

A1 混合体理論の飽和土の力学への適用

混合体理論は、空間のある点を、ある時刻に占める物質が唯一でないと、しかも一つの連続体の排他的な運動によって全体を記述できないような、複数の構成物質からなる連続体を記述するための力学理論であり、この理論は飽和土の力学に適用されている。ここでは、西村(1999)に従って、飽和土の力学として導かれる運動方程式および固相と液相間の幾何学的制約である連続式などを示す。

いま、飽和土の変形後の微小体積 dv を考え、この体積は十分に多くの土粒子を含む程度には大きい、力学的挙動が一様であると見なす程度には小さいものとする。すると、この体積を占める間隙水と土粒子の体積は、間隙率 n を用いて、それぞれ、 ndv と $(1-n)dv$ となり、土粒子からなる土骨格と間隙水は排他的となり、 n はそもそも混合体理論と相容れない概念である。しかし、これを仮想的に、土骨格と間隙水がともに一様に（同一の）体積 dv を占める連続体と見ることとする。以下では、混合体の構成要素である土骨格および間隙水を、それぞれ固相および液相と呼び、各諸量については、下付添字 s および f を用いて表す。

A) 固相（土骨格）と液相（間隙水）の運動

固相、液相を構成する粒子の運動は、次式となる。

$$\mathbf{x}_s = \mathbf{x}_s(\mathbf{X}_s, t), \quad \mathbf{x}_f = \mathbf{x}_f(\mathbf{X}_f, t) \quad (\text{A1.1})$$

ここに、 \mathbf{x}_s および \mathbf{X}_s はそれぞれ固相粒子の空間座標と物質座標、 \mathbf{x}_f および \mathbf{X}_f はそれぞれ液相粒子の空間座標と物質座標を、 t は時刻を示す。相異なる相 s および f について $\mathbf{x}_s(\mathbf{X}_s, t) = \mathbf{x}_f(\mathbf{X}_f, t)$ となってもよいとする。

B) 固相と液相の質量保存側と、両相間の幾何的拘束

土粒子および間隙水の単体としての真の(変形後の)密度をそれぞれ ρ^s および ρ^f と書くと、固相および液相の混合体の構成要素としての密度 ρ_s および ρ_f は、それぞれ

$$\rho_a = n_a \rho^a, \quad a = (s, f) \quad (\text{A1.2})$$

となり、混合体の密度 ρ は

$$\rho = \sum_a \rho_a \quad (\text{A1.3})$$

となる。ここに、 $n_s = 1-n$ および $n_f = n$ であり、式(A1.2)で示すように相 a について総和をとらない。相 a の質量保存側は、

$$\dot{\rho}_a + \rho_a \text{div} \mathbf{v}_a = 0 \quad (\text{A1.4})$$

となる。ここに変数の上付き“ $\dot{}$ ”はその変数の下付で表す相から見た物質時間微分で、Euler的には

$$\dot{\rho}_a \equiv \frac{\partial \rho_a}{\partial t} + \frac{\partial \rho_a}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{v}_a \quad (\text{A1.5})$$

で記述され、 $\mathbf{v}_a = \dot{\mathbf{x}}_a$ である。式(A1.2)を用いて式(A1.4)を陽に書き下すと、

$$\operatorname{div} \mathbf{v}_s = \frac{D_s n}{1-n} - \frac{D_s \rho^s}{\rho^s} \quad (\text{A1.6})$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v}_f = -\frac{D_f n}{n} - \frac{D_f \rho^f}{\rho^f} \quad (\text{A1.7})$$

となる。ここに、 D_a は相 a から見た物質時間微分を表す。式(A1.5)の関係に注意して、式(A1.5)と式(A1.6)を足し合わせると、

$$\operatorname{div} \mathbf{v}_s + \operatorname{div}\{n(\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_s)\} = -(1-n)\frac{D_s \rho^s}{\rho^s} - n\frac{D_f \rho^f}{\rho^f} \quad (\text{A1.8})$$

を得る。この式で土粒子および間隙水の非圧縮性、すなわち $D_s \rho^s = 0$ および $D_f \rho^f = 0$ を仮定すれば、次式になる。

$$\operatorname{div} \mathbf{v}_s + \operatorname{div}\{n(\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_s)\} = 0 \quad (\text{A1.9})$$

ここで、 $\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_s$ は固相（土骨格）に及ぼす液相（間隙水）の相対速度であり、それに n を乗じたものが、実質的に混合体を占める間隙水の平均的な速度であることに注意すれば、土粒子や間隙水が非圧縮であっても、間隙水の移動に伴って土骨格の体積は変化し、これが土骨格と間隙水の幾何学的拘束となることがわかる。

C) 固相と液相の部分応力と有効応力

飽和土の混合体に作用する間隙水圧 u を用いて、液相（間隙水）の部分応力 \mathbf{T}_f は

$$\mathbf{T}_f = -n u \mathbf{I} \quad (\text{A1.10})$$

となるので、混合体に作用する Cauchy 応力 \mathbf{T} または有効応力 $\mathbf{T}' = \mathbf{T} + u \mathbf{I}$ を用いて、固相（土骨格）に作用する部分応力 \mathbf{T}_s は、

$$\mathbf{T}_s = \mathbf{T} - \mathbf{T}_f = \mathbf{T} + n u \mathbf{I} = \mathbf{T}' - (1-n) u \mathbf{I} \quad (\text{A1.11})$$

と書くことができる。すなわち、一般に、飽和土の力学では、土骨格の変形に有効な応力（有効応力）は土骨格に作用する部分応力ではない。また、部分応力 \mathbf{T}_f および \mathbf{T}_s は、後述の式(A1.13)に示すように、対称性を有する。

D) 運動方程式と Darcy 則

相ごとの運動量保存則と角運動量保存則および質量保存則（式(A1.4)）より相 a の運動方程式は、

$$\rho_a \overset{\parallel}{\mathbf{x}}_a = \operatorname{div} \mathbf{T}_a + \rho_a \mathbf{b} + \mathbf{I}_a \quad (\text{A1.12})$$

$$\mathbf{T}_a^T = \mathbf{T}_a \quad (\text{A1.13})$$

となる。ここに、 \mathbf{b} は単位質量あたりの物体力を示す。また、 \mathbf{I}_a は相 a への他の相から作用する相互作用力を表し、作用・反作用の法則により

$$\sum_a \mathbf{I}_a = \mathbf{0} \quad (\text{A1.14})$$

を満たす。また、相互作用偶力はないものとする。今、 $\mathbf{I}_s = -\mathbf{I}_f$ の形については、西村(1999)に倣い、一様な無限の長さの円筒内の定常粘性流に対する Hagen-Poiseuille の解に基づく円筒

内を受ける力の類推から、間隙率勾配による効果とあわせて、次式で与える。

$$\mathbf{I}_f = -\mathbf{I}_s = -\gamma_w n^2 \mathbf{K}^{-1}(\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_s) + u \text{grad } n \quad (\text{A1.15})$$

ここに、 \mathbf{K} は客観的な 2 階のテンソルで、透水係数テンソルと呼ばれる。等方性の場合 $\mathbf{K} = k\mathbf{I}$ であり、 k は透水係数と呼ばれる。

この結果、固相と液相の運動方程式を陽に書き下すと、

$$\rho_s \overset{\parallel}{\mathbf{x}}_s = \text{div } \mathbf{T}^1 - (1-n)\text{grad } u + \gamma_w n^2 \mathbf{K}^{-1}(\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_s) + \rho_s \mathbf{b} \quad (\text{A1.16})$$

$$\rho_f \overset{\parallel}{\mathbf{x}}_f = -\text{grad } u - \gamma_w n^2 \mathbf{K}^{-1}(\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_s) + \rho_f \mathbf{b} \quad (\text{A1.17})$$

になる。なお、式(A1.16)において、特に加速度項が無視できる場合、

$$n(\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_s) = -\frac{1}{\gamma_w} \mathbf{K}(\text{grad } u - \rho^f \mathbf{b}) \quad (\text{A1.18})$$

となり、Darcy 則に一致する。また、客観性の原理から \mathbf{K} が定数であるのは等方性の場合に限ることが導かれる。

また、式(A-16)と式(A-17)の和をとると（すなわち、式(A-12)を a について和をとると）、飽和土に作用する外力に対して次式が得られる。

$$\rho_s \overset{\parallel}{\mathbf{x}}_s + \rho_f \overset{\parallel}{\mathbf{x}}_f = \text{div } \mathbf{T} + \rho \mathbf{b} \quad (\text{A1.19})$$

以上から、土粒子と間隙水の非圧縮性を仮定すれば、各相の密度の定義（式(A1.2)：式の数 2 個）、質量保存則（式(A1.6)と式(A1.7)：式の数 2 個）、運動方程式（式(A1.16) と式(A1.17)：式の数 6 個）および土骨格の構成式で、土骨格の構成式を式(A1.16)に代入すれば、方程式の数は 10 個となる。一方、未知数は固相、液相の変位成分が各 3 個、間隙水圧 u 、 ρ_s 、 ρ_f および間隙率 n の合計 10 個で、閉じた方程式系となる。

また、飽和土（混合体）の問題を実際に解く場合、式(A-3)をそれ以外の方程式に適宜代入することにより、固相、液相の変位（または座標）の成分の各 3 個と間隙水圧 u 1 個の計 7 個にした未知数を、式(A1.9)、式(A1.17)（あるいは $n(\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_s)$ について変形した式：「加速度を考慮した Darcy 則」）および式(A1.19)の 7 つの方程式を連立して求めるとき、Full-formulation と呼ばれる。

さらに、

$$\overset{\parallel}{\mathbf{x}}_s \gg \overset{\parallel}{\mathbf{x}}_f - \overset{\parallel}{\mathbf{x}}_s \quad (\text{A1.20})$$

を仮定して、式(A1.17)と(A1.19)の $\overset{\parallel}{\mathbf{x}}_f$ を $\overset{\parallel}{\mathbf{x}}_s$ を用いて書き改めると、固相の変位成分 3 個と間隙水圧 u 1 個の計 4 個の未知数を、式(A1.17) を式(A1.9)に代入した式と式(A1.19)から得られる式の 4 式で解くことになり、このとき、 u - p formulation と呼ばれる。

参考文献

- 1) 西村直志(1999)：(社)地盤工学会 地盤工学ハンドブック，第 3 章土質力学， pp.51-64.

A2 動的／静的水～土骨格連成有限変形解析 (Asaoka and Noda, 2007; Noda et al., 2008)

A2.1 有限変形場の速度型運動方程式を有する飽和土の初期値・境界値問題

以下では、本研究課題を遂行する上で要となる解析手法について述べる。

飽和土の初期値・境界値問題を扱う力学計算では、支配方程式が固液二相の混合体理論に基づいて定式化されることが多く、有限要素法などを適用して数値計算が行われる。本章では、この混合体理論において固相に対する液相の相対加速度が固相の加速度よりも十分に小さいことを仮定する「 $u-p$ formulation」に基づくとともに、updated Lagrangian に基づいて解析対象の幾何形状変化が考慮できる有限変形解析について説明する。このために、Nishimura (1999) に従って、混合体（飽和土）の「速度型」運動方程式を与える。すなわち、慣性項の時間微分の結果として、躍度 (jerk) 項を有する速度型運動方程式を与える。この節ではあわせて、運動方程式以外の飽和土の力学挙動に関する初期値・境界値問題を解くのに必要な支配方程式も示す。すなわち、(a)混合体（飽和土）の運動方程式とその速度型、(b)水～土骨格連成式（液相（間隙水）～固相（土骨格）の間の幾何的制約を表す連続式および、間隙水の平均的な流速を表現する式）、(c)有効応力原理、(d)土骨格の構成式、(e) 間隙水の状態方程式、(f) 適合条件式、および(g)境界条件である。ただし、初期条件は除く。なお、混合体理論に基づいた各相の運動方程式の定式化の詳細は、西村 (1999) に従って、Full formulation に沿った形で付録 A1 に示すが、ここでは固相と液相の間の相互作用力が、Hagen-Poiseuille の定常粘性流れの解から得られる力と、間隙比の十分な変化を記述できるように、間隙率の空間勾配と間隙水圧の積に関する力との和で与えられることが仮定している点に注意されたい。また、以下の定式化では、間隙水の運動には等方性を仮定するとともに、より広範な適用を考えて、土粒子は非圧縮性、間隙水は圧縮性と仮定した場合を示す。

a) $u-p$ formulation に基づく飽和土の速度型運動方程式

固相（土骨格）と液相（間隙水）の間では相互作用力（相互作用偶力は除く）のみが働くとし、固相および液相の各運動方程式（式(A1-12)）の和をとり、固相に対する液相の相対加速度 $\dot{\mathbf{v}}_f - \dot{\mathbf{v}}_s$ が固相の加速度 $\dot{\mathbf{v}}_s$ よりも十分小さいとして、

$$\dot{\mathbf{v}}_s \gg \dot{\mathbf{v}}_f - \dot{\mathbf{v}}_s \quad (\text{A2.1})$$

を仮定すると、飽和土（混合体）の運動方程式は次式で表される。

$$\rho \dot{\mathbf{v}}_s = \text{div} \mathbf{T} + \rho \mathbf{b} \quad (\text{A2.2})$$

ここに、 \mathbf{T} は Cauchy (全) 応力テンソル (引張：正)、 \mathbf{b} は単位質量あたりの物体力ベクトルを表し、定ベクトルとする。変数の上付き“ $\dot{}$ ”はその変数の下付き添字の相 (s : 固相、 f : 液相) から見た物質時間微分を表す。すなわち、式(A2.1)の $\dot{\mathbf{v}}_s$ は固相の速度 \mathbf{v}_s の固相から見た物質時間微分 (固相の加速度) を、 $\dot{\mathbf{v}}_f$ は液相の速度 \mathbf{v}_f の液相から見た物質時間微分 (液相の加速度) を表す。準静的問題となる場合は、(A2.2)左辺の加速度項が消える。また、式(A2.2)において、 ρ は飽和土の密度を表し、単体で存在するときの土粒子の密度 ρ^s と間隙水の密度

ρ^f を用いて次式で与えられる。

$$\rho = (1-n)\rho^s + n\rho^f \quad (\text{A2.3})$$

また、 n は間隙率で比体積 v または間隙比 e を用いて、次式で表される。

$$n = \frac{v-1}{v} = \frac{e}{1+e} \quad (\text{A2.4})$$

次に、土骨格の構成式に増分型（速度型）を用いるため、式(A2.1)を混合体の体積で積分した式（積分形）について固相から見た物質時間微分をとって再び局所形をとり、さらに簡単のため、土粒子のみに非圧縮性を仮定すると、混合体（飽和土）の速度型の運動方程式は、次式のように書かれる。

$$\rho \overset{\parallel}{\mathbf{v}}_s + \left\{ n \mathbf{D}_s \rho^f + \rho^f (\text{tr} \mathbf{D}_s) \right\} (\mathbf{v}_s - \mathbf{b}) = \text{div} \overset{\parallel}{\mathbf{S}}_t \quad (\text{A2.5})$$

ここに、左辺第一項は、速度の2階微分であることから、「加速度の速度」あるいは躍度と言ふべき項である。 \mathbf{D}_s は固相から見た物質時間微分を表す。また、

$$\mathbf{D}_s \mathbf{S}_t = \mathbf{D}_s \mathbf{T} + (\text{tr} \mathbf{D}_s) \mathbf{T} - \mathbf{T} \mathbf{L}_s^T \quad (\text{A2.6})$$

で、 $\mathbf{D}_s \mathbf{S}_t$ は固相の公称応力速度と呼び、Yatomi et al.(1989) の表記法に従っている。 \mathbf{L}_s と \mathbf{D}_s はそれぞれ固相の速度勾配テンソルとストレッチングテンソルで次の関係がある。

$$\mathbf{D}_s = \frac{1}{2} (\mathbf{L}_s + \mathbf{L}_s^T) \quad (\text{A2.7})$$

なお、速度、加速度または躍度には客観性がないため、式(A2.2)または式(A2.5)の形で表される運動方程式は客観性がない。このため、これらの式の使用を慣性系に限定するものとし、以下ではこれ以上客観性のない法則は用いないものとする（Nishimura, 1999）。

b) 水～土骨格連成式（飽和土の連続式および平均的な間隙水の流速式）

b-1) 飽和土の連続式（土骨格と間隙水の幾何的制約条件）

各相の質量保存則の和と、ここでも簡単のため、土粒子のみに非圧縮性を仮定すると、飽和土の連続式として次式が得られる（式(A1-9)参照）。

$$\text{div} \mathbf{v}_s + \text{div} \left\{ n (\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_s) \right\} = - \frac{n}{\rho^f} \mathbf{D}_f \rho^f \quad (\text{A2.8})$$

ここに、 \mathbf{D}_f は液相から見た物質時間微分を表す。また、固相に対する液相の相対速度 $\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_s$ に飽和土に占める液相比率である間隙率 n を乗ずれば、飽和土における間隙水の平均的な流速を与えるので、式(A2.8)は、飽和土における土骨格と間隙水の幾何的制約として、『飽和土に占める土骨格の時間的体積変化率は、飽和土に流入する単位時間当たりの間隙水の流量』を表すことが分かる。

b-2) 間隙水の平均的な流速式

Nishimura(1999)に従って液相（間隙水）に対する運動方程式で、固相と液相の相互作用力が Hagen-Poiseuille の定常粘性流れの解から導かれる力と、間隙率の空間勾配と間隙水圧の積

に関する力との和で与えられること、さらには液相の運動に等方性を仮定すると、平均的な間隙水の流速式は次式のように表される（付録 A1 参照）。

$$n(\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_s) = -\frac{k}{\gamma_w}(\text{gradu} - \rho^f \mathbf{b}) - \mathbf{v}_s \times \frac{\rho^f k}{\gamma_w} \quad (\text{A2.9})$$

ここに、 k は透水係数、 g は重力加速度（すなわち式(A2.2)の物体力ベクトル \mathbf{b} の大きさ）、 $\gamma_w = \rho^f g$ で水の単位体積重量である。なお、この定式化では、式(A2.1)の仮定から得られる、

$$\rho^f \dot{\mathbf{v}}_f = \rho^f \dot{\mathbf{v}}_s + \rho^f (\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_s) \dot{\phantom{\mathbf{v}}} \cong \rho^f \dot{\mathbf{v}}_s \quad (\text{A2.10})$$

の関係を用いている。この結果、(A2.9)で右辺第二項は固相の加速度を含むため、準静的問題の場合は、この項が消える。つまり、この場合、式(A2.9)は通常知られている Darcy 則となるので、式(A2.9)で式(A2.10)を考慮する前の式は、「加速度項の影響を考慮した Darcy 則」とでも言うべきものである。

ここで、 ρ^f に対する

$$\mathbf{D}_f \rho^f = \mathbf{D}_s \rho^f + \text{grad} \rho^f \cdot (\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_s) \quad (\text{A2.11})$$

なる関係式を用いると、式(A2.8)および式(A2.9)から、飽和土の運動方程式（式(A2.5)）に連立させる式（「水～土骨格連成式」）は、次式となる。

$$-\text{div} \left(\frac{\rho^f k}{\gamma_w} \dot{\mathbf{v}}_s \right) + \rho^f \text{div} \mathbf{v}_s + \text{div} \left\{ -\frac{\rho^f k}{\gamma_w} (\text{gradu} - \rho^f \mathbf{b}) \right\} + n \mathbf{D}_s \rho^f = 0 \quad (\text{A2.12})$$

c) 有効応力原理

Terzaghi の有効応力原理に従うとして、次式で与える。

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}' - u \mathbf{I} \quad (\text{A2.13})$$

ここに、 \mathbf{T}' は Cauchy 有効応力（引張を正）、 u は間隙水圧（圧縮を正）、 \mathbf{I} は等方テンソルである。

d) 土骨格の構成式

土骨格の構成式には、2章で示した Super/subloading yield surface Cam-clay model (Asaoka et al., 2002) を用い、 $\dot{\mathbf{T}}'$ と \mathbf{D}_s の線形関係として次式で与える。

$$\dot{\mathbf{T}}' = L[\mathbf{D}_s] \quad (\text{A2.14})$$

ここに、 $\dot{\mathbf{T}}'$ は客観性のある Cauchy 有効応力速度テンソルで、本研究課題の事例は、次式で表される Green-Nagdhi(1965)の Cauchy 有効応力速度テンソルを用いた場合である。

$$\dot{\mathbf{T}}' = \mathbf{T}' + \mathbf{T}' \boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\Omega} \mathbf{T}' \quad (\text{A2.15})$$

ここに、 $\boldsymbol{\Omega}$ は $\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{D}_s \mathbf{R}_s \mathbf{R}_s^T$ で表される固相の物質スピントテンソルで、 \mathbf{R}_s は固相の変形勾配テンソルから得られる回転テンソルである。

e) 間隙水の状態方程式

間隙水は間隙水圧の大きさによって、次式で与えられるとする。

$$\rho^f = \rho_0 \exp\left\{\frac{u - u_0}{K_f}\right\} \quad (\text{A2.16})$$

ここに、 ρ_0 は水圧 u_0 のときの間隙水の単体の密度、 K_f は間隙水の体積弾性係数である。この式は、固相から見た物質時間微分をとって式(A2.5)および式(A2.12)に代入する。

f) 適合条件式

本来は大域的な変形場と局所的な変形場に矛盾がないことを表現する式であるが、ここでは、固相の速度勾配テンソル L_s の定義を示す。

$$L_s = \frac{\partial v_s}{\partial x} \quad (\text{A2.16})$$

g) 境界条件

a) 運動方程式 ～ f) 適合条件式によって、未知数の数と方程式の数が等しくなり、あとは境界条件および初期条件を与えて問題を解くことになる。ここでは、境界条件のみを示す。

境界条件には対象とする飽和土に対して、応力または応力速度に関する力学的境界条件および変位、速度または加速度に関する幾何的境界条件、ならびに全水頭および間隙水の流量に関する水理境界条件の2種類がある。つまり、

$$\Gamma = \Gamma_v + \Gamma_t = \Gamma_q + \Gamma_h \quad (\text{A2.17})$$

となる。ここに、 Γ_v は飽和土（混合体）の幾何的境界、 Γ_t は力学的境界、 Γ_q は間隙水の流量境界、 Γ_h （あるいは Γ_u ）は全水頭（あるいは間隙水圧）に関する境界である。

一般に表面力ベクトル t が与えられるとき、 Γ_t において速度型で与えられる境界条件は次式になる。

$$\dot{s}_i da = (t da) = i da + \left\{ (tr D_s) - n \cdot D_s n \right\} t da = \dot{S}_i n da \quad \text{on } \Gamma_t \quad (\text{A2.18})$$

ここに、 \dot{s}_i は公称表面力速度と呼ばれる。例えば、一定のセル圧が作用するような三軸試験を想定する場合、 $t = cn$ (c は一定、 n は境界の外向き法線ベクトル) として与えられるため、式(A2.18)は次式で書き換えられる (Asaoka et al., 1994)。

$$\dot{s}_i da = (t da) = c(n da) = c \left\{ (tr D_s) I - L_s^T \right\} n da \quad \text{on } \Gamma_t \quad (\text{A2.19})$$

つまり、セル圧一定時の \dot{s}_i は、もっぱら供試体の形状変化のみによって境界に与えられる。

一方、水理境界条件については、境界 Γ_q が非排水の場合、単位面積あたりの流量 q が

$$q = n(v_f - v_s) \cdot n = 0 \quad (\text{A2.20})$$

として与えられる。

A2.2 速度型運動方程式の弱形式と有限要素離散化

速度型運動方程式の弱形式

有限要素法を用いて、前節の初期値・境界値問題を数値的に解くために、速度型の運動方程式 (式 (A2.5)) の弱形式をとる。これによって、空間変数と時間変数からなる偏微分方程式を時間変数のみからなる常微分方程式に変える。以下では、簡単のため、前節の支配方程式中で、下付き添字に“s”が付いている式については変数の添字をとるとともに、固相から見た物質時間微分を示す上付き“`”は上付き“・”で置換して表す。

式(A2.17)で示す変位速度境界 Γ_v でゼロとなり、なおかつ適合条件式 (式(A2.17)) を満足する任意の仮想速度ベクトル $\delta \mathbf{v}$ を用いて、速度型運動方程式 (式(A2.5)) と内積をとった上で体積積分を施し、さらに Gauss の発散定理、有効応力原理 (式(A2.13)) および有効応力の Green-Naghdi 速度 (式(A2.15)) を用いると、次式を得る。

$$\begin{aligned} & \int_v \rho \ddot{\mathbf{v}} \cdot \delta \mathbf{v} dv + \int_v \left\{ \mathbf{T}' \cdot \delta \mathbf{D} + (\text{tr} \mathbf{D}) \mathbf{T} \cdot \delta \mathbf{L} - \mathbf{T} \mathbf{L}^T \cdot \delta \mathbf{L} \right\} dv + \int_v \rho^f \text{tr} \mathbf{D} (\dot{\mathbf{v}} - \mathbf{b}) \cdot \delta \mathbf{v} dv \\ & - \int_v \dot{\mathbf{u}} \left\{ \text{tr} \delta \mathbf{D} - \rho^f \frac{n}{K_f} (\dot{\mathbf{v}} - \mathbf{b}) \cdot \delta \mathbf{v} \right\} dv = \int_a \dot{\mathbf{s}}_t \cdot \delta \mathbf{v} da - \int_v (\boldsymbol{\Omega} \mathbf{T}' - \mathbf{T}' \boldsymbol{\Omega}) \cdot \delta \mathbf{D} dv \end{aligned} \quad (\text{A2.21})$$

ここに、積分記号の下付き v は考えている飽和土が占めている領域、 a は式(A2.17)で示した表面力速度境界 Γ_t を示す。この式の各項には問題を解いて決まる ρ 、 ρ^f 、応力 (有効応力と間隙水圧) や加速度 $\dot{\mathbf{v}}$ などが含まれるため、有限要素法に基づいた計算では時間を進めるごとに各時間ステップで収束するまで繰返し計算を必要とする。なお、三軸試験の計算例のように、重力の影響を無視して計算を行う場合は、左辺第3項に含まれる \mathbf{b} の部分を計算しない。さらに、加速度の影響がない準静的問題でなおかつ間隙水が非圧縮 (すなわち K_f が無限大) の場合は、Asaoka et al.(1994, 1997) の式と完全に一致する。

有限要素離散化 (質量マトリクス M、接線剛性マトリクス K などの作成)

計算領域 v をいくつかの要素に分割した各領域 v^i ($i=1, \dots, NE$, NE :要素分割数) について、式(A2.21) を用いて有限要素に離散化し、 $\delta \mathbf{v}$ の任意性を考慮すると、次式で表される要素の行列微分方程式を得る。

$$\mathbf{M}^i \frac{d^2}{dt^2} \{\mathbf{v}^i\} + \mathbf{K}^i \{\mathbf{v}^i\} - \mathbf{L}^{iT} \dot{\mathbf{u}}^i = \{\mathbf{f}^i\} \quad (\text{A2.22})$$

$$\{\ddot{\mathbf{v}}^i\} \equiv \frac{d^2}{dt^2} \{\mathbf{v}^i\} \quad (\text{A2.23})$$

ここに、 \mathbf{M}^i は飽和土の要素質量マトリクス、 \mathbf{K}^i は土骨格の接線剛性マトリクス、 \mathbf{L}^i は要素の節点の (変位) 速度を土骨格の時間的体積変化率に変換する要素マトリクス、 $\{\mathbf{f}^i\}$ は要素の各節点に作用する荷重速度ベクトルである。なお、それぞれのより具体形は付録 A6 に示す。

A2.3 慣性項の影響を含む水～土骨格連成式の物理モデル

水～土骨格連成式については、式(A2.12)に基づいて、各要素の中心に間隙水圧 u を代表させる Christian 流 (Christian, 1968) または田村流 (Akai and Tamura, 1978) の物理モデルを拡張して用い (Asaoka et al. 1994) 次式で与える。

$$\frac{k_i}{g} L^i \frac{d}{dt} \{ \mathbf{v}^i \} - L^i \{ \dot{\mathbf{v}}^i \} + \sum_{m=1}^s \alpha^i_m (u^m - u^i) = \dot{f}_u^i \quad (\text{A2.24})$$

$$\{ \dot{\mathbf{v}}^i \} \equiv \frac{d}{dt} \{ \mathbf{v}^i \} \quad (\text{A2.25})$$

ここに、 u^i は着目している要素 i の間隙水圧、 u^m ($m=1,2,\dots,s$) はその要素 i の隣接要素 m の間隙水圧を表す。 s は隣接要素数で、3次元条件の場合は $s=6$ 、2次元平面ひずみ条件または軸対称条件の場合は $s=4$ である。また、

$$\dot{f}_u^i = - \sum_{m=1}^s \gamma_w \alpha^i_m (z^i_{cm} - z^i_c) + q^i \quad (\text{A2.26})$$

で、 L^i は要素 i の土骨格の速度を土骨格の体積変化に変換する要素マトリクス、 k_i は要素 i の透水係数、 α^i_m ($m=1,2,\dots,s$) は透水性に関連した係数である。 α^i_m の具体式は付録 A7 で、より利便性の高い不均質透水材料の場合を示す。なお、間隙水が圧縮性を示す場合は、間隙水圧と同様、間隙水の密度 ρ^f も要素中心で代表されるとして定式化している。また式(A2.26)では、物体力ベクトル \mathbf{b} の方向にある基準面からの高さ z を取るとき、 z^i_c は着目している要素 i の中心までの高さ、 z^i_{cm} ($m=1,2,\dots,s$) はその要素 i の隣接要素 m の中心までの高さを表し、 q^i は要素 i に対して外部から供給される単位時間当たりの水の流量を表す。また、三軸試験を要素試験として、高さあるいは重力の影響を考えない場合は、式(A2.26)の右辺第一項はゼロで与えられる。

A2.4 慣性項を含む飽和土の有限変形問題における解くべき連立一次常微分方程式

飽和土 (混合体) の初期値・境界値問題を解くために、上述の式(A2.22)と式(A2.24)を各要素について重ね合わせると、最終的に次の解くべき連立一次常微分方程式を得る。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \frac{d^2}{dt^2} \begin{Bmatrix} \{ \mathbf{v} \} \\ \{ u \} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -(\mathbf{L}^T + \mathbf{L}_c^T) \\ \mathbf{L} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} \{ \mathbf{v} \} \\ \{ u \} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{L} & \mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{ \mathbf{v} \} \\ \{ u \} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{ \dot{\mathbf{f}} \} \\ \{ \dot{f}_u \} \end{Bmatrix} \quad (\text{A2.27})$$

ここに、

$$\{ \mathbf{v} \} = \{ \mathbf{v}_1^T \ \mathbf{v}_2^T \ \dots \ \mathbf{v}_j^T \ \dots \ \mathbf{v}_{(NP-1)}^T \ \mathbf{v}_{NP}^T \}^T \quad (\text{A2.28})$$

$$\{ \dot{\mathbf{f}} \} = \{ \dot{\mathbf{f}}_1^T \ \dot{\mathbf{f}}_2^T \ \dots \ \dot{\mathbf{f}}_j^T \ \dots \ \dot{\mathbf{f}}_{(NP-1)}^T \ \dot{\mathbf{f}}_{NP}^T \}^T \quad (\text{A2.29})$$

$$\{ u \} = \{ u^1 \ u^2 \ \dots \ u^i \ \dots \ u^{(NE-1)} \ u^{NE} \}^T \quad (\text{A2.30})$$

$$\{ \dot{f}_u \} = \{ \dot{f}_u^1 \ \dot{f}_u^2 \ \dots \ \dot{f}_u^i \ \dots \ \dot{f}_u^{(NE-1)} \ \dot{f}_u^{NE} \}^T \quad (\text{A2.31})$$

であり、 $\{ \mathbf{v} \}$ および $\{ \dot{\mathbf{f}} \}$ はそれぞれ、節点 j の速度ベクトル \mathbf{v}_j および荷重速度ベクトル $\dot{\mathbf{f}}_j$

($j=1, \dots, NP$, NP :節点数)の全体表示である。また、 $\{u\}$ および $\{\dot{f}_u\}$ はそれぞれ、要素 i の間隙水圧 u^i および流出入する液相の流量 \dot{f}_u^i の全体表示である。

$$\mathbf{M} = \sum_{i=1}^{NE} \mathbf{M}^i \quad (\text{A2.32})$$

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^{NE} \mathbf{K}^i \quad (\text{A2.33})$$

$$\mathbf{H} = \left[\mathbf{H}^1 \mathbf{T} \quad \mathbf{H}^2 \mathbf{T} \quad \dots \quad \mathbf{H}^i \mathbf{T} \quad \dots \quad \mathbf{H}^{(NE-1)} \mathbf{T} \quad \mathbf{H}^{NE} \mathbf{T} \right]^T \quad (\text{A2.34})$$

$$\mathbf{L} = \left[\mathbf{L}^1 \mathbf{T} \quad \mathbf{L}^2 \mathbf{T} \quad \dots \quad \mathbf{L}^i \mathbf{T} \quad \dots \quad \mathbf{L}^{(NE-1)} \mathbf{T} \quad \mathbf{L}^{NE} \mathbf{T} \right]^T \quad (\text{A2.35})$$

$$\mathbf{L}' = \frac{1}{g} \left[k_1 \mathbf{L}^1 \mathbf{T} \quad k_2 \mathbf{L}^2 \mathbf{T} \quad \dots \quad k_i \mathbf{L}^i \mathbf{T} \quad \dots \quad k_{(NE-1)} \mathbf{L}^{(NE-1)} \mathbf{T} \quad k_{NE} \mathbf{L}^{NE} \mathbf{T} \right]^T \quad (\text{A2.36})$$

$$\mathbf{L}_c = \left[\mathbf{L}_c^1 \mathbf{T} \quad \mathbf{L}_c^2 \mathbf{T} \quad \dots \quad \mathbf{L}_c^i \mathbf{T} \quad \dots \quad \mathbf{L}_c^{(NE-1)} \mathbf{T} \quad \mathbf{L}_c^{NE} \mathbf{T} \right]^T \quad (\text{A2.37})$$

