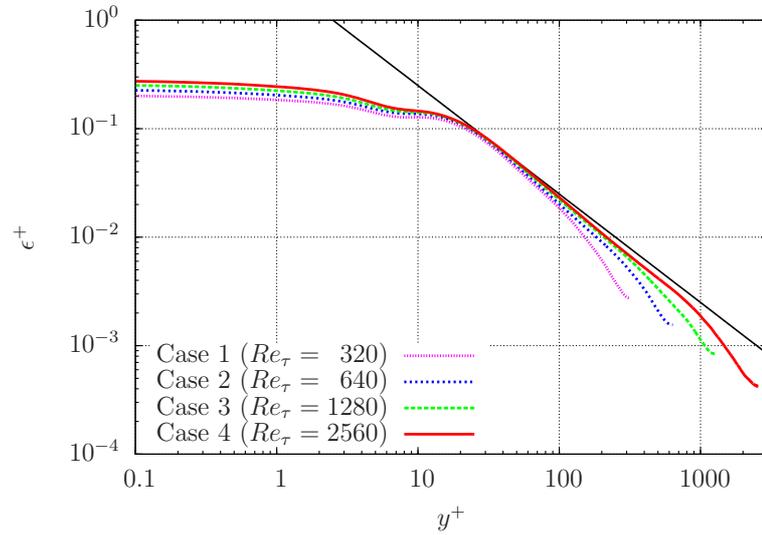


図 4.9: エネルギー散逸率の y^+ 依存性。黒色の実線は $\epsilon^+ = (0.4y^+)^{-1}$ を表す。

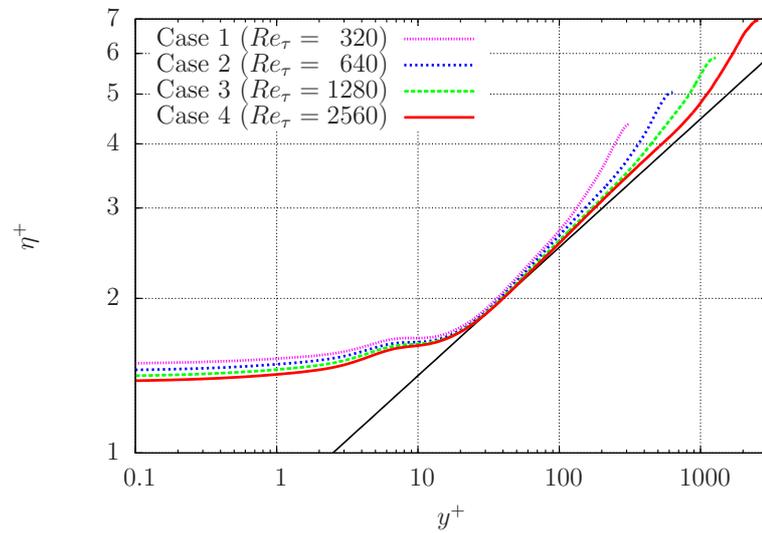


図 4.10: Kolmogorov スケールの y^+ 依存性。黒色の実線は $\eta^+ = (0.4y^+)^{1/4}$ を表す。

4.6 エネルギースペクトルと構造関数の Re_τ 依存性

4.6.1 速度の1次元スペクトル

Kolmogorov の理論 [2] によると、慣性小領域において、縦速度 1 次元スペクトル $E_{11}^{(x)}(k_x)$ および横速度 1 次元スペクトル $E_{22}^{(x)}(k_x), E_{33}^{(x)}(k_x)$ はそれぞれ次のような形で書ける。

$$E_{11}^{(x)}(k_x) = C_1 \epsilon^{2/3} k_x^{-5/3}, \quad (4.69)$$

$$E_{22}^{(x)}(k_x) = E_{33}^{(x)}(k_x) = C'_1 \epsilon^{2/3} k_x^{-5/3}. \quad (4.70)$$

ここで、 C_1 は Kolmogorov 定数で、 C'_1 は慣性小領域において $(4/3)C_1$ と等しい。

図 4.11 に、対数領域の外側の端における u の縦速度 1 次元スペクトル $E_{11}^{(x)}(k_x)$ 、 v 、 w の横速度 1 次元スペクトル $E_{22}^{(x)}(k_x), E_{33}^{(x)}(k_x)$ を示す。式 (4.89)、(4.70) に一致して、 $k_x^{-5/3}$ のべきに近い波数領域が存在することが分かる。より詳細にみるために、同じデータを縦軸に $k_x^{-5/3}$ を掛けてプロットしたものを図 4.12 に示す。図には Kolmogorov 定数の古典的な値である $C_1 = 0.5$ ($C'_1 = (4/3)C_1$) [47, 48] も示してある。横速度 1 次元スペクトル $E_{vv}^{(x)}(k_x)$ の Case 1 を除いて、式 (4.89)、(4.70) に近い波数領域が存在し、その波数領域はレイノルズ数が高くなるほど広がっていくことが確認できる。また、その波数領域は縦速度 1 次元スペクトルの方が横速度 1 次元スペクトルよりも広いことが分かる。

4.6.2 速度構造関数

Kolmogorov の理論 [2] は、速度構造関数の慣性小領域におけるスケーリング則も示している。縦速度構造関数 $D_{uu}^{(x)}(r)$ および横速度構造関数 $D_{vv}^{(x)}(r)$ 、 $D_{ww}^{(x)}(r)$ はそれぞれ

$$D_{uu}^{(x)}(r) = C_2 \epsilon^{2/3} r^{2/3}, \quad (4.71)$$

$$D_{vv}^{(x)}(r) = D_{ww}^{(x)}(r) = C'_2 \epsilon^{2/3} r^{2/3}, \quad (4.72)$$

と書ける。ここで、 $C_2 \sim 4C_1$ 、 $C'_2 = (4/3)C_2$ である。

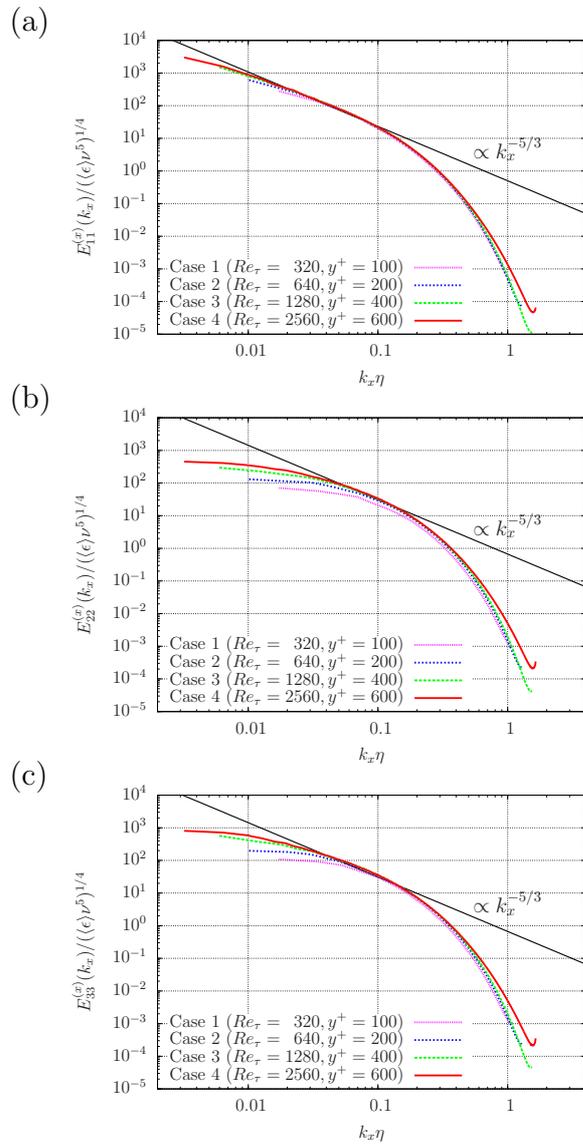


図 4.11: 速度変動成分の1次元スペクトル。(a) 流れ方向、(b) 壁垂直方向、(c) スパン方向。

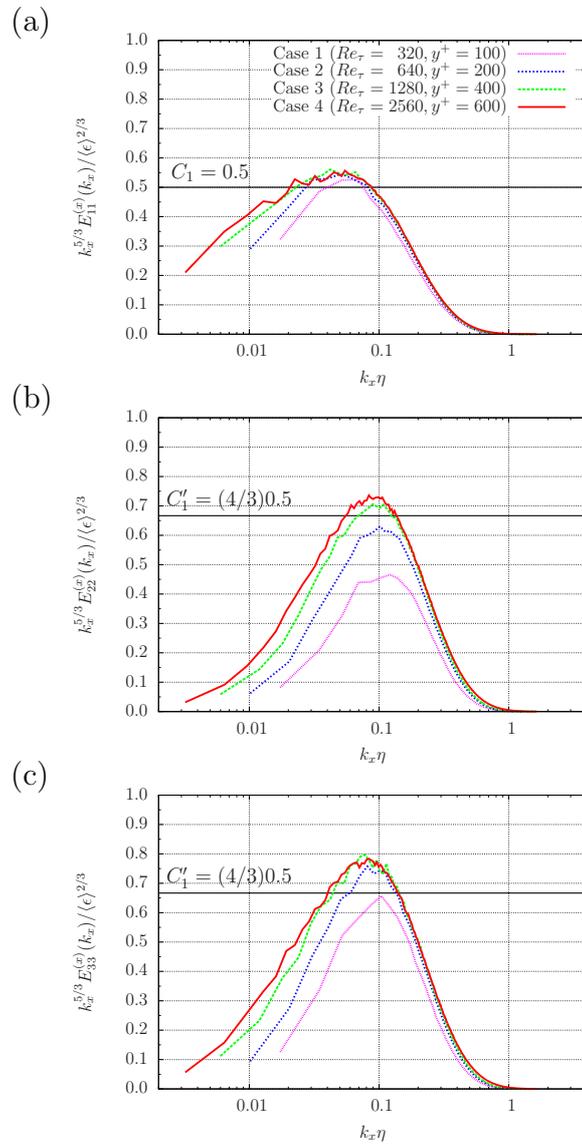


図 4.12: 速度変動成分の 1 次元スペクトル。(a) 流れ方向、(b) 壁垂直方向、(c) スパン方向。

図 4.13 に、慣性低層の外側の端における u の縦速度構造関数、 v 、 w の横速度構造関数

$$D_{uu}^{(x)}(r) \equiv \langle (u(x+r, y, z) - u(x, y, z))^2 \rangle, \quad (4.73)$$

$$D_{vv}^{(x)}(r) \equiv \langle (v(x+r, y, z) - v(x, y, z))^2 \rangle, \quad (4.74)$$

$$D_{ww}^{(x)}(r) \equiv \langle (w(x+r, y, z) - w(x, y, z))^2 \rangle, \quad (4.75)$$