であり、 \mathbf{M} は全体質量マトリクス、 \mathbf{K} は土骨格の全体接線剛性マトリクス、 \mathbf{L} は土骨格の速度を土骨格の体積変化に変換する全体マトリクスおよび \mathbf{L}' は \mathbf{L} を変形して作られるマトリクスである。 \mathbf{H} は付録A7に示すように、式(A2.24)中の α_m を用いて作られる \mathbf{H}^i ($i=1, \dots, NE$)からなる全体透水係数マトリクスである。ただし、 $\sum_{i=1}^{NE}$ は $\{\mathbf{v}^i\}$ と $\{\mathbf{v}\}$ の節点番号の対応を考慮した重ね合わせ演算を示す。また、 \mathbf{L} (または \mathbf{L}')および \mathbf{H} は、それぞれ式(A2.22)または式(A2.24)中の節点番号の対応を考慮して作られるマトリクスである。なお、準静的問題でなおかつ間隙水を非圧縮として取り扱う場合は、式(A2.27)は次式となる。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{L}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} \{\mathbf{v}\} \\ \{u\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{L} & \mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\mathbf{v}\} \\ \{u\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{\dot{\mathbf{f}}\} \\ \{\dot{f}_u\} \end{Bmatrix} \quad (\text{A2.38})$$

A2.5 慣性項を含む飽和土の有限変形問題で解く連立一次方程式「全体接線剛性方程式」

陰的解法に基づいて慣性力の影響も考慮した解析を行うために、線形加速度法の考え方を躍度場に適用する。ここでは線形加速度法の一つの拡張法である Wilson の θ 法 (Wilson et al., 1973) の考えに従い、式(A2.27)の時間微分項を差分近似で扱う。すなわち、土骨格の変位または座標の Taylor 展開の3次の項である躍度 $\ddot{\mathbf{v}}(t)$ が、次式のように、時刻 $t=t$ から $t=t+\theta\Delta t$ ($\theta \geq 1$)の区間で線形的に変化すると仮定する。

$$\{\ddot{\mathbf{v}}\}_{t+\tau} = \{\ddot{\mathbf{v}}\}_t + \frac{\tau}{\theta\Delta t} (\{\ddot{\mathbf{v}}\}_{t+\theta\Delta t} - \{\ddot{\mathbf{v}}\}_t) \quad (\text{A2.39})$$

この式を τ について順次積分し、 $\tau = \theta\Delta t$ をおくと、節点の加速度ベクトル $\{\ddot{\mathbf{v}}\}$ 、速度ベクトル $\{\dot{\mathbf{v}}\}$ および位置ベクトル $\{\mathbf{x}\}$ について、次の3式が得られる。

$$\{\dot{\mathbf{v}}(\theta\Delta t)^2\}_{t+\theta\Delta t} = \{\dot{\mathbf{v}}(\theta\Delta t)^2\}_t + \frac{1}{2} \{\ddot{\mathbf{v}}(\theta\Delta t)^3\}_t + \frac{1}{2} \{\ddot{\mathbf{v}}(\theta\Delta t)^3\}_{t+\theta\Delta t} \quad (\text{A2.40})$$

$$\{v(\theta\Delta t)\}_{t+\theta\Delta t} = \{v(\theta\Delta t)\}_t + \{\dot{v}(\theta\Delta t)^2\}_t + \frac{1}{3}\{\ddot{v}(\theta\Delta t)^3\}_t + \frac{1}{6}\{\ddot{v}(\theta\Delta t)^3\}_{t+\theta\Delta t} \quad (A2.41)$$

$$\{x\}_{t+\theta\Delta t} = \{x\}_t + \{v(\theta\Delta t)\}_t + \frac{1}{2}\{\dot{v}(\theta\Delta t)^2\}_t + \frac{1}{8}\{\ddot{v}(\theta\Delta t)^3\}_t + \frac{1}{24}\{\ddot{v}(\theta\Delta t)^3\}_{t+\theta\Delta t} \quad (A2.42)$$

ここに、 $\{\ddot{v}(\theta\Delta t)^3\}_{t+\theta\Delta t}$ 、 $\{\dot{v}(\theta\Delta t)^2\}_{t+\theta\Delta t}$ 、 $\{v(\theta\Delta t)\}_{t+\theta\Delta t}$ および $\{x\}_{t+\theta\Delta t}$ はそれぞれ、時刻 $t=t+\theta\Delta t$ における節点の躍度ベクトル ($\times(\theta\Delta t)^3$)、加速度ベクトル ($\times(\theta\Delta t)^2$)、速度ベクトル ($\times\theta\Delta t$) および位置ベクトルである。また、これらの時刻 $t=t+\theta\Delta t$ における諸量の下付き添字を $t+\theta\Delta t$ から t に置き換えたものは、対応する時刻 $t=t$ における諸量である。

また、間隙水圧についても陰的解法として台形公式を用いると、

$$\{u\}_{t+\theta\Delta t} = \{u\}_t + \frac{1}{2}(\{\dot{u}\}_{t+\theta\Delta t} + \{\dot{u}\}_t)(\theta\Delta t) \quad (A2.43)$$

ここに、 $\{u\}_{t+\theta\Delta t}$ および $\{\dot{u}\}_{t+\theta\Delta t}$ は、時刻 $t=t+\theta\Delta t$ における間隙水圧と間隙水圧速度である。

式(A2.26)が時刻 $t=t+\theta\Delta t$ において成立しているとして、この式に式(A2.30)および式(A2.31)を代入すると、時刻 $t=t+\theta\Delta t$ について最終的に解くべき連立一次方程式は次の通りである。

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \frac{1}{(\theta\Delta t)^2} \mathbf{M} + \frac{1}{6} \mathbf{K} & -2(\mathbf{L}^T + \mathbf{L}_c^T) \\ -\mathbf{L}_{\theta 1} & \mathbf{H} \times \theta\Delta t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\ddot{v}(\theta\Delta t)^3\}_{t+\theta\Delta t} \\ \{u\}_{t+\theta\Delta t} \end{Bmatrix} \\ & = \begin{Bmatrix} \{\dot{f}(\theta\Delta t)\}_{t+\theta\Delta t} - \mathbf{K} \left[\{v(\theta\Delta t)\}_t + \{\dot{v}(\theta\Delta t)^2\}_t + \frac{1}{3}\{\ddot{v}(\theta\Delta t)^3\}_t \right] - 2(\mathbf{L}^T + \mathbf{L}_c^T) \left[\{u\}_t + \frac{1}{2}\{\dot{u}(\theta\Delta t)\}_t \right] \\ \{\dot{f}_u(\theta\Delta t)\}_{t+\theta\Delta t} + \mathbf{L}\{v(\theta\Delta t)\}_t + \mathbf{L}_{\theta 2}\{\dot{v}(\theta\Delta t)^2\}_t + \mathbf{L}_{\theta 3}\{\ddot{v}(\theta\Delta t)^3\}_t \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (A2.44)$$

ここに、

$$\mathbf{L}_{\theta n} = \left[\gamma_{\theta n}^1 \mathbf{L}^{1T} \quad \gamma_{\theta n}^2 \mathbf{L}^{2T} \quad \cdots \quad \gamma_{\theta n}^i \mathbf{L}^{iT} \quad \cdots \quad \gamma_{\theta n}^{(NE-1)} \mathbf{L}^{(NE-1)T} \quad \gamma_{\theta n}^{NE} \mathbf{L}^{NE T} \right]^T \quad (n=1,2,3) \quad (A2.45)$$

$$\gamma_{\theta 1}^i = \frac{1}{6} - \frac{1}{2\theta\Delta t} \frac{\rho^f k_i}{\gamma_w}, \quad \gamma_{\theta 2}^i = 1 - \frac{1}{\theta\Delta t} \frac{\rho^f k_i}{\gamma_w}, \quad \gamma_{\theta 3}^i = \frac{1}{6} \left(2 - \frac{3}{\theta\Delta t} \frac{\rho^f k_i}{\gamma_w} \right) \quad (A2.46)$$

であり、 θ は「Wilson の θ 法」におけるパラメータである。また、 \mathbf{M} 、 \mathbf{K} 、 $\{\dot{f}(\theta\Delta t)\}_{t+\theta\Delta t}$ ならびに $\{\dot{f}_u(\theta\Delta t)\}_{t+\theta\Delta t}$ は、時刻 $t=t$ と時刻 $t=t+\theta\Delta t$ との間の時間ステップ内で繰返し計算を行いながら更新する。なお、 $\mathbf{L}_{\theta 1}$ については、透水係数 k_i が大きい場合には $\gamma_{\theta 1}^i > 0$ となって、解が求められないので注意を要する。

A2.6 束縛条件の導入

荷重制御の三軸試験の計算の場合、三軸試験機における剛で摩擦が十分に効いたペDESTAL は、飽和土との接触部において土骨格に束縛を与える。また、補強土工法のように補強材は盛土の変形を束縛する。このような束縛条件が土骨格の変形に課せられる場合、計算は Asaoka et al.(1998b)と同様、Lagrange の未定乗数法に基づいて行う。ここでは、この時の解くべき常微分方程式のみを示しておく。

いま、土骨格の位置ベクトル \mathbf{x} を用いて束縛条件が与えられているとし、それを土骨格から見た時間微分を施すと、次式を得る。

$$\mathbf{C}\{\mathbf{v}\} = \{0\} \quad (\text{A2.47})$$

ここに \mathbf{C} は束縛条件を与えるマトリクスとする。このとき、運動方程式の弱形式を有限要素に離散化する際、 $\mathbf{C}\{\delta \mathbf{v}\} = \{0\}$ なる束縛がつくので、このとき最終的に解くべき常微分方程式は、Lagrange の未定乗数法を用いて、次式で与えられる。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{d^2}{dt^2} \begin{Bmatrix} \{\mathbf{v}\} \\ \{\mathbf{u}\} \\ \{\lambda\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\mathbf{L}^T & 0 \\ \mathbf{L}' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} \{\mathbf{v}\} \\ \{\mathbf{u}\} \\ \{\lambda\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K} & 0 & -\mathbf{C}^T \\ -\mathbf{L} & \mathbf{H} & 0 \\ -\mathbf{C} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\mathbf{v}\} \\ \{\mathbf{u}\} \\ \{\lambda\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{\mathbf{f}\} \\ \{\mathbf{f}_u\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (\text{A2.48})$$

ここに、

$$\{\lambda\} = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, \dots, \lambda_{(NC-1)}, \lambda_{NC}\}^T \quad (\text{A2.49})$$

で、 $\{\lambda\}$ は k 番目の束縛に対する Lagrange 乗数 λ_k ($k=1, \dots, NC, NC$: 束縛数) からなるベクトルを表す。この式について、差分近似を施せば、式(A2.44)のような解くべき連立一次方程式が得られる。

A2.7 加速度、速度、位置ベクトルおよび各種状態量の更新

加速度、速度、位置ベクトルおよび各種状態量の更新方法を示す。時刻 $t = t + \theta \Delta t$ と $t = t + \Delta t$ における計算式 (公式) が別途必要なので、以下では各時刻に分けて述べる。

時刻 $t = t + \theta \Delta t$ における諸量

加速度、速度および位置ベクトルはそれぞれ、全体接線剛性方程式 (式(A2.44)) の解 $\{\dot{\mathbf{v}}(\theta \Delta t)\}_{t+\theta \Delta t}$ を用いて式(A2.40)、式(A2.41)および式(A2.42)から求める。応力などの各状態量については、その状態量 (テンソル量、ベクトル量、スカラー量など) を A 、その速度を \dot{A} とすると、時刻 $t = t + \theta \Delta t$ における状態量の速度 $\dot{A}|_{t+\theta \Delta t}$ が、今式(A2.40)で決めた $\{\dot{\mathbf{v}}(\theta \Delta t)\}_{t+\theta \Delta t}$ より求めることができるので、状態量 $A|_{t+\theta \Delta t}$ は時刻 $t = t$ における諸量から、次式で算出する。ただし、水圧 $\{u\}_{t+\theta \Delta t}$ は式(A2.44)の解として決まるため、間隙水圧は除く。

$$A|_{t+\theta \Delta t} = A|_t + \frac{1}{2} \left(\dot{A}|_{t+\theta \Delta t} + \dot{A}|_t \right) (\theta \Delta t) \quad (\text{A2.50})$$

時刻 $t = t + \Delta t$ における諸量

時刻 $t = t + \Delta t$ における加速度、速度および位置ベクトルは、式(A2.40)～式(A2.42)などの導出過程で $\tau = \Delta t$ と置いた式に基づいて、時刻 $t = t + \theta \Delta t$ における $\{\dot{\mathbf{v}}(\theta \Delta t)^3\}_{t+\theta \Delta t}$ と、時刻 $t = t$ における $\{\dot{\mathbf{v}}(\theta \Delta t)^2\}_t$ 、 $\{\mathbf{v}(\theta \Delta t)\}_t$ および $\{\mathbf{x}\}_t$ から算出する。また、時刻 $t = t + \Delta t$ の各状態量 $A|_{t+\Delta t}$ とその速度 $\dot{A}|_{t+\Delta t}$ については、時刻 $t = t$ と $t = t + \theta \Delta t$ における諸量から、次式で計算する。

$$\dot{A}|_{t+\Delta t} (\theta \Delta t) = 2 \left(\dot{A}|_{t+\theta \Delta t} - \dot{A}|_t \right) - \dot{A}|_t (\theta \Delta t) \quad (\text{A2.51})$$

$$A|_{t+\Delta t} = A|_t + \frac{1}{2\theta} \left\{ \dot{A}|_{t+\theta \Delta t} (\theta \Delta t) + \dot{A}|_t (\theta \Delta t) \right\} \quad (\text{A2.52})$$

A2.8 その他

本計算では、計算の時刻 $t=t$ から時刻 $t=t+\theta\Delta t$ に時間を進める最初の段階では、時刻 $t=t+\theta\Delta t$ における加速度、速度、位置および各種状態量は、陽公式を用いて予測する。

また、収束判定は相当応力による相対誤差を用いて各要素の各積分点（各 Gauss 点）で行い、すべての積分点で相対誤差が十分に小さい場合に次の時間ステップに更新する。

計算フローを図 A2.1 に示す。

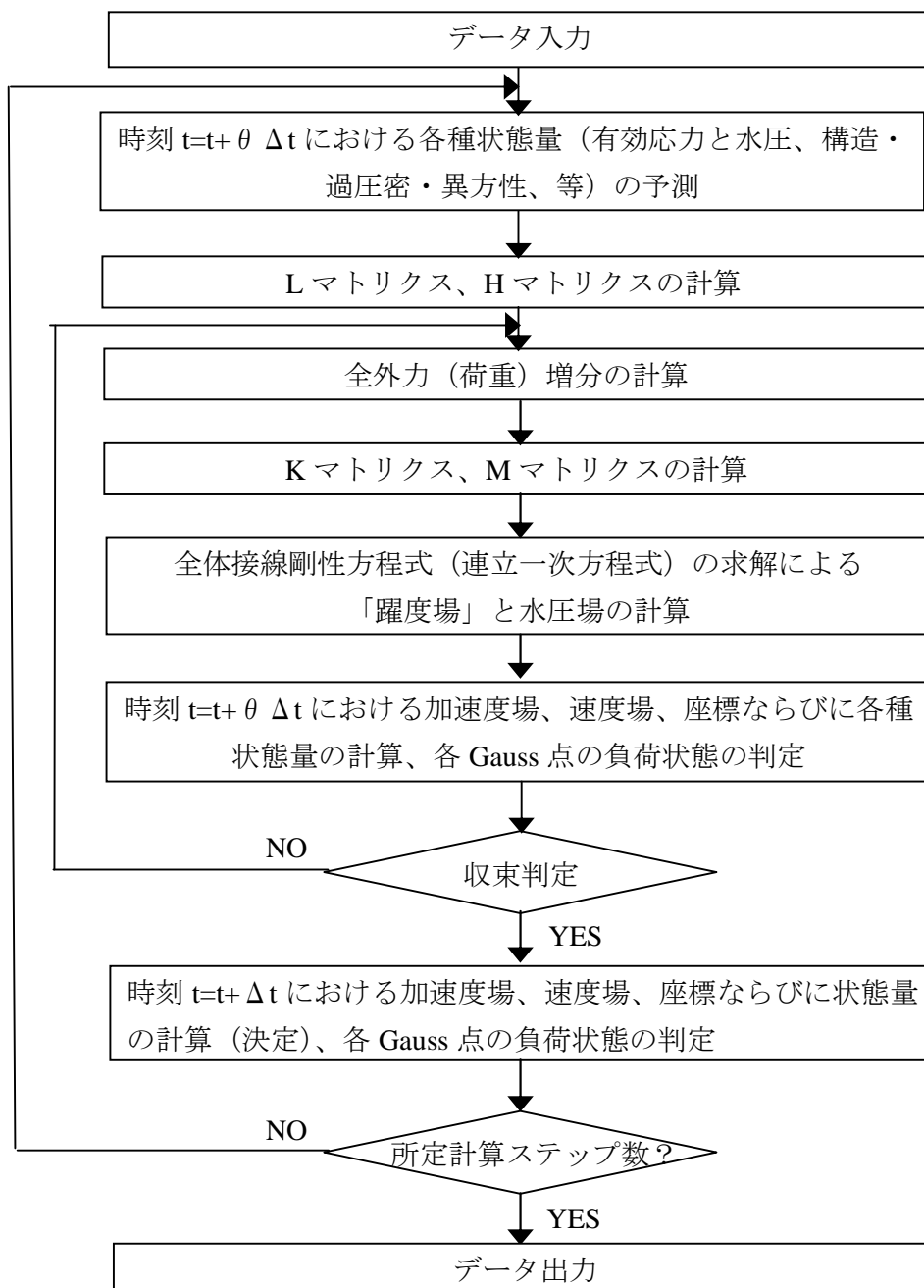


図 A2.1 計算フロー

また、砂から中間土、粘土の力学挙動を決定し、なおかつ、動的ないしは静的挙動を決定するマトリクスであるので、この K マトリクスの作成の概要説明のためのフローチャートを図 A2.2 に示す。

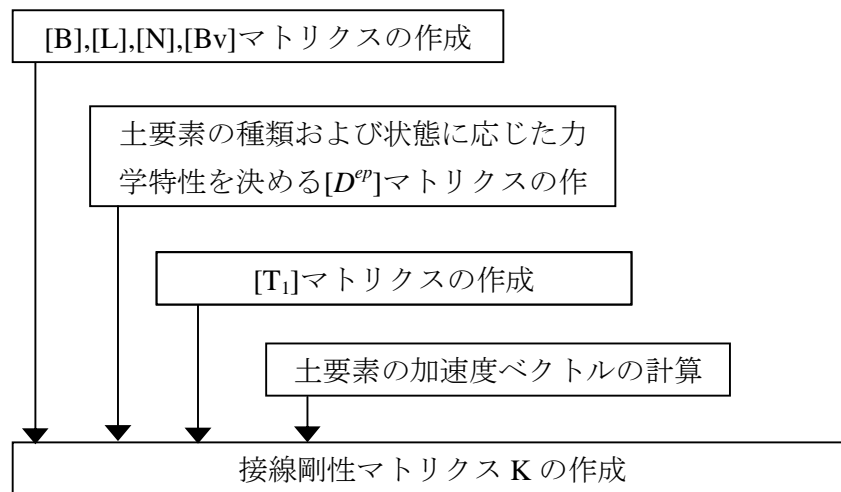


図 A2.2 K マトリクスの作成のフローチャート

参考文献

- 1) 赤井浩一, 田村武(1978): 弾塑性構成式による多次元圧密の数値解析, 土木学会論文集, 第 269 号, pp.95-104.
- 2) Asaoka, A., Nakano, M. and Noda, T. (1994): Soil-water coupled behaviour of saturated clay near/at critical state, *Soils and Foundations*, Vol.34,No.1, pp.91-106.
- 3) Asaoka, A., Noda, T. and Kaneda, K. (1998b): Displacement/traction boundary conditions represented by constraint conditions on velocity field of soil, *Soils and Foundations*, Vol.38,No.4, 171-181.
- 4) Asaoka, A. and Noda, T. (2007): All soils all states all round geo-analysis integration, International Workshop on Constitutive Modelling - Development, Implementation, Evaluation, and Application, Hong Kong, China, pp.11-27.
- 5) Christian, J. T.(1968): Undrained stress distribution by numerical method, *Proceedings of ASCE*, Vol.94, SM 6, pp.1331-1345.
- 6) Green, A.E. and Naghdi, P.M.(1965): A general theory of an elastic-plastic continuum, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 18, pp.251-281.
- 7) 西村直志(1999) : (社)地盤工学会 地盤工学ハンドブック, 第 3 章土質力学, pp.51-64.
- 8) Noda, T., Asaoka, A. and Nakano, M.(2008): Soil-water coupled finite deformation analysis based on a rate-type equation of motion incorporating the SYS Cam-clay model, *Soils and Foundations*, Vol.48,No.6, pp.771-790.
- 9) Wilson, E. L., Farhoomand, I. and Bathe, K. -J. (1973): Nonlinear dynamic analysis of complex structures, *Int. J. Earthquake Eng. and Struct. Dynamics*, 1, pp.241-252.

A3 SYS カムクレイモデルの概要¹⁾

A3.1 概説

Cambridge 大学の土質力学研究グループによって、今から約 45 年前に打ち立てられた限界状態土質力学(Critical Soil Mechanics)^{2),3)}は土のせん断と圧縮を統合して考えることのできる、世界で最初の弾塑性構成式、カムクレイモデル (Cam-clay model)、を与えたことで、その功績は不滅のものである。ここでは、はじめにカムクレイモデルのエッセンスを整理して、このモデルの適用限界を見極める。

カムクレイモデルのエッセンスとは、

- (1) 土の硬化は塑性圧縮を伴い、
 - (2) 土の軟化は塑性膨張を伴い、そして、
 - (3) 有効応力空間 ($p'-q$ 空間) でのその境界は限界状態線、 $q = Mp'$ 、で与えられる、というものである。(さらに、傾き M が定数というのも、エッセンスの一つに挙げられる。)
- カムクレイモデルによる軟化/膨張の解析^{4),5)}は少ないが、だからと言って、このことがカムクレイモデルそのものの限界を表しているわけではない。

カムクレイモデルの限界とは言うまでもなく、このモデルが、練返した正規圧密土の負荷時の力学挙動しか記述できないことにある。言い換えれば、

- (1) 密な砂や過圧密粘土のように、限界状態線より上側での塑性膨張を伴う硬化や、
- (2) ゆるい砂や構造の発達した粘土の非排水せん断でしばしば見ることのできる、限界状態線より下側での軟化、

をカムクレイモデルでは表現することができない。しかし、これらカムクレイモデルの限界は、カムクレイモデルを否定することによってではなく、そうではなくて、カムクレイモデルが当時考えていなかった **hierarchy** の異なる二つの概念、すなわち過圧密と骨格構造の二つの概念を、カムクレイモデルに新しく注入することによって克服される。これら二つの概念は、カムクレイモデルの正規降伏面 (塑性ポテンシャル面) に相似形の上負荷面と下負荷面を新しく定義することによって、持ち込まれる。繰り返す言うが、カムクレイモデルを否定するのではなくて、ここでは、カムクレイモデルは依然として土質力学の理論的基礎の立場を保持しているのである。

さて、密度や間隙比と同じく、過圧密の状態や構造の状態は、力学状態であって、同じ土でも負荷と除荷によって変化してゆく。だから、上負荷面と下負荷面の導入によって、塑性変形の進展に伴って生じる

- (1) 過圧密の解消と
- (2) 砂や自然堆積粘土の骨格構造の劣化

の記述が可能になることが重要である。このために、土の硬化と軟化の境界線の勾配は塑性変形の進展によって大きくなったり小さくなったりする。だからこれらの土ではもはやオリ

ジナルのカムクレイモデルのように、硬化は圧縮だけを、軟化は膨張だけをともなうということとはなくなってしまふ。

過圧密は過去の負荷履歴と現在の負荷状態との比較から決まると理解してよく、また構造は、A3.3 節以降で、その土がいかにかん張っているかを示すものとして説明される。つまり構造の発達している土は、そうでない土に比べ、間隙比が同じなら大きな荷重を支えることができるし、荷重が同じなら大きな間隙比でいることができる。過圧密にしても構造にしてもいかにも抽象的ではあるが、これらに土粒子の大きさや並び方などの visual で物理的ないし即物的な定義を求めてはならない。つまり過圧密や構造に、土粒子の視点に立った過圧密や構造のマイクロで直感的な定義は不要なのであって、必要なのは「過圧密や骨格構造の働き、ないし作用」に関する力学的記述である。これだけが連続体力学としての土質力学に重要なのである。たとえば過圧密の解消は土が膨張する方向に作用し、構造の劣化は土が圧縮する方向に作用する。このような力学応答の記述が、上負荷面^{6),7),8)}と下負荷面⁹⁾の概念の導入によってなされる点に注目されたい。

さて、以上の内容は、A3.4 節までに取り上げられる。A3.2 節におけるカムクレイモデルに関する記述には、微小変形の力学が用いられる。これは理解のし易さを第一に考えたからで、決してカムクレイモデルを有限変形理論に対応させることができないためではない。A3.4 節で説明する上負荷面と下負荷面の概念を導入したカムクレイモデルに関しては、一転してすべて客観性を満たす有限変形理論に基づく定式化を行う。取り立てて構成式自体の理論的な飛躍はないが、もし読みにくいところがあれば A3.2 節の微小変形を仮定した記述が理解の助けになることと思う。また、上記では触れなかったがこのモデルの定式化では土骨格の力学的異方性についても同時に取り入れる。

A3.5 節では砂と粘土の力学挙動の違いについて説明する⁸⁾。砂は塑性変形が進展すると構造はすぐに壊れるのに、過圧密は塑性変形が進展してもなかなか解消しない。粘土は砂とあべこべで、塑性変形の進展により過圧密粘土はすぐに正規圧密粘土に戻るのに、粘土の構造はなかなか壊れない。したがって、過圧密と構造の発展則の速度と違いを操作することによって、典型的な粘土のみならず、典型的な砂の挙動も、上・下負荷面概念を導入したモデルで一貫してよく説明されることが分かる。

A3.6 節では、ゆるい砂の締固め過程を、非排水条件でゆるい砂に小さい振幅の繰り返しせん断応力を作用されることによってシミュレートする^{8),10)}。この過程で砂は大圧縮することが計算によって示される。この計算を通じて砂の大圧縮は、僅かの塑性変形でも構造劣化が容易に起こることと、負荷時に過圧密の解消がごく僅かしか起こらないために急激な過圧密土化が生じることに起因することが理解される。だから、構造がなかなか破壊せず、過圧密は容易に解消する粘土では、締固めはほとんど起こらないことも理解される。締固め途上にある様々な密度ないし間隙比にある砂の力学的性質はそれぞれ大いに異なる。しかしそれらはすべて、ひとつの構成式と単一の材料定数の組で完全に説明されることも合わせて理解さ

れる。

ここで、砂の挙動ばかりを詳しく述べるのは、本論文が粘土に関する論文だからであって他意はない。粘土に対するこのモデルの応答については、例えば本論第2章を参照されたい。また、構造と過圧密の概念の導入によって砂と粘土の力学挙動がひとつのモデルで記述できる論理に従えば、このモデルが典型的な粘土や典型的な砂の挙動に限らず、その中間に位置する土の挙動までも稠密に埋める能力があることを理解されるであろう。「中間土」や「特殊土」と呼ばれる土がそれにあたるが、特に後者に関する研究・解析事例は文献¹⁰⁾に詳しい。

A3.2 カムクレイモデル

Taylor は土供試体の行った外力仕事をすべて摩擦エネルギーに等値させることにより、せん断中における土のダイレタンシー特性を説明することを試みた¹¹⁾。そして Cambridge 学派は、この考え方を塑性仕事と理解し、ストレス・ダイレタンシー式 (Taylor モデル) を誘導し、カムクレイモデルの降伏関数を導出した^{3),12)}。本節ではこれとは異なり、土質力学における実験事実、

有効応力空間 ($p'-q$ 平面) で原点を通る直線で与えられる限界状態線が、 $v-\ln p'$ 平面上で、正規圧密線と同じ傾きの直線で与えられること、

に着目して練返し正規圧密土の硬化を塑性体積ひずみが支配することを述べ、カムクレイモデルの降伏関数を導出する⁷⁾。

また、練返し正規圧密粘土にとっては塑性体積ひずみが塑性ポテンシャルにもなることを述べるとともに、関連流れ則を適用してカムクレイモデルを定式化する。ここでは、カムクレイモデルのエッセンスについても示す。もうすでに述べたように、ここで言うカムクレイモデルのエッセンスとは、

- ① 土の硬化は塑性圧縮をとめない、
- ② 土の軟化は塑性膨張をとめない、そして、
- ③ 有効応力空間 ($p'-q$ 平面) でのその境界は限界状態線、 $q = Mp'$ 、で与えられる、

というもので、硬化/軟化および塑性圧縮/膨張の視点に立って負荷時の挙動が以上のように分類できることを言うに他ならない。

上記のエッセンスは、カムクレイモデルが塑性体積ひずみを塑性ポテンシャルに取ることの当然の帰結であるが、実際にはカムクレイモデルによる軟化/膨張の解析^{4),5)}は必ずしも多くない。これもすでに述べたが、このことは決してカムクレイモデルの限界を表しているわけではない。電子計算機と計算技術の制約がかつてあったからというのが理由のひとつであるが、軟化と除荷を峻別できるような負荷基準を与えることができなかつた点も理由のひとつに数えることができる。本節では、カムクレイモデルの限界を狭めることのない負荷基準^{4),5)}も与える。なお、ここでは、分かり易さのために微小変形理論に基づいて式示す。

(1) 降伏関数の誘導

図 A3.1 と図 A3.2 はそれぞれ、練返し正規圧密粘土の側圧一定排水および非排水三軸圧縮試験結果である。ここに、平均有効応力 p' とせん断応力 q は次式で定義される (\cdot は内積記号を表す)。

$$p' = \frac{1}{3} \text{tr} \boldsymbol{\sigma}' \quad , \quad q = \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{S}} \quad , \quad \boldsymbol{S} = \boldsymbol{\sigma}' - p' \boldsymbol{I} \quad (\text{A3.1})$$

ここに、 $\boldsymbol{\sigma}'$ は有効応力テンソル (圧縮を正)、 \boldsymbol{S} は偏差応力テンソル、そして \boldsymbol{I} は単位テンソル

ルであり、 v は比体積を表し $v=1+e$ (e : 間隙比) で計算される。

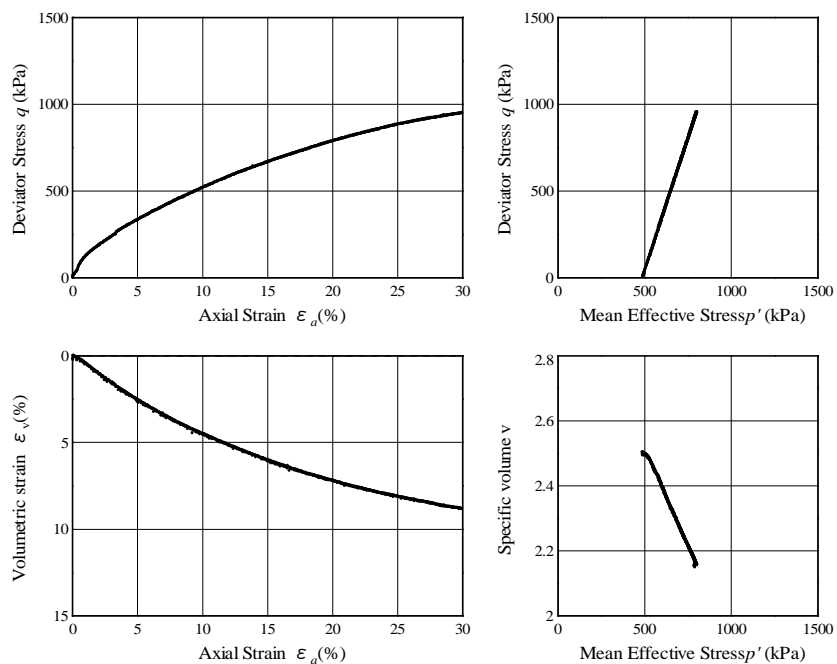


図 A3.1 繰り返し正規圧密粘土の排水三軸圧縮試験結果

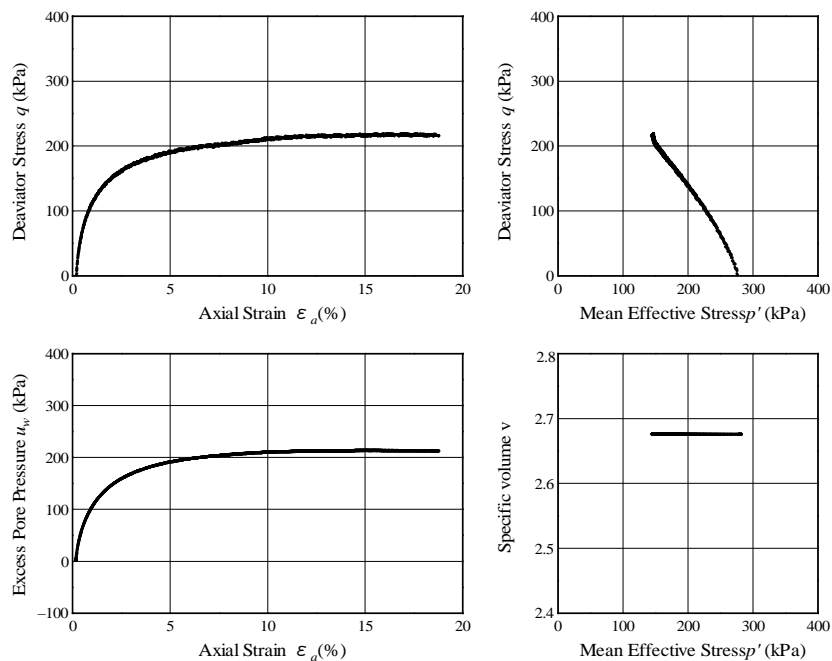


図 A3.2 繰り返し正規圧密粘土の非排水三軸圧縮試験結果

載荷は供試体内の過剰間隙水圧分布が一様になるように緩速で行った。図 A3.1 の有効応力経路 ($q-p'$ 関係) は側圧一定時の全応力経路 ($dq/dp=3$) にしたがって増加している。このとき供試体は圧縮のみを示し、比体積もせん断とともに減少している。一方、図 A3.2 は非排水条件なので体積変化は生じず、比体積はせん断中一定である。排水条件ならば生じる体積減少を許していないので、代わりに正の過剰間隙水圧が発生する。正の過剰間隙水圧の分だけ、有効応力経路は側圧一定時の全応力経路 ($dq/dp=3$) よりも左にずれている。

さて、2 つの試験結果を見ると、排水条件、非排水条件に関わらず、せん断が十分に進むと軸ひずみは増加しているのに有効応力の変化は生じておらず、この時どのようなひずみに対しても土の体積変化は生じなくなっている ($\dot{\epsilon}_v=0$)。このような状態を「限界状態」と呼ぶ。体積ひずみ増分を次式のように弾性成分と塑性成分に分けて考えたとき、

$$\dot{\epsilon}_v = \dot{\epsilon}_v^e + \dot{\epsilon}_v^p \quad (\text{A3.2})$$

土に有効応力変化がなければもちろん体積ひずみの弾性成分の変化も 0 ($\dot{\epsilon}_v^e=0$) なので、限界状態では $\dot{\epsilon}_v^p=0$ となる。ここに ϵ_v は体積ひずみを表し (圧縮を正)、上付きドットは物質時間微分ないしは増分を表す。また上付き添字 e , p はそれぞれ弾性成分、塑性成分であることを表す。

さて、Bishop、Henkel は Weald clay を用いて、様々な圧密圧力のもと、等方圧密した練返し正規圧密供試体の一連の排水および非排水三軸圧縮試験を多数行った。図 A3.3 は、この時の限界状態を $q-p'$ 平面と $v-p'$ 平面にプロットしたものである¹³⁾。するとどちらの平面でも、排水条件、非排水条件に関わらず限界状態は 1 つの線上に集まることがわかる。この線を限界状態線と呼ぶ。限界状態線は、 $q-p'$ 平面において原点を通る 1 つの直線 $q=Mp'$ として与えられる。M は限界状態定数と呼ばれる土に固有の材料定数である。一方、 $v-p'$ 平面では、限界状態線は曲線として与えられる。ここで、片対数グラフ ($v-\ln p'$ 平面) で整理しなおしてみると、 $v-p'$ 関係でもやはり限界状態線は直線として表され、しかも正規圧密線 (等方圧縮線) と平行になる (図 A3.4)。正規圧密線と限界状態線を式示すると以下のようになる。

$$v = N - \tilde{\lambda} \ln p' \quad \text{at} \quad \eta = \frac{q}{p'} = 0 \quad : \text{正規圧密線 NCL} \quad (\text{A3.3})$$

$$v = \Gamma - \tilde{\lambda} \ln p' \quad \text{at} \quad \eta = \frac{q}{p'} = M \quad : \text{限界状態線 CSL} \quad (\text{A3.4})$$

ここに、N, Γ , $\tilde{\lambda}$ は土に固有の材料定数であり、傾き $\tilde{\lambda}$ は圧縮指数と呼ばれる。また、 $N > \Gamma$ である。

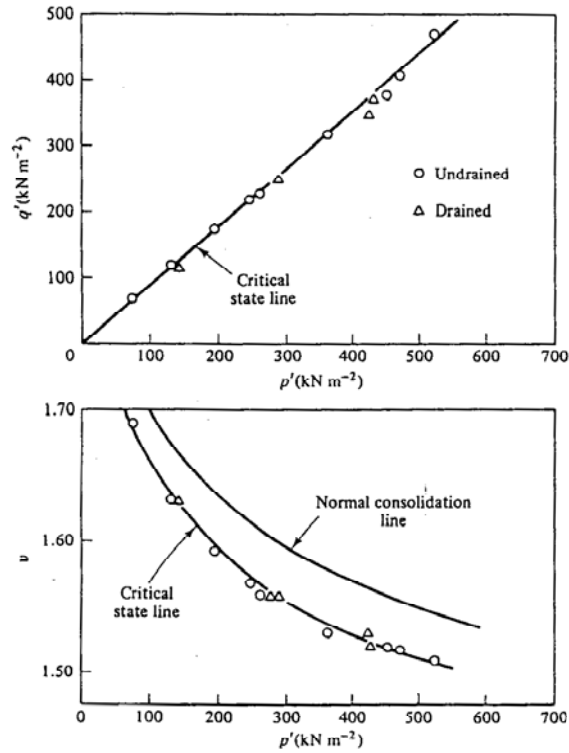


図 A3.3 排水・非排水三軸圧縮試験から得られた限界状態線 (after Parry¹³, 1960)

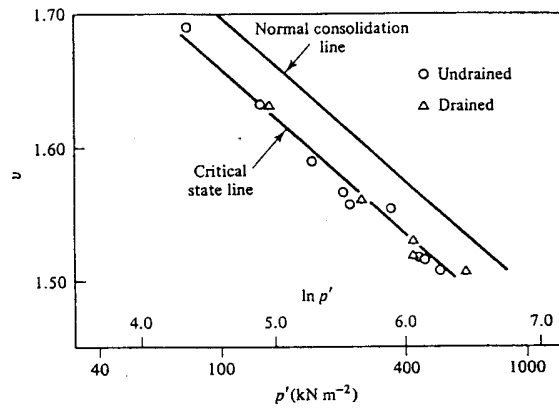


図 A3.4 正規圧密線と限界状態線 (after Parry¹³, 1960)

さて、式(A3.3)と式(A3.4)で直線の傾き $\tilde{\lambda}$ が応力比 η に依存しないことを考慮し、対数軸に対する切片が次式のように応力比 η の関数として表すことができると仮定する。

$$v = x(\eta) - \tilde{\lambda} \ln p' \quad (\text{A3.5})$$

もちろん $x(\eta)$ は

$$x(0) = N, \quad x(M) = \Gamma \quad (\text{A3.6})$$

を満たす。これを満足するもっとも簡単なものは線形補間であり、

$$x(\eta) = N + \frac{\Gamma - N}{M} \eta \quad (\text{A3.7})$$

で与えられる。つまり式(A3.3)と式(A3.4)から、すべての応力比に当てはまる一般形として

$$v = N + \frac{\Gamma - N}{M} \eta - \tilde{\lambda} \ln p' \quad (\text{A3.8})$$

が仮定される。この式から、土の体積変化（比体積変化）は $\ln p'$ の変化と応力比 η の変化によって生じることがわかる。金属など多くの物体は、応力の等方成分の変化だけに応じて体積変化するが、一方、土はせん断応力によって形状変化はもとより体積変化までも引き起こすことを示している。このせん断応力によって体積変化が生じる現象をダイレタンシーと呼び、通常、膨張時に正をとる。今、平均有効応力 p' 一定の載荷条件で、せん断応力 q を作用させて、 $\eta = 0$ から $\eta = M$ まで変化させたとすると、この時の体積変化（圧縮量・負のダイレタンシー）は $N - \Gamma$ を超えることはないことがわかる。

次にこの粘土が除荷を受けずに正規圧密状態のまま、状態が $(v_0, p'_0, q_0 = 0)$ から (v, p', q) に変化したとする。すると式(A3.8)から

$$v_0 = N - \tilde{\lambda} \ln p'_0 \quad (\text{A3.9})$$

$$v = N + \frac{\Gamma - N}{M} \eta - \tilde{\lambda} \ln p' \quad (\text{A3.10})$$

が得られるので、この状態の変化による体積ひずみ ε_v （圧縮を正）は、

$$\varepsilon_v = \frac{v_0 - v}{v_0} = \frac{1}{v_0} \left(\frac{N - \Gamma}{M} \eta + \tilde{\lambda} \ln \frac{p'}{p'_0} \right) \quad (\text{A3.11})$$

で計算される。再び、

$$\varepsilon_v = \varepsilon_v^e + \varepsilon_v^p \quad (\text{A3.12})$$

の近似の下で、この体積ひずみの弾性成分を、膨潤指数 $\tilde{\kappa}$ を用いて

$$\varepsilon_v^e = \frac{\tilde{\kappa}}{v_0} \ln \frac{p'}{p'_0} \quad (\text{A3.13})$$

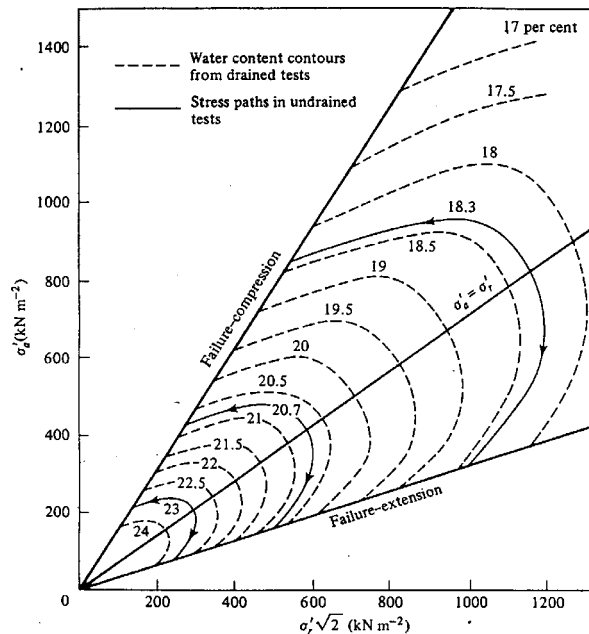
で表すと、塑性体積ひずみ ε_v^p は

$$\varepsilon_v^p = f(p', q) = \frac{1}{v_0} \left\{ \frac{N - \Gamma}{M} \left(\frac{q}{p'} \right) + (\tilde{\lambda} - \tilde{\kappa}) \ln \frac{p'}{p'_0} \right\} = f(\sigma') \quad (\text{A3.14})$$

と表されることになる。ここでは簡単のため $f(p', q) = f(\sigma')$ のように同じ f を用いて記述している。式(A3.14)は練返し塑性体積ひずみが練返し正規圧密粘土の硬化を支配することを意味する。また、式(A3.14)はカムクレイモデルの降伏関数として知られているものである。式(A3.7)は体積変化のダイレタンシー項を与えるものであるが、しかし式(A3.14)は、基本的に式(A3.3)と式(A3.4)の2つの $v - \ln p'$ 関係 ($e - \log p'$ 関係) に基づくから、式(A3.14)から求められる土質力学は「 $e - \log p'$ の土質力学」とも呼びうるものである⁸⁾。

(2) 塑性ポテンシャルと関連流れ則

Henkel¹⁴⁾は、練返し後等方圧密された Weald clay について、非排水および排水条件で一連の3軸圧縮・伸張試験を行い、有効応力平面上で排水試験の結果から描かれた等含水比線と非排水試験の等含水比線が互いに交わらないことを見出した(図A3.5)。この図を $p' - q$ 平面上に描きなおせば、図A3.6のようになる。飽和土を対象にしているので、含水比変化は比体積変化と同義なので、Henkelの実験は応力状態 (p', q) を決めれば、比体積 v が一意に決まることを意味する。また、この関係を $v - p' - q$ の三つの軸を取って図示すれば、いわゆるロスコー面が描かれる^{3), 15)}。式(A3.8)はこの関係を具体的に式示したものであり、したがってロスコー面そのものの式示と理解して全く差支えない。



図A3.5 等含水比線 (after Henkel¹⁴⁾, 1960)

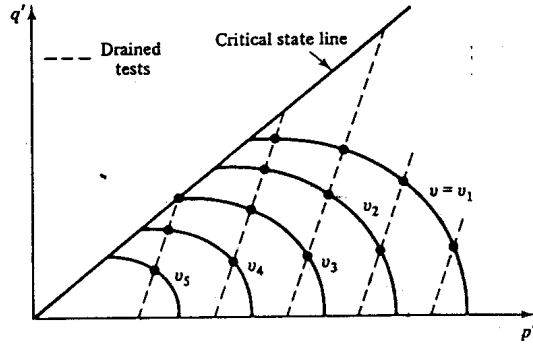


図 A3.6 排水三軸圧縮試験における等比体積線

さて、式(A3.8)から導かれる式(A3.14)は、練返し正規圧密粘土の体積変化が始めの状態と終わりの状態だけで決まり、途中の有効応力経路に依らないことを意味する。体積変化を弾性的な部分と塑性的な部分に分けて考えたとき（式(A3.12)）、もちろん弾性的な体積変化は同じく途中の経路に依らない（式(A3.13)）ので、塑性的な体積変化も始めと終わりの応力状態だけで記述できる（式(A3.14)）。そこで数学における「ポテンシャル概念」を援用して理解を進めると、式(A3.14)はカムクレイモデルの塑性ポテンシャル面をも表していると考えられる。式(A3.14)の元となる式(A3.8)が、Henkelの実験に支持されることにも安心して、次の関連流れ則を適用する。

$$\dot{\epsilon}^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma'} \quad (\lambda > 0) \quad (\text{A3.15})$$

ここに、 λ は塑性乗数で負荷時には $\lambda > 0$ である。また、 $\dot{\epsilon}^p$ は塑性ひずみ増分テンソルで、次式のように、塑性ひずみ増分 $\dot{\epsilon}$ （圧縮を正）が弾性成分 $\dot{\epsilon}^e$ と塑性成分 $\dot{\epsilon}^p$ に加算分解できると仮定した。

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^e + \dot{\epsilon}^p \quad (\text{A3.16})$$

さて、 f は σ' の不変量（ p' および q ）で表されたスカラー値等方関数であるから、応力の方向と塑性ひずみ増分の方向は共軸である。この $f(\sigma')$ の等方性をわかりやすく表すのに、しばしば式(A3.15)と形が同じ次の式が用いられる。

$$\begin{cases} \dot{\epsilon}_v^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial p'} \\ \dot{\epsilon}_s^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial q} \end{cases} \quad (\text{A3.17})$$

ここに $\dot{\epsilon}_v^p$ は塑性体積ひずみ増分、 $\dot{\epsilon}_s^p$ は塑性せん断ひずみ増分を表し、いずれもスカラーで次の定義に従う。

$$\dot{\epsilon}_v^p \equiv \text{tr} \dot{\epsilon}^p, \quad \dot{\epsilon}_s^p \equiv \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\epsilon}^p \cdot \dot{\epsilon}^p}, \quad \dot{e}^p = \dot{\epsilon}^p - \frac{1}{3}(\text{tr} \dot{\epsilon}^p) \mathbf{I} \quad (\text{A3.18})$$

式(A3.18)は p' - q 平面上で表した塑性ひずみ増分ベクトル（塑性ポテンシャル面の外向き法線方向）の圧縮とせん断の2つの成分を表す。これを図 A3.7 に示した。

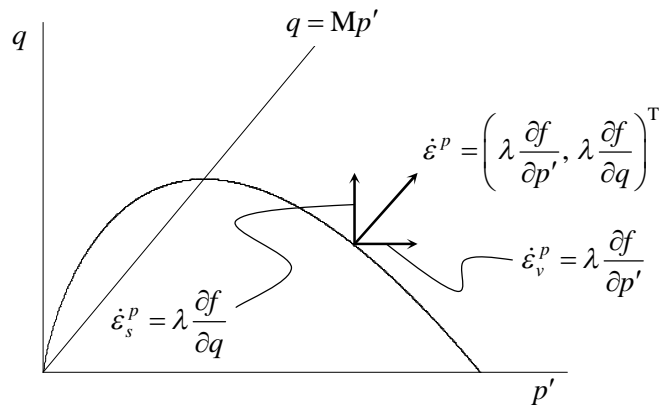


図 A3.7 塑性ひずみ増分の分解

式(A3.17)は、 p' と q しか出てこない三軸試験の解釈やその p' - q 平面上での理解などに便利である。例えば、最初に示した限界状態において塑性体積ひずみ増分がゼロの条件（ $\dot{\epsilon}_v^p = 0$ ）は、

$$\left. \frac{\partial f}{\partial p'} \right|_{q=Mp'} = 0 \quad (\text{A3.19})$$

と書けて、具体的に計算すると、容易に次のような材料定数間の関係式が得られる。

$$N - \Gamma = \tilde{\lambda} - \tilde{\kappa} \quad (\text{A3.20})$$

(3) 塑性圧縮と塑性膨張

式(A3.17)の第1式を具体的に式示す。

$$\dot{\epsilon}_v^p = \frac{D}{p'} \left(M - \frac{q}{p'} \right) \quad (\text{A3.21})$$

この式から、応力空間で限界状態線 $q = Mp'$ より下側では塑性圧縮、上側では塑性膨張が起こることがわかる。ここに $D = (\tilde{\lambda} - \tilde{\kappa}) / Mv_0$ はダイレタンシー係数である。同じことではあるが、このことは、図 A3.7 からわかる。つまりは、カムクレイモデルの負荷時の挙動は塑性圧縮/膨張の観点から次のように分類できる。

$$\left\{ \begin{array}{ll} q < Mp' \text{ のとき } \dot{\epsilon}_v^p > 0 & \dots \text{ 塑性圧縮} \\ q = Mp' \text{ のとき } \dot{\epsilon}_v^p = 0 & \dots \text{ 塑性体積変化なし} \\ q > Mp' \text{ のとき } \dot{\epsilon}_v^p < 0 & \dots \text{ 塑性膨張} \end{array} \right. \quad (\text{A3.22})$$

この様子を改めて図 A3.8 に示しておく。

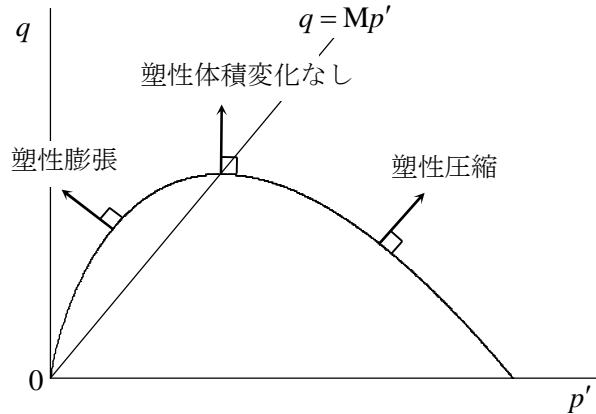


図 A3.8 $q = Mp'$ より下側での塑性圧縮と上側での塑性膨張

(4) 硬化と軟化

さて式(A3.14)の全微分をとると、

$$\dot{\epsilon}_v^p = \frac{\partial f}{\partial p'} \dot{p}' + \frac{\partial f}{\partial q} \dot{q} \quad (\text{A3.23})$$

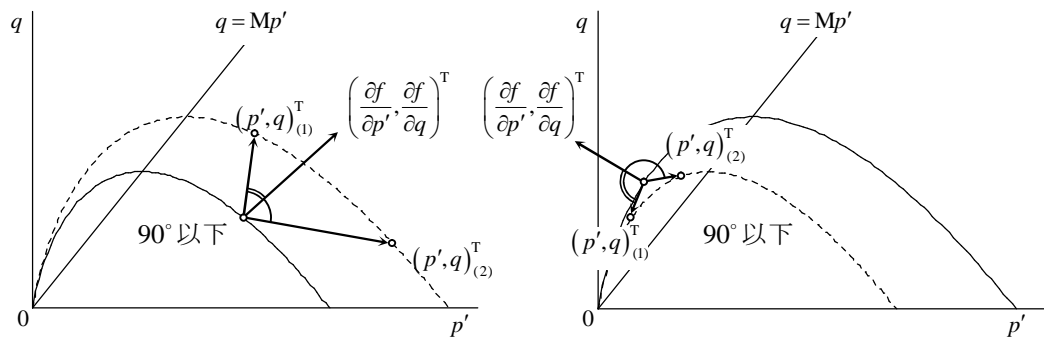
となる (適応条件)。これと式(A3.17)の第1式とを等値して、塑性乗数 λ は

$$\lambda = \frac{\frac{\partial f}{\partial p'} \dot{p}' + \frac{\partial f}{\partial q} \dot{q}}{\frac{\partial f}{\partial p'}} = \frac{D}{p'} \left(M - \frac{q}{p'} \right) \quad (\text{A3.24})$$

のように与えられる。式(A3.24)の分子は、塑性ポテンシャルの外向き法線ベクトル $(\partial f / \partial p', \partial f / \partial q)^T$ と応力増分ベクトル $(\dot{p}', \dot{q})^T$ の内積を表すから、その正負は応力増分ベクトルが塑性ポテンシャルの外側を向くのか内側を向くのかを教える。塑性乗数 λ の正值性 ($\lambda > 0$) を考慮すると、分子の符号は分母の符号に一致しなければならないため、式(A3.24)からは、後続負荷面は現応力状態が限界状態線の下側に存在する時 ($q < Mp'$) は拡大し (硬化)、上側に存在する時 ($q > Mp'$) は縮小する (軟化) ことが分かる。つまり、カムクレイモデルの負荷状態 ($\lambda > 0$) には完全塑性状態も含めて次の3つの場合があることがわかる。

$$\left\{ \begin{array}{ll} q < Mp' \text{ のとき} & \frac{\partial f}{\partial p'} \dot{p}' + \frac{\partial f}{\partial q} \dot{q} > 0 \quad \dots \text{ 硬化} \\ q = Mp' \text{ のとき} & \frac{\partial f}{\partial p'} \dot{p}' + \frac{\partial f}{\partial q} \dot{q} = 0 \quad \dots \text{ 完全塑性} \\ q > Mp' \text{ のとき} & \frac{\partial f}{\partial p'} \dot{p}' + \frac{\partial f}{\partial q} \dot{q} < 0 \quad \dots \text{ 軟化} \end{array} \right. \quad (\text{A3.25})$$

この様子を図 A3.9 に示しておく。



(a) 塑性ポテンシャル面の拡大 (硬化)

(b) 塑性ポテンシャル面の縮小 (軟化)

図 A3.9 $q = Mp'$ より下側での硬化と上側での軟化

ここで注意しなくてはならないのは、 q が増加しているから硬化、あるいは q が減少しているから軟化とは必ずしも言えない点である。硬化の場合も軟化の場合も、図中に示した $(p', q)_{(2)}^T$ のような極端な図も描くことができる。硬化/軟化はあくまで塑性ポテンシャル面が拡大するか縮小するかであって、 q の増減ではない。

さて、カムクレイモデルの負荷時の挙動を塑性圧縮/膨張および硬化/軟化の二つの視点から分類した。その結果見えてきたのは、図 A3.8 と図 A3.9 を重ねて理解することの重要性である。カムクレイモデルの特徴を改めて以下のようにまとめる (図 A3.10)。

- ① 硬化は必ず塑性圧縮を伴い、軟化は必ず塑性膨張を伴う。
- ② 硬化と軟化および塑性圧縮と塑性膨張の境界はともに限界状態線 $q = Mp'$ で表される。
- ③ 限界状態線の勾配 M は材料定数で、負荷によって変化することはない。

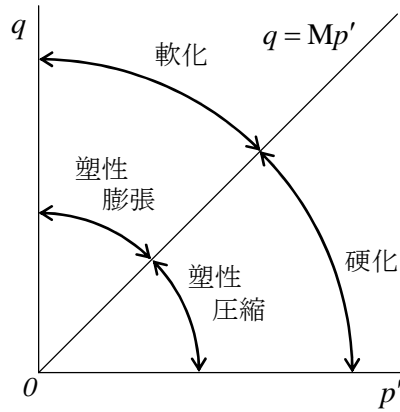


図 A3.10 カムクレイモデルの表現できる挙動

(5) 構成式と負荷基準

以下に、弾塑性理論の諸手続きを踏み、弾塑性構成式（カムクレイモデル）を導く。
改めて、式(A3.14)の全微分をとる（適応条件）。

$$\dot{\varepsilon}_v^p = \frac{\partial f}{\partial \sigma'} \cdot \dot{\sigma}' \quad (\text{A3.26})$$

関連流れ則（式(A3.15)）を用いて、上式から、塑性乗数 λ は有効応力速度 $\dot{\sigma}'$ を用いて次のように与えられる。

$$\lambda = \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma'} \cdot \dot{\sigma}'}{\text{tr}\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma'}\right)} \quad (\text{A3.27})$$

他方、弾性ひずみ増分には、増分型の（非線形）弾性体を仮定し、次式で与える。

$$\dot{\varepsilon}^e = \mathbf{E}^{-1} \dot{\sigma}' \quad (\text{A3.28})$$

ここに、 \mathbf{E} は弾性係数テンソルである。式(A3.16) と上式の逆関係を式(A3.27)に代入するとともに、再び関連流れ則（式(A3.15)）を用いると、塑性乗数を今度はひずみ速度を用いて次式のように書き直すことができる。

$$\lambda = \Lambda = \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma'} \cdot \mathbf{E} \dot{\varepsilon}}{\text{tr}\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma'}\right) + \frac{\partial f}{\partial \sigma'} \cdot \mathbf{E} \frac{\partial f}{\partial \sigma'}} \quad (\text{A3.29})$$

この Λ は当然、式(A3.27)の λ と同じものである。このひずみ速度で表された Λ を用いると増分型の弾塑性構成式は次のように得られる。

$$\dot{\sigma}' = E \dot{\varepsilon}^e = E(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^p) = E \dot{\varepsilon} - E \Lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma'} \quad (\text{A3.30})$$

弾性応答式 (式(A3.28)) と弾塑性応答式 (式(A3.30)) の使い分けは、負荷基準に基づいてなされる。式(A3.29)の分母第2項は正值の2次形式で、たいていの土質定数に対して応力状態がどうであれ分母は正になる。それを一般化して、いかなる応力状態に対しても式(A3.29)の分母を正にする材料定数を改めてカムクレイパラメータと呼ぶ^{4,5)}。このとき、負荷の条件

$$\Lambda > 0 \quad (\text{A3.31})$$

は式(A3.29)の分子が正であることと等価になる。すなわち

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial f}{\partial \sigma'} \cdot E \dot{\varepsilon} > 0 & \text{のとき 負荷 } (D^p \neq 0) \\ \frac{\partial f}{\partial \sigma'} \cdot E \dot{\varepsilon} < 0 & \text{のとき 除荷 } (D^p = 0) \end{array} \right. \quad (\text{A3.32})$$

が負荷基準となる。このようにひずみ速度で書かれた負荷基準は軟化と除荷 (弾性応答) を区別するのに必須のものである。

なお、すでに述べたように、軟化は現応力点とともに降伏面が縮小する (図 A3.9)。除荷でも応力増分ベクトルが降伏面の内側を向くのは軟化と同じだが、除荷では降伏面は動かずに止まったままである (図 A3.11)。カムクレイモデルでは、除荷によって有効応力がひとたび降伏面の内側に入ってしまうと、除荷のあと再載荷しても、現応力点が降伏面に達するまでは弾性応答すると仮定される。

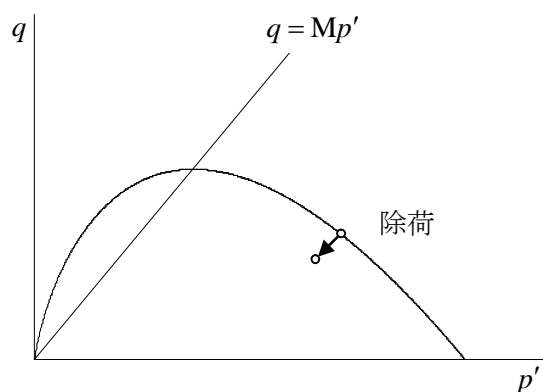


図 A3.11 除荷 (動かずに止まったままの降伏面)

(6) 修正カムクレイモデル

式(A3.3)と式(A3.4)の間の補間を線形補間 (式(A3.6)) ではなく、

$$x(\eta) = N + \frac{\Gamma - N}{\ln 2} \ln \left(\frac{M^2 + \eta^2}{M^2} \right) \quad (\text{A3.33})$$

と行った場合を修正カムクレイモデルと呼ぶ。オリジナルカムクレイモデルにおける式(A3.14)は次式のように対応する。

$$\varepsilon_v^p = f(p', q) = \frac{1}{v_0} \left[\frac{\Gamma - N}{\ln 2} \ln \left\{ \frac{M^2 + (q/p')^2}{M^2} \right\} + (\tilde{\lambda} - \bar{\kappa}) \ln \frac{p'}{p_0'} \right] = f(\sigma') \quad (\text{A3.34})$$

また、材料定数間の関係式(A3.20)は次式のように表され、

$$N - \Gamma = \ln 2 (\tilde{\lambda} - \bar{\kappa}) \quad (\text{A3.35})$$

カムクレイモデルのそれとは異なる。

塑性ポテンシャル面の形状は図 A3.12 のように半楕円形になる。カムクレイモデルが等方応力状態 ($q=0$) で降伏関数 $f(\sigma')$ の勾配をとれないという欠点を有しているのに対し、修正カムクレイモデルではそのような特異点を持たない。一方、限界状態線の下側では塑性圧縮を伴う硬化、上側では塑性膨張を伴う軟化を示すことはカムクレイモデルと同じである。修正カムクレイモデルについては、Muir Wood¹⁶⁾も参照されたい。

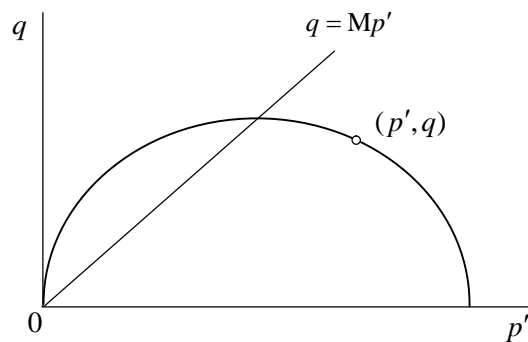


図 A3.12 修正カムクレイモデルの降伏面の形状

A3.3 カムクレイモデルの限界とその克服

三笠によると、土の力学的性質は密度・含水量・骨格構造という独立な3つの因子に分けられるという¹⁷⁾。ここで、飽和土を対象に考えれば、密度と含水量、加えて比体積(空隙比)は同義である。練返し正規圧密土を対象に作られたカムクレイモデルの降伏関数の導出に用いた式(A3.8)、および練返し正規圧密土に対し行われたHenkelの実験(図A3.5)は、応力状態を決めれば密度が一意に決まるというものであった。だから、飽和した練返し正規圧密土の力学挙動は密度ないしは含水比によって決まると言っても過言ではない。自然堆積土

の示す力学挙動は練返し正規圧密土とは異なってきわめて複雑であることはよく知られているが、三笠の言葉を借りれば、練返し正規圧密土と自然堆積土の力学的性質の違いは骨格構造の発達程度に起因することになる。さて、本節では、骨格構造の具体的様式として過圧密・構造・異方性を挙げ、カムクレイモデルの限界について述べつつ、これらの骨格構造が発達した土の力学的特徴について説明する。また次節では、過圧密・構造・異方性の力学挙動を記述可能な弾塑性構成式を実際に与えるが、それに先立ちここでは、骨格構造の考慮を目的とした一連の構成式研究の経緯について概観する。

(1) 過圧密の解消

図 A3.13 に、完全に練り返された過圧密粘土の排水三軸圧縮試験の典型的な結果を示す。 $p'-q$ 平面上に引かれた直線は、練返し正規圧密粘土の限界状態線である。これらの試験結果はすでに 40 年以上前の Bishop と Henkel の実験¹⁷⁾以来私たちに馴染みのものである。硬化した後、軟化するとともに（側圧一定の排水試験時の応力経路では、 q が増加すればカムクレイ型の塑性ポテンシャル面は拡大すなわち硬化し、 q が減少すれば縮小すなわち軟化する）、若干体積圧縮してから体積膨張すなわち正のダイラテンシーを生じる。またこれら二つのピークがずれたために生じる図中の斜線領域では、膨張すなわち吸水しているにもかかわらず、硬化するという特徴を有する。

さて、カムクレイモデルで説明のつかない典型的な現象はこの斜線領域で見られる。この粘土試料が除荷されて過圧密になったことを思えば、斜線領域ではまだ応力状態は降伏面の内側にある可能性がある。そのときは弾性応答だから、 p' の増大に伴い試料は圧縮を示さなければならない。今度は、この斜線領域での膨張が、塑性膨張が弾性圧縮をはるかに卓越したために起こっていると考えると、①降伏面の内側で弾塑性応答していることになるし、②せん断応力 q が増大しているから、塑性膨張が硬化を伴っている可能性さえある。仮に、斜線領域ではすでに降伏面に到達している（完全に正規状態に戻っている）としても、やはり②限界状態線よりも上側で、塑性膨張が硬化を伴っていなければならない。①も②もカムクレイモデルでは全く説明がつかない。

実際に、過圧密な状態、すなわち除荷されて初期の現応力点が降伏面内にある状態の土の挙動を、カムクレイモデルを用いて計算してみると、図 A3.14 のようになって、図 A3.13 とは全く異なる。この計算のように除荷量（せん断前の過圧密比）が大きければ、降伏面は現応力点よりもはるか上方にある。したがって、この過圧密粘土を再負荷するとき、もし降伏面は動かないと考えると、降伏面に達するまでは応力は降伏面内部だから試料は弾性圧縮のみを示す。降伏面に達すれば、その後はカムクレイモデルに従う弾塑性挙動を示す。ところがその時、応力は限界状態線よりも上側にあるから土は軟化を示めすので突然 q が低下し、滑らかな応答を示さない。また、ピークと同じ時に、体積変化は圧縮から膨張に転じ、過圧密粘土に特徴的な膨張を伴う硬化はやはり示さないことも分かる。このようにしてカムクレ