を示す。レイノルズ数が高くなるにつれて速度構造関数が Kolmogorov による予測 (4.71)、(4.72) に近づいていくスケール領域があることが分かる。この結果は、粗面境界層の実験による観察結果 [30] と一致するものである。

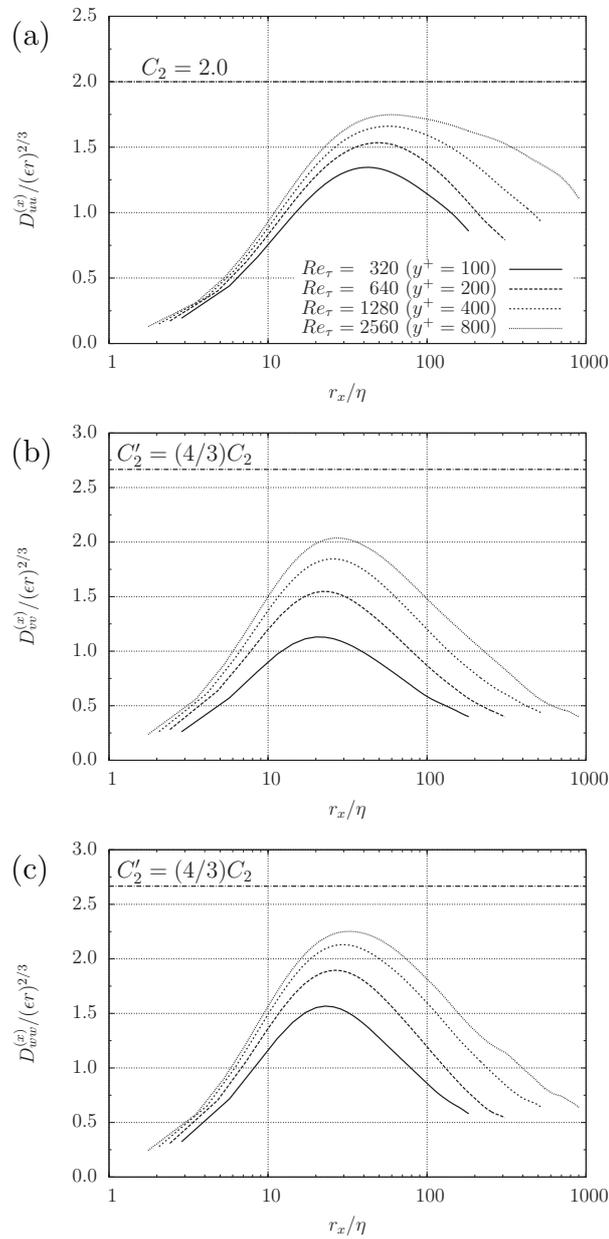


図 4.13: 速度変動成分の構造関数。(a) 流れ方向、(b) 壁垂直方向、(c) スパン方向。([49] より)

4.7 せん断パラメータ

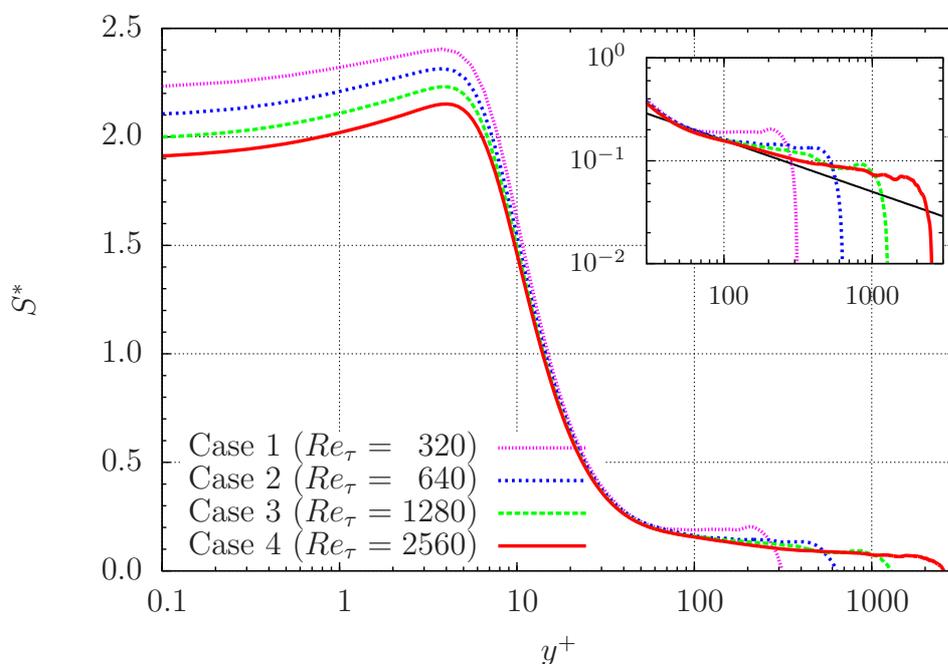


図 4.14: せん断パラメータ S^* の y^+ 依存性。黒色の実線は $S^* = (0.4y^+)^{-1/2}$ を表す。

壁乱流における非等方性の強さを表すせん断パラメータ

$$S^* \equiv (\nu/\epsilon)^{1/2} S, \quad (4.76)$$

$$S = dU/dy, \quad (4.77)$$

を導入する。ここで、 S は平均速度勾配である。せん断パラメータ S^* は、平均せん断の時間スケールを表す $1/S$ と Kolmogorov の時間スケール $\tau_\eta \equiv (\nu/\epsilon)^{1/2}$ との比である。

図 4.14 にせん断パラメータ S^* の y^+ 依存性を示す。壁付近では y^+ 依存性は小さく、また値はレイノルズ数が大きくなるほど小さくなること がわかる。せん断パラメータは、壁から離れると $y^+ \sim 20$ 付近で急激に小さくなり、対数領域では $S^* \sim 0.1$ となること がわかる。また、対数領域では式 (4.47) より

$$S^+ \simeq (\kappa y^+)^{-1}, \quad (4.78)$$

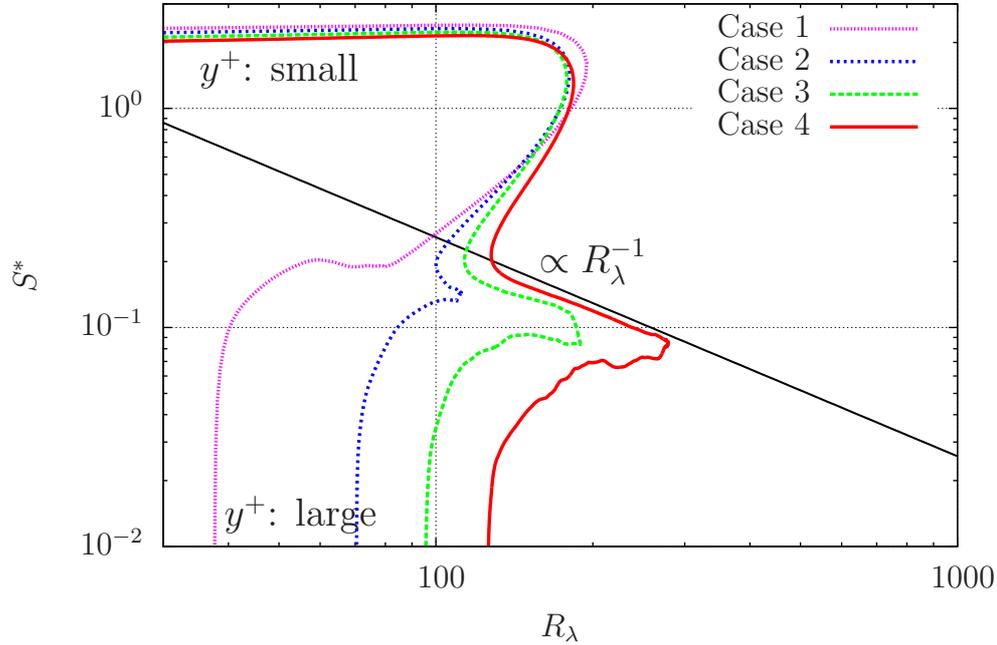


図 4.15: y^+ をパラメータとした R_λ の S^* の関係。黒色の実線は $S^* \propto R_\lambda^{-1}$ を表す。

と書けるので、これと式 (4.66) より、

$$S^* \simeq (\kappa y^+)^{-1/2}, \quad (4.79)$$

となる。図 4.14 より、対数領域においてレイノルズ数が大きくなるほど S^* は式 (4.79) に近づいて行くことが確認できる。

図 4.15 にせん断パラメータ S^* と流れ方向の Taylor マイクロスケール・レイノルズ数 $R_\lambda = R_{\lambda_{uu}}^{(x)}$ の関係を y^+ をパラメータとしてプロットしたものを示す。Case 1 を除き、 $S^* \propto R_\lambda^{-1}$ となる R_λ の領域が存在することが確認でき、 Re_τ が大きくなるほどその領域は広がっていることが分かる。ここで、この領域は対数領域とほぼ一致している。