イモデルは、過圧密粘土のせん断挙動を上手く表現できないことが分かる。

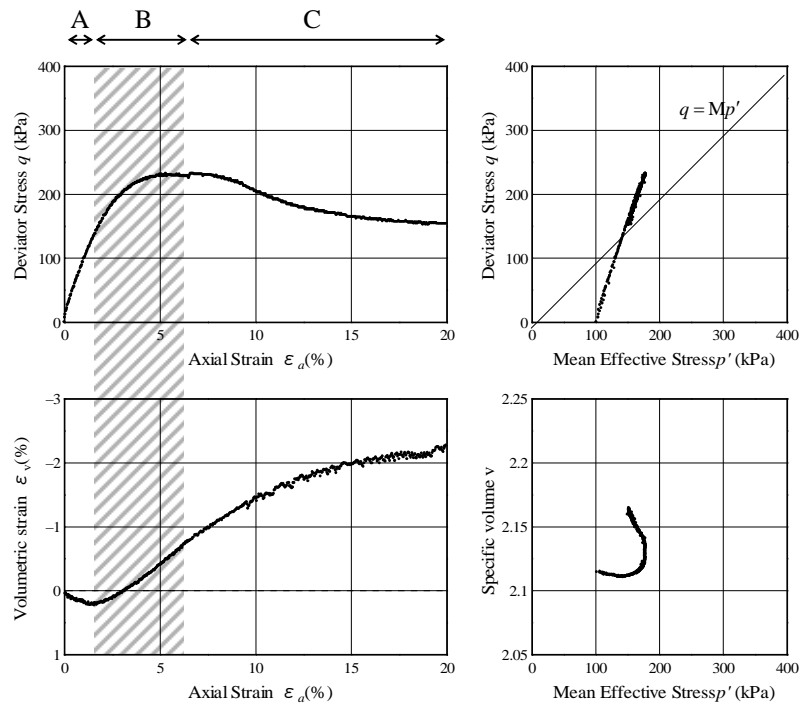


図 A3.13 過圧密粘土の排水せん断挙動

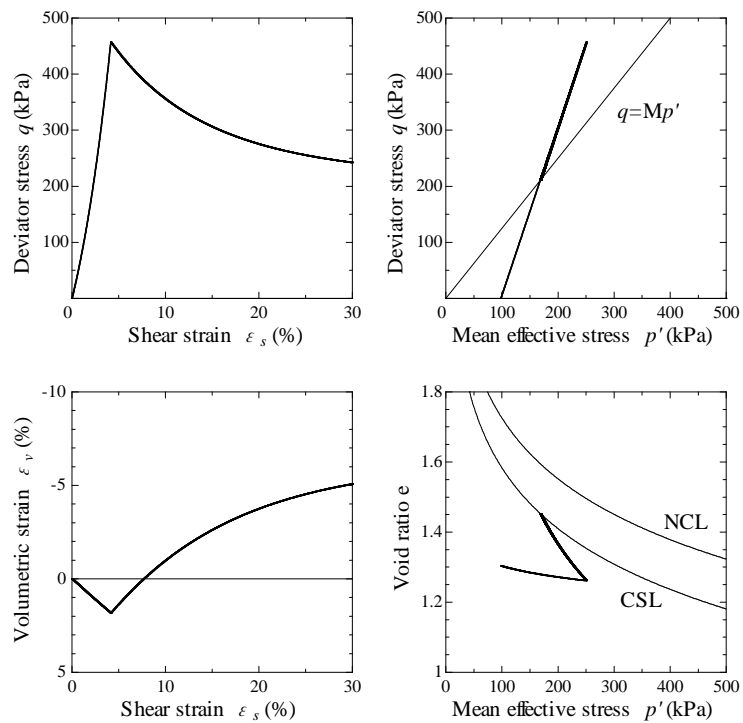


図 A3.14 カムクレイモデルによる過圧密粘土の排水せん断挙動

図 A3. 13 に忠実なモデル化のためには、

- ① 降伏面の内側での弾塑性応答を許し、
- ② 塑性膨張が硬化をともなうことがあることも許す、

必要がある。これらはカムクレイモデルに橋口⁹⁾による下負荷面の概念を導入することによって全面的に解決される¹⁹⁾。ここに、下負荷面とは、常に現応力点を通る正規降伏面に相似な面のことで（相似中心は原点）、正規降伏面に対する下負荷面の相似比 R の逆数をもって過圧密比を表す（図 A3. 15）。塑性変形によってこの下負荷面が正規降伏面に徐々に漸近し、最終的には二つの面が一致するように相似比 R の発展則を与える。このように相似比 R の発展則を規定するとともに、Prager の適応条件²⁰⁾を加味することで得られる塑性乗数は、応力状態に加え相似比 R の関数となる。このため、相似比 R が 1 よりも小さいほど、つまり過圧密なほど塑性変形は抑制され、二つの面が一致した状態（ $R=1$ ）になって始めてカムクレイモデルと完全に同じ挙動を示す。また、正規降伏面に至るまでの間にも塑性変形が生じるということは、その間にも正規降伏面は拡大も縮小もするから、現実の土がそうであるように、負荷履歴に関する記憶は「不正確」になる（図 A3. 16）。大筋このように、下負荷面の概念の導入によって、負荷によって過圧密土は徐々に正規圧密状態に戻ることが合理的に表現される。また、下負荷面の存在は、正規降伏面内部での塑性変形を可能にすると同時に、限界状態線よりも上側での塑性膨張を伴う上側での硬化をも可能にする。これらの飛躍がカムクレイを否定するのではなく、カムクレイの適用を正規圧密土の負荷と除荷に限定することによって成し遂げられる点には十分に注意してよい。

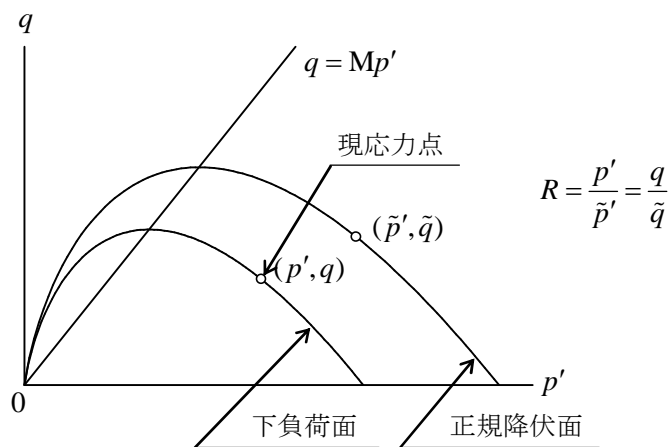


図 A3. 15 下負荷面カムクレイモデル

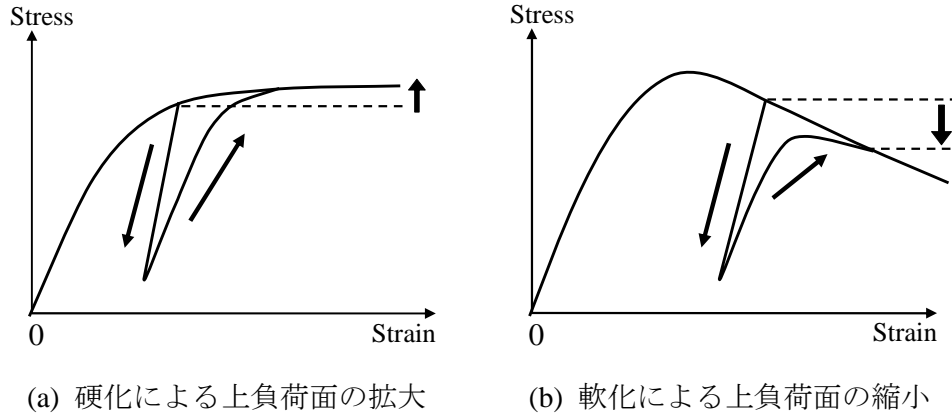


図 A3.16 再負荷時の弾塑性応答と過圧密の解消

(2) 土骨格の構造の劣化/破壊

図 A3.17 は構造の発達した自然堆積粘土を用いた標準圧密試験の結果を示している⁷⁾。図中の直線は、この粘土を完全に練返したあとでふたたび標準圧密試験をして得られる、練り返された粘土の正規圧密線を示している。カムクレイモデルつまり練返し粘土は正規圧密線の上側に状態をとることができない。ところが構造の発達した土は、この練返し粘土にとっての不可能領域に状態をとることができる。

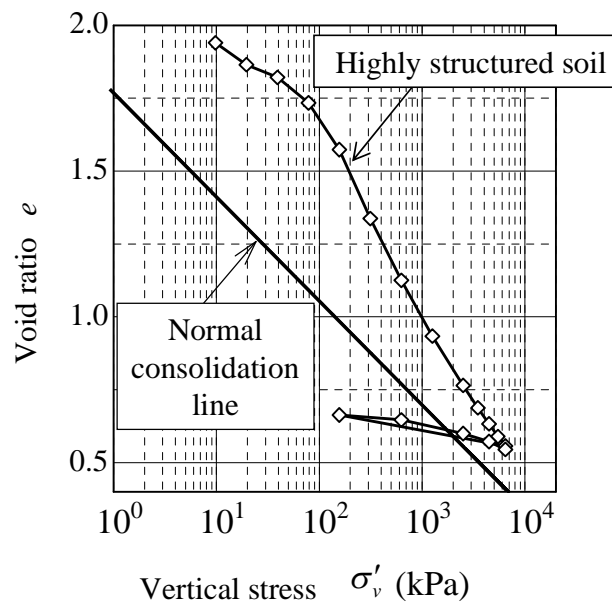


図 A3.17 構造が発達した自然堆積粘土の一次元圧縮挙動 (after Asaoka et.al.⁷⁾, 2000)

図 A3.17 はさらに、構造が発達した粘土は構造が破壊された完全練返し粘土に比べ、間隙比が同じなら大きな荷重を支えることができ、荷重が同じならより大きな間隙比でいられることを示している。つまり構造の発達した土は嵩張った状態にある。

図 A3.17 からは、圧密荷重が大きくなればなるほど、そして圧縮が進めば進むほど、不可能領域にいた土は上から構造がない状態（練り返された粘土の正規圧密線）に近づくこともわかる。つまり構造の劣化ないし破壊は負荷時の塑性変形の進展によって進むことが想像される。

先の過圧密とこの構造の説明から、カムクレイモデルは

- ① 完全に練り返されて構造がまったく破壊され、そして
- ② 過圧密が完全に解消して正規圧密状態に達した、

土の負荷と除荷だけにしか適用できないことがわかる。

Asaoka, Nakano and Noda (1998,2000)^{6),7)}は、カムクレイモデルでは不可能領域とされる領域に土がその力学状態をとれるように、カムクレイモデルの正規降伏面の外側に正規降伏面に相似な上負荷面を導入し（相似中心はやはり原点）、上負荷面に対する正規降伏面の相似比 R^* の逆数が構造の発達程度を表すと定義した。さらに過圧密土の挙動も合わせて表現できるように、この上負荷面の内側にさらに下負荷面を設け、今度は上負荷面に対する下負荷面の相似比 R の逆数が過圧密比を表すとした（図 A3.18）。これら大きさの異なる三つの相似な面が塑性変形によっていずれひとつの面に一致するように R^* および R の発展則を与え、負荷によって構造の劣化と過圧密の解消が進行し、すべての土はやがて練り返し正規圧密粘土に限りなく近付くことを表現した。

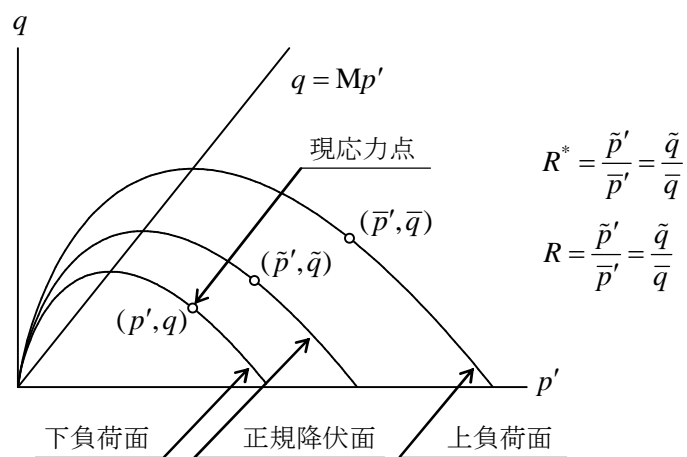


図 A3.18 上・下負荷面カムクレイモデル

図 A3.19 は構造の発達した自然堆積粘土の非排水三軸圧縮試験の結果を表している。 $p'-q$ 平面上に引かれた直線は、練り返し正規圧密粘土の限界状態線である。有効応力経路は p' が減少する方向に変化しているから、弾性的には体積膨張していることが分かる。非排水すなわち等体積条件だから、このとき塑性的には体積圧縮していることになる。したがって、図 A3.19 は、構造の発達した土が、限界状態線より下側で塑性圧縮しながらも軟化することを

示している。カムクレイモデルでは限界状態線よりも下側では、必ず硬化を示すから、このような挙動もカムクレイモデルではやはり説明がつかない。

図 A3. 17 と図 A3. 19 に見ることができる構造の発達した土の特徴を再現するためには、

- ① 練り返し土の不可能領域に状態をとることを許し、
- ② 塑性圧縮が軟化をともなうことがあることも許す、

必要がある。いずれの挙動も上負荷面の導入によって解決される。

さて、浅岡らは、上記のように構造の発達した土が一次元圧縮時に示す挙動の特徴に加えて、非排水せん断時に限界状態線より下側で塑性圧縮を伴う軟化を示す点にも着目して、上負荷面の発想に至っているが、過圧密土の特徴が限界状態線よりも上側で塑性膨張を伴う硬化を示す点にあり、下負荷面を導入することによってそのような挙動が表現できるようになることを思えば、その思考経路も自然なものとして受け入れられる。

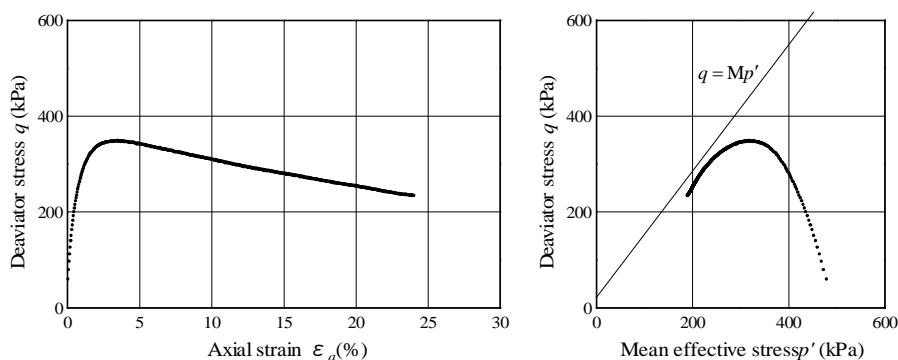


図 A3. 19 構造の発達した自然堆積粘土の非排水せん断挙動

次章では、負荷による過圧密状態の解消や構造の劣化にともなう、硬化と軟化の境界線の勾配 M_s (カムクレイモデルで言えば $q = Mp'$ の M) が大きくなったり小さくなったりすることを示す。これがもう動けなくなってしまった土 (カムクレイ) は、言わば「死んだ土」であるが、土が「生きている」間、すなわち過圧密が残っているか、構造が残っているか、あるいはその両方が残っている間は、負荷にともなう過圧密の解消と構造の劣化によって M_s が上下するのだから、塑性膨張をともなう硬化も塑性圧縮を伴う軟化も可能になる。これを図 A3. 20 に示す。この図では

- $q = Mp'$: 塑性圧縮と膨張の境界線、 M は定数
- $q = M_s p'$: 硬化と軟化の境界線、 M_s は変数

を示していることに注意する。

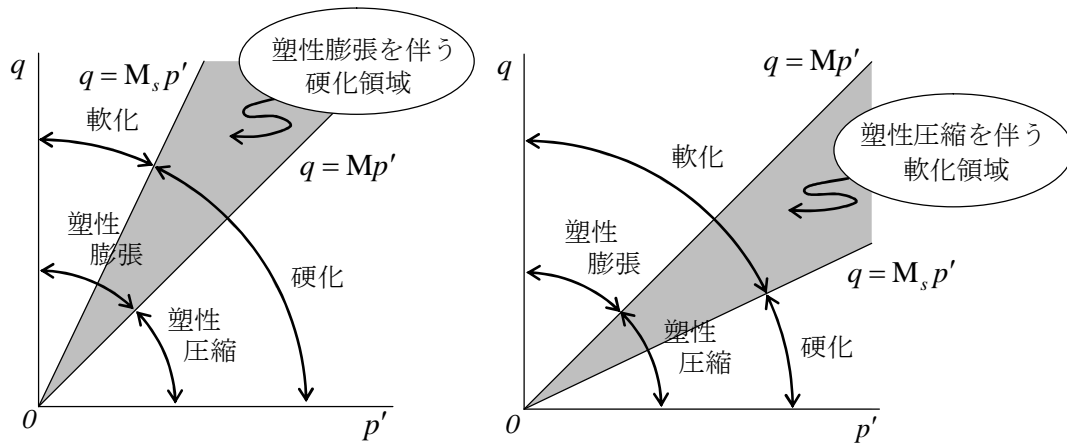


図 A3.20 塑性圧縮/膨張と硬化/軟化の境界線

(3) 異方性

カムクレイモデルではもちろんのこと、上負荷面の概念や下負荷面の概念を導入しても表現できない力学的性質として異方性を挙げるができる。浅岡らは、関口・太田の $\eta^{*21)}$ と橋口による回転硬化則²²⁾を導入し、三つの負荷面を回転させることで異方性の表現を可能にしている⁸⁾ (図 A3.21)。また、このモデルのベースは修正カムクレイモデルである。このことも幸いし、回転に伴い塑性ポテンシャル面が変形することに起因して、硬化と軟化の境界線だけでなく、塑性圧縮と膨張の境界線の勾配 M_s も変動する。また、異方性を考慮した結果、非共軸なモデルとなっている。次節ではこのモデルの詳細について説明する。

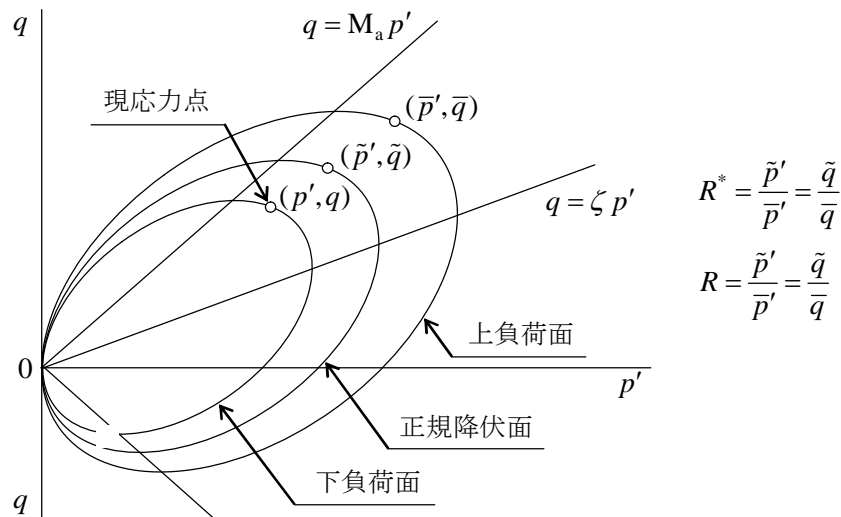


図 A3.21 回転硬化概念を有する上・下負荷面カムクレイモデル

A3.4 SYS カムクレイモデル

骨格構造の働きを考慮した弾塑性構成式を与え、その特徴と応答例について示す。骨格構造の具体的様式として構造・過圧密・異方性を挙げ、それぞれに対し浅岡・中野・野田による上負荷面の概念^{6),7),8)}、橋口による下負荷面の概念⁹⁾、関口・太田の η^{*21} および橋口の回転硬化則²²⁾を導入する。(本論文ではこのモデルをSYS(Super/sub-loading Yield Surface)カムクレイモデルと呼ぶ。)なお、ここでの式示は客観性を満たす有限変形理論に基づいて行う。

(1) ストレッチングの弾性成分と塑性成分への加算分解と塑性体積ひずみ

土骨格のストレッチング \mathbf{D} を次式で示すように、弾性成分 \mathbf{D}^e と塑性成分 \mathbf{D}^p に加算分解できるものと仮定する。

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}^e + \mathbf{D}^p \quad (\text{A3.36})$$

また、土骨格の任意の体積領域に対する基準時刻($t=0$)から現時刻($t=t$)までの体積変化量 ΔV は次式のように計算することができる。

$$\begin{aligned} \Delta V &= \int_v dv - \int_V dV \\ &= \int_0^t \left(\int_v dv \right) d\tau \\ &= \int_0^t \left(\int_V (J \operatorname{tr} \mathbf{D}) dV \right) d\tau \\ &= \int_V \left(\int_0^t (J \operatorname{tr} \mathbf{D}) d\tau \right) dV \end{aligned} \quad (\text{A3.37})$$

ここに、 J は変形勾配 \mathbf{F} のヤコビアンであり、基準時刻における比体積 $v_0 (=1+e_0)$ と現時刻における比体積 $v (=1+e)$ を用いて以下のように表現できる。

$$J = \frac{1+e}{1+e_0} \quad (\text{A3.38})$$

また、 $-\int_0^t (J \operatorname{tr} \mathbf{D}) d\tau$ は、基準時刻での単位体積に対する現時刻までの体積変化量(圧縮量)を表しており、つまりは公称的な体積ひずみ(圧縮を正)を表している。よって、式(A3.38)を用いて次のような加算分解を行えば、(J が入っている)近似的ではあるが、弾性体積ひずみと塑性体積ひずみに相当する量を得られる。

$$-\int_0^t (J \operatorname{tr} \mathbf{D}) d\tau = -\int_0^t (J \operatorname{tr} \mathbf{D}^e) d\tau - \int_0^t (J \operatorname{tr} \mathbf{D}^p) d\tau \quad (\text{A3.39})$$

有限変形理論における(修正)カムクレイモデルの塑性ポテンシャル面ないしは降伏面は、微小変形理論の塑性体積ひずみに $-\int_0^t (J \operatorname{tr} \mathbf{D}^p) d\tau$ を等置して与える。

(1) η^{*21} を用いた修正カムクレイモデルの降伏面

十分に練り返された土の弾塑性応答は、修正カムクレイモデルに従うとする。限界状態理論に基づく土質力学において応力比 η は一般に次のように定義される。

$$\eta = \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\eta}} \quad (\text{A3.40})$$

しかしここでは、塑性ポテンシャルの回転を表現するために、 η に代わって関口・太田²¹⁾が提案した次の不変量を用いる。

$$\eta^* = \sqrt{\frac{3}{2} \hat{\boldsymbol{\eta}} \cdot \hat{\boldsymbol{\eta}}} \quad (\text{A3.41})$$

式(A3.37)、式(A3.38)における $\boldsymbol{\eta}$ や $\hat{\boldsymbol{\eta}}$ をはじめ、この節で用いる記号を以下のように定義しておく。

$$\hat{\boldsymbol{\eta}} = \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\beta} \quad , \quad \boldsymbol{\eta} = \frac{\boldsymbol{S}}{p'} \quad , \quad q = \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{S}} \quad , \quad \boldsymbol{S} = \boldsymbol{T}' + p' \boldsymbol{I} \quad , \quad p' = -\frac{1}{3} \text{tr} \boldsymbol{T}' \quad (\text{A3.42})$$

である。ここに、 \boldsymbol{T}' は有効 Cauchy 応力テンソル（引張を正）、 \boldsymbol{S} は偏差応力テンソル、 \boldsymbol{I} は単位テンソル、そして $\boldsymbol{\beta}$ は回転硬化変数と呼ばれるテンソルである。また、次式で定義する ζ は異方性の発達程度（塑性ポテンシャル面の回転程度）を表わす。

$$\zeta = \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\beta}} \quad (\text{A3.43})$$

η^* の導入により修正カムクレイモデルの塑性ポテンシャルは次式で与えられる。例えば、応力 \boldsymbol{T}' と回転硬化変数 $\boldsymbol{\beta}$ が軸対称条件を満たせば、塑性ポテンシャル面は図 A3. 22 に示すように描くことができ、塑性ポテンシャル面が静水圧軸に対して傾いていることが分かる。

$$f(p', \eta^*) = MD \ln \frac{p'}{p'_0} + MD \ln \frac{M^2 + \eta^{*2}}{M^2} = -\int_0^t (J \text{tr} \boldsymbol{D}^p) d\tau \quad (\text{A3.44})$$

ここに、 \boldsymbol{D} はダイラタンスー係数であり $\tilde{\lambda}$ 、 $\tilde{\kappa}$ 、 M および初期の比体積 v_0 を用いて次式で与えられる。

$$\boldsymbol{D} = \frac{\tilde{\lambda} - \tilde{\kappa}}{M v_0} \quad (\text{A3.45})$$

式(A3.44)の p'_0 は、初期状態における降伏面と正規降伏面の中心軸 $q = \zeta p'$ との交点での平均有効応力である。なお、 N と Γ の関係は次式で与えられる。

$$N - \Gamma = (\tilde{\lambda} - \tilde{\kappa}) \ln 2 \quad (\text{A3.46})$$

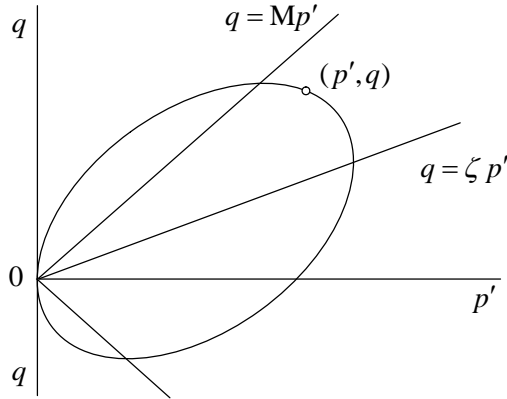


図 A3.22 関口・太田の η^{*21} を導入した修正カムクレイモデル

以上のように、 η の代わりに η^* を用いて異方性を持つ土の塑性ポテンシャルを与える。この異方性の発達は、塑性変形の進展に伴って生じるとし（応力誘導異方性）、 β の共回転速度を Hashiguchi and Chen²²⁾にしたがって、塑性ストレッチングの関数として与える。

(2) 上負荷面^{6),7),8)}および下負荷面⁹⁾

自然堆積した土は一般に構造を有していて、過圧密状態にあると考え、式(A3.45)に上・下負荷面概念を導入する。ここで、上負荷面、下負荷面は共に正規降伏面と相似形で（いずれも相似中心は原点）、上負荷面は正規降伏面よりも外側に位置し、下負荷面は上負荷面の内側に位置する（図 A3.23）。一般に現応力点は下負荷面上にあることを考慮して、三つの負荷面上の応力を、それぞれ、正規降伏面上： $\tilde{\mathbf{T}}'$ 、上負荷面上： $\bar{\mathbf{T}}'$ 、下負荷面上： \mathbf{T}' として表し、これらの応力をもとに式(A3.42)から計算される諸量に対しても、同じように上付きの”~”や”-”の記号を用いて表す。この表記に準ずれば、正規降伏面は次式のように表される。

$$\begin{aligned} f(\tilde{p}', \tilde{\eta}^*) + \int_0^t J \operatorname{tr} \mathbf{D}^p d\tau \\ = MD \ln \frac{\tilde{p}'}{\tilde{p}'_0} + MD \ln \frac{M^2 + \tilde{\eta}^{*2}}{M^2} + \int_0^t J \operatorname{tr} \mathbf{D}^p d\tau = 0 \end{aligned} \quad (\text{A3.47})$$

ここに、 \tilde{p}'_0 は初期状態における正規降伏面と正規降伏面の中心軸 $q = \zeta p'$ との交点での平均有効応力である。

上負荷面に対する正規降伏面の比を R^* ($0 < R^* \leq 1$)とすれば、次の関係が成り立つ。

$$\tilde{p}' = R^* \bar{p}' \quad , \quad \tilde{\eta}^* = \bar{\eta}^* \quad (\text{A3.48})$$

これらを式(A3.47)に代入すれば、上負荷面は次式のように表される。

$$\begin{aligned}
& f(\bar{p}', \bar{\eta}^*) + MD \ln R^* + \int_0^t J \operatorname{tr} \mathbf{D}^p d\tau \\
& = MD \ln \frac{\bar{p}'}{\tilde{p}'_0} + MD \ln \frac{M^2 + \bar{\eta}^{*2}}{M^2} + MD \ln R^* + \int_0^t J \operatorname{tr} \mathbf{D}^p d\tau = 0
\end{aligned} \tag{A3.49}$$

同様に、下負荷面に対する正規降伏面の比を R ($0 < R \leq 1$) とすれば、次の関係が成り立つ。

$$p' = R\bar{p}', \quad \eta^* = \bar{\eta}^* \tag{A3.50}$$

これらを式(A3.49)に代入すれば、今度は下負荷面が次式のように表される。

$$\begin{aligned}
& f(p', \eta^*) + MD \ln R^* - MD \ln R + \int_0^t J \operatorname{tr} \mathbf{D}^p d\tau \\
& = MD \ln \frac{p'}{\tilde{p}'_0} + MD \ln \frac{M^2 + \eta^{*2}}{M^2} + MD \ln R^* - MD \ln R + \int_0^t J \operatorname{tr} \mathbf{D}^p d\tau = 0
\end{aligned} \tag{A3.51}$$

なお、 R^* の逆数は構造の発達程度を表し、 R の逆数は過圧密比を表す。

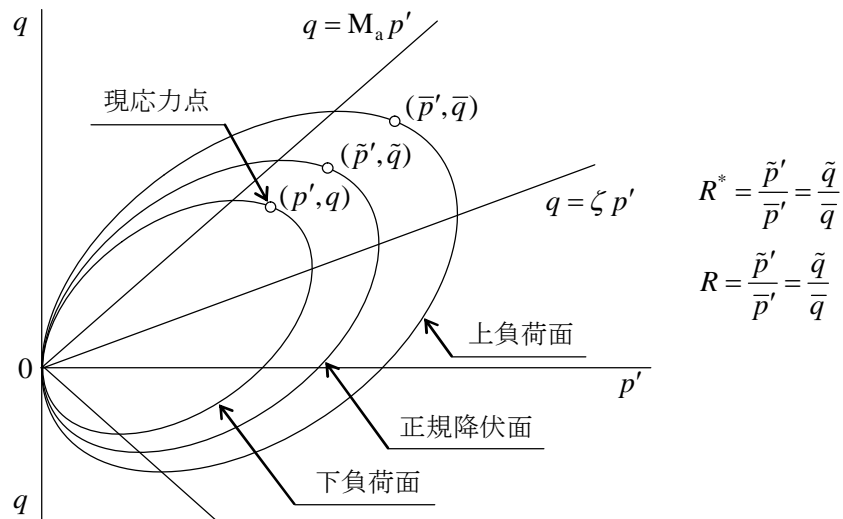


図 A3.23 3つの負荷面

(3) 関連流れ則と適応条件式

土の塑性変形は、次式に示す関連流れ則に従うと仮定する。

$$\mathbf{D}^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \mathbf{T}'} \quad (\lambda > 0) \tag{A3.52}$$

ここで λ は塑性乗数である。塑性論に従うと、Prager の適応条件式²⁰⁾

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{T}'} \cdot \dot{\mathbf{T}}' + \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\beta}} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}} + J \text{tr} \mathbf{D}^p + \text{MD} \frac{\dot{R}^*}{R^*} - \text{MD} \frac{\dot{R}}{R} = 0 \quad (\text{A3.53})$$

により後続塑性ポテンシャル面の大きさは決定される。ここで、 \mathbf{T}' と $\boldsymbol{\beta}$ の共回転速度 $\dot{\mathbf{T}}'$ と $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ を用いて、式(A3.53)は次式のように書き換えることができる（誘導は付録 A12 参照）。

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{T}'} \cdot \dot{\mathbf{T}}' + \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\beta}} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}} + J \text{tr} \mathbf{D}^p + \text{MD} \frac{\dot{R}^*}{R^*} - \text{MD} \frac{\dot{R}}{R} = 0 \quad (\text{A3.54})$$

ここに、 $\dot{\mathbf{T}}'$ と $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ はそれぞれ、

$$\dot{\mathbf{T}}' = \dot{\mathbf{T}}' + \mathbf{T}' \boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\Omega} \mathbf{T}' \quad (\text{A3.55})$$

$$\dot{\boldsymbol{\beta}} = \dot{\boldsymbol{\beta}} + \boldsymbol{\beta} \boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{\beta} \quad (\text{A3.56})$$

で表され、 $\boldsymbol{\Omega}$ は物質スピンと呼ばれる。共回転速度として Green-Naghdi rate²⁴⁾を用いる場合には、 $\boldsymbol{\Omega}$ は変形勾配 \mathbf{F} を極分解した時に得られる回転テンソル \mathbf{R} を用いて、 $\boldsymbol{\Omega} = \dot{\mathbf{R}} \mathbf{R}^T$ で与えられる（上付き “T” は転置作用を表す）。

(4) 過圧密、構造、異方性の発展則

式(A3.54)からもわかるように、後続負荷面の大きさは塑性体積変化の他に過圧密・構造・異方性の進展の程度によっても規定される。過圧密・構造・異方性は塑性変形の進展に伴って推移すると考え、 R^*, R の物質時間微分および $\boldsymbol{\beta}$ 共回転速度を、塑性ストレッチングの正のスカラ関数として与える。これらの骨格構造の発展速度を規定する式のことを「発展則」と呼ぶ。骨格構造の進展速度は土の種類によって異なり、その違いによって土の力学的特徴を決定することから、発展則は非常に重要であり「第2の構成式」とも呼びうるものである。

(a) 過圧密の発展則

過圧密の発展則に対しては、塑性変形の進展尺度として塑性ストレッチングのノルム $\|\mathbf{D}^p\| = \sqrt{\mathbf{D}^p \cdot \mathbf{D}^p}$ を適用し、 R の発展則を次式で与える。

$$\dot{R} = JU \|\mathbf{D}^p\| \quad (\text{A3.57})$$

ここで正のスカラ値関数 U は R の関数であり、次の条件を満たすように与える（図 A3. 24）。

$$\begin{aligned} R=0 \quad \text{のとき} \quad U &= \infty \\ R=1 \quad \text{のとき} \quad U &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A3.58})$$

条件の一つ目は、①完全除荷（ $R \cong 0$ ）では再負荷時には弾塑性応答しか示さないこと（ $U = \dot{R} / \|\mathbf{D}^p\| = \infty : \|\mathbf{D}^p\| \rightarrow 0$ ）を意味し、条件の二つ目は、②正規圧密状態（ $R=1$ ）ではもはや過圧密の解消が生じないこと（ $U = \dot{R} / \|\mathbf{D}^p\| = 0 : \dot{R} \rightarrow 0$ ）を意味する。これらの条件を満

たす最も簡単な関数として、Hashiguchi(1989)²⁵⁾に従い、

$$U = -\frac{m}{D} \ln R \quad (\text{A3.59})$$

と定式化する。ここで $m (> 0)$ は過圧密の解消速度を決める材料定数であり、正規圧密土化指数と呼ぶ。 m が大きいほど過圧密の解消が速く、弾性的挙動を示す。

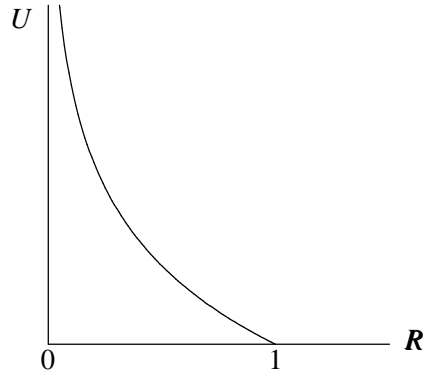


図 A3.24 U の関数形

(b) 構造の発展則

R^* の発展則は次式で与える。

$$\dot{R}^* = JU^* \left\{ (1 - c_s) (-D_v^p) + c_s \sqrt{\frac{2}{3}} \|D_s^p\| \right\} \quad (\text{A3.60})$$

ここで、 D_s^p は塑性ストレッチングの偏差成分で、 $D_s^p = D^p - \frac{1}{3}(\text{tr} D^p)I$ である。

また、正のスカラ値関数 U^* は R^* の関数である。 U^* は次の条件を満たすように与える (図 A3.25)。

$$\begin{aligned} R^* = 0 \quad \text{のとき} \quad U^* &= 0 \\ R^* = 1 \quad \text{のとき} \quad U^* &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A3.61})$$

条件の一つ目は、①構造の程度が無限大のとき ($R^* \cong 0$)、土は「コロイド」呼ばれてよい状態にあると考えられ、コロイドは安定した状態にあることを意味する。条件の二つ目は、②練返し状態のとき ($R^* = 1$)、もはやこれ以上の構造の劣化が生じないことを意味する。これらの条件を満たす関数として、 β 関数を用いて、

$$U^* = \frac{a}{D} R^{*b} (1 - R^*)^c \quad (\text{A3.62})$$

と定式化する。 $a, b, c (> 0)$ は構造の劣化速度を決める材料定数で、構造劣化指数と呼ばれる。本論文では $b = c = 1.0$ として使う。 a が大きいほど構造の劣化が速い。

なお、除荷によって R は小さくなる (過圧密土化する) が、除荷しても R^* の大きさは変化

しない（構造は劣化過程だけを考える）。

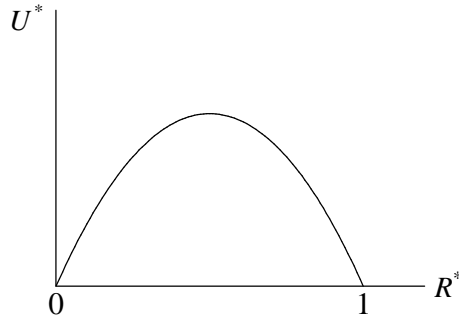


図 A3.25 U^* の関数形

(c) 異方性の発展則

Hashiguchi and Chen(1998)²²⁾に従い、 β の共回転速度 $\dot{\beta}$ を次の 4 つの仮定に基づき定式化する。

- ① 塑性ポテンシャル面の回転速度は塑性偏差ストレッチングの大きさに比例する。
- ② 塑性ポテンシャル面の中心軸 β の回転範囲には次式で表す限界が存在する。

$$\|\beta\| \leq m_b \quad (\text{A3.63})$$

ここに、 $m_b (\geq 0)$ は材料定数で、回転硬化限界定数と呼ぶ。また、次式で表される面を回転硬化限界面と呼ぶ。

$$\eta = \sqrt{\frac{3}{2}} m_b \quad (\text{A3.64})$$

- ③ 塑性ポテンシャル面の中心軸 β は、塑性ポテンシャル面上の直線 $\hat{\eta}$ に対する回転硬化限界面上の共役線 $m_b \hat{\eta} / \|\hat{\eta}\|$ に漸近する。つまりは次式で表す方向に移動する (図 A3.26)。

$$\eta_b = m_b \frac{\hat{\eta}}{\|\hat{\eta}\|} - \beta \quad (\text{A3.65})$$

- ④ 単調・比例 ($\eta = const.$) 負荷においては、中心軸 β はこの負荷経路に漸近する。

以上より β の発展則は

$$\dot{\beta} = J \frac{b_r}{D} \sqrt{\frac{2}{3}} \|D_s^p\| \|\hat{\eta}\| \eta_b \quad (\text{A3.66})$$

と定式化される。ここに $b_r (\geq 0)$ は異方性の発達速度を決める材料定数であり、回転硬化指数と呼ぶ。 b_r が大きいほど異方性の発達が速い。

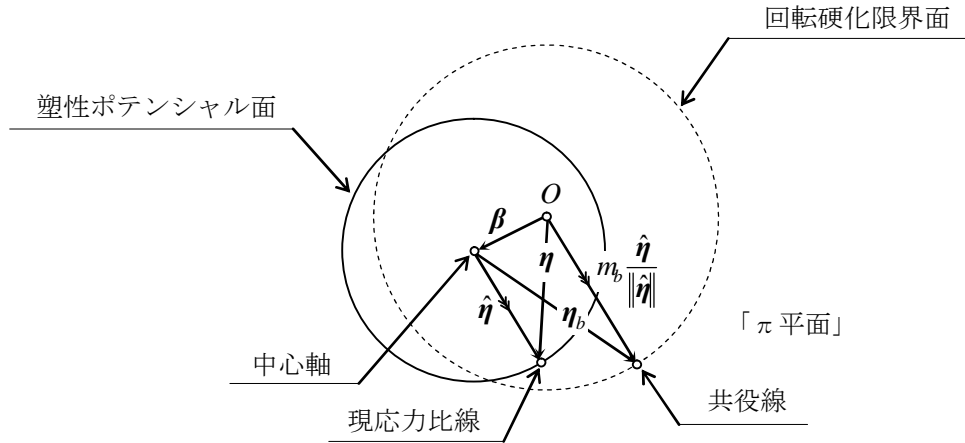


図 A3.26 塑性ポテンシャル面の中心軸の移動方向を示す模式図

(5) 塑性圧縮と塑性膨張の境界線

塑性体積ひずみ増分は次式のように計算される。

$$\left(-\int_0^t J \operatorname{tr} \mathbf{D}^p d\tau\right)' = -J \operatorname{tr} \mathbf{D}^p = -\lambda \operatorname{tr} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{T}'} = \lambda \frac{MD}{p'(M^2 + \eta^{*2})} (M_a^2 - \eta^2) \quad (\text{A3.67})$$

ここに、

$$M_a^2 = M^2 + \zeta^2 \quad (\text{A3.68})$$

である。応力比 $\eta = M_a$ を塑性圧縮と塑性膨張の境界線として、負荷状態は以下のように分類される。

$$\left\{ \begin{array}{lll} \eta^2 < M_a^2 \text{ のとき} & -\operatorname{tr} \mathbf{D}^p > 0 & \dots \text{ 塑性圧縮} \\ \eta^2 = M_a^2 \text{ のとき} & -\operatorname{tr} \mathbf{D}^p = 0 & \dots \text{ 塑性体積変化なし} \\ \eta^2 > M_a^2 \text{ のとき} & -\operatorname{tr} \mathbf{D}^p < 0 & \dots \text{ 塑性膨張} \end{array} \right. \quad (\text{A3.69})$$

この様子を図 A3.27 に示す。式(6.69)から、 M_a は異方性の発達 ($\zeta \rightarrow \sqrt{3/2}m_b$) によって増加し、逆に異方性の消滅 ($\zeta \rightarrow 0$) によって減少する。なお、異方性の発達には回転硬化限界定数 m_b によって規定される回転硬化限界が存在するため、 M_a には次式に示す条件が課せられる。

$$M^2 \leq M_a^2 \leq M^2 + \frac{3}{2}m_b^2 \quad (\text{A3.70})$$

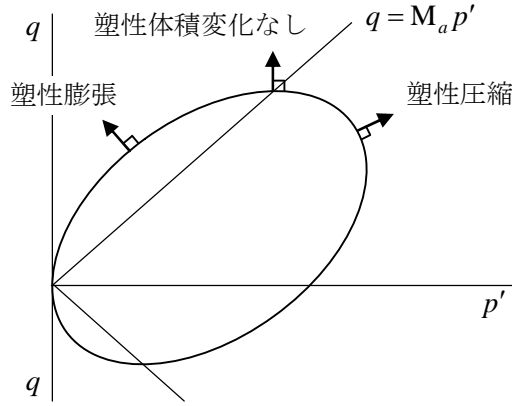


図 A3.27 $q = M_a p'$ より下側での塑性圧縮と上側での塑性膨張

(6) 硬化と軟化の境界線

発展則 (式(A3.57)、式(A3.60) もしくは式(A3.66)) を式(A3.54)に代入し、式(A3.52)の関連流れ則を適用すると、塑性乗数 λ は応力速度を用いて次式のように表される。

$$\lambda = \frac{\frac{\partial f}{\partial \mathbf{T}'} \cdot \dot{\mathbf{T}}'}{J \frac{MD}{p'(M^2 + \eta^{*2})} (M_s^2 - \eta^2)} \quad (\text{A3.71})$$

ここに、 M_s は次のように与えられる。

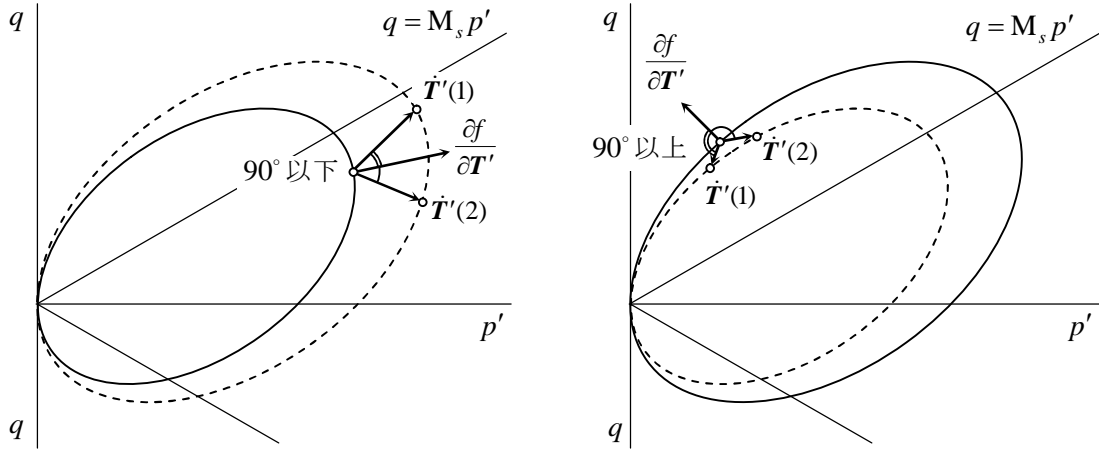
$$M_s^2 = M_a^2 + br \frac{4M\eta^{*2}}{M^2 + \eta^{*2}} (m_b \eta^* - \sqrt{\frac{3}{2}} \hat{\eta} \cdot \beta) - MD \left\{ \frac{U^*}{R^*} 2\eta^* - \frac{U}{R} \sqrt{6\eta^{*2} + \frac{1}{3}(M_a^2 - \eta^2)^2} \right\} \quad (\text{A3.72})$$

土が負荷状態にあるとき、塑性定数 λ は正でなければならないので、式(A3.71)から、 $\eta = M_s$ を軟化と硬化の境界線として、負荷状態は以下のように分類される。

$$\left\{ \begin{array}{ll} \eta^2 < M_s^2 \text{ のとき } \frac{\partial f}{\partial \mathbf{T}'} \cdot \dot{\mathbf{T}}' > 0 & \dots \text{ 硬化} \\ \eta^2 = M_s^2 \text{ のとき } \frac{\partial f}{\partial \mathbf{T}'} \cdot \dot{\mathbf{T}}' = 0 & \dots \text{ 完全塑性} \\ \eta^2 > M_s^2 \text{ のとき } \frac{\partial f}{\partial \mathbf{T}'} \cdot \dot{\mathbf{T}}' < 0 & \dots \text{ 軟化} \end{array} \right. \quad (\text{A3.73})$$

この様子を図 A3.28 に示す。式(A3.72)、 M_s は負荷時には構造の劣化、過圧密の解消、異方性の発達・消滅および応力比の変化とともに、また、除荷時には過圧密土化と応力比の変化とともに変動する (除荷時応答自体には、 M_s の変動はもちろん影響を与えない)。繰り返し

正規圧密状態 ($R^* = 1, R = 1$) で、異方性もそれ以上発達しない状態 ($\|\hat{\eta}\| = 0$ もしくは $\eta_b = 0$) では $M_s = M_a$ である。



(a) 塑性ポテンシャル面の拡大 (硬化) (b) 塑性ポテンシャル面の縮小 (軟化)

図 A3.28 $q = M_s p'$ より下側での硬化と上側での軟化

(6) 構成式と負荷基準

弾性構成式を次式で与える。

$$\dot{\mathbf{T}}' = \mathbf{E} \mathbf{D}^e \quad (\text{A3.74})$$

ここに、 \mathbf{E} は弾性係数テンソルである。適応条件 (式(A3.54)) に、発展則 (式(A3.57)、式(A3.60) もしくは式(A3.66)) の他に、弾性構成式 (式(A3.74)) とストレッチングの加算分解式 (式(A3.36)) を代入し、関連流れ則 (式(A3.52)) を適用すると、ストレッチングで表記された塑性乗数 Λ を次式のように得ることができる。

$$\Lambda = \lambda = \frac{\frac{\partial f}{\partial \mathbf{T}}' \cdot \mathbf{E} \mathbf{D}}{\frac{\partial f}{\partial \mathbf{T}}' \cdot \mathbf{E} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{T}}' + J \frac{\text{MD}}{p' (M^2 + \eta^{*2})} (M_s^2 - \eta^2)} \quad (\Lambda > 0) \quad (\text{A3.75})$$

さらに、式(A3.74)に、式(A3.36)と式(A3.52)を代入すれば、ストレッチングで表記された塑性乗数 Λ を用いて、弾塑性構成式を次式のように得る。

$$\dot{\mathbf{T}}' = \mathbf{E} \mathbf{D} - \Lambda \mathbf{E} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{T}}' \quad (\text{A3.76})$$

今、弾性変形に対し次式の非線形等方フック則を仮定する。

$$\dot{\mathbf{T}}' = (\tilde{K} - \frac{2}{3}\tilde{G})(\text{tr}\mathbf{D}^e)\mathbf{I} + 2\tilde{G}\mathbf{D}^e \quad (\text{A3.77})$$

ここに、 \tilde{K} は体積弾性係数、 \tilde{G} はせん断弾性係数である。土骨格の場合、 $\tilde{\kappa}$ を膨潤指数として、式(A3.77)は

$$-J \text{tr}\mathbf{D}^e = -\frac{\tilde{\kappa}}{1+e_0} \frac{\dot{p}'}{p'} \quad (\text{A3.78})$$

を満たす必要があるので、 \tilde{K} や \tilde{G} は J や p' を含む形で次のように与えられる。

$$\begin{aligned} \tilde{K} &= \frac{1+e}{\tilde{\kappa}} p' \quad (= \frac{J(1+e_0)}{\tilde{\kappa}} p') \\ \tilde{G} &= \frac{3(1-2\nu)}{2(1+\nu)} \tilde{K} \end{aligned} \quad (\text{A3.79})$$

ここに、 ν はポアソン比である。

式(A3.77)を用いれば、上・下負荷面カムクレイモデルの速度型構成式 (式(A3.76)) は具体的に以下のように与えられる。

$$\dot{\mathbf{T}}' = (\tilde{K} - \frac{2}{3}\tilde{G})(\text{tr}\mathbf{D})\mathbf{I} + 2\tilde{G}\mathbf{D} - \frac{(6\tilde{G}\hat{\boldsymbol{\eta}} \cdot \mathbf{D} - \tilde{K}\alpha \text{tr}\mathbf{D})(6\tilde{G}\hat{\boldsymbol{\eta}} - \tilde{K}\alpha\mathbf{I})}{12\eta^{*2} \tilde{G} + \tilde{K}\alpha^2 + h} \quad (\text{A3.80})$$

ここで、

$$\begin{aligned} \alpha &= M_a^2 - \eta^2 \\ h &= Jp' \frac{M^2 + \eta^{*2}}{\text{MD}} (M_s^2 - \eta^2) \end{aligned} \quad (\text{A3.81})$$

である。

さて、いかなる応力状態に対しても式(A3.75)の分母を正にする材料定数を改めて土質定数と呼ぶこととする。この時、負荷の条件

$$\Lambda > 0 \quad (\text{A3.82})$$

は、 Λ の分子が正であることと等価となり、負荷基準は次式のように与えられる。

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{T}'} \cdot \mathbf{ED} > 0 \quad \text{のとき} \quad \text{負荷} \quad (\mathbf{D}^p \neq \mathbf{0}) \\ \frac{\partial f}{\partial \mathbf{T}'} \cdot \mathbf{ED} < 0 \quad \text{のとき} \quad \text{除荷} \quad (\mathbf{D}^p = \mathbf{0}) \end{array} \right. \quad (\text{A3.83})$$

A3.5 SYS カムクレイモデルの特徴

古典的な限界状態土質力学では、限界状態定数 M は硬化と軟化、そして塑性圧縮と塑性膨張に共通の境界線である。そのため、硬化には必ず塑性圧縮が、軟化には必ず塑性膨張が伴う（図 A3.10）。さらには、限界状態定数 M は負荷を通じて一定である。しかし、土の骨格構造の発展を考慮に入れると、 M_s によって定まる硬化と軟化の境界線は塑性変形の進展に伴って変化し、 M_a によって定まる塑性圧縮と膨張の境界線も塑性変形の進展に伴って変化する。さらに式(A3.71), 式(A3.72)から、 M_s と M_a の大小関係は常に明確でないことが分かる。つまり、硬化は塑性膨張とともに起こり得るし、軟化も塑性圧縮とともに起こり得ることになる。ここでは、特にこの点に着目して、構造・過圧密・異方性を導入したことの効果をひとつずつ述べる。

この節の計算で用いる材料定数を表 A3.1 に示す。

表 A3.1 典型的な粘土を想定した材料定数

〈弾塑性パラメータ〉	
圧縮指数 $\tilde{\lambda}$	0.250
膨潤指数 $\tilde{\kappa}$	0.045
限界状態定数 M	1.25
NCL の切片* N	2.73
ポアソン比 ν	0.3
〈発展則パラメータ〉	
構造低位化指数 a ($b = c = 1.0$)	0.5
正規圧密土化指数 m	10.0
回転硬化指数 b_r	0.001
回転硬化限界定数 m_b	1.0

* $q = 0, p' = 98.1 \text{ kPa}$ における練返し粘土の正規圧密線

(1) 過圧密（下負荷面）の効果

過圧密状態（ $0 < R < 1$ ）ではあるが、一方で練り返し状態（ $R^* = 1$ ）で、しかも異方性が発展しない（ $br = 0$ ）場合、硬化/軟化の境界線の傾き M_s は、式(A3.71)より以下のように表される。

$$M_s^2 = M_a^2 + MD \frac{U}{R} \sqrt{6\eta^{*2} + \frac{1}{3}(M_a^2 - \eta^2)^2} \quad (\text{A3.84})$$

U は正のスカラ値関数だから、このとき M_s は M_a より大きいことが分かる。

$$M_s \geq M_a \quad (\text{A3.85})$$

つまり、練り返された過圧密土には新たに塑性膨張を伴う硬化領域が生まれることが分かる（図 A3.29）。また、式(A3.60)を用いれば、 U/R は具体的に次のように表される。

$$\frac{U}{R} = -\frac{1}{D} \frac{m \ln R}{R} \quad (\text{A3.86})$$

式(A3.84)からは、 U/R が R の単調減少関数になっていて、 $R=1$ では値が 0 になることが分かるが、このことは、塑性変形の進展に伴い過圧密が解消すると M_s は徐々に降下して最終的に M_a に一致することを示している（図 A3.29）。

図 A3.30 は練り返し過圧密土の排水せん断挙動をシミュレーションしたもので、図 A3.13 の実験結果に対応している。図 A3.30 からは、過圧密土の排水せん断時に特徴的な膨張を伴う硬化挙動を示すことが分かる。つまり、先の議論に従えば、下負荷面を導入したことによってカムクレイモデルでは再現できなかった

- ① 降伏面の内側での弾塑性挙動と、
- ② 塑性膨張を伴う硬化挙動

が表現できることが分かる。図 A3.31 は図 A3.30 の有効応力経路に下負荷面と正規降伏面の拡大縮小と、硬化/軟化の境界線 $q = M_s p'$ の変動を合わせて記したものである。確かに

$$M_a < \eta < M_s \quad (\text{A3.87})$$

の状態において、塑性膨張を伴う硬化挙動を生じていることが分かる（式(A3.87)を満たす状態であっても必ずしも体積膨張しないのは、 p' の増加時は弾性圧縮が生じているからである。）。

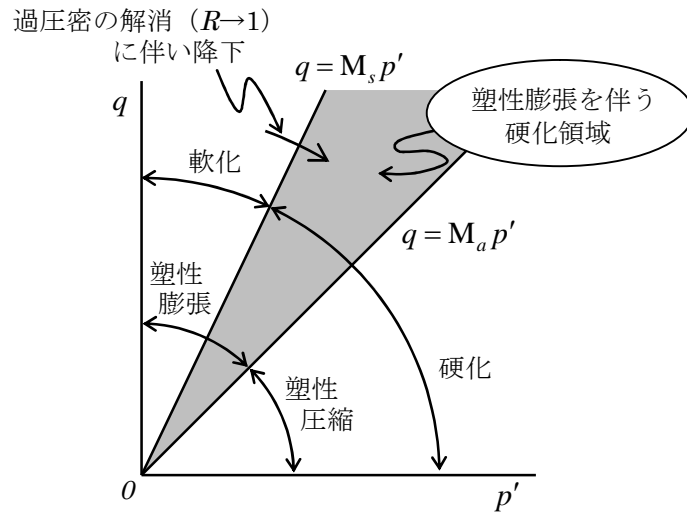


図 A3.29 M_s の変動にみる下負荷面導入の効果 (塑性膨張を伴う硬化)

表 A3.2 初期値

鉛直有効応力 σ_{v0}' (kPa)	98.1
構造の程度 $1/R_0^*$	1.00
過圧密比 $1/R_0$	8.00
異方性の程度 $\zeta_0 = \sqrt{3/2 \beta_0 \cdot \beta_0}$	0.00
側圧係数 $\sigma_{h0}' / \sigma_{v0}'$	1.00

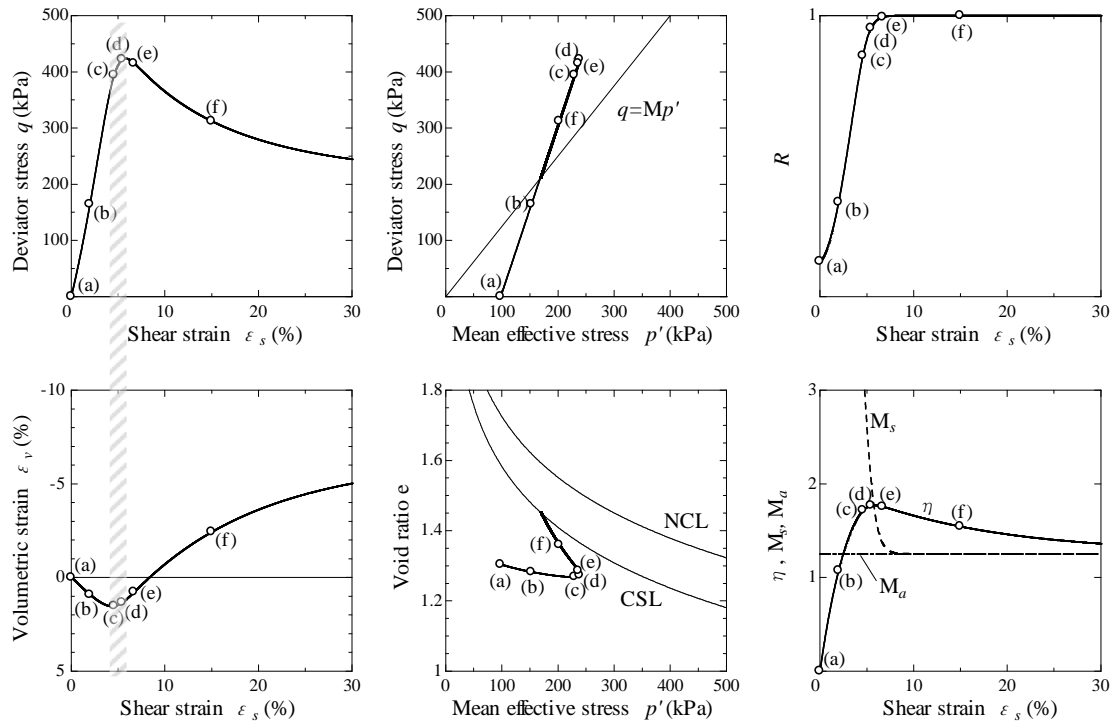


図 A3.30 繰り返した過圧密土の排水せん断挙動のシミュレーション

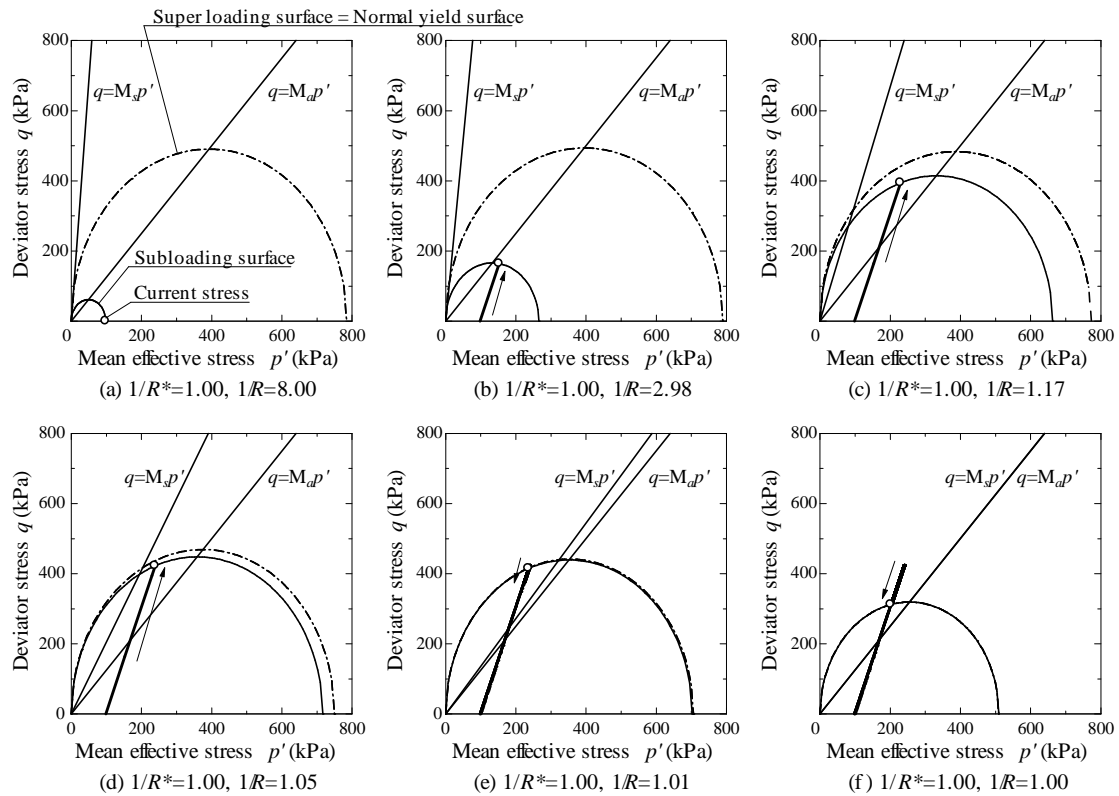


図 A3.31 下負荷面と正規降伏面の拡大・縮小と M_s の変動

(2) 構造（上負荷面）の効果

構造が発達した状態（ $0 < R^* < 1$ ）ではあるが、一方で正規圧密状態（ $R=1$ ）で、しかも異方性が発展しない（ $br=0$ ）場合、硬化/軟化の境界線の傾き M_s は、式(A3.71)より以下のように表される（ここでも粘土の場合を例に考える）。

$$M_s^2 = M_a^2 - MD \frac{U^*}{R^*} \sqrt{6\eta^{*2} + \frac{1}{3}(M_a^2 - \eta^2)^2} \quad (\text{A3.88})$$

U^* は正のスカラ値関数だから、今度は M_s は M_a より小さいことになる。

$$M_s \leq M_a \quad (\text{A3.89})$$

つまり、構造の発達した正規圧密土には新たに塑性膨張を伴う硬化領域が生まれる（図 A3. 32）。また、式(A3.62)を用い、簡単のために $b=1$ の場合について、 U^*/R^* を具体的に式示すると次のようになる。

$$\frac{U^*}{R^*} = \frac{a}{D} (1 - R^*)^c \quad (\text{A3.90})$$

式(A3.90)からは、やはり U^*/R^* が R^* の単調減少関数になっていて、 $R^*=1$ では値が 0 になることが分かるが、このことは、塑性変形の進展に伴い構造が劣化すると M_s は徐々に上昇して最終的に M_a に一致することを示している（図 A3. 32）。

図 A3. 33 は、構造が発達していてほぼ正規圧密状態にある土の非排水せん断挙動をシミュレーションしたもので、図 A3. 19 の実験結果に対応している。図中には繰り返し正規圧密土の限界状態線や正規圧密線も記している。上負荷面を導入したことによってカムクレイモデルでは再現できなかった

- ① 繰り返し土の不可能領域に状態をとることや、
- ② 塑性圧縮を伴う軟化挙動

が表現されている。図 A3. 34 は図 A3. 33 の有効応力経路上負荷面と正規降伏面の拡大・縮小と、硬化/軟化の境界線 $q = M_s p'$ の変動を合わせて記したものである。確かに

$$M_s < \eta < M_a \quad (\text{A3.91})$$

の状態において、塑性圧縮を伴う軟化挙動を生じていることが分かる。

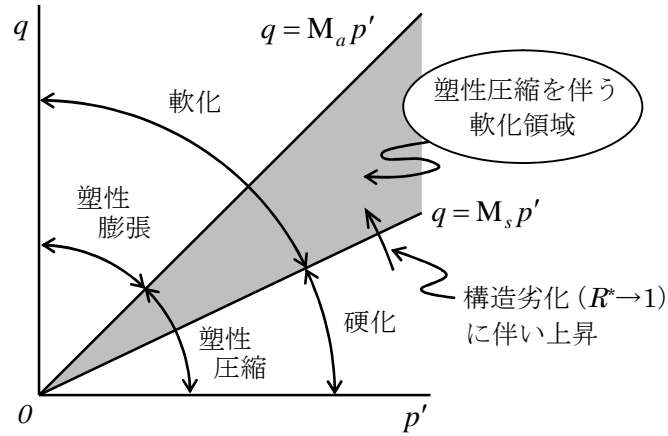


図 A3.32 M_s の変動にみる上負荷面導入の効果 (塑性圧縮を伴う軟化)

図 A3.3 初期値

鉛直有効応力 σ_{v0}' (kPa)	294
構造の程度 $1/R_0^*$	4.59
過圧密比 $1/R_0$	3.80
異方性の程度 $\zeta_0 = \sqrt{3/2 \beta_0 \cdot \beta_0}$	0.009
側圧係数 $\sigma_{h0}' / \sigma_{v0}'$	1.00

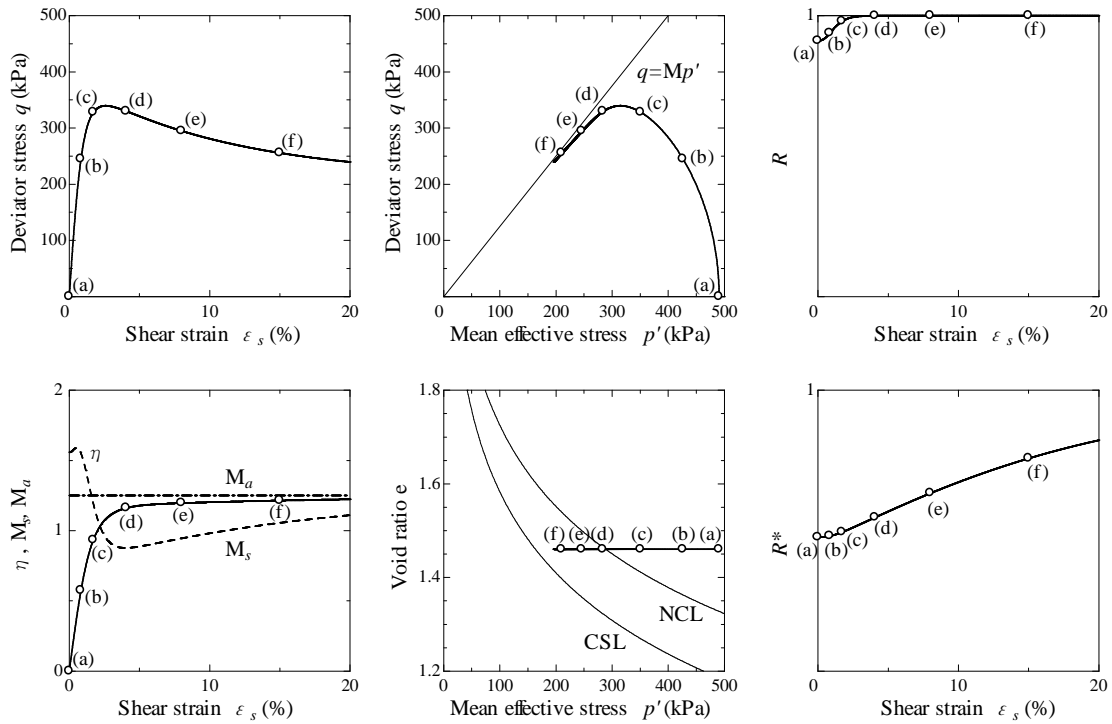


図 A3.33 構造の発達した正規圧密土の非排水せん断挙動のシミュレーション

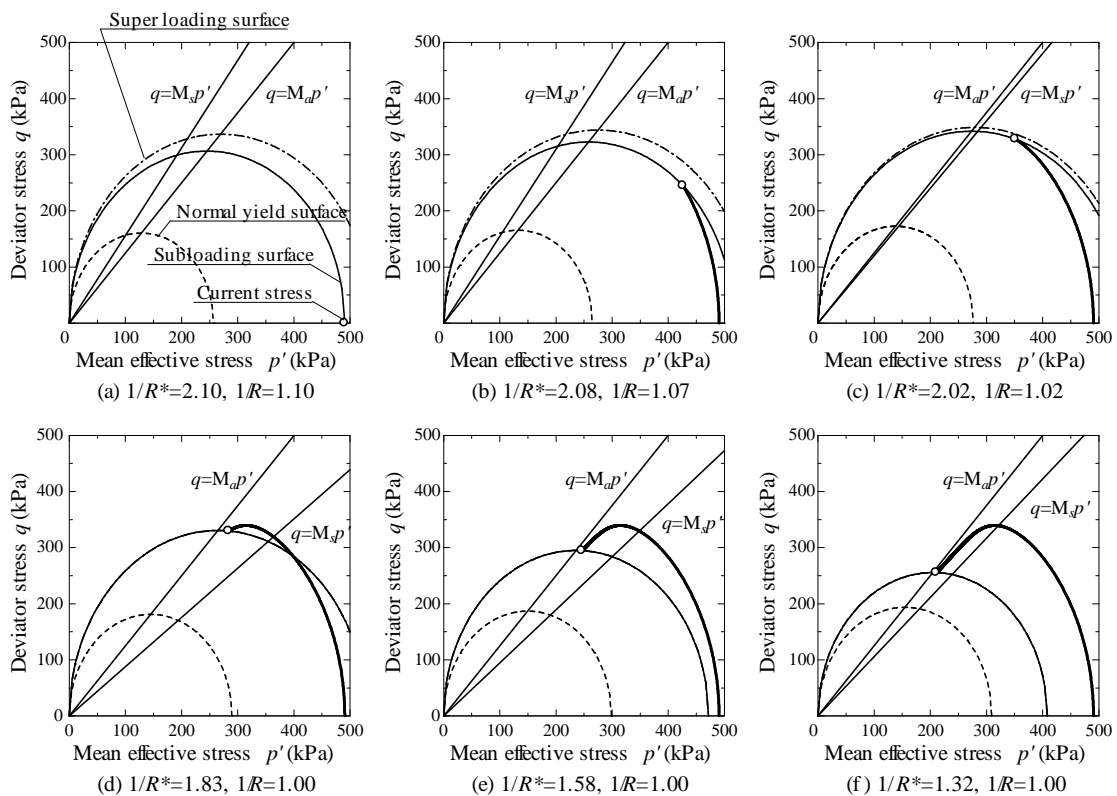


図 A3.34 上負荷面と正規降伏面の拡大・縮小と M_s の変動

さて、構造も過圧密もある状態では、もちろん M_s は M_a の上側にも下側にも動く。このような状態での解析例は、次節で砂と粘土の違いについて考察しながら示す。