一般に単純せん断乱流では、エネルギーの生成と散逸率が等しく、また、局所等方性が成り立つと仮定すると、

$$S^* \simeq \frac{1}{A_1} \sqrt{\frac{20}{3}} R_\lambda^{-1} \propto R_\lambda^{-1}, \quad (4.80)$$

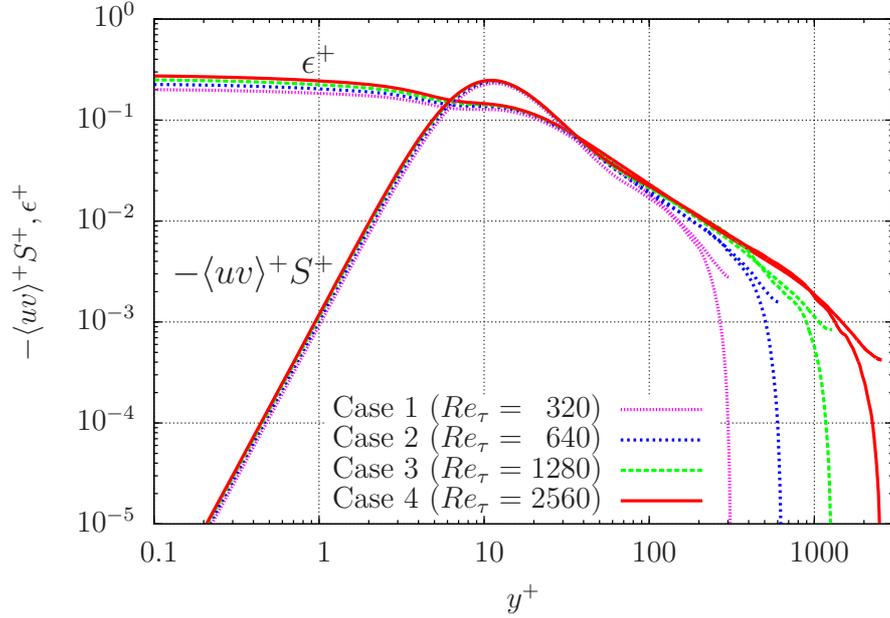


図 4.16: エネルギーの生成 $\langle uv \rangle dU/dy$ と散逸 ϵ の比較。

と書ける [31, 50]。ここで、 A_1 は以下の式で定義される Townsend の構造パラメータである [51]。

$$A_1 \equiv -\langle uv \rangle / u_r, \quad u_r = (u'^2 + v'^2 + w'^2) / 2. \quad (4.81)$$

図 4.15 に示した S^* と R_λ の関係は式 (4.80) と矛盾しない結果である。

次に、式 (4.80) を導く際の仮定が、チャンネル乱流の対数領域においても成り立っているのかどうかを調べる。まず、エネルギーの生成と散逸の釣り合いの式

$$\langle uv \rangle \frac{dU}{dy} \simeq \epsilon, \quad (4.82)$$

について、その両辺の比較を図 4.16 に示す。図 4.16 から、対数領域において Re_τ の違いによらず式 (4.80) が良く成立していることが分かる。

次に、局所等方性から導かれる、エネルギー散逸率に関する仮定

$$\epsilon \simeq \epsilon_{1D} \equiv 15\nu \left\langle \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right\rangle, \quad (4.83)$$

について、 ϵ と ϵ_{1D} の比較を図 4.17 に示す。式 (4.83) についても対数領域でよく成立していることが分かる。

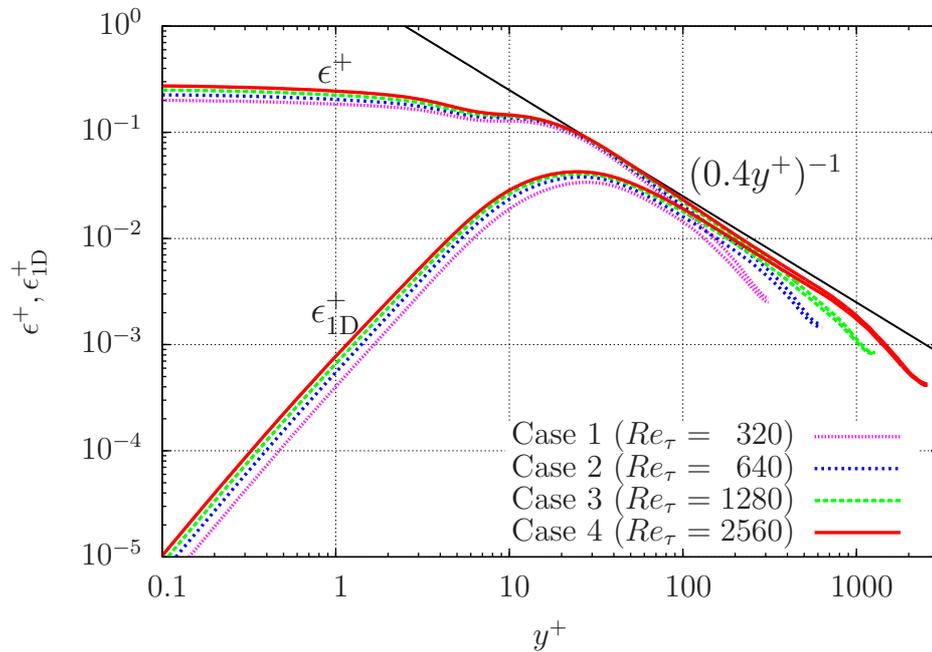


図 4.17: エネルギー散逸率 ϵ と ϵ_{1D} の比較。

次に、式 (4.81) で定義される構造パラメータ A_1 の y^+ 依存性を図 4.18 に示す。構造パラメータ A_1 は Re_τ に依存しており、対数領域では Re_τ が大きくなるにつれて、 A_1 の値は小さくなり、また y^+ 依存性が弱くなっていくことがわかる。

図 4.15 で見られた S^* と R_λ の関係の Re_τ 依存性は、式 (4.80) における構造パラメータ A_1 の Re_τ 依存性によるものと考えられる。そこで、 $A_1 S^*$ と R_λ の関係を y^+ をパラメータとしてプロットしたものを図 4.19 に示す。対数領域において、 Re_τ によらず同一の R_λ^{-1} の直線にほぼ乗ることが分かる。これは、式 (4.80) と一致する結果であるといえる。

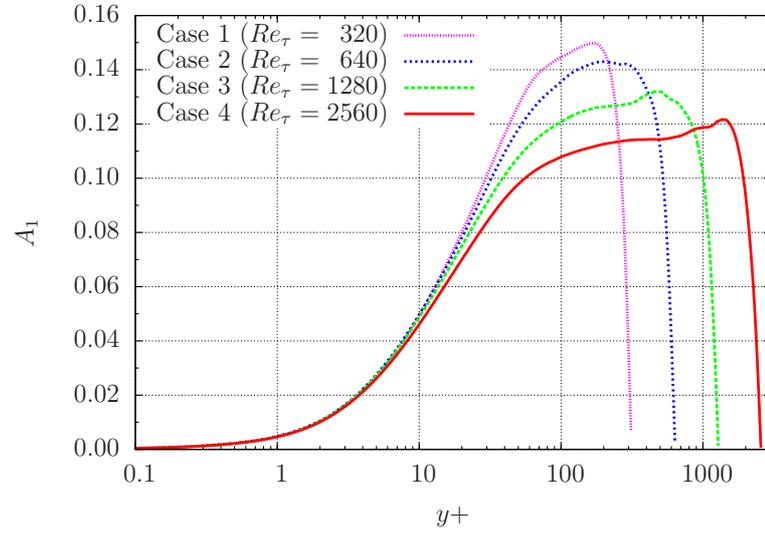


図 4.18: Townsend の構造パラメータ A_1 の y^+ 依存性。

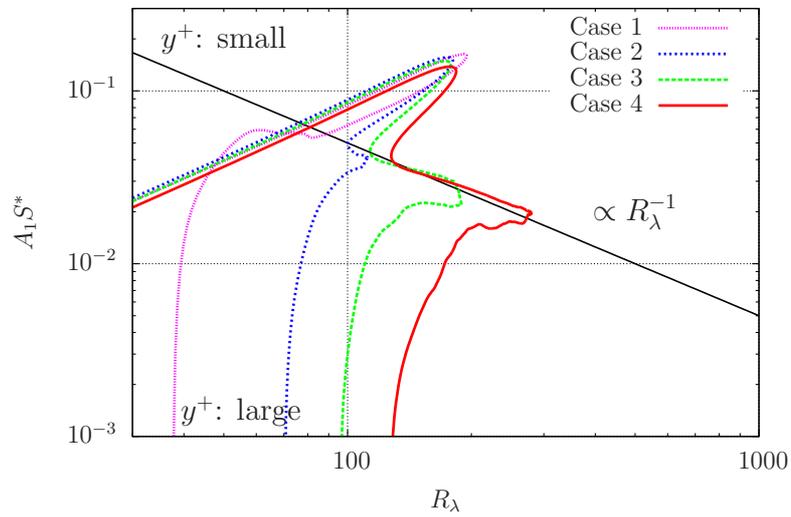


図 4.19: y^+ をパラメータとした R_λ と $A_1 S^*$ の関係。黒色の実線は $A_1 S^* \propto R_\lambda^{-1}$ を表す。

4.8 局所等方性の検証

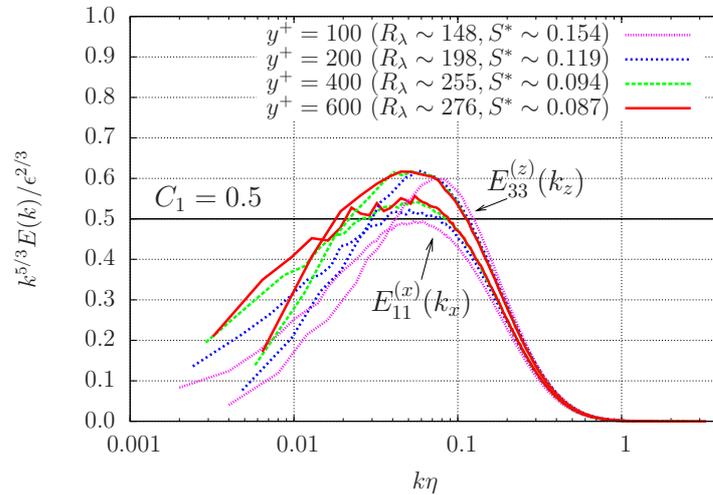


図 4.20: 1次元縦速度スペクトル $E_{11}^{(x)}(k_x)$ と $E_{33}^{(z)}(k_z)$ の比較。(Case 4)

慣性小領域において局所等方性が満たされるなら、各1次元速度スペクトルについて

$$E_{11}^{(x)}(k_x) = E_{33}^{(z)}(k_z), \quad (4.84)$$

$$E_{22}^{(x)}(k_x) = E_{33}^{(x)}(k_x) = E_{22}^{(z)}(k_z) = E_{11}^{(z)}(k_z), \quad (4.85)$$

が成り立つ。ここで、 k_z は波数の z 方向成分である。

図 4.20 に、Case 4 の対数領域における $E_{11}^{(x)}(k_x)$ と $E_{33}^{(z)}(k_z)$ の比較を示す。図には Kolmogorov 定数の古典的な値である $C_1 = 0.5$ [48] も示してある。ともに、式 (4.89) に近い領域が存在し、また、 R_λ が大きくなり S^* が小さくなるほど互いに近づいていくことが確認できる。

図 4.21 に、Case 4 の対数領域における $E_{22}^{(x)}(k_x)$, $E_{33}^{(x)}(k_x)$, $E_{22}^{(z)}(k_z)$ 及び $E_{11}^{(z)}(k_z)$ の比較を示す。 $E_{11}^{(z)}(k_z)$ を除いて式 (4.70) に近い領域が存在することが分かる。また、縦スペクトルでの結果と同様に、 R_λ が大きくなり S^* が小さくなるほど互いに近づいていき、違いが小さくなることが分かる。

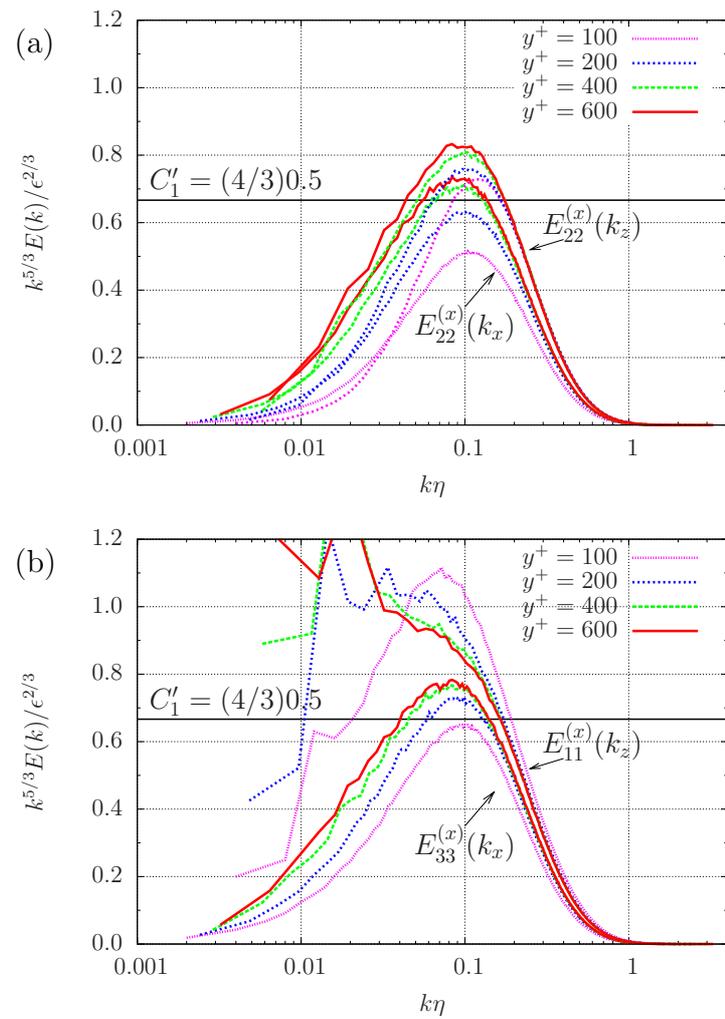


図 4.21: (a) 1次元横速度スペクトル $E_{22}^{(x)}(k_x)$ と $E_{22}^{(z)}(k_z)$ の比較、(b) 1次元横速度スペクトル $E_{33}^{(x)}(k_x)$ と $E_{11}^{(z)}(k_z)$ の比較。(Case 4)

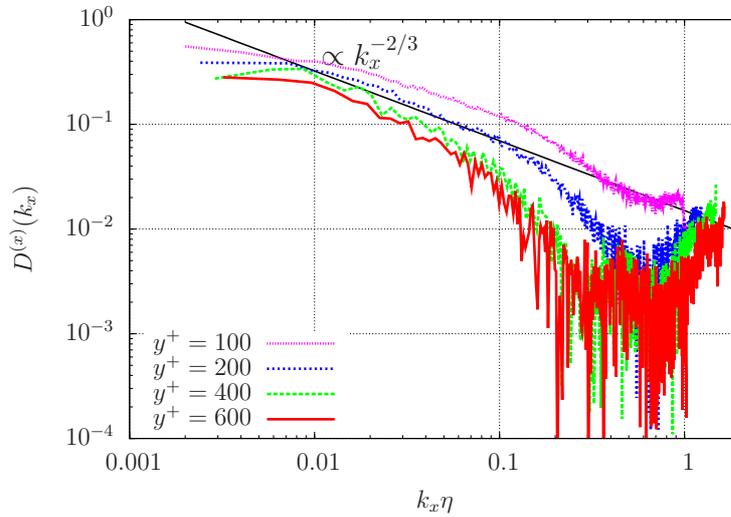


図 4.22: 非等方性スペクトル $D^{(x)}(k_x)$. (Case 4)

次に局所等方性の定量化をするために、非等方性スペクトル $D^{(x)}(k_x)$ を以下の式で定義する。

$$D^{(x)}(k_x) \equiv \frac{|E_{22}^{(x)}(k_x) - E_{33}^{(x)}(k_x)|}{|E_{22}^{(x)}(k_x) + E_{33}^{(x)}(k_x)|}. \quad (4.86)$$

図 4.22 に、Case 4 の対数領域における非等方性スペクトル $D^{(x)}(k_x)$ を示す。 y^+ が大きくなり壁から離れるほど非等方性は減っていくことが分かる。また、非等方性スペクトル $D^{(x)}(k_x)$ が理論 [52] より示唆される $k_x^{-2/3}$ のべきを持つ波数領域が存在し、 y^+ が大きくなるほど、それがより鮮明になることが分かる。

4.9 2次元エネルギースペクトル

次に、流れ方向の速度変動成分 u の2次元スペクトル $E_{11}(k)$ について解析を行う。ここで、 $k = \sqrt{k_x^2 + k_z^2}$ であり、また、1次元縦スペクトル $E_{11}^{(x)}(k_x)$ と以下の関係にある。

$$\langle u^2 \rangle = \int E_{11}^{(x)}(k_x) dk_x = \int E_{11}(k) dk. \quad (4.87)$$

Kolmogorov の理論 [2] によると、慣性小領域において1次元縦スペクトル $E_{11}^{(x)}(k_x)$ が

$$E_{11}^{(x)}(k_x) = C_1 \epsilon^{2/3} k_x^{-5/3}, \quad (4.88)$$

と書けるのと同様に、2次元スペクトル $E_{11}(k)$ についても

$$E_{11}(k) = C_1'' \epsilon^{2/3} k^{-5/3}, \quad (4.89)$$

と書ける。(付録B参照)

図4.23に、対数領域における1次元縦スペクトル $E_{11}^{(x)}(k_x)$ と2次元スペクトル $E_{11}(k)$ についてプロットしたものを示す。1次元縦スペクトル $E_{11}^{(x)}(k_x)$ 、2次元スペクトル $E_{11}(k)$ とともに $-5/3$ に近いべきを持った波数領域が存在することが分かる。