(3) 異方性 (η^* および回転硬化) の効果

繰り返し正規圧密状態 ($R^*=1, R=1$) を想定して、異方性の効果について示す。

M_a については、異方性が発達しているほど限界状態定数 M よりも大きな値を示すことが式(A3.68)よりわかる。ただし、 M_a の移動範囲には式(A3.71)で示す条件が課せられることについてはすでに述べた。

一方、繰り返し正規圧密状態では、 M_s は次式のように表される。

$$M_s^2 = M_a^2 + br \frac{4M\eta^{*2}}{M^2 + \eta^{*2}} (m_b \eta^* - \sqrt{\frac{3}{2}} \hat{\eta} \cdot \beta) \quad (\text{A3.92})$$

ここで、

$$m_b \eta^* - \sqrt{\frac{3}{2}} \hat{\eta} \cdot \beta \geq \|\beta\| \eta^* - \sqrt{\frac{3}{2}} \hat{\eta} \cdot \beta = \|\beta\| \eta^* \left(1 - \frac{\hat{\eta} \cdot \beta}{\|\hat{\eta}\| \|\beta\|} \right) \geq 0 \quad (\text{A3.93})$$

から、

$$M_a \leq M_s \quad (\text{A3.94})$$

が成り立つ。したがって、応力誘導異方性が進展している最中は、高応力比で塑性膨張を伴う硬化を、換言すれば、高応力比で過圧密土的な挙動を示し得ることが分かる。

また、異方性を考慮したことの効果は、上記の塑性圧縮/膨張、硬化/軟化の観点から述べられる特徴以外にも、その名が示すとおり、材料自体が有する異方的な力学的性質を表現できる点も素直に挙げられる。例えば、供試体の切り出し角度によって、一軸圧縮試験で得られる非排水せん断強度が異なることなどは、最も理解が得易い例であるが、これに対応する解析例を本文第2章で示している。また、力学的異方性を表現できるようになったことと同義的ではあるが、モデルが非共軸な性質を示すようになったことも特徴のひとつに挙げられる。

A3.6 砂と粘土の違い

(1) 過圧密の状態と構造の状態の変化

土は、次の4つの状態のいずれかにある。

- ① 構造を有する過圧密状態 ($0 < R^* < 1, 0 < R < 1$)
- ② 構造を有する正規圧密状態 ($0 < R^* < 1, R = 1$)
- ③ 構造のない過圧密状態 ($R^* = 1, 0 < R < 1$)
- ④ 構造のない正規圧密状態 ($R^* = 1, R = 1$)

①、②または③の状態にある土は、塑性変形の進展に伴い、最後は④の状態に至る。

自然の堆積土は粘土でも砂でも一般に、上で言う状態①に、すなわち構造が発達していて、しかも程度の差こそあれ過圧密な状態にあると考えてよい。このような土が、塑性変形の進展につれて、状態④に至るとき、大別つぎの二つの道筋がある。

道筋 C： ①過圧密・構造あり → ②正規圧密・構造あり → ④正規圧密・構造なし

道筋 S： ①過圧密・構造あり → ③過圧密・構造なし → ④正規圧密・構造なし

道筋 C を辿る土では、塑性変形の進展に対し過圧密の解消の方が構造の劣化よりも早く進む。構造をなくすためには、さらにより大きな塑性変形が必要になる。道筋 S を辿る土はその逆で、塑性変形が進展すると構造はすぐになくなるのに、過圧密の解消はなかなか進まない。

結論を先に述べると、土を負荷するとき、典型的な粘土は道筋 C を辿り、典型的な砂は道筋 S を辿る。これを図 A3.35 に示す。(なお、異方性の発達速度についても、砂と粘土で著しい差があるが、これについてはここでは触れない。)

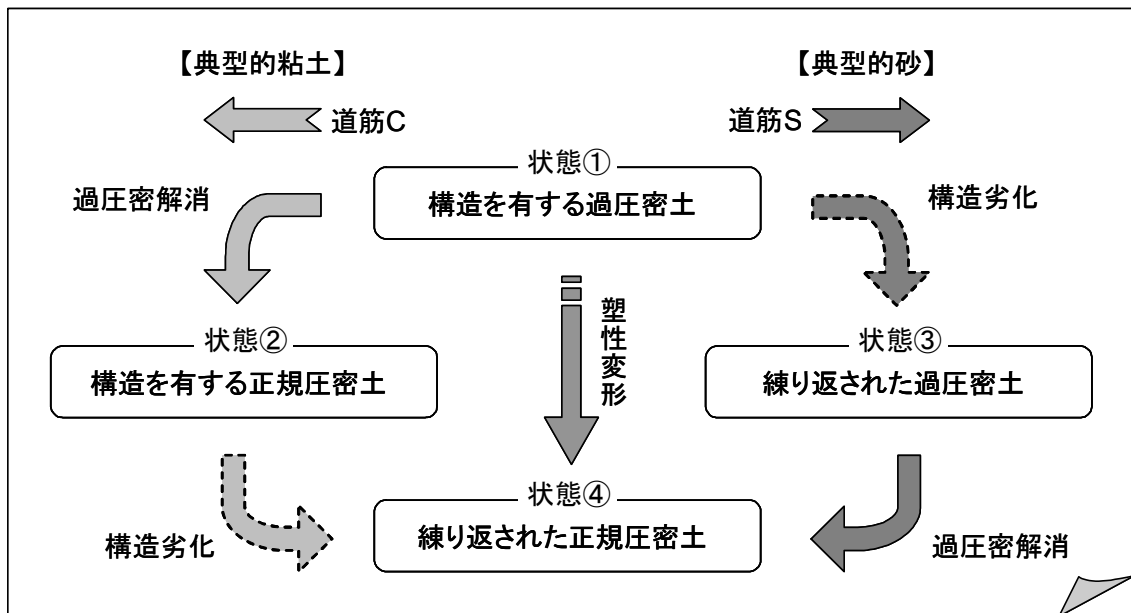


図 A3.35 道筋 C と道筋 S

(2) 構造の発達した過圧密粘土と中詰め砂の非排水せん断挙動

以上の結論は、図 A3.36、図 A3.37 に示す構造の発達した過圧密粘土と中詰め砂（初期にはいずれも①の状態にあると考えられる）の非排水せん断挙動に端的に現れている。両者の挙動の特徴には明確な違いがあり、粘土が先に(A)塑性膨張を伴う硬化挙動を示してから、(B)塑性圧縮を伴う軟化挙動を示すのに対し、砂では先に(B)塑性圧縮を伴う軟化挙動を示してから(A)塑性膨張を伴う硬化挙動を示す。(A)塑性膨張を伴う硬化は過圧密解消時に特徴的な挙動で、(B)塑性圧縮を伴う軟化は構造劣化時に特徴的な挙動であった。したがって、初期の①の状態から、粘土ではまず過圧密解消が顕著に進行し②の状態に至り、その後残った構造が劣化して最終的に④の状態に至る（道筋 C）。これに対し、砂では先に構造劣化が顕著に進行し③の状態に至り、その後残った過圧密が解消して最終的に④の状態に至る（道筋 S）と考

えられる。

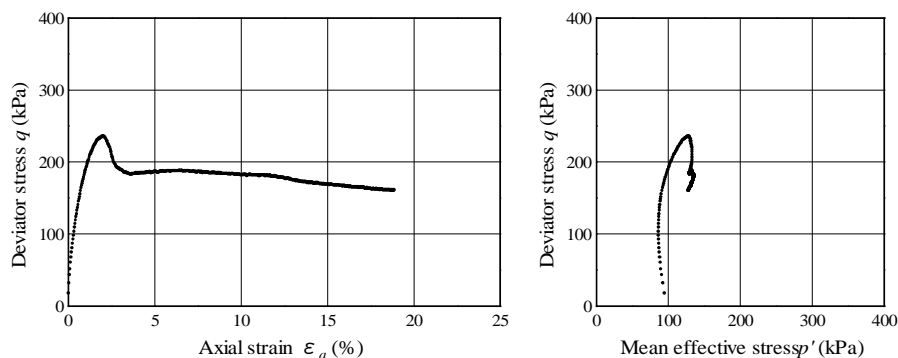


図 A3.36 構造を有する過圧密粘土の非排水三軸圧縮試験 (after Asaoka et.al., 2000²⁷⁾)

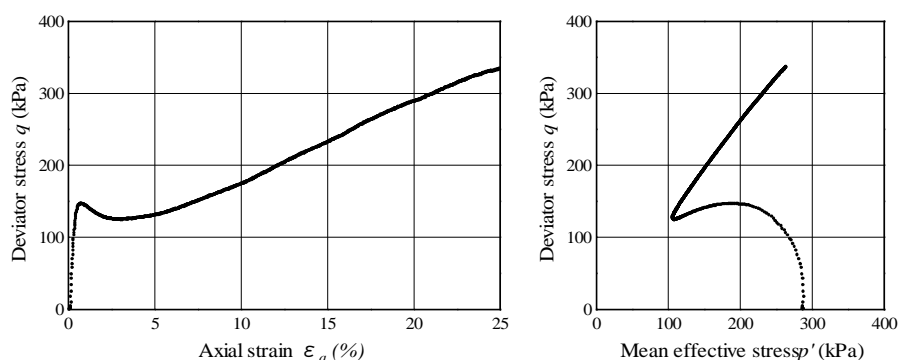


図 A3.37 中詰め砂の非排水三軸圧縮試験 (after Nakano et.al, 2004²⁶⁾)

(3) 上・下負荷面カムクレイモデルによる粘土と砂の挙動のシミュレーション

上・下負荷面カムクレイモデルでは、過圧密の解消の速さは R の発展則パラメータ m で支配され、構造の劣化の速さは R^* の発展則パラメータ a, b, c (通常は $b=1, c=1$) で支配される。だから、これらの値の違いによって、モデルは道筋 C でも道筋 S でも辿ることができる。つまり、粘土と砂で別々のモデルを用意する必要が全くない。以下では、上・下負荷面カムクレイモデルにて、実際に、構造の発達した過圧密粘土の非排水せん断挙動 (図 A3.36) や中詰め砂の非排水せん断挙動 (図 A3.37) を再現できることを示す。

(a) 構造の発達した過圧密粘土の非排水せん断挙動のシミュレーション

弾塑性パラメータと発展則パラメータは表 A3.1 に示すものと同じものを用いた。この発展則パラメータを使えば、過圧密は早く解消するが構造はなかなか劣化しない。それは計算例の中でも示す。だから表 A3.1 に示すパラメータは典型的な粘土に関するものである。初期値を表 A3.4 に示す。初期には構造が発達していてしかも過圧密である。

これらの値に対する非排水せん断時の上・下負荷面カムクレイモデルの応答を図 A3.38 に示す。過圧密の解消 ($R \rightarrow 1$) が卓越し、後からゆっくりと構造が劣化 ($R^* \rightarrow 1$) していく

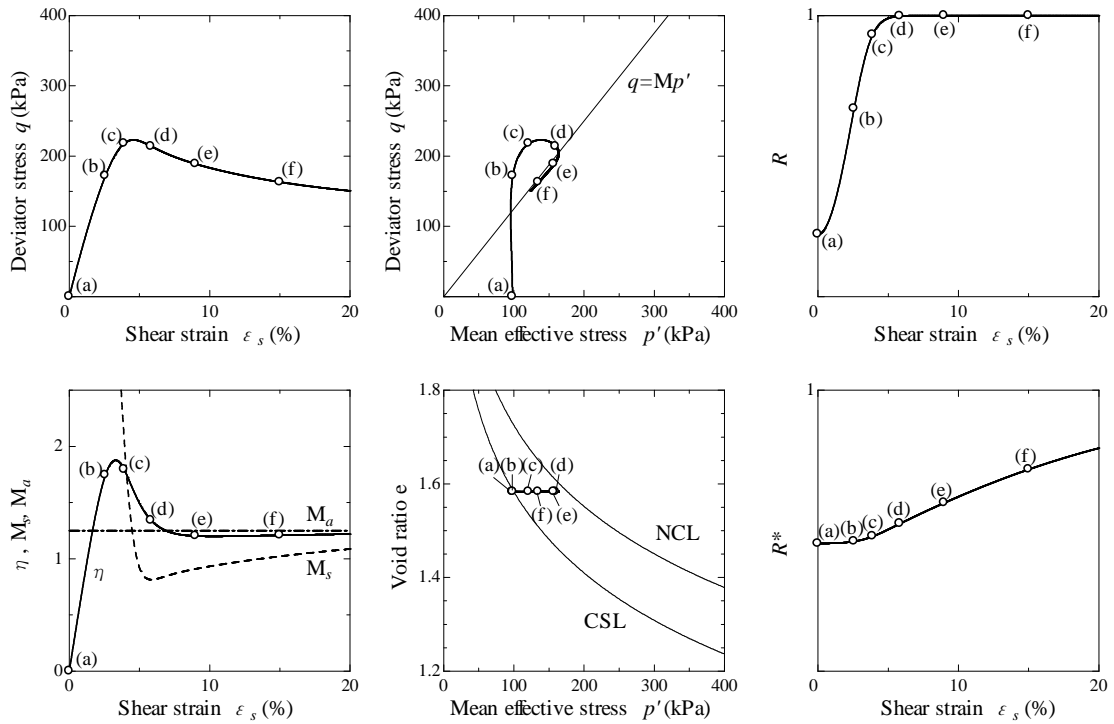


図 A3.38 構造を有する過圧密粘土の非排水せん断挙動のシミュレーション

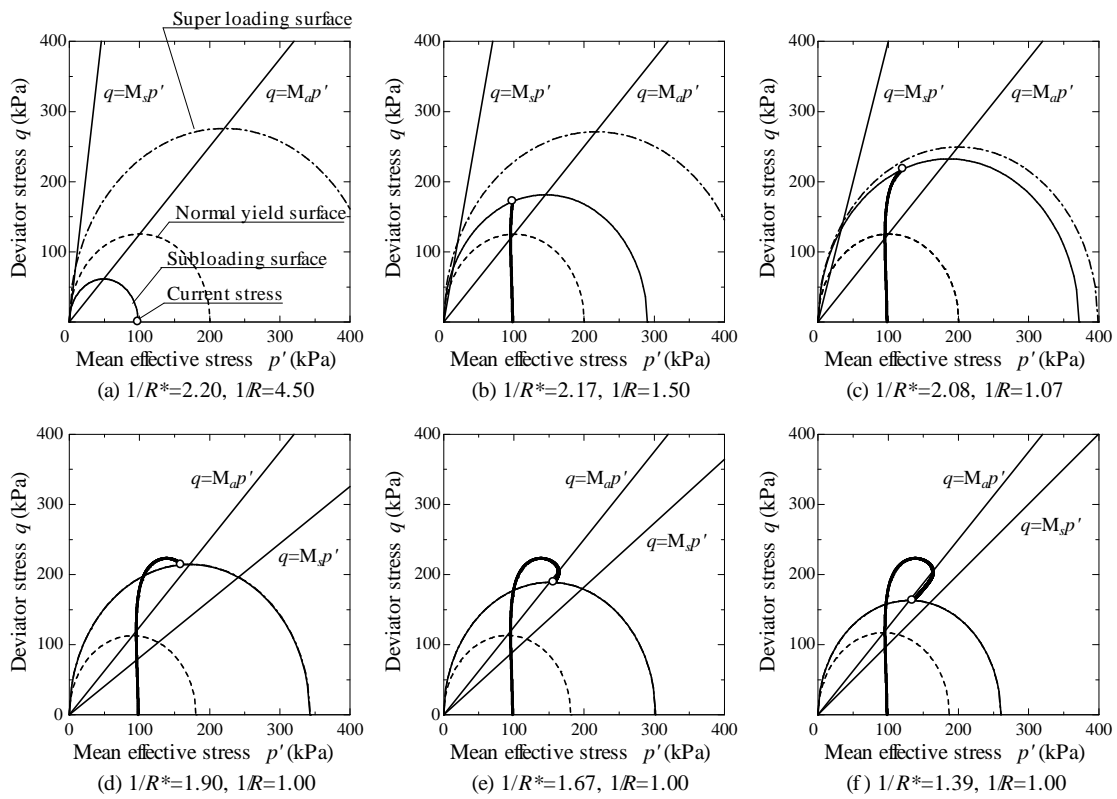


図 A3.39 構造を有する過圧密粘土の三つの負荷面の拡大・縮小と M_s , M_a の変動

様子を見ることができる。過圧密が解消した後もまだ残る構造のために、試験の後半で粘土が塑性圧縮を伴う軟化挙動を示すことが重要である。これは「巻き返し」^{28),27)}と呼ばれる挙動で、**図 A3. 36** に示す実験結果に対応している。**図 A3. 39** に有効応力経路と三つの負荷面の拡大縮小や M_s と M_a の変動の様子を示す。はじめは $M_a < M_s$ だから、応力状態が

$$M_a p' < q < M_s p' \quad (\text{A3.95})$$

になっても塑性膨張を伴いながらもなお硬化を示す。ところが過圧密の解消（上負荷面と下負荷面の漸近）は早く進み、 M_s は急速に降下して、やがて $M_s < M_a$ となるから、応力状態が

$$M_s p' < q < M_a p' \quad (\text{A3.96})$$

になると、塑性圧縮を伴う軟化に転じる。塑性変形がさらに進展すれば、構造劣化（上負荷面と正規降伏面の漸近）が進行し、 M_s は今度は上昇する。究極的には $M_s = M_a$ となって、最後は $q = M_a p'$ の上で限界状態に達し、せん断ひずみの進行に対し有効応力は変化しなくなる。

表 A3. 4 初期値（構造の発達した過圧密粘土）

鉛直有効応力 σ_{v0}' (kPa)	98.1
構造の程度 $1/R_0^*$	4.50
過圧密比 $1/R_0$	2.20
異方性の程度 $\zeta_0 = \sqrt{3/2 \beta_0 \cdot \beta_0}$	0.00
側圧係数 $\sigma_{h0}' / \sigma_{v0}'$	1.00

図 A3. 40 に初期に構造が発達し過圧密な状態にある典型的な粘土の M_s の変動の様子を模式的に示す。典型的な粘土が先に塑性膨張を伴う硬化を生じ、後から塑性圧縮を伴う軟化を生じることの仕組みが、この図を見ると改めて分かる。

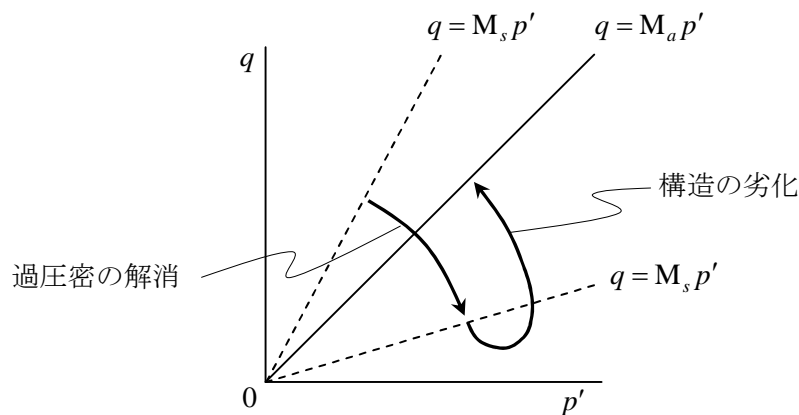


図 A3. 40 構造を有する過圧密粘土の M_s の変動パターン

(b) 中詰め砂の非排水せん断挙動のシミュレーション

解析に用いた弾塑性パラメータと発展則パラメータを表 A3.5 に示す。この発展則パラメータを使えば、先ほどとは対照的に過圧密の解消速度に比べ構造の劣化速度が卓越する。このことは、今度もやはり計算例の中でも確認できる。だから表 A3.5 に示すパラメータは典型的な砂に関するものである。初期値を表 A3.6 に示す。初期には構造が発達していても過圧密である。この状態がなぜ中詰め砂に相当するかは次節で理解できる。

これらの値に対する非排水せん断時の上・下負荷面カムクレイモデルの応答を図 A3.41 に示す。構造劣化 ($R^* \rightarrow 1$) が卓越し、後からゆっくりと過圧密が解消 ($R \rightarrow 1$) していく様子を見ることができる。先に塑性圧縮を伴う軟化を示してから、試験後半に塑性膨張を伴う硬化を示す点は、図 A3.37 に示す中詰め砂の実験結果によく似ている。図 A3.42 には有効応力経路と三つの負荷面の拡大縮小や M_s と M_a の変動の様子を示す。はじめは $M_s < M_a$ だから、応力状態が

$$M_s p' < q < M_a p' \quad (\text{A3.97})$$

になると塑性圧縮を伴う軟化を示す。ところが構造の劣化（上負荷面と正規降伏面の漸近）が先に進み、 M_s は急速に上昇して、やがて $M_a < M_s$ となり、応力状態が

$$M_a p' < q < M_s p' \quad (\text{A3.98})$$

になると、塑性膨張を伴う硬化に転じる。塑性変形がさらに進展すれば、過圧密解消（上負荷面と下負荷面の漸近）が進行し、 M_s は今度は降下する。究極的には $M_s = M_a$ となって、最後は $q = M_a p'$ の上で限界状態に達する。

図 A3.43 に中詰めの状態にある典型的な砂の M_s の変動の様子を模式的に示す。典型的な粘土の M_s の変動の様子（図 A3.40）とは対照的で、典型的な砂が先に塑性圧縮を伴う軟化を生じ、後から塑性膨張を伴う硬化を生じることの仕組みが改めて分かる。

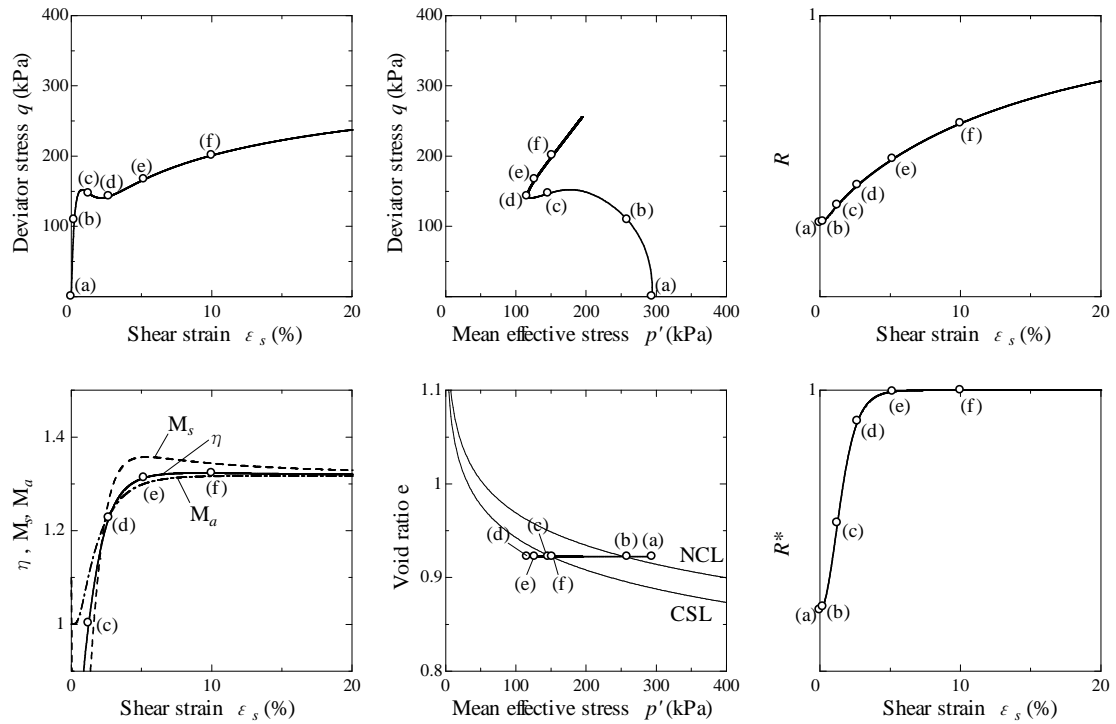


図 A3.41 中詰め砂の非排水せん断挙動のシミュレーション

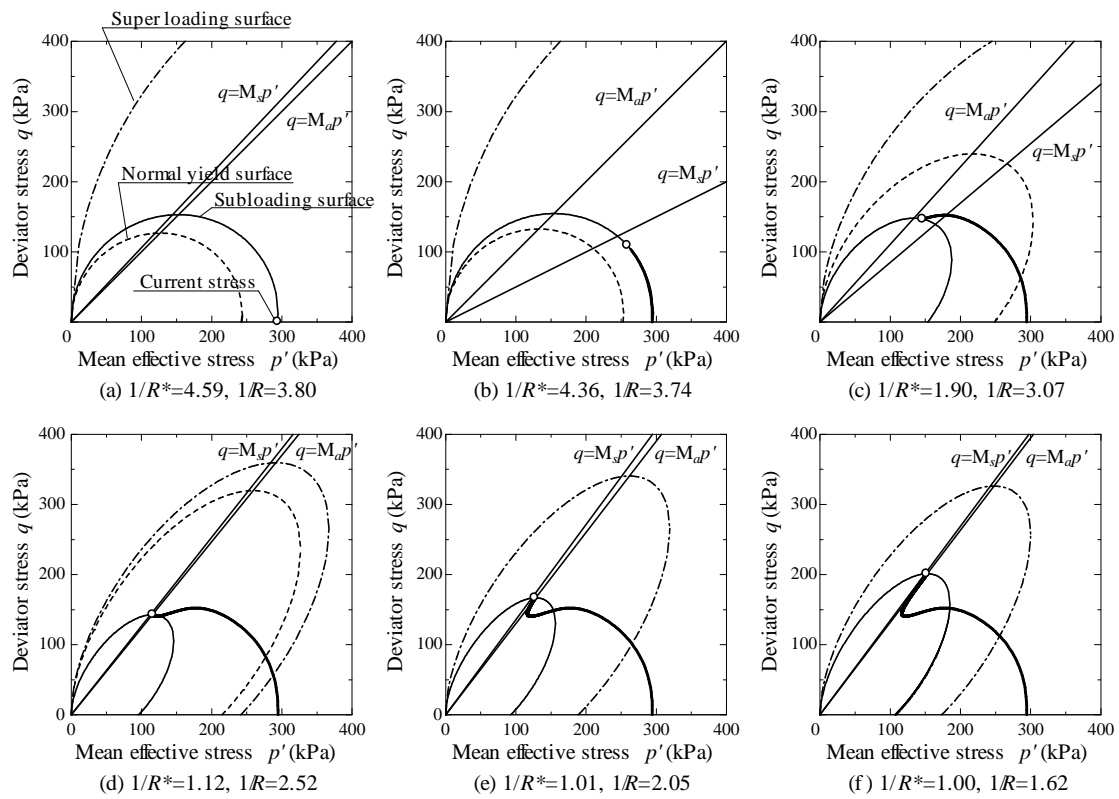


図 A3.42 中詰め砂の三つの負荷面の拡大・縮小と M_s , M_a の変動

表 A3.5 典型的な砂を想定した材料定数

〈弾塑性パラメータ〉		
圧縮指数 $\tilde{\epsilon}$		0.05
膨潤指数 $\tilde{\kappa}$		0.012
限界状態定数 M		1.0
NCL の切片* N		1.97
ポアソン比 ν		0.3
〈発展則パラメータ〉		
構造低位化指数 a ($b = c = 1.0$)		2.75
正規圧密土化指数 m		0.08
回転硬化指数 b_r		3.55
回転硬化限界定数 m_b		0.7

* $q = 0, p' = 98.1 \text{ kPa}$ における練返し粘土の正規圧密線

表 A3.6 初期値 (中詰め砂)

鉛直有効応力 σ_{v0}' (kPa)		294
構造の程度 $1/R_0$ *		4.59
過圧密比 $1/R_0$		3.80
異方性の程度 $\zeta_0 = \sqrt{3/2 \beta_0 \cdot \beta_0}$		0.009
側圧係数 $\sigma_{h0}' / \sigma_{v0}'$		1.00

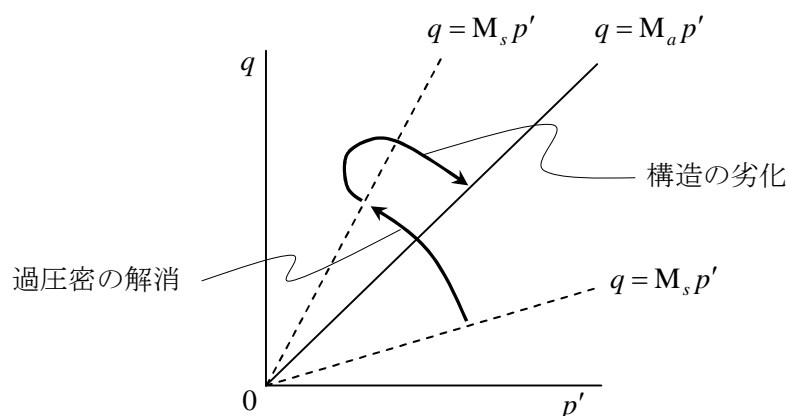


図 A3.43 中詰め砂の M_s の変動パターン

「塑性変形の進展によって、初期に①構造の発達した過圧密土が④練り返し正規圧密土へ変化する際に、典型的な粘土は過圧密の解消の方が構造の劣化よりも早く進むため、以下の道筋 C を辿るのに対し、典型的な砂は構造の劣化が過圧密の解消よりも早く進むため道筋 S

を辿る。」というのがここでの結論であった。このような典型的な粘土と砂の挙動を、構造の劣化速度と過圧密の解消速度のバランスをとることによって一つのモデルで表現できることは、今みた。

道筋 C： ①過圧密・構造あり → ②正規圧密・構造あり → ④正規圧密・構造なし

道筋 S： ①過圧密・構造あり → ③過圧密・構造なし → ④正規圧密・構造なし

さて、過圧密の解消も、構造の劣化も同じような速度で進行し、だから状態①から、②や③の状態を経ずに、状態④にゆく土も、想像できなくはない。clayey sand や sandy clay がこれに当たるかもしれない。先に述べた結論で、「典型的」という形容詞をつけているのは、このためである。粘土と砂を明確な一つの線で区別することは難しいが、上・下負荷面カムクレイモデルによれば、少なくとも弾塑性力学上はその必要もない。

A3.7 砂の挙動のシミュレーション^{1), 8), 10), 26)}

(1) $e - \log p'$ とは異なるもう一つの体積変化（圧縮）メカニズム

Prager の適応条件式（式(A3.54)）を少し変形して以下のように表す。

$$\dot{\varepsilon}_v^p (= -J \operatorname{tr} \mathbf{D}^p) = \dot{f} + MD \frac{\dot{R}^*}{R^*} - MD \frac{\dot{R}}{R} \quad (\text{A3.99})$$

この式は、土骨格の

- ① 構造の劣化（ $\dot{R}^* > 0$ ）が塑性体積圧縮を促し、逆に、
- ② 過圧密の解消（ $\dot{R} > 0$ ）が塑性体積膨張する向きに働く

ことを教える。（ただし、塑性体積圧縮が生じるか塑性体積膨張が生じるかは、応力比 η と M_a の関係によって決まるのであって、構造の劣化と並行して塑性膨張が生じることもあれば、過圧密の解消と並行して塑性圧縮が生じることももちろんある。）

さて、式(A3.14)から求められる土質力学、つまりは $\dot{\varepsilon}_v^p = \dot{f}$ と書ける土質力学を「 $e - \log p'$ の土質力学」と呼んだのであったから、以上のことは、構造の劣化や過圧密の解消を考慮したことで、「 $e - \log p'$ とは異なるもう一つの体積変化メカニズム」が与えられたことを意味する。ダイレタンシーを含めて $e - \log p'$ 以外のメカニズムで土の体積（間隙）変化が余分に生じ得ることは次のように分析することもできる。

式(A3.8)からカムクレイモデルの降伏面ないしは塑性ポテンシャル面（式(A3.14)）を導いたのとは全く逆の道筋を辿って、常に現応力状態が位置する下負荷面（式(A3.51)）から式(A3.8)に相当する式を導けば、次式のようになる。

$$v = N - \tilde{\lambda} \ln p' - (\tilde{\lambda} - \tilde{\kappa}) \ln \frac{M^2 + \eta^{*2}}{M^2} - (\tilde{\lambda} - \tilde{\kappa}) \ln R^* + (\tilde{\lambda} - \tilde{\kappa}) \ln R \quad (\text{A3.100})$$

上式の右辺第4項、第5項を除いた式は、修正カムクレイモデルのロスコー面と呼べるものである。したがって式(A3.100)は、構造が発達した土（ $0 < R^* < 1$ ）はロスコー面の上側、つまり練り返し土の不可能領域に状態をとり得ることを、逆に過圧密土（ $0 < R < 1$ ）はロスコー面の下側に状態をとり得ることを表して、つまりは同じ応力状態でも、構造の発達程度や過圧密度の違いによって様々な間隙比をとり得ることを示している。だから式(A3.100)からは、間隙比（比体積）を減少させるためには、構造を劣化させることの他に、過圧密土化させる方法もあることが分かる。