より詳細にみるために、縦軸に波数の $5/3$ 乗を掛けてプロットしたものを図4.24に示す。 $-5/3$ に近いべきを持った波数領域は、1次元縦スペクトル $E_{11}^{(x)}(k_x)$ よりも2次元スペクトル $E_{11}(k)$ の方が広いことが確認できる。

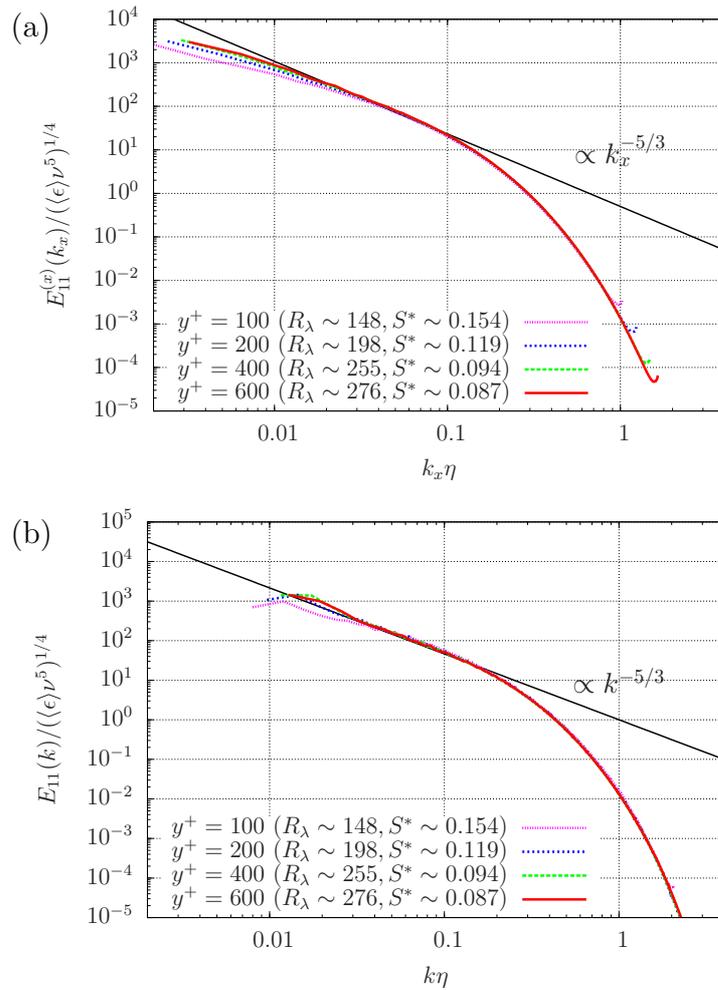


図 4.23: (a) 1次元縦スペクトル $E_{11}^{(x)}(k_x)$, (b) 2次元スペクトル $E_{11}(k)$. (Case 4)

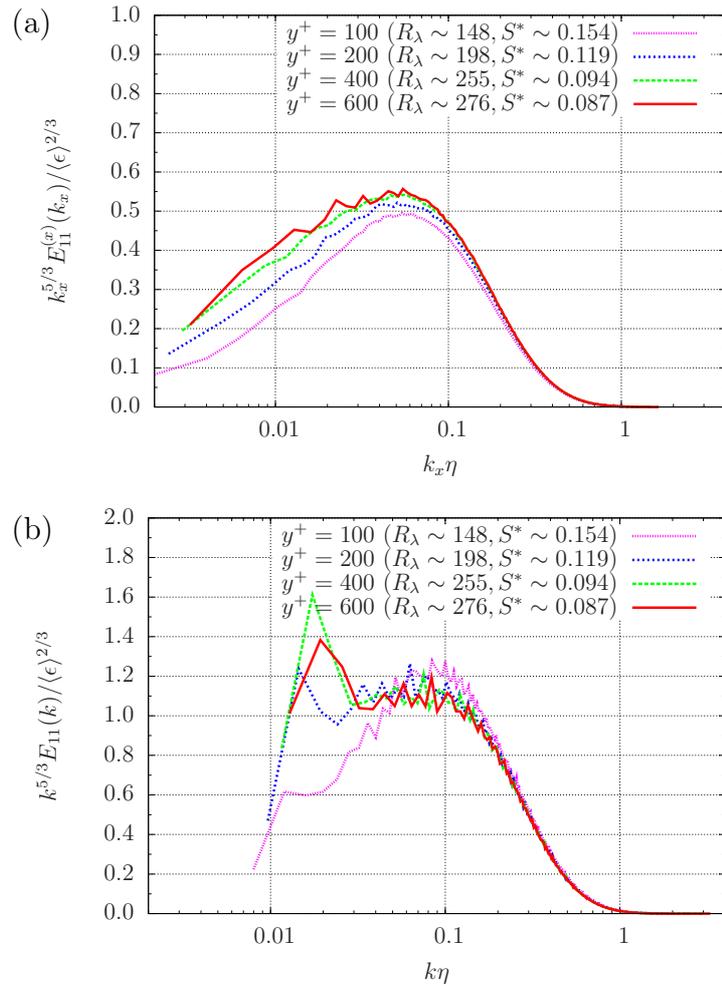


図 4.24: (a) 1次元縦スペクトル $E_{11}^{(x)}(k_x)$, (b) 2次元スペクトル $E_{11}(k)$. (Case 4)

4.10 まとめ

本研究では、壁乱流の中で最も基礎的な問題の一つであるチャンネル乱流のDNSコードを開発し、地球シミュレータを用いた大規模並列計算により、現在世界最大のレイノルズ数 $Re_\tau = 2560$ のチャンネル乱流DNSを実現した。さらに、そのデータ解析により、主に以下のことが明らかになった。

- (a) Taylor マイクロスケールは壁付近では y^+ 依存性は小さいが、対数領域に入ると y^+ とともに大きくなる。壁垂直方向およびスパン方向の Taylor マイクロスケール $\lambda_{vv}^{(y)}$ 、 $\lambda_{ww}^{(z)}$ の Re_τ 依存性は非常に小さいが、一方、流れ方向の Taylor マイクロスケール $\lambda_{uu}^{(x)}$ は Re_τ 依存性が見られ、 Re_τ の増大とともに $\lambda_{uu}^{(x)}$ の値は、壁付近では小さくなり、逆に対数領域では大きくなる。
- (b) 流れ方向の Taylor マイクロスケール・レイノルズ数 $R_{\lambda_{uu}}^{(x)}$ は、Case 1 を除いて、異なる y^+ で二つのピークを持ち、一つ目のピークの場所は Re_τ にほぼよらず $y^+ \sim 10$ で見られ、二つ目のピークの値は対数領域の外側でとり、 Re_τ が高くなるにつれて、そのピークの値も大きくなる。 $Re_\tau = 2560$ の Case 4 では、その値は約 280 である。一方、壁垂直方向およびスパン方向の Taylor マイクロスケール・レイノルズ数 $R_{\lambda_{vv}}^{(y)}$ 、 $R_{\lambda_{ww}}^{(z)}$ では流れ方向の Taylor マイクロスケール・レイノルズ数 $R_{\lambda_{uu}}^{(x)}$ で見られたような $y^+ \sim 10$ でのピークはなく、また対数領域における値も小さく、これは、速度成分についての非等方性が強いことを示していると考えられる。
- (c) 縦速度及び横速度についての 1 次元スペクトル、構造関数は、レイノルズ数 Re_τ が高くなるにつれて Kolmogorov 理論による予測に近づいていく。
- (d) 壁乱流における非等方性の強さを表すせん断パラメータ S^* は、壁付近では y^+ 依存性は小さく、その値はレイノルズ数が大きくなるほど小さくなる。また、壁から離れると $y^+ \sim 20$ 付近で急激に小さくなり、対数領域では $S^* \sim 0.1$ となり、レイノルズ数 Re_τ が大きくなるほど $S^* \simeq (\kappa y^+)^{-1/2}$ に近づいて行く。自由せん断乱流で成り立つとされる $S^* \propto R_\lambda^{-1}$ となる R_λ の領域が存在することが確認でき、 Re_τ が大きくなるほどその領域は広がっていく。ここで、この領域は対数領域とほぼ一致している。

- (e) 式 (4.86) で定義される非等方性スペクトルにより局所等方性の定量化を試みた結果、対数領域において、壁から離れるにつれて波数について $-2/3$ 乗のべきで非等方性が小さくなり局所等方性に近づいていく。
- (f) 対数領域における 2次元スペクトル $E_{11}(k)$ が 1次元縦スペクトル $E_{11}^{(x)}(k_x)$ と同様に、Kolmogorov 理論による予測と近いべきを持つ波数領域が存在する。また、その波数領域は、1次元縦スペクトル $E_{11}^{(x)}(k_x)$ よりも 2次元スペクトル $E_{11}(k)$ の方が広い。これは、2次元スペクトルでは z 方向のスケールの情報も含んだ、1次元と比べてより質の高いデータが得られたためだと考えられる。

第5章 結論

本研究では、計算科学的手法による乱流の普遍統計法則の検証と追及を目的として、3次元一様等方性乱流の大規模 DNS データの統計解析 (第2章、第3章)、高レイノルズ数チャンネル乱流の大規模 DNS とその統計解析 (第4章) を行った。

第2章では、世界最大のレイノルズ数を実現した3次元一様等方性乱流の大規模 DNS データ [5, 6, 7] を用いて、エネルギー散逸率に関する統計について解析し、さらにその中で、過去、間欠性モデルの導出の際に用いられてきた、乗算過程 $\epsilon_{n+1} = \alpha_n \epsilon_n$ に関する以下の統計的仮定についての検証を行った。

- (i) α_n の統計がスケールによらない。
- (ii) α_n は互いに統計的に独立である。

その結果、 $u_n \equiv \log \alpha_n / \log a$ の PDF、平均及び分散は、スケールに依存していることが分かった。これは、 α_n についての仮定 (i) を支持しない結果である。さらに、 u_n の相関は、その形がスケールにはほとんど依存せず、スケール比 a が 1 に近づくにつれてある関数に収束していき、また、相関時間は有限の値となることが分かった。これは、 α_n についての仮定 (ii) を支持しない結果である。ただし、これらの結果は、より高いレイノルズ数において上記の仮定が成立する可能性を完全に否定するものではない。以上の結果を踏まえ、仮定 (i)、(ii) を用いない、エネルギー散逸率についての簡単なモデルを提案し、それによる近似と DNS データによる測定を比較した結果、指数 $|p| < 5$ で良く一致していることが分かった。また、上記の相関についての相似領域では、joint PDF についても相似的な形となることが分かった。

第3章では、高レイノルズ数乱流中における渦の伸張とカスケードの関係性を明らかにするために、渦度を特徴づけるエンストロフィに着目し、その各スケールにおける生成と輸送を、世界最大のレイノルズ数を実現した3次元一様等方性乱流の大規模 DNS データ [5, 6, 7] によって評価

し、理論による予測との比較を行った。その結果、エンストロフィの生成 $G^L(r)$ 、輸送 $F(r)$ は散逸領域で支配的であり、 $G^L(r)$ の勾配と $F(r)$ のそれぞれの最大値はほぼ同じ $r/\eta \sim 6$ にあることが分かった。このことは、最も活発なエンストロフィの生成は、エンストロフィ流束が最大となるスケールと大体同じところで起きていることを示唆している。また、慣性小領域では、理論で予想されたように $G^L(r)$ と $F(r)$ はほぼ等しく、 $F(r) \approx G^L(r) \sim \epsilon/r^2$ のスケーリングを持っていることが分かった。エンストロフィの増加率 $\Pi^*(r) = G^L(r) - F(r)$ は慣性小領域において $r^{-4/3}$ のスケーリングを持つことが分かった。アンサンブル平均をとる前の $\Pi^*(r)$ の PDF は非ガウシアンであり、テント状の形をしており、加速度や速度勾配の PDF と非常に似ていることが分かった。また PDF の形は、 $\hat{\Pi}^*(r)$ の瞬間の値は正よりも負の値の方が多いことを示しており、このことは渦管の伸張よりも圧縮の方が多く起きていることを示唆している。

第4章では、壁乱流の中で最も基礎的な問題の一つであるチャンネル乱流の DNS コードを開発し、地球シミュレータを用いた大規模並列計算により、現在世界最大のレイノルズ数 ($Re_\tau = 2560$) のチャンネル乱流 DNS を実現した。そのデータ解析から、流れ方向の Taylor マイクロスケール・レイノルズ数 $R_{\lambda_{uu}}^{(x)}$ は対数領域の外側でピークの値をとり、 Re_τ が高くなるにつれて、そのピークの値も大きくなることが分かった。 $Re_\tau = 2560$ の Case 4 では、その値は約 280 である。縦速度及び横速度についての1次元スペクトル、構造関数は、レイノルズ数 Re_τ が高くなるにつれて Kolmogorov 理論による予測に近づいていくことが確認された。壁乱流における非等方性の強さを表すせん断パラメータ S^* は、対数領域では $S^* \sim 0.1$ となり、レイノルズ数 Re_τ が大きくなるほど $S^* \simeq (\kappa y^+)^{-1/2}$ に近づいて行くことが分かった。また、自由せん断乱流で成り立つとされる $S^* \propto R_\lambda^{-1}$ となる R_λ の領域が存在することが確認でき、 Re_τ が大きくなるほどその領域は広がっていくことが分かった。非等方性スペクトルにより局所等方性の定量化を試みた結果、対数領域において、壁から離れるにつれて波数について $-2/3$ 乗のべきで非等方性が小さくなり局所等方性に近づいていくことが分かった。本研究では慣性小領域での局所等方性について調べたが、今後は、さらに散逸領域における局所等方性の成立に関する解析を行いたいと考えている。

付録A チェビシェフ多項式

n 次のチェビシェフ多項式 $T_n(y)$ は次の式で定義される。

$$T_n(y) = \cos(n \cos^{-1} y). \quad (\text{A.1})$$

低次について具体的に書き下すと以下ようになる。

$$\begin{aligned} T_0(y) &= 1, \\ T_1(y) &= y, \\ T_2(y) &= 2y^2 - 1, \\ T_3(y) &= 4y^3 - 3y, \\ T_4(y) &= 8y^4 - 8y^2 + 1. \end{aligned}$$

より高次のチェビシェフ多項式も以下の漸化式により求められる。

$$T_{n+1}(y) = 2yT_n(y) - T_{n-1}(y). \quad (n \geq 1) \quad (\text{A.2})$$

N 次のチェビシェフ多項式 $T_N(y)$ は区間 $[-1 : 1]$ で N 個のゼロ点を持ち、その場所は以下の式で与えられる。

$$y_k = \cos\left(\frac{k + 1/2}{N}\pi\right). \quad (k = 0, 1, \dots, N - 1) \quad (\text{A.3})$$

また、 $T_n(y)$ は以下の離散的な直交関係を満たす。

$$\sum_{k=0}^{N-1} T_i(y_k)T_j(y_k) = \begin{cases} 0, & (i \neq j) \\ N/2, & (i = j \neq 0) \\ N, & (i = j = 0) \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

区間 $[-1 : 1]$ の任意の関数 $f(y)$ に対して、次のようなチェビシェフ多項式展開が可能である。

$$f(y) = \sum_{n=0}^{N-1} f_n T_n(y). \quad (\text{A.5})$$

ここで、 f_n はチェビシエフ係数で、直交関係 (A.4) より以下の式で与えられる。

$$f_n = \frac{2}{Nc_n} \sum_{k=0}^{N-1} f_n(y_k) T_n(y_k). \quad (n = 0, 1, \dots, N-1) \quad (\text{A.6})$$

ただし、

$$c_n = \begin{cases} 2, & (n = 0) \\ 1, & (n > 0) \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

とする。

式 (A.5) は、区間 $[-1 : 1]$ で関数 $f(y)$ を近似しており、特に $T_N(y)$ のゼロ点 $y_k (k = 0, 1, \dots, N-1)$ 上では厳密な値を与える。

チェビシエフ多項式の定義式 (A.1) とゼロ点の式 (A.3) より $f(y_k)$ と f_n は以下のような離散コサイン変換のペアとして表現できる。

$$f(y_k) = \sum_{n=0}^{N-1} f_n \cos\left(\frac{k+1/2}{N}\pi\right), \quad (k = 0, 1, \dots, N-1) \quad (\text{A.8})$$

$$f_n = \frac{2}{Nc_n} \sum_{k=0}^{N-1} f(y_k) \cos\left(\frac{k+1/2}{N}\pi\right). \quad (n = 0, 1, \dots, N-1) \quad (\text{A.9})$$

上記の離散コサイン変換は、離散フーリエ変換を用いて間接的に計算できるので、高速フーリエ変換による高速変換が可能である。

また、任意の関数 $f(y)$ の微分

$$f^{(1)}(y) = \frac{df(y)}{dy}, \quad (\text{A.10})$$

のチェビシエフ係数 $f_n^{(1)}$ は、以下の関係式から f_n を用いて求められる。

$$c_{n-1}f_{n-1}^{(1)} - f_{n+1}^{(1)} = 2nf_n. \quad (n \geq 1) \quad (\text{A.11})$$

ただし、 $f_N^{(1)} = 0$, $f_{N-1}^{(1)} = 0$ とする。

付録B エネルギースペクトル

一様乱流において3次元の速度相関スペクトル $Q_{ij}(\mathbf{k})$ を

$$Q_{ij}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \langle u_i(\mathbf{x} + \mathbf{r}) u_j(\mathbf{x}) \rangle \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) d^3\mathbf{r},$$

で定義すると、等方性乱流においては $Q_{ij}(\mathbf{k})$ は一般に

$$Q_{ij}(\mathbf{k}) = \frac{E(k)}{4\pi k^2} D_{ij}(\mathbf{k}), \quad (\text{B.1})$$

と書くことができる。ここで $E(k)$ はエネルギー密度スペクトルと呼ばれ、波数ベクトル \mathbf{k} には $k \equiv |\mathbf{k}|$ のみを通じて依存し、

$$\frac{1}{2} \langle u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \rangle = \frac{1}{2} \int Q_{ij}(\mathbf{k}) d^3\mathbf{k} = \int_0^\infty E(k) dk, \quad (\text{B.2})$$

の関係を満たしている。

特に1次元縦速度相関スペクトルと呼ばれるスペクトル $E_{11}(k_1)$ は

$$E_{11}(k_1) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \langle u_1(x+r, y, z) u_1(x, y, z) \rangle \exp(-ik_1 r) dr,$$