さて、構造の劣化に起因する高密度化も過圧密土化による高密度化も、粘土でも砂でももちろん生じる。しかし、比較的構造の劣化速度が小さく過圧密の解消速度が大きい粘土では、大荷重の荷重や除荷なしに高密度化させることは難しいのに対し、砂では、比較的構造劣化しやすく過圧密が解消しにくいために、小さな荷重の振幅を与えるだけで高密度化を生じさせることが出来る。後者のそれは、いわゆる砂の「締固め」に相当する。そのメカニズムは少し複雑なので、次に数値計算例を示しながら説明する。

(2) 砂の締固め

前節の砂は最初中詰めの状態に（状態①）にあったとしてその後の非排水せん断挙動を検討した。ここで検討する砂は、その砂と同じ砂ではあるが（同じ表 A3.5 に示すパラメータを用いるが）、しかし初期値が異なっていて、この砂は締固め前には、表 A3.7 で与える初期状態にあったとする。表 A3.7 は、この砂が最初「正規圧密で構造のある状態」、すなわち前節で言う②の状態にあることを意味する。この表 A3.7 は典型的なゆる詰め砂に相当することが、すぐに理解されるであろう。

さて、除荷すれば過圧密になるから、塑性変形の進展に伴い状態が①→②→④の順番で変化する典型的な粘土であっても、③の状態が存在しえるのは分かるとしても、構造は回復されない（蘇らない、あるいは、生き返らない）のだから、塑性変形の進展に伴い①→③→④の順序で変化する典型的な砂には状態②が考えられないと思うかもしれない。一方で、ゆる詰め砂がつかれないと主張する人はいないから、表 A3.7 が典型的なゆる詰め砂に相当することが分かれば、典型的な砂でも②の状態が存在し得ることは同時に理解できるであろう。

表 A3.7 初期値（ゆる詰め砂）

鉛直有効応力 σ_{v0}' (kPa)	294
構造の程度 $1/R_0^*$	130
過圧密比 $1/R_0$	1.00
異方性の程度 $\zeta_0 = \sqrt{3/2 \beta_0 \cdot \beta_0}$	0.00
側圧係数 $\sigma_{h0}'/\sigma_{v0}'$	1.00

側圧を一定 ($\sigma_2 = \sigma_3 = 294 \text{ kPa}$) にした、低いせん断応力 q での排水繰返し三軸圧縮・伸張試験を実施する。せん断応力振幅は 58.9 kPa である。このときの表 A3.7 の状態にある砂に関する、上・下負荷面カムクレイモデルの応答を図 A3.44 に示す。e-p' 関係がこの砂の著しい体積圧縮を表している。この図中の 2 本の線は、この砂の弾塑性パラメータ $\tilde{\lambda}$, $\tilde{\kappa}$, N , $\Gamma (= N - (\tilde{\lambda} - \tilde{\kappa}) \ln 2)$ を使って修正カムクレイモデルでの正規圧密線と限界状態線を書き込んだものである。これを見れば、古典土質力学における e-log p' 関係とダイレイタンシー $N - \Gamma \propto \tilde{\lambda} - \tilde{\kappa}$ に基づく土の圧縮理論が、砂の締固めには全く無力であることが理解される。

図 A3.45 は図 A3.44 の e-p' 関係を大きなスケールに俯瞰したものである。この図は、等方圧縮ではゆるい砂の高密度化を図ることがほとんど不可能であることを如実に物語っている。図 A3.45 は、過圧密比の定義のためには「過去に負荷された最大荷重」の概念が必要でないことを示す点でも重要である。これを次に調べる。

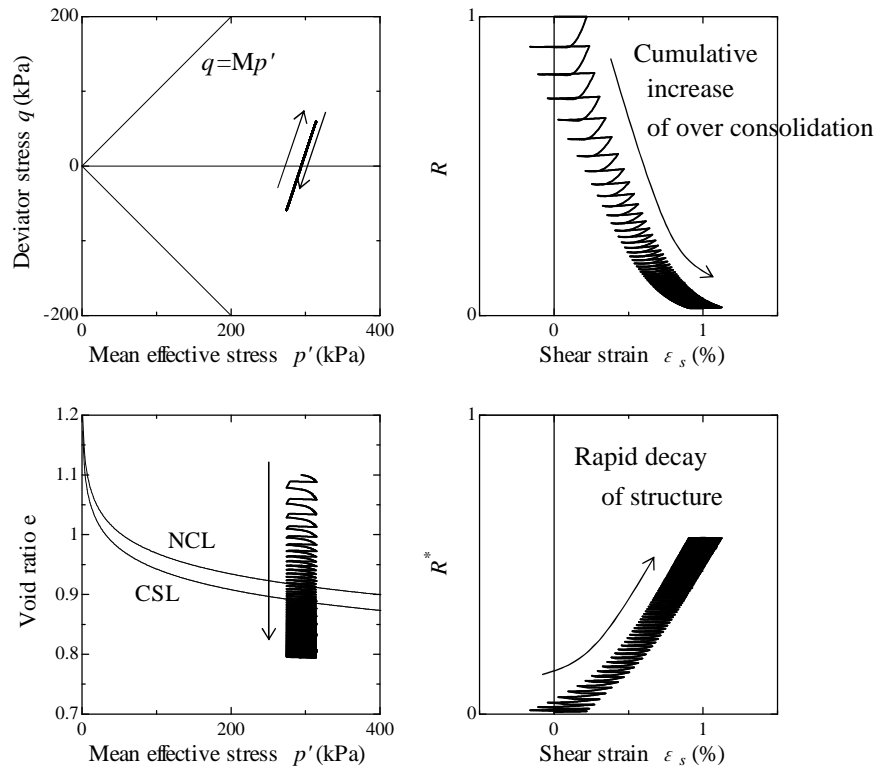


図 A3.44 砂の締固め

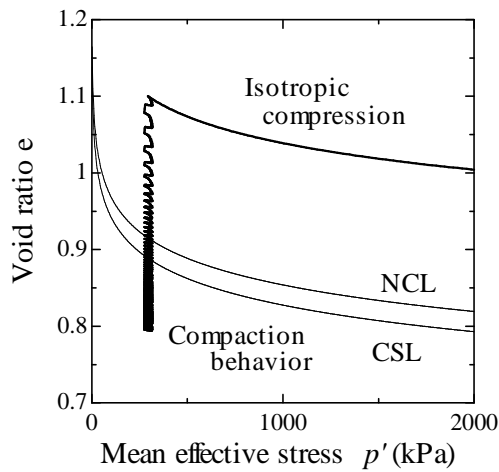


図 A3.45 砂の締固めと等方圧縮

繰返しせん断の第3サイクルにおける間隙比変化と R 、 R^* の変化を図 A3.46 に拡大して示す。負荷過程である(a)~(b)と(c)~(d)そして(e)~(f)で大圧縮が生じている。これらの大圧縮が構造劣化に起因するものであることは、式(A3.99)とこの間に R^* が増大することから理解される。一方、この負荷過程では、過圧密の解消は極めて小さいが、逆に除荷過程である(b)~(c)と(d)~(e)の過程において過圧密比 $1/R$ は増大する。繰返し载荷によって、構造は壊れる一方なのに過圧密が蓄積されて R が減少してゆく。これは図 A3.44 から読み取れる。

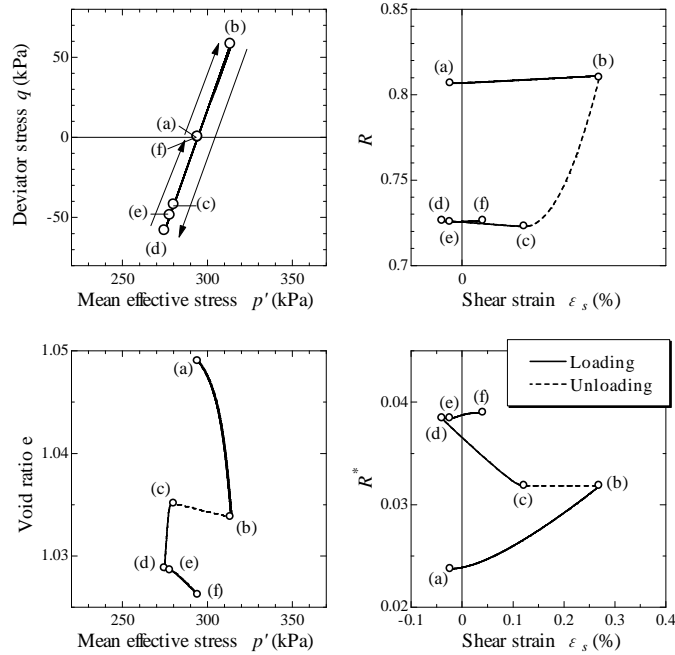


図 A3.46 砂の締固め (図 A3.44 の拡大図)

砂が負荷による過圧密の解消が遅いと言うのは、上負荷面と下負荷面の相似比がほとんど変化しないこと、つまりは負荷中に下負荷面の拡大率に上負荷面の拡大率が匹敵することを意味する。ところが、負荷によって拡大された上負荷面は除荷によってその大きさを変えないのに、下負荷面は除荷による現応力の減少に追従して縮小する。したがって、繰返し載荷が起きるたびに上負荷面はどんどん大きくなっていくのに対し、下負荷面の大きさはある範囲で大きくなったり小さくなったりを繰り返すだけである。かくして砂の場合は、過圧密比 (=下負荷面/上負荷面) が蓄積されていくのである。この様子を図 A3.45 に示しておく ((a) ~ (f) は図 A3.46 中の文字と対応)。

さて以上のように、砂の締固めの計算が成り立つのは、上負荷面概念と下負荷面概念の二つを導入した効果である。しかし、もしかすると下負荷面の効果などと言って少し違和感を覚える人もいるかもしれない。それはおそらく、先に「過圧密の解消は塑性体積膨張する向きに働く」ことを述べたからであろう。しかし、仮にカムクレイモデルなど古典的な弾塑性構成式で計算した場合には、 $e - \log p'$ 平面上で同じところを行ったり来たり (弾性応答) するだけで、塑性的な圧縮が何度も生じたり、過圧密がどんどん蓄積されていくことなどあり得ない。下負荷面導入の効果としては、正規降伏面内で塑性変形することを許したことが第一に重要で、「塑性体積膨張する向き」という表現をもう少し誤解のないように述べるには、「正規状態に比べて塑性体積圧縮を抑える向き」など別の表現にした方が良かったのかもしれない。下負荷面概念による「塑性」的な体積圧縮なくして繰返し負荷時の密度の増加はあり得ない。

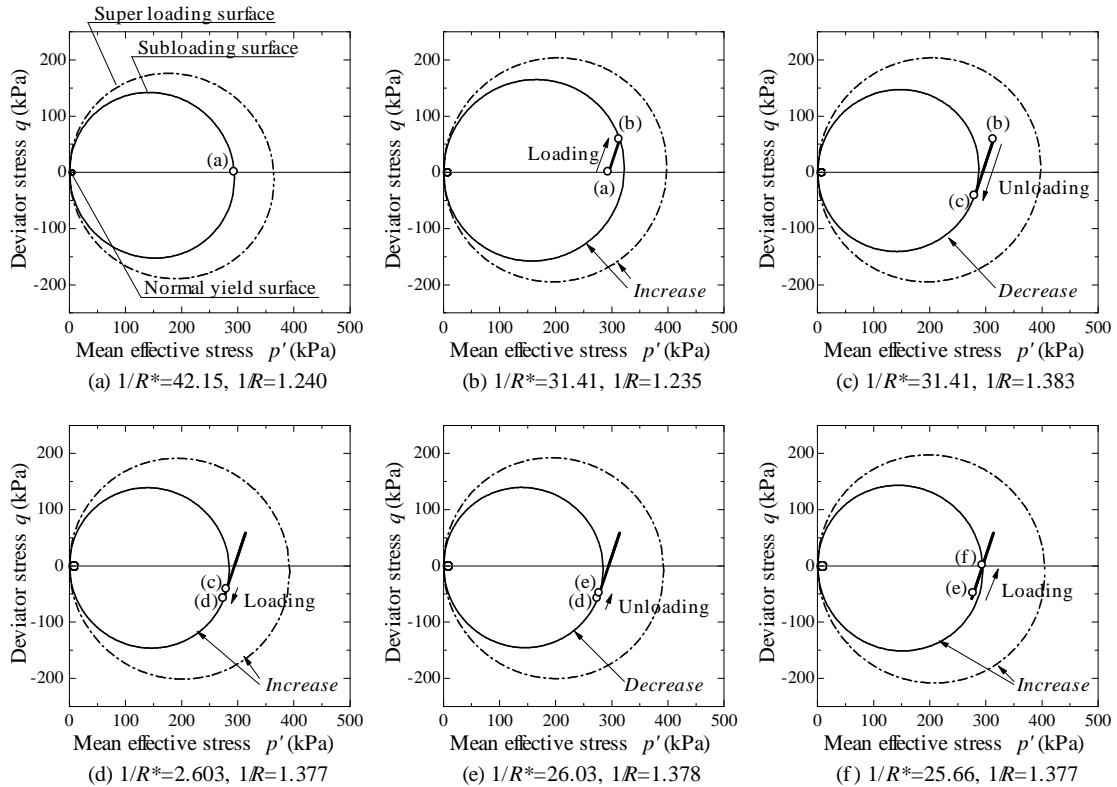


図 A3.47 繰返し負荷による上負荷面の拡大

(3) 密度の異なる砂の排水/非排水せん断挙動

図 A3.44 の $e-p'$ 関係をふたたび図 A3.48 に示す。図 A3.48 には初期状態から始まって締固め途中で得られる 5 つの繰返し載荷段階 [1] ~ [5] での砂の状態を間隙比 e, R, R^* で示している (n は繰返しせん断の回数を表す)。これを見れば

- [1] : ゆる詰め
- [2] : 比較的ゆる詰め (中詰め)
- [3] : 比較的密詰め (中詰め)
- [4] : 密詰め
- [5] : 超密詰め

であることがわかる。これら 5 つの砂は、すべて同じ砂からつくられている。すなわち [1] ~ [5] の 5 つの砂の状態は上・下負荷面カムクレイモデルに表 A3.5 の弾塑性パラメータ、発展則パラメータを与え、表 A3.7 の初期条件のもとで繰返しせん断での応答を計算することによって、自ずと出てきたものである。5 つの状態を、恣意的に想像して、勝手に与えたものではないことを強調する。(前節の中詰め砂の計算例の初期値は[3]の状態に相当する。)

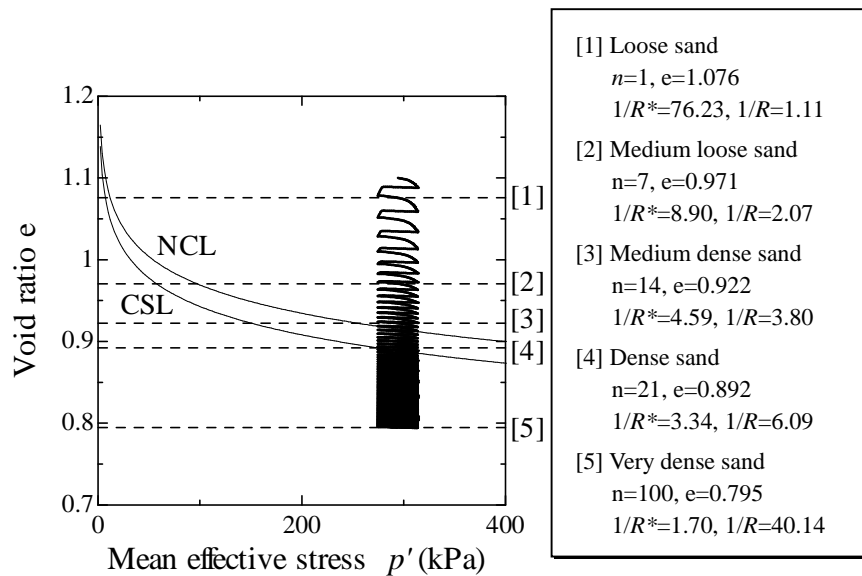


図 A3.48 締固めの 5 つのレベル

次に、この 5 つの砂が、非排水と排水の三軸圧縮試験でどのように応答するか計算してみる。

図 A3.49 は側圧一定の非排水三軸圧縮試験でのモデルの弾塑性応答を示している。これらの砂の応答は、すべて同一の弾塑性パラメータ (表 A3.5) から出てきたものである。5 つの砂の初期条件も、上で強調したように、同じ砂のゆるい状態から順に計算によって求めたものである。図 A3.49 に対応する実験結果を図 A3.50 に示す。定性的にも定量的にもよい対応を示している。これらの実験が示す傾向は、実験土質力学で古くから知られているものでもある。なお、図中には見慣れた図にするという目的のためだけに、通常、「変相線」と呼ばれる線を描き入れた。この線の傾きは 1.2 で限界状態定数 $M=1.0$ より大きい。さらに応力比の高いところには、いわゆる「破壊線」に相当するような線を引くこともできる。これらの線の傾きが異なるのは、せん断中にも異方性の発達に伴って塑性圧縮/膨張の境界線の傾き M_a が大きくなっていく影響である。実際に実験でいわゆる「変相線」や「破壊線」が浮かび上がってくることから、私たちは砂の異方性の発達速度が速いことを知ることができる。(しかし、だからと言って、それらの線自体に特別な意味づけをする気にはならない。)

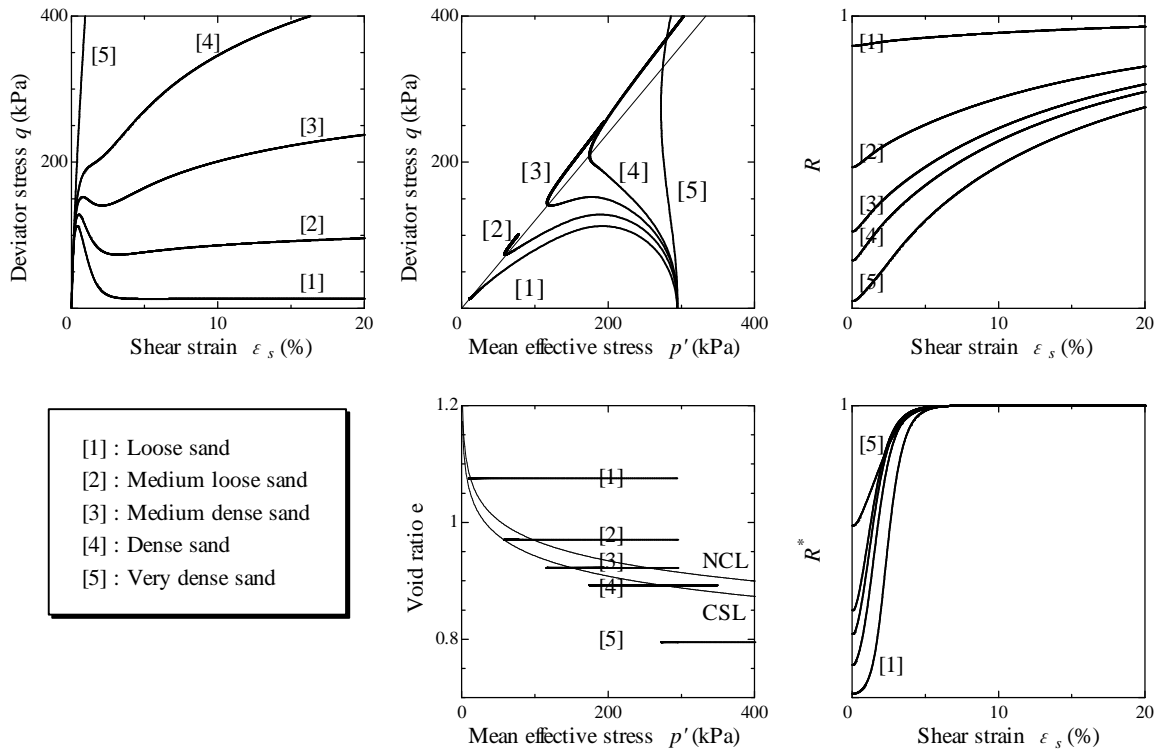


図 A3.49 締固め後の非排水せん断

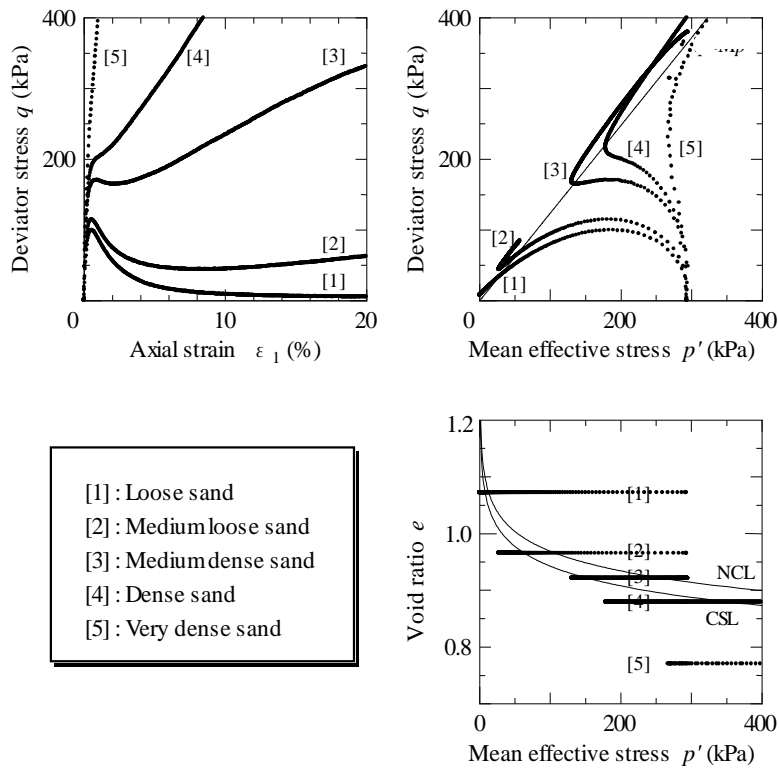


図 A3.50 密度の異なる砂の実験結果 (after Nakano et. al., (2004)²⁶⁾)

さて、砂と粘土の区別どころではなくて、単に砂についてだけでさえ、ゆるい砂と密な砂とで、同じ砂でも、密度や間隙比に応じて構成式とそのパラメータを別々に用意している研究者/研究グループがいる。これらの研究者/研究グループは、共通して、排水せん断についてはほとんど何も語っていない。排水条件では、とくにゆるい砂はせん断中に著しく体積変化を引き起こすからである。

図 A3. 48 の 5 つの砂の、側圧一定三軸排水せん断でのモデルの応答を図 A3. 51 に示す。図 A3. 51 が示す定性的傾向は、再び実験土質力学で古くから知られているものである。比較の必要があれば Bishop and Henkel (1962)¹⁸⁾の実験結果を参照されたい。

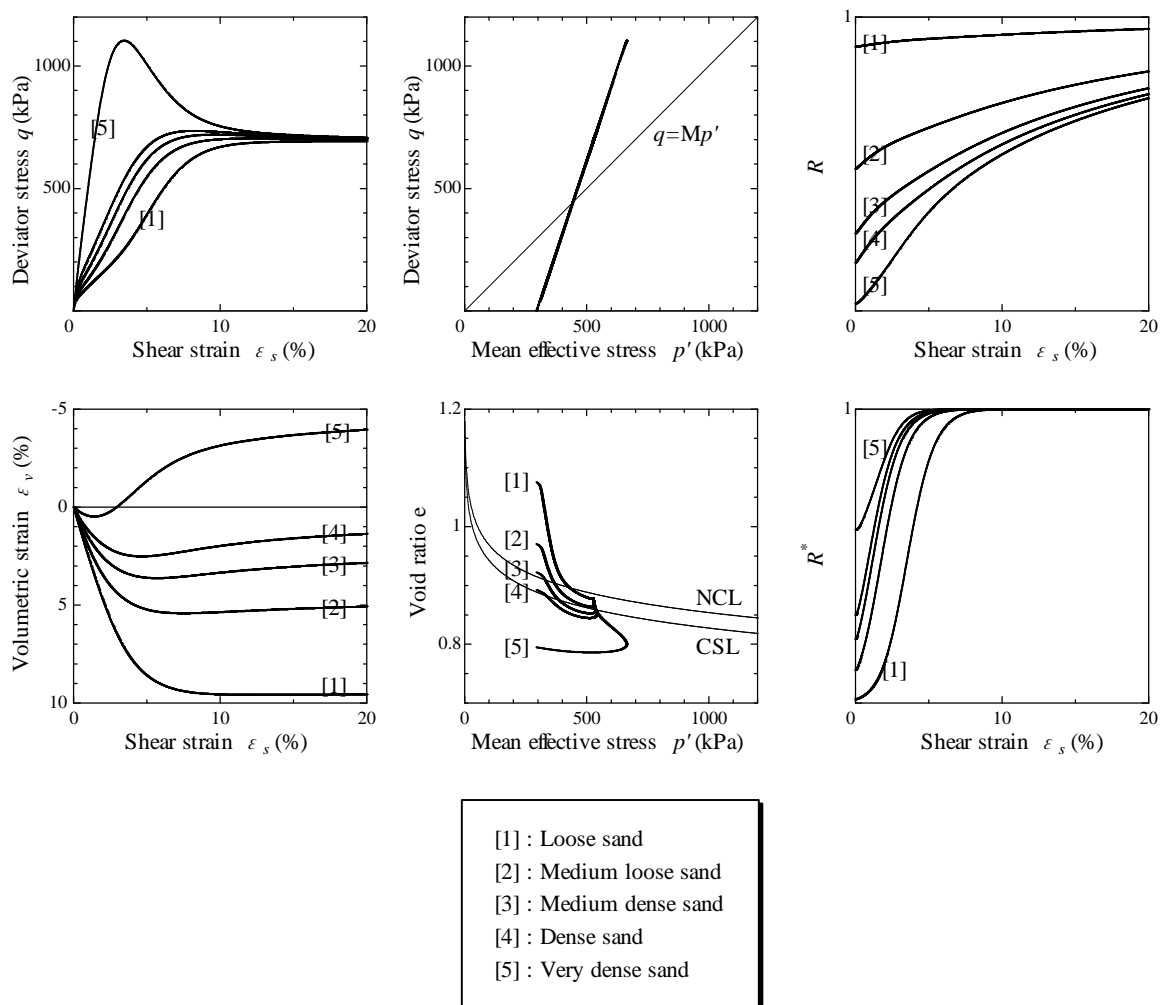


図 A3. 51 締固め後の排水せん断

参考文献

- 1) Asaoka A. (2003): Consolidation of clay and compaction of sand – An elasto-plastic description –, Keynote lecture, *Proc.of 12th Asian Regional Conf. on Soil Mechanics and Geotechnical Engineering*, Leung et al. Singapore, Aug., Vol.2, pp.1157-1195.
- 2) Roscoe, K. H., Schofield, A. N. and Wroth, C. P. (1958): On the yielding of soils, *Geotechnique*, Vol.8, pp.22-53.
- 3) Roscoe, K. H., Schofield, A. N. and Thurairajah, A. (1963): Yielding of clays in states wetter than critical, *Geotechnique*, Vol.13, pp.211-240.
- 4) Asaoka, A., Nakano, M. and Noda, T. (1994): Soil-water coupled behaviour of saturated clay near/at critical state, *Soils and Foundations*, Vol.34, No.1, pp.91-105.
- 5) 野田利弘 (1994): 限界状態近傍における粘土の弾塑性挙動と水～土骨格連成有限変形解析に関する研究, 名古屋大学学位請求論文.
- 6) Asaoka, A., Nakano, M. and Noda, T. (1998): Super loading yield surface concept for the saturated structured soils, *Proc. of the fourth European conference on numerical methods in geotechnical engineering NUMGE98*, pp.232-242.
- 7) Asaoka, A., Nakano, M. and Noda, T. (2000): Superloading yield surface concept for highly structured soil behavior, *Soils & Foundations*, No.40, Vol.2, pp.99-110.
- 8) Asaoka, A., Noda, T., Yamada, E., Kaneda, K. and Nakano, M. (2002): An elasto-plastic description of two distinct volume change mechanisms of soils, *Soils and Foundations*, Vol.42, No.5, pp.47-57.
- 9) Hashiguchi, K. (1978): Plastic constitutive equations of granular materials, *Proc. of US-Japan Seminar on Continuum Mechanics and Statistical Approaches in the Mechanics of Granular Materials (Cowin, S.C. and Satake, M. eds.)*, Sendai, JSSMFE, pp.321-329.
- 10) 中井健太郎 (2005): 構造・過圧密・異方性の発展則に基づく土の弾塑性構成式の開発とその粘土、砂、特殊土への適用性に関する基礎的研究, 名古屋大学学位請求論文.
- 11) Taylor, D. W. (1948): *Fundamentals of soil mechanics*, John Wiley, New York, pp.700.
- 12) Schofield, A. N. and Wroth, C. P. (1968): *Critical state soil mechanics*, McGRAW-HILL, London.
- 13) Parry, R. H. G. (1960): Triaxial compression and extension tests on remoulded saturated clay, *Geotechnique*, 10, pp.166-180.
- 14) Henkel, D. J. (1960): The relationships between the effective stresses and water content in saturated clays, *Geotechnique*, Vol.10, pp.41-54.
- 15) Atkinson, J. H. and Henkel, D. J. (1978): *The mechanics of soils*, McGRAW-HILL.
- 16) Muir Wood, D (1955): *Soil behavior and critical state soil mechanics*, Cambridge.
- 17) 三笠正人 : 土の工学的性質の分類表とその意義, 土と基礎, Vol.12, No.4, pp.17-24.
- 18) Bishop, A. W. and Henkel, D. J. (1962): *The measurement of soil properties in the triaxial test*, Edward Arnold, London.
- 19) Asaoka, A., Nakano, M. and Noda, T. (1997): Soil-water coupled behavior of heavily overconsolidated clay near/at critical state, *Soils & Foundations*, Vol.37, No.1, pp.13-39.

- 20) Druker, D. C. and Prager, W. (1952): Soil mechanics and plastic analysis on limit design, *Quarterly of applied mechanics*, Vol.10, No.2, pp.157-165.
- 21) Sekiguchi, H. and Ohta, H. (1977): Induced anisotropy and time dependency in clays, *Constitutive Equations of Soils (Proc, 9th Int. Conf. Soil Mech. Found. Eng., Spec. Session9)*, Tokyo, p.229-238.
- 22) Hashiguchi, K. and Chen, Z. P. (1998): Elastoplastic constitutive equations of soils with the subloading surface and the rotational hardening, *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, Vol.22, pp.197-227.
- 23) 橋口公一 (1990): 最新弾塑性力学, 朝倉出版, pp.1-205
- 24) Green, A. E. and Naghdi, P. M. (1965): A general theory of elasto-plastic continuum, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, Vol.18, pp.251-281.
- 25) Hashiguchi, K. (1989): Subloading surface model in unconventional plasticity, *Int. J. of Solids and Structures*, Vol.25, pp.917-945.
- 26) Nakano, M., Nakai, K. and Asaoka, A. (2004): A description of mechanical behavior of clay and sand based on evolutions of soil structure and overconsolidation, *Workshop on Testing Modeling and Simulation in Geomechanics*, ASCE.
- 27) Asaoka, A., Nakano, M. and Noda, T. (2001): The loss of structure and the decay of overconsolidation, *Proc. 15th Int. Conf. on Soil Mechanics and Geotechnical Engineering*, Istanbul, Turkey, pp.19-22.
- 28) Tatsuoka, F. and Kohata, Y. (1995): Stiffness of hard soils and soft rocks in engineering applications, *Proc. 1st Int. Conf. on Pre-failure Deformation Characteristics of Geomaterials*, Sapporo, Japan, 2, pp.947-1063.