で定義され、次の関係をみたす。

$$\langle u_1^2 \rangle = \int_0^\infty E_{11}(k_1) dk_1,$$

$$E_{11}(k_1) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} dk_2 \int_{-\infty}^{\infty} dk_3 Q_{11}(\mathbf{k}) = \int_{-\infty}^{\infty} dk_2 \int_{-\infty}^{\infty} dk_3 \frac{E(k)}{2\pi k^2} \left(1 - \frac{k_2^2 + k_3^2}{k^2}\right). \quad (\text{B.3})$$

また、 (k_1, k_3) 面内で $k_1^2 + k_3^2 = p^2$ となるリング状で積分し、さらに k_2 方向に積分したスペクトル $E_{11}^{13}(p)$ を

$$E_{11}^{13}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} dk_2 \int_0^{2\pi} d\theta p Q_{11}(\mathbf{k}), \quad (\text{B.4})$$

で定義すると $\langle u_1^2 \rangle$ は

$$\langle u_1^2 \rangle = \int_0^\infty E_{11}^{13}(p) dp,$$

と表すことができる。ただし、ここで $k_1 = p \cos \theta$, $k_3 = p \sin \theta$ とした。

慣性小領域で (B.1) の $E(k)$ が Kolmogorov のべき則

$$E(k) = K_o \langle \epsilon \rangle^{2/3} k^{-5/3},$$

で与えられるとき、慣性小領域 $1/L \ll k_1 \ll 1/\eta$ で (B.3) はよく知られたように

$$E_{11}(k_1) = C_1 \langle \epsilon \rangle^{2/3} k_1^{-5/3}, \quad (C_1 = \frac{18}{55} K_o)$$

を与える。また (B.4) は慣性小領域 $1/L \ll p \ll 1/\eta$ で

$$\begin{aligned} E_{11}^{13}(p) &= \int_{-\infty}^{\infty} dk_2 \int_0^{2\pi} d\theta p \frac{E(k)}{4\pi k^2} \left(1 - \frac{k_1^2}{k^2}\right), \\ &= \frac{K_o \langle \epsilon \rangle^{2/3} p}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk_2 \int_0^{2\pi} d\theta (k_2^2 + p^2)^{-17/6} (k_2^2 + k_3^2), \\ &= \frac{K_o \langle \epsilon \rangle^{2/3} p}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk_2 \int_0^{2\pi} d\theta (k_2^2 + p^2)^{-17/6} (k_2^2 + p^2 \sin^2 \theta), \\ &= \frac{1}{2} K_o \langle \epsilon \rangle^{2/3} p \int_{-\infty}^{\infty} dk_2 (k_2^2 + p^2)^{-17/6} (k_2^2 + \frac{1}{2} p^2), \\ &= K_o \langle \epsilon \rangle^{2/3} p \int_0^{\infty} dk_2 (k_2^2 + p^2)^{-17/6} (k_2^2 + \frac{1}{2} p^2). \end{aligned}$$

ここで $k_2 = xp$ とおくと

$$E_{11}^{13}(p) = C_1'' \langle \epsilon \rangle^{2/3} p^{-5/3}. \quad (C_1'' = I K_o)$$

ただし、

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\infty} (x^2 + 1)^{-17/6} (x^2 + \frac{1}{2}) dx, \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (t + 1)^{-17/6} (t + \frac{1}{2}) t^{-1/2} dt, \\ &= \frac{7\sqrt{\pi}\Gamma(4/3)}{12\Gamma(17/6)} \approx 0.535. \end{aligned}$$

参考文献

- [1] L. F. Richardson, *Weather Prediction by Numerical Process*, Cambridge Univ. Press (1922).
- [2] A. N. Kolmogorov, “The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers,” *C. R. Acad. Sci. URSS* **30**, 301 (1941).
- [3] Y. Kaneda and K. Morishita, to appear (2011).
- [4] Y. Tsuji, “High-Reynolds-number experiments: the challenge of understanding universality in turbulence,” *Fluid Dyn. Res.* **41**, 064003 (2009).
- [5] M. Yokokawa, K. Itakura, A. Uno, T. Ishihara, and Y. Kaneda, “16.4-Tflops direct numerical simulation of turbulence by a Fourier spectral method on the Earth Simulator,” *Proc. IEEE/ACM SC2002 Conf.*, Baltimore (2002) <http://www.sc-2002.org/paperpdfs/pap.pap273.pdf>
- [6] Y. Kaneda, T. Ishihara, M. Yokokawa, K. Itakura, and A. Uno, “Energy dissipation rate and energy spectrum in high resolution direct numerical simulations of turbulence in a periodic box,” *Phys. Fluids* **15**, L21 (2003).
- [7] T. Ishihara, Y. Kaneda, M. Yokokawa, K. Itakura, and A. Uno, “Small-scale statistics in high-resolution direct numerical simulation of turbulence: Reynolds number dependence of one-point velocity gradient statistics,” *J. Fluid Mech.* **592**, 335 (2007).
- [8] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics* (2nd ed.), Pergamon Press (1987).

- [9] A. N. Kolmogorov, “A refinement of previous hypotheses concerning the local structure of turbulence in a viscous incompressible fluid at high Reynolds number,” *J. Fluid Mech.* **13**, 82 (1962).
- [10] A. M. Oboukhov, “Some specific features of atmospheric turbulence,” *J. Fluid Mech.* **13**, 77 (1962).
- [11] E. A. Novikov and R. Stewart, “Intermittency of turbulence and the spectrum of fluctuations in energy dissipation,” *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Geofiz.* **3**, 408 (1964).
- [12] C. Meneveau and K. R. Sreenivasan, “The multifractal nature of turbulent energy dissipation,” *J. Fluid Mech.* **224**, 429 (1991).
- [13] C. W. Van Atta and T. T. Yeh, “The structure of internal intermittency in turbulent flows at large Reynolds number: experiments on scale similarity,” *J. Fluid Mech.* **59**, 537 (1973).
- [14] C. W. Van Atta and T. T. Yeh, “Evidence for scale similarity of internal intermittency in turbulent flows at large Reynolds numbers,” *J. Fluid Mech.* **71**, 417 (1975).
- [15] A. B. Chhabra and K. R. Sreenivasan, “Scale-invariant multiplier distributions in turbulence,” *Phys. Rev. Lett.* **68**, 2762 (1992).
- [16] G. Pedrizzetti, E. A. Novikov, and A. A. Praskovskiy, “Self-similarity and probability distributions of turbulent intermittency,” *Phys. Rev. E* **53**, 475 (1996).
- [17] J. Jiménez, F. Moisy, P. Tabeling, and H. Willaime, “Scaling and structure in isotropic turbulence,” *Intermittency in Turbulent Flows*, Cambridge University Press (2000).
- [18] J. Jiménez, “Self-similarity and coherence in the turbulent cascade,” *IUTAM Symposium on Geometry and Statistics of Turbulence*, Kluwer Academic Publishers (2001).
- [19] E. A. Novikov, “Intermittency and scale similarity in the structure of a turbulent flow,” *Prikl. Math. Mekh.* **35**(2), 266 (1971).

- [20] R. H. Kraichnan, “Lagrangian-history closure approximation for turbulence,” *Phys. Fluids* **8**, 575 (1965).
- [21] Y. Kaneda, “Inertial range structure of turbulent velocity and scalar fields in a Lagrangian renormalized approximation,” *Phys. Fluids* **29**, 701 (1986).
- [22] R. H. Kraichnan, “On Kolmogorov’s inertial-range theories,” *J. Fluid Mech.* **62**, 305 (1974).
- [23] S. A. Orszag, *Fluid Dynamics*, Gordon and Breach (1977).
- [24] Y. Kaneda and K. Morishita, “Intermittency of energy dissipation in high-resolution direct numerical simulation of turbulence,” *J. Phys. Soc. Jpn.* **76**, 073401 (2007).
- [25] P. A. Davidson, *An Introduction for Scientists and Engineers*, Oxford University Press (2004).
- [26] G. K. Batchelor, *The Theory of Homogeneous Turbulence*, Cambridge University Press (1953).
- [27] P. A. Davidson and B. Pearson, “Identifying turbulence energy distributions in real, rather than in Fourier space,” *Phys. Rev. Lett.* **95**, 214501 (2004).
- [28] P. A. Davidson, K. Morishita, and Y. Kaneda, “On the generation and flux of enstrophy in isotropic turbulence,” *J. Turbulence* **9**, 1 (2008).
- [29] J. Kim and R. A. Antonia, “Isotropy of the small scales of turbulence at low Reynolds number,” *J. Fluid Mech.* **251**, 219 (1993).
- [30] S. G. Saddoughi and S. V. Veeravalli, “Local isotropy in turbulent boundary layers at high Reynolds number,” *J. Fluid Mech.* **268**, 333 (1993).
- [31] Y. Tsuji, “Large-scale anisotropy effect on small-scale statistics over rough wall turbulent boundary layers,” *Phys. Fluids* **15**, 3816 (2003).

- [32] B. J. McKeon and J. F. Morrison, “Asymptotic scaling in turbulent pipe flow,” *Phil. Trans. R. Soc. A* **365**, 771 (2007).
- [33] J. Kim, P. Moin, and R. D. Moser, “Turbulence statistics in fully developed channel flow at low Reynolds number,” *J. Fluid Mech.* **177**, 133 (1987).
- [34] J. Jiménez, M. Uhlmann, A. Pinelli, and G. Kawahara, “Turbulent shear flow over active and passive porous surfaces,” *J. Fluid Mech.* **442**, 89 (2001).
- [35] J. Jiménez, “Computing high-Reynolds-number turbulence: will simulations ever replace experiments?,” *J. Turbulence* **4**, 022 (2003).
- [36] R. A. Antonia, J. Kim, and L. W. B. Browne, “Some characteristics of small-scale turbulence in a turbulent duct flow,” *J. Fluid Mech.* **233**, 369 (1991).
- [37] R. D. Moser, J. Kim, and N. N. Mansour “Direct numerical simulation of turbulent channel flow up to $Re_\tau = 590$,” *Phys. Fluids* **11**, 943 (1999).
- [38] H. Abe, H. Kawamura, and Y. Matsuo, “Direct numerical simulation of fully developed turbulent channel flow with respect to the Reynolds number dependence,” *J. Fluids Eng.* **123**, 382 (2001).
- [39] J. C. del Álamo and J. Jiménez, “Direct numerical simulation of the very large anisotropic scales in a turbulent channel,” *Annual Research Briefs 2001*, Center for Turbulence Research (2001).
- [40] J. C. del Álamo and J. Jiménez, “Spectra of the very large anisotropic scales in turbulent channels,” *Phys. Fluids* **15**, L41 (2003).
- [41] S. Satake, T. Kunugi, K. Takase, Y. Ose, and N. Naito, “Large scale structures of turbulent shear flow,” *Lecture Notes in Computer Science 2858*, Springer-Verlag, (2003).
- [42] K. Iwamoto, K. Fukagata, N. Kasagi, and Y. Suzuki, “DNS of turbulent channel flow at $Re_\tau = 1160$ and evaluation of feedback control

- at practical Reynolds numbers,” *Proc. 5th Symp. Smart Control of Turbulence*, Tokyo (2004).
- [43] H. Abe, H. Kawamura, and Y. Matsuo, “Surface heat-flux fluctuations in a turbulent channel flow up to $Re_\tau = 1020$ with $Pr = 0.025$ and 0.71 ,” *Int. J. Heat & Fluid Flow*. **25**, 404 (2004).
- [44] J. C. del Álamo, J. Jiménez, P. Zandonade, and R. D. Moser, “Scaling of the energy spectra of turbulent channels,” *J. Fluid Mech.* **500**, 135 (2004).
- [45] K. Iwamoto, N. Kasagi, and Y. Suzuki, “Direct numerical simulation of turbulent channel flow at $Re_\tau = 2320$,” *Proc. 6th Symp. Smart Control of Turbulence*, Tokyo (2005).
- [46] S. Hoyas and J. Jiménez, “Scaling of the velocity fluctuations in turbulent channels up to $Re_\tau = 2003$,” *Phys. Fluids* **18**, 011702 (2006).
- [47] A. S. Monin and A. M. Yaglom, *Statistical Fluid Mechanics: Mechanics of Turbulence. Volume 2*, MIT Press (1975).
- [48] K. R. Sreenivasan, “On the universality of the Kolmogorov constant,” *Phys. Fluids* **7**, 2778 (1995).
- [49] K. Morishita, T. Ishihara, and Y. Kaneda, “Direct numerical simulation of turbulent channel flow at high reynolds number,” *Proceedings of International Symposium on Frontiers of Computational Science 2008*, CD-ROM, 165 (2008).
- [50] Y. Tsuji, “Anisotropy versus universality in shear flow turbulence,” *Statistical Theories and Computational Approaches to Turbulence*, Springer (2002).
- [51] S. B. Pope, *Turbulent Flows*, Cambridge University Press (2000).
- [52] T. Ishihara, K. Yoshida, and Y. Kaneda, “Anisotropic velocity correlation spectrum at small scales in a homogeneous turbulent shear flow,” *Phys. Rev. Lett.* **88**, 154501 (2002).

研究業績

学会誌等 (査読あり)

1. Y. Kaneda and K. Morishita, “Intermittency of Energy Dissipation in High-Resolution Direct Numerical Simulation of Turbulence,” *J. Phys. Soc. Jpn.*, 76, pp073401-1-4 (2007).
2. P. A. Davidson, K. Morishita, and Y. Kaneda, “On the generation and flux of enstrophy in isotropic turbulence,” *Journal of Turbulence*, 9, pp1-26 (2008).

国際会議プロシーディングス等 (査読あり)

1. Y. Kaneda, T. Ishihara, K. Morishita, and Y. Mizuno, “Attempts at Computer Aided Understanding of Turbulence,” *IUTAM Symposium on Computational Physics and New Perspective in Turbulence*, Springer, pp49-54 (2008).
2. K. Morishita, T. Ishihara, and Y. Kaneda, “Direct Numerical Simulation of Turbulent Channel Flow at High Reynolds Number,” *Proceedings of the International Symposium on Frontiers of Computational Science 2008*, CD-ROM, pp165-172 (2008).

学会プロシーディングス・紀要等 (査読なし)

1. 森下浩二、金田行雄、「大規模 DNS データを用いた乱流のエネルギー散逸率に関する統計解析」、『第 20 回数値流体力学シンポジウム講演要旨集』、日本流体力学会、p50、(2006)

2. 金田行雄、森下浩二、「ランダムな乗算過程としてのエネルギー散逸の間欠性」、『応用力学研究所研究集会報告 18ME-S7』、九州大学応用力学研究所、pp130–135、(2007)
3. 森下浩二、金田行雄、「エネルギーカスケード過程における相似性の大規模乱流 DNS データによる解析」、『第 21 回数値流体力学シンポジウム講演要旨集』、日本流体力学学会、p234、(2007)
4. 森下浩二、石原卓、金田行雄、「高レイノルズ数チャンネル乱流の直接数値シミュレーション」、『日本流体力学学会年会 2008 講演要旨集』、日本流体力学学会、p159、(2008)
5. 森下浩二、石原卓、金田行雄、「高レイノルズ数チャンネル乱流の局所等方性の DNS による検証」、『第 24 回数値流体力学シンポジウム講演要旨集 (USB メモリ)』、日本流体力学学会、pp1–4、(2010)

国際会議発表

1. Y. Kaneda, T. Ishihara, K. Morishita, and Y. Mizuno, “Attempts at Computer Aided Understanding of Turbulence,” IUTAM Symposium on Computational Physics and New Perspective in Turbulence, Nagoya, Japan, (September 2006)
2. K. Morishita and Y. Kaneda, “Intermittency of Energy Dissipation in High-Resolution Direct Numerical Simulation of Turbulence,” Nagoya-COE and Beijing-LHD Joint Workshop on “Frontier of Computational Science,” Nagoya, Japan, (March 2008)
3. K. Morishita, T. Ishihara, and Y. Kaneda, “Direct Numerical Simulation of Turbulent Channel Flow at High Reynolds Number,” Japan-Russia Workshop on Study of Hydrodynamical Instability, Turbulence and Complex Flows by Using Advanced Technologies of Modeling on Supercomputers, Kobe, Japan, (November 2008)
4. K. Morishita, T. Ishihara, and Y. Kaneda, “Direct Numerical Simulation of Turbulent Channel Flow at High Reynolds Number,” International Symposium on Frontiers of Computational Science 2008, Nagoya, Japan, (November 2008)

国内学会・研究集会発表等

1. 森下浩二、金田行雄、「大規模 DNS データを用いた乱流のエネルギー散逸率に関する統計解析」、『第 20 回数値流体力学シンポジウム』、A7-4、名古屋、2006 年 12 月.
2. 森下浩二、金田行雄、「エネルギーカスケード過程における相似性の大規模乱流 DNS データによる解析」、『第 21 回数値流体力学シンポジウム』、E5-2、東京、2007 年 12 月.
3. 森下浩二、金田行雄、「エネルギーカスケード過程における相似性の大規模乱流 DNS データによる解析」、『21 世紀 COE プログラム「計算科学フロンティア」平成 19 年度合同成果報告会』、名古屋、2008 年 3 月.
4. 森下浩二、金田行雄、「エネルギーカスケード過程における相似性の大規模乱流 DNS データによる解析」、『統計数理研究所共同研究会』、東京、2008 年 3 月.
5. 森下浩二、石原卓、金田行雄、「高レイノルズ数チャンネル乱流の直接数値シミュレーション」、『日本流体力学会年会 2008』、神戸、2008 年 9 月.
6. 森下浩二、石原卓、金田行雄、「高レイノルズ数チャンネル乱流の直接数値シミュレーション」、第 3 回計算科学フロンティアフォーラム～計算科学の発展と教育～、東京、2008 年 9 月.
7. 森下浩二、石原卓、金田行雄、「高レイノルズ数チャンネル乱流の直接数値シミュレーション」、『21 世紀 COE プログラム「計算科学フロンティア」平成 20 年度合同成果報告会』、名古屋、2009 年 3 月.
8. 森下浩二、石原卓、金田行雄、「高レイノルズ数チャンネル乱流の局所等方性の DNS による検証」、『第 24 回数値流体力学シンポジウム』、C9-5、横浜、2010 年 12 月.

謝辞

計算理工学専攻応用計算科学講座計算流体力学グループで研究をはじめから、時に厳しいご指導と暖かい励ましをして下さった名古屋大学大学院工学研究科計算理工学専攻 金田行雄教授ならびに石井克哉教授に心から厚く御礼申し上げます。

また、日ごろから親身な指導で支えてくださった名古屋大学大学院工学研究科附属計算科学連携教育研究センター 石原卓准教授、名古屋大学大学院工学研究科計算理工学専攻 芳松克則助教、名古屋大学大学院工学研究科附属計算科学連携教育研究センター 岡本直也助教には心からお礼申し上げます。

最後に応用計算科学講座計算流体力学グループの先輩方、同輩、後輩、並びに秘書の皆様心から感謝いたします。

2011年1月 森下浩二