A4 構成式のマトリクス表現

構成式を $\{\dot{\mathbf{T}}'\} = [D^{ep}]\{\mathbf{D}\}$ で表現する時、 $[D^{ep}]$ はつぎの手順により求まる。はじめに再度、SYS カムクレイモデルの弾塑性構成式を示しておく。

$$\dot{\mathbf{T}}' = \left(\tilde{K} - \frac{2}{3} \tilde{G} \right) (\text{tr} \mathbf{D}) \mathbf{I} + 2 \tilde{G} \mathbf{D} - \frac{(6 \tilde{G} \hat{\boldsymbol{\eta}} \cdot \mathbf{D} - \tilde{K} \alpha \text{tr} \mathbf{D})(6 \tilde{G} \hat{\boldsymbol{\eta}} - \tilde{K} \alpha \mathbf{I})}{12 \eta^{*2} \tilde{G} + \tilde{K} \alpha^2 + h} \quad (\text{A4.1})$$

ここに、

$$\tilde{K} = \frac{1+e}{\tilde{K}} p' (= \frac{J(1+e_0)}{\tilde{K}} p')$$

$$\tilde{G} = \frac{3(1-2\nu)}{2(1+\nu)} \tilde{K}$$

$$\alpha = M_a^2 - \eta^2$$

$$h = J p' \frac{M^2 + \eta^{*2}}{MD} (M_s^2 - \eta^2)$$

である。ここで、 $a = \tilde{K} - \frac{2}{3} \tilde{G}$, $b = 2 \tilde{G}$, $c = 6 \tilde{G}$, $d = \tilde{K} \alpha$, $e = 12 \eta^{*2} \tilde{G} + \tilde{K} \alpha^2 + h$ とおけば、上式は次式になる。

$$\dot{\mathbf{T}}' = a (\text{tr} \mathbf{D}) \mathbf{I} + b \mathbf{D} - \frac{(c \hat{\boldsymbol{\eta}} \cdot \mathbf{D} - d \text{tr} \mathbf{D})(c \hat{\boldsymbol{\eta}} - d \mathbf{I})}{e} \quad (\text{A4.2})$$

したがって、 $[D^{ep}]$ は次の形で表現される。

(1) 平面ひずみ問題の場合 ($D_{i3} = 0$, $i = 1, 2, 3$)

$$[D^{ep}] = [D_1^{ep}] - [D_2^{ep}] \quad (\text{A4.3})$$

とおくと、

$$[D_1^{ep}] = \begin{bmatrix} a+b & a & 0 \\ a & a+b & 0 \\ 0 & 0 & b/2 \end{bmatrix} \quad (\text{A4.4})$$

$$[D_2^{ep}] = \frac{1}{e} \begin{bmatrix} (c\hat{\eta}_{11}-d)^2 & (c\hat{\eta}_{11}-d)(c\hat{\eta}_{22}-d) & c\hat{\eta}_{12}(c\hat{\eta}_{11}-d) \\ & (c\hat{\eta}_{22}-d)^2 & c\hat{\eta}_{12}(c\hat{\eta}_{22}-d) \\ sym. & & (c\hat{\eta}_{12})^2 \end{bmatrix} \quad (A4.5)$$

(2) 軸対称問題の場合 ($D_{13} = D_{23} = 0$)

$$[D^{ep}] = [D_1^{ep}] - [D_2^{ep}] \quad (A4.6)$$

$$[D_1^{ep}] = \begin{bmatrix} a+b & a & 0 & a \\ a & a+b & 0 & a \\ 0 & 0 & b/2 & 0 \\ a & a & 0 & a+b \end{bmatrix} \quad (A4.7)$$

$$[D_2^{ep}] = \frac{1}{e} \begin{bmatrix} (c\hat{\eta}_{11}-d)^2 & (c\hat{\eta}_{11}-d)(c\hat{\eta}_{22}-d) & c\hat{\eta}_{12}(c\hat{\eta}_{11}-d) & (c\hat{\eta}_{11}-d)(c\hat{\eta}_{33}-d) \\ & (c\hat{\eta}_{22}-d)^2 & c\hat{\eta}_{12}(c\hat{\eta}_{22}-d) & (c\hat{\eta}_{22}-d)(c\hat{\eta}_{33}-d) \\ sym. & & (c\hat{\eta}_{12})^2 & c\hat{\eta}_{12}(c\hat{\eta}_{33}-d) \\ & & & (c\hat{\eta}_{33}-d)^2 \end{bmatrix} \quad (A4.8)$$

(3) 3次元問題の場合

$$[D^{ep}] = [D_1^{ep}] - [D_2^{ep}] \quad (A4.9)$$

$$[D_1^{ep}] = \begin{bmatrix} a+b & a & a & & & \\ a & a+b & a & & & 0 \\ a & a & a+b & & & \\ & & & b/2 & & \\ & & & & b/2 & \\ & & & & & b/2 \end{bmatrix} \quad (A4.10)$$

$$[D_2^{ep}] = \frac{1}{e} \begin{bmatrix} (c\hat{\eta}_{11}-d)^2 & (c\hat{\eta}_{11}-d)(c\hat{\eta}_{22}-d) & (c\hat{\eta}_{11}-d)(c\hat{\eta}_{33}-d) & c\hat{\eta}_{12}(c\hat{\eta}_{11}-d) & c\hat{\eta}_{23}(c\hat{\eta}_{11}-d) & c\hat{\eta}_{31}(c\hat{\eta}_{11}-d) \\ & (c\hat{\eta}_{22}-d)^2 & (c\hat{\eta}_{22}-d)(c\hat{\eta}_{33}-d) & c\hat{\eta}_{12}(c\hat{\eta}_{22}-d) & c\hat{\eta}_{23}(c\hat{\eta}_{22}-d) & c\hat{\eta}_{31}(c\hat{\eta}_{22}-d) \\ & & (c\hat{\eta}_{33}-d)^2 & c\hat{\eta}_{12}(c\hat{\eta}_{33}-d) & c\hat{\eta}_{23}(c\hat{\eta}_{33}-d) & c\hat{\eta}_{31}(c\hat{\eta}_{33}-d) \\ sym. & & & (c\hat{\eta}_{12})^2 & (c\hat{\eta}_{12})(c\hat{\eta}_{23}) & (c\hat{\eta}_{12})(c\hat{\eta}_{31}) \\ & & & & (c\hat{\eta}_{23})^2 & (c\hat{\eta}_{23})(c\hat{\eta}_{31}) \\ & & & & & (c\hat{\eta}_{31})^2 \end{bmatrix} \quad (A4.11)$$

ただし、弾性状態では $[D_2^{ep}] = 0$ である。

A5 一様変形場における構成式の解析手法

ここでは図 A5.1 に示すような、一様変形場で 3 軸圧縮・伸張条件を考え、構成式 (SYS モデル) を差分的に数値積分する方法について説明する。

この一様変形場を式で示せば次のようになる。

$$x_1 = X_1 - g(t)X_1 \quad (\text{A5.1})$$

$$x_2 = X_2 + \delta t X_2 \quad (\text{A5.2})$$

$$x_3 = X_3 - g(t)X_3 \quad (\text{A5.3})$$

これは、変位速度 δ (>0 、負の時は圧縮) で x_2 (X_2) 方向に変位させ、 x_1 (X_1) 方向と x_3 (X_3) 方向には、 $g(t)$ (>0 、負の時は圧縮) の変位速度で変位させることを意味している。このとき、変形勾配 $\mathbf{F} = \mathbf{F}(t)$ は、

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 1-g(t) & 0 & 0 \\ 0 & 1+\delta t & 0 \\ 0 & 0 & 1-g(t) \end{bmatrix} \quad (\text{A5.4})$$

となる。

ここで、一次元圧縮および、非排水条件、応力増分比 (\dot{q}/\dot{p}') 一定条件を仮定する。

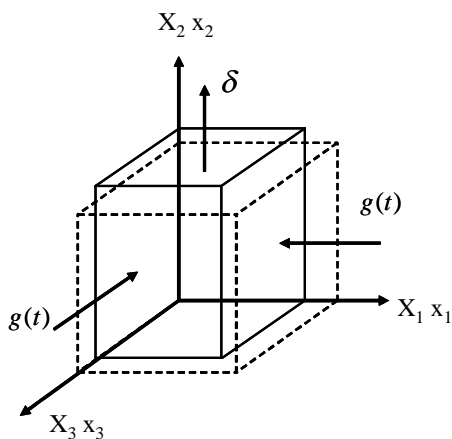


図 A5.1 一様変形場

(1) 一次元圧縮条件の時

一次元の変形を考え、 $x_1(X_1)$ 方向と $x_3(X_3)$ 方向には変形を与えないものとする。つまり、式(A5.4)に $g(t) = 0$ を代入すると

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \delta t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A5.5})$$

となり、 $\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1}$ からストレッチングテンソル $\mathbf{D} = 1/2(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T)$ を計算すると、次式が得られる。

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1 + \delta t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A5.6})$$

(2) 非排水条件の時

体積変化はないので、 $\det \mathbf{F} = 1$ より

$$\det \mathbf{F} = (1 - g(t))^2 (1 + \delta t) = 1 \quad (\text{A5.7})$$

となる。この式から $g(t)$ を δ で表すと以下のようなになる。

$$g(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \delta t}} \quad (\text{A5.8})$$

この $g(t)$ を用いて、式(A5.4)の変形勾配 $\mathbf{F} = \mathbf{F}(t)$ を書き直すと

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1 + \delta t}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \delta t & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1 + \delta t}} \end{bmatrix} \quad (\text{A5.9})$$

となり、一次元圧縮条件の時と同様に \mathbf{D} を計算すると次式が得られる。

$$\mathbf{D} = \frac{\delta}{2(1 + \delta t)} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (\text{A5.10})$$

(3) 応力増分比一定の時

式(A5.4)から \mathbf{D} を計算すると次式が得られる。

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{\dot{g}(t)}{1+g(t)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\delta}{1+\delta t} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\dot{g}(t)}{1+g(t)} \end{bmatrix} \quad (\text{A5.11})$$

軸対称条件下では、平均有効応力 p' 、せん断応力 q は次式で表される。

$$p' = -\frac{1}{3}(T'_{11} + T'_{22} + T'_{33}) = -\frac{1}{3}(2T'_{11} + T'_{22}) \quad (\text{A5.12})$$

$$q = -(T'_{22} - T'_{11}) \quad (\text{A5.13})$$

$\dot{q}/\dot{p}' = \mathbf{A}$ (一定) とすると、 \dot{T}'_{11} と \dot{T}'_{22} の関係は以下のようなになる。

$$(3 - \mathbf{A})\dot{T}'_{22} = (3 + 2\mathbf{A})\dot{T}'_{11} \quad (\text{A5.14})$$

この関係式を弾塑性構成式 (式(A6.)) に代入し、ストレッチングテンソルの成分 D_{11}, D_{22} について整理すると以下の関係式が得られる。

$$D_{11} = \frac{(3 + 2\mathbf{A})\left\{a - \frac{1}{e}(c\hat{\eta}_{11} - d)(c\hat{\eta}_{22} - d)\right\} - (3 - \mathbf{A})\left\{a + b - \frac{1}{e}(c\hat{\eta}_{22} - d)^2\right\}}{2(3 - \mathbf{A})\left\{a - \frac{1}{e}(c\hat{\eta}_{11} - d)(c\hat{\eta}_{22} - d)\right\} - (3 + 2\mathbf{A})\left\{2a + b - \frac{2}{e}(c\hat{\eta}_{11} - d)^2\right\}} D_{22} \quad (\text{A5.15})$$

ただし $a = \tilde{K} - \frac{2}{3}\tilde{G}$, $b = 2\tilde{G}$, $c = 6\tilde{G}$, $d = \tilde{K}\alpha$, $e = 12\eta^{*2}\tilde{G} + \tilde{K}\alpha^2 + h$ であり、 $\tilde{K} = \frac{1+e}{\tilde{\kappa}} p'$,

$\tilde{G} = \frac{3(1-2\nu)}{2(1+\nu)}\tilde{K}$, $\alpha = M_a^2 - \eta^2$, $h = Jp' \frac{M^2 + \eta^{*2}}{MD} (M_s^2 - \eta^2)$ である。

したがって式(A5.11)より

$$D_{22} = \frac{\delta}{1 + \delta t} \quad (\text{A5.16})$$

で与え、 D_{11} は D_{22} から計算する式(A5.14)で与えれば、所定の変形が得られる。

また、 $\text{tr}\mathbf{D} = 2D_{11} + D_{22}$ と $\dot{J} = J(\text{tr}\mathbf{D})$ を用いると、初期に $J = 1$ として

$$J = \exp\left(\int_0^t \text{tr}\mathbf{D} d\tau\right) = \exp\left(\sum \text{tr}\mathbf{D} \Delta t\right) \quad (\text{A5.17})$$

より J を計算することができる。

以上で求めた D をそれぞれ構成式 (式(A6.)) に代入し、

$$\mathbf{T}'_{i+1} = \mathbf{T}'_i + \dot{\mathbf{T}}'_i \Delta t \quad (\text{A5.18})$$

で差分的に数値 (時間) 積分していく。ここに Δt が 1 ステップ間隔、 \mathbf{T}'_i が i ステップ目の土骨格の有効応力、 $\dot{\mathbf{T}}'_i$ が i ステップ目の土骨格の有効応力速度を表す。この式は、両辺に応力を含む非線形な式であるので収束計算が必要になるが、本論文では各計算ステップにおける相当応力 $\mathbf{T}_e (= \sqrt{\mathbf{T}' \cdot \mathbf{T}'})$ の変化量の割合が、 10^{-8} 以下に収まることをその条件として課した。

また R (過圧密比の逆数)、及び R^* (構造の程度)、 β (異方性の程度) も同様に、

$$R_{i+1} = R_i + \dot{R}_i \Delta t \quad (\text{A5.19})$$

$$R^*_{i+1} = R^*_i + \dot{R}^*_i \Delta t \quad (\text{A5.20})$$

$$\beta_{i+1} = \beta_i + \dot{\beta}_i \Delta t \quad (\text{A5.21})$$

により差分的に求めている。

構成式の数値積分のフローチャートを図 A5.2 に示す。

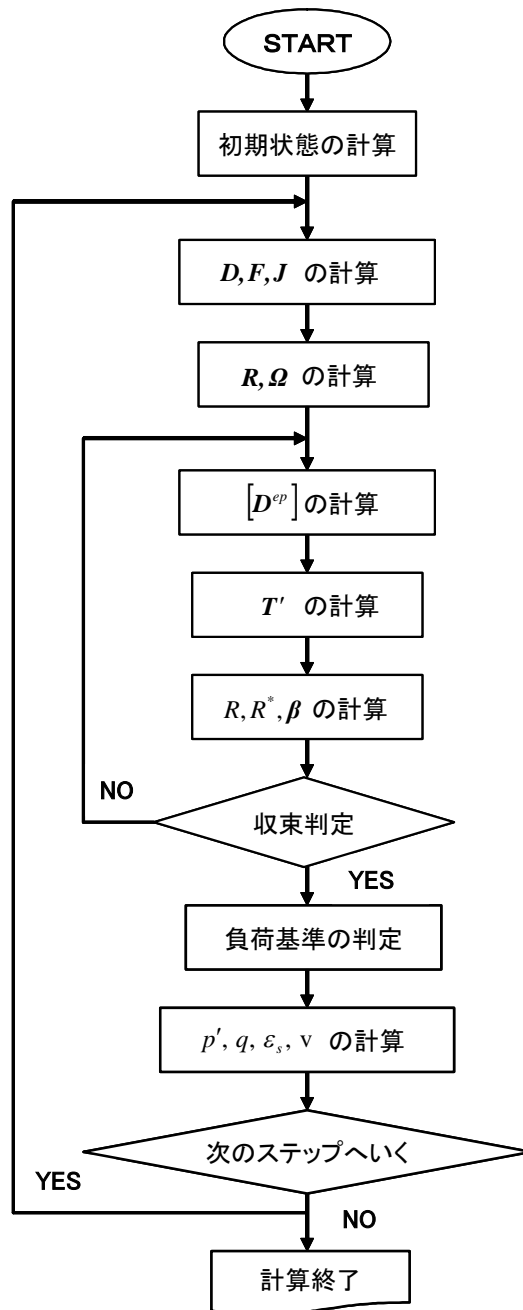


図 A5.2 構成式の数値積分のフローチャート

A6 有限要素法適用による要素の各種マトリクス M^i , K^i , L^i , L_c^i および $\{f^i\}$ の具体形

要素内部の任意の点の変位速度 \mathbf{v}^e を形状関数 N^k と要素の各節点の変位速度 \mathbf{v}^{e_k} ($k=1,2,\dots,p$; p は要素の節点数。平面ひずみ条件また軸対称条件の場合は $p=4$ 、三次元条件の場合は $p=8$) を用いて、次式で近似する。

$$\mathbf{v}^e = N^k \mathbf{v}^{e_k} \quad (\text{A6.1})$$

このとき、テンソル量またはベクトル量の成分の列ベクトル表現ならびにマトリクス表現に対して、それぞれ記号 $\{ \}$ ならびに $[\]$ を用いるものとし、

$$\{ \mathbf{v}^e \} = [N] \{ \mathbf{v}^i \} \quad (\text{A6.2})$$

$$\{ \mathbf{D} \} = [B] \{ \mathbf{v}^i \} \quad (\text{A6.3})$$

$$\{ \mathbf{L} \} = [M] \{ \mathbf{v}^i \} \quad (\text{A6.4})$$

$$\text{tr} \mathbf{D} = [B_v] \{ \mathbf{v}^i \} \quad (\text{A6.5})$$

$$\{ \mathbf{v}^i \} = \{ \mathbf{v}^{e_1 T} \ \mathbf{v}^{e_2 T} \ \dots \ \mathbf{v}^{e_{(p-1) T}} \ \mathbf{v}^{e_p T} \}^T \quad (\text{A6.6})$$

として要素内の幾何的諸量を表すとき、式(A2.22)の M^i , K^i , L^i および $\{f^i\}$ は次のように表す。

$$M^i = \int_v \rho [N]^T [N] dv \quad (\text{A6.7})$$

$$K^i = \int_v [B]^T [D^{ep}] [B] dv + \int_v [M]^T [T_1] [M] dv + \int_v \rho^f [N]^T ([N] \{ \dot{\mathbf{v}}^i \} - \{ \mathbf{b} \}) [B_v] dv \quad (\text{A6.8})$$

$$L^i = \int_v [B_v] dv \quad (\text{A6.9})$$

$$L_c^i = - \int_v \rho^f \frac{n}{K_f} [N]^T ([N] \{ \dot{\mathbf{v}}^i \} - \{ \mathbf{b} \}) dv \quad (\text{A6.10})$$

$$\{ f^i \} = \int_a [N]^T \{ \dot{\mathbf{s}}_i \} da - \int_v [B]^T \{ T'_\Omega \} dv \quad (\text{A6.11})$$

ここに、式(A6.8)中において、 $[D^{ep}]$ は弾塑性マトリクス、 $[T_1]$ は式(A2.22)の $(\text{tr} \mathbf{D}) \mathbf{T} \cdot \delta \mathbf{L} - \mathbf{T} \mathbf{L}^T \cdot \delta \mathbf{L}$ から得られるマトリクスである。また、式(A6.11)については、右辺第一項が式(18)から得られる要素 i の等価な表面力速度ベクトルであり、 $\{ T'_\Omega \}$ は式(A.22)右辺第二項の $(\boldsymbol{\Omega} \mathbf{T}' - \mathbf{T}' \boldsymbol{\Omega}) \cdot \delta \mathbf{D}$ より得られる列ベクトルである。

A7 水～土骨格連成式の物理モデル

式(A2.34)中の H^i は次式で与える。

$$H^i = \left[\alpha^{i_1} \cdots \alpha^{i_m} \cdots \alpha^{i_s} - \sum_{m=1}^s \alpha^{i_m} \right] \quad (\text{A7.1})$$

ここに、水～土骨格連成式（式(A2.24)）の α^{i_m} は、次のように不均質な場合（図 A7.1）を示しておく。

$$\alpha^{i_m} = \frac{k_i k_m}{k_i l_m^m + k_m l_i^m} \frac{\mathbf{l}^m \cdot \mathbf{n}^m}{l^m} S^m \quad (\text{総和はとらない}) \quad (\text{A7.2})$$

ただし、

- h^i : 要素 i の中心における全水頭
- h^m : 要素 m の中心における全水頭
- k_i : 要素 i の透水係数
- k_m : 要素 m の透水係数
- \mathbf{v}_i^m : 要素 i における要素 m に向かう間隙水の（相対）流速ベクトル
- \mathbf{v}_m^i : 要素 m における要素 i からの間隙水の（相対）流速ベクトル
- \mathbf{n}^m : 要素 i と要素 m の境界面にある 2 組の互いに向き合う 2 節点をつなぐ 2 つのベクトルで作られる平面を考える時、この平面に直行する（要素 i から見た外向き単位法線ベクトル）
- S^m : 要素 i と要素 m の境界面の重心を通り、法線ベクトル \mathbf{n}^m を有する平面にこの境界面を投影した時の面積
- \mathbf{l}_i^m : 要素 i の重心から見た要素 i と要素 m の境界面の重心への相対位置ベクトル
- \mathbf{l}_m^i : 要素 i と要素 m の境界面の重心から見た要素 m の重心の相対位置ベクトル

である。また、 s は隣接する要素の数で、3 次元条件の場合は $s=6$ 、2 次元平面ひずみ条件または軸対称条件の場合は $s=4$ である。

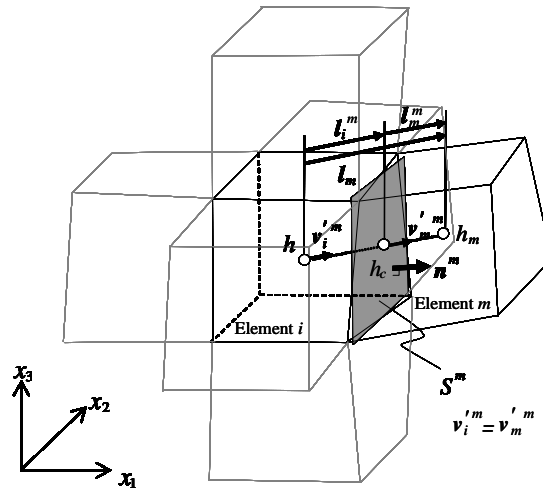


図 A7.1 間隙水の流れの物理モデル (3次元条件の場合)

図 A7.1 には3次元条件下での間隙水の流れのモデル化であるが、2次元平面ひずみ条件でも同様に式(A7.2)を用いることができる。ただし、その場合は、 n^i は要素 A と要素 i が共有する辺に垂直な外向き単位法線ベクトルであり、 S^i は共有する辺の長さに相当する。軸対称条件の場合は、2次元平面ひずみ条件のモデル化に加えて、回転対称軸からの要素または辺の中心までの距離を式(A7.2)に考慮する (Asaoka et al., 1994)。

参考文献

- 1) Asaoka, A., Nakano, M. and Noda, T. (1994): Soil-water coupled behaviour of saturated clay near/at critical state, *Soils and Foundations*, Vol.34,No.1, pp.91-106.

A8 有限要素による盛土の追加の方法

盛土の追加は次の二段階で行う。第一段階では、追加する盛土が重力場で水平に均質な状態にあると仮定して初期状態を計算し、盛土の形状・応力状態などを変えないで、盛土下面の変位境界を応力境界に変更し結合させる。第二段階では、盛土の形状や応力状態を変えないために必要な盛土に作用する表面力を計算し、それを逆向きに作用させる。以下にこの二つの計算方法について詳述する。なお以下では、重力は鉛直方向下向きに作用しているものとする。

はじめに水平方向に均質な盛土の初期状態の計算方法について説明する。堆積地盤のように水平に堆積し上面（地表面）に等分布荷重 δ が鉛直方向下向きに作用している土塊（盛土）を考え、この盛土は土粒子密度が ρ_s と水の密度が ρ_w の飽和土から構成されているとすると、上面 $z=0$ からの深さ $z=h_i$ における鉛直有効応力 σ'_v は次式で与えられる。

$$\sigma'_v = \delta + \int_0^{h_i} \frac{\rho_s - \rho_w}{1+e(z)} g dz \quad (\text{A8.1})$$

このとき、この土塊（盛土）が過圧密比 $1/R_0$ 、構造の程度 $1/R^*$ および異方性 ζ_0 を有し、なおかつ側圧係数 $K_0 = (3 - \eta_0)/(3 + 2\eta_0)$ ($\eta_0 = q_0/p'_0$)：初期応力比)で与えられる水平有効応力が作用した状態にあるとすると、SYS カムクレイモデルから次式が成立している。

$$1+e(h_i) = \bar{N} - \tilde{\lambda} \ln \frac{1+2K_0}{3} \times \sigma'_v \quad (\text{A8.2})$$

ここに、 \bar{N} は見かけの一次元圧縮曲線の切片であり、異方性の無い状態にある練返し正規圧密土の等方正規圧密線(NCL)の切片 N 、傾き $\tilde{\lambda}$ および膨潤線の傾き $\tilde{\kappa}$ を用いて、次式で表される。

$$\bar{N} = N - (\tilde{\lambda} - \tilde{\kappa}) \ln \left[\frac{M^2 + (\eta_0 - \zeta_0)^2 R^*}{M^2} \frac{R^*_0}{R_0} \right] \quad (\text{A8.3})$$

本論文では状態量として間隙比 e 、構造の程度 $1/R^*$ および異方性の状態 ζ_0 が既知で、過圧密比 $1/R_0$ は未知として考えるため、既知の $e(z)$ の深度分布に対し、式(A8.1)と式(A8.2)を満たす \bar{N} を式(A8.3)に代入し、 $1/R_0$ を求める。これにより、与える水平に堆積した土塊の応力や土の骨格構造の状態が全て決定される。

次に、上記の土塊（盛土）に作用している表面力の計算方法について説明する。追加する盛土は、その盛土の形状を保ったまま深さ方向に分布させるため、盛土の上面・下面および側面には盛土内の分布を与えるのに必要な表面力が作用している。したがって、その表面力を有限要素における表面の節点力として式(A-4.4)で計算する。

$$\int_a [N]^T \{t\} da = \int_v [B]^T \{T\} dv - \int_v \rho [N]^T (\{b\} - [N] \{\dot{v}^i\}) dv \quad (\text{A8.4})$$

ここに、 $[N]$ および $[B]$ は節点の変位を要素内の変位およびひずみに変換する N マトリクスおよび B マトリクス、 $\{t\}$ 、 $\{T\}$ 、 $\{b\}$ および $\{\dot{v}^i\}$ は、表面力の(全)応力テンソル、単位質量当たりの物体力、および要素の各節点の加速度の各成分の列ベクトル表現である。また、 ρ は飽和土の密度である。なお、この盛土载荷の場合は、慣性項すなわち $\{\dot{v}^i\}$ を含む項はゼロと見なしで計算する。

上記の方法によって算定された表面力を地盤の地表面と結合部分および盛土部の節点から取り除くことにより、盛土下面と地盤との結合面では盛土自重分の荷重が地盤に載荷され、また盛土法面ではあたかもその上に載っていた土の荷重分だけの「鉛直力」と側方から抑えられていた分の「側方力」が逆向きに与えられる。

参考文献

- 1) 竹内秀克, 高稲敏浩, 野田利弘(2006):飽和粘土地盤の圧密変形に及ぼす幾何学的非線形性の効果, 応用力学論文集, Vol.9, pp.539-550.

A9 地盤の初期状態の計算方法

A9.1 深さ方向に均質な初期過圧密比・構造・異方性を有する地盤の間隙比と応力の決定法

初期過圧密比 $1/R_0$ 、初期構造の程度 $1/R_0^*$ および初期異方性 ζ_0 を有した地盤の地表面に等分布荷重 δ が作用し、一次元圧縮状態（初期側圧係数 $K_0 = (3 - \eta_0)/(3 + 2\eta_0) = \text{一定}$ 、 η_0 : 初期応力比）にある時、深さ h_i における比体積 $v(h_i) = 1 + e(h_i)$ は、次式(A9.1)で表される。

$$N_0 - \tilde{\lambda} \ln \frac{1+2K_0}{3} \left[\delta + \int_0^{h_i} \left\{ \gamma_s \frac{1}{1+e(z)} + \gamma_w \frac{e(z)}{1+e(z)} \right\} dz - \gamma_w \right] = 1 + e(h_i) \quad (\text{A9.1})$$

ここに、 γ_s :土粒子の単位体積重量、 γ_w :水の単位体積重量、 $e(z)$: $z = z$ での間隙比、である。また、 N_0 は見かけの一次元圧縮曲線の切片であり、異方性の無い繰り返し正規圧密土の等方圧密試験より得られたNCLの切片 N 、傾き $\tilde{\lambda}$ 、膨潤線の傾き $\tilde{\kappa}$ を用いて、以下の式で表す。

$$N_0 = N - (\tilde{\lambda} - \tilde{\kappa}) \ln \left[\frac{M^2 + (\eta_0 - \zeta_0)^2 R_0^*}{M^2} \frac{R_0^*}{R_0} \right] \quad (\text{A9.2})$$

(A9.1)式より、

$$\delta + (\gamma_s - \gamma_w) \int_0^{h_i} \frac{dz}{1+e(z)} = \frac{3}{1+2K_0} \exp \left(\frac{N_0 - 1 - e(h_i)}{\tilde{\lambda}} \right) \quad (\text{A9.3})$$

さらに h_i で微分すると、次式が得られる。

$$\frac{de}{dh_i} = -\tilde{\lambda} \frac{1+2K_0}{3} \frac{\gamma_s - \gamma_w}{1+e(h_i)} \exp \left(\frac{e(h_i) + 1 - N_0}{\tilde{\lambda}} \right) \quad (\text{A9.4})$$

ここで $h_i = 0$ とおくと

$$e(0) = N_0 - 1 - \tilde{\lambda} \ln \frac{1+2K_0}{3} \delta \quad (\text{A9.5})$$

となり、地表面における間隙比が求まる。これにより、 $e(0)$ より深さ方向に少しずつ Newton-Raphson 法を用いて繰り返し計算を行いながら、深さ h_i にあるガウス点の $e(h_i)$ を決定する。

A9.2 深さ方向に均質な初期構造・異方性・間隙比を有する地盤の過圧密比と応力の決定法

水平方向に均質な地盤の間隙比 e の分布 $e=e(z)$ とともに、初期構造と初期異方性の分布がそれぞれ $R_0^* = R_0^*(z), \zeta_0^* = \zeta_0^*(z)$ で与えられているとする。また、この地表面に等分布な上載圧が作用しているとする。この時、深さ $z = h_i$ (地表面が $z=0$) において、次式が成立する。

$$N_0 - \tilde{\lambda} \ln \frac{1+2K_0}{3} \left[\delta + \int_0^{h_i} \left\{ \gamma_s \frac{1}{1+e(z)} + \gamma_w \frac{e(z)}{1+e(z)} \right\} - \gamma_w \right] dz = 1 + e(h_i) \quad (\text{A9.6})$$

ここに、 γ_s と γ_w は、それぞれ単体で見た時の土粒子と水の単位体積重量で、(少なくとも有限要素内で) 一定とすると、式(A10.6)は次式になる。

$$N_0 = 1 + e(h_i) + \tilde{\lambda} \ln \frac{1+2K_0}{3} \left\{ \delta + (\gamma_s - \gamma_w) \int_0^{h_i} \frac{dz}{1+e(z)} \right\} \quad (\text{A9.7})$$

ここに、式(A9.6)と式(A9.7)において、見かけの一次元圧縮曲線の切片 N_0 は、初期側圧係数 K_0 、異方性のない繰り返し正規圧密土の等方圧密試験より得られる NCL の切片 N とその傾き $\tilde{\lambda}$ 、ならびに膨潤線の傾き $\tilde{\kappa}$ を用いて、次式でも表すことができる。

$$N_0 = N - (\tilde{\lambda} - \tilde{\kappa}) \ln \left\{ \frac{M^2 + (\eta_0 - \zeta_0)^2}{M^2} \frac{R_0^*}{R_0} \right\} \quad (\text{A9.8})$$

したがって式(A9.7)に基づいて、地表面($z=0$)から、既知の $e(z)$ の分布を積分して求めた N_0 を式(A9.8)に代入し、これを R_0 について解けばよい。すなわち、

$$R_0 = \frac{M^2 + (\eta_0 - \zeta_0)^2}{M^2} R_0^* \exp \left(\frac{N_0 - N}{\tilde{\lambda} - \tilde{\kappa}} \right) \quad (\text{A9.9})$$

を求めればよい。

なお、 $z = h_i$ での有効鉛直圧 σ_v' は式(A9.6)または式(A9.7)で自明だが、次式で与えられる。

$$\sigma_v' = \delta + (\gamma_s - \gamma_w) \int_0^{h_i} \frac{dz}{1+e(z)} \quad (\text{A9.10})$$

参考文献

- 1) 高稲利弘(1999): 水～土骨格連成有限変形計算による過圧密地盤の進行性破壊の解析とその抑止工法に関する基礎的研究, 名古屋大学学位請求論文

A10 砂杭拡径による地盤改良の計算方法

砂杭拡径による地盤改良では、地盤内の所定の深さまで貫入したケーシングパイプの引上げと打戻しの繰返しによって砂杭が造成される。本論文では、ケーシングパイプ貫入後の引上げと打戻しの繰返しを有限要素法を用いた計算によって再現する。陸上での砂杭造成は、隣り合う砂杭の同時施工はないが、最も簡単な計算条件として砂杭の同時施工を仮定し、軸対称条件のもとで砂杭 1 本の造成過程を計算する。計算領域は改良対象としての杭周地盤とする。具体的な計算方法を以下に示す。

(1) ケーシングパイプの打戻し（拡径過程）

ケーシングパイプの打戻しによって砂杭は拡径される。砂杭の拡径は砂杭造成側の境界にあたる有限要素節点に水平方向に強制変位を与えることで再現する。砂杭 1 本あたりの施工実績を元にして、変位速度は 0.3cm/sec と設定する。また、強制変位は地盤深部の有限要素節点から順次与えていく。砂杭造成に用いるケーシングパイプの半径は $r_0=20\text{cm}$ で、造成した砂杭の半径は $r=35\text{cm}$ になる。したがって、ケーシングパイプ貫入後の砂杭造成による半径方向の拡径量は 15cm である。計算では、 15cm の拡径を 5 段階に分割し、1 段階あたり（すなわち 3cm ）を 10 秒で拡径する。

また、ケーシングパイプの打戻しにおいて、砂杭造成側の有限要素節点の鉛直方向は変位固定条件とする。そのために、これらの節点においては節点反力が生じる。

(2) ケーシングパイプの引上げ（除荷過程）

ケーシングパイプの引上げでは、ケーシングパイプと杭周地盤の境界にあたる有限要素節点において、打戻し工程において生じた鉛直方向の節点反力を 5 秒で除荷する。除荷する節点反力は A11 に示す。

(3) 打戻しと引上げの繰返しと圧密放置過程

計算では、(1) ケーシングパイプの打戻し、とその後の(2) ケーシングパイプの引上げ、を合わせて 1 ステップとし、地盤深部から順次繰返して所定の高さの砂杭を造成する。図 A11.1 は、砂杭拡径計算の概要を示す。砂杭造成後、杭周地盤内に発生した過剰間隙水圧が消散するまで圧密放置の計算を行う。

A11 「ケーシングパイプの引上げ」で除荷する等価節点力

有限要素表面に作用する表面力 \mathbf{t} と等価な節点力は次式で表される。

$$\int_a [N]^T [\mathbf{t}] da = \int_v [B]^T [\mathbf{T}] dv - \int_v \rho [N]^T [\mathbf{b}] dv \quad (\text{A11.1})$$

ここで、式(A11.1) の右辺第 1 項は、内部全応力 \mathbf{T} に相当する外力と等価な節点力、第 2 項は物体力 $\rho \mathbf{b}$ に等価な節点力である。また、 $[N]$ 、 $[B]$ はそれぞれ節点の変位を要素内の変位、ひずみに変換するマトリックス、 \mathbf{b} は重力作用方向に重力加速度 g の大きさを持つベクトルである。 ρ は土の密度で、土粒子の密度 ρ_s と水の密度 ρ_w 、間隙比 e を用いて次式で表すことができる。

$$\rho = \frac{\rho_s + e\rho_w}{1+e} = \frac{\rho_s - \rho_w}{1+e} + \rho_w \quad (\text{A11.2})$$

式(A11.2) を式(A11.1) に代入し、全応力 \mathbf{T} を有効応力 \mathbf{T}' と間隙水圧 u (応力は引張側を正、間隙水圧は圧縮側を正とする) に分けると次式になる。

$$\int_a [N]^T [\mathbf{t}] da = \int_v [B]^T [\mathbf{T}' - u\mathbf{I}] dv - \int_v \left(\frac{\rho_s - \rho_w}{1+e} + \rho_w \right) [N]^T [\mathbf{b}] dv \quad (\text{A11.3})$$

式(A11.3) から、有限要素表面に作用する表面力 \mathbf{t}' と等価な節点力を次式で定義する。

$$\int_a [N]^T [\mathbf{t}'] da = \int_v [B]^T [\mathbf{T}'] dv - \int_v \frac{\rho_s - \rho_w}{1+e} [N]^T [\mathbf{b}] dv \quad (\text{A11.4})$$

式(A11.4) の右辺第 1 項は内部有効応力 \mathbf{T}' に相当する外力と等価な節点力、第 2 項は有効単位体積重量 (水中単位体積重量) による物体力と等価な節点力を表す。砂杭拡径計算における「ケーシングパイプの引抜き」では、杭周地盤とケーシングパイプの境界に相当する有限要素節点において、式(A11.4) によって計算される等価節点力を除荷する。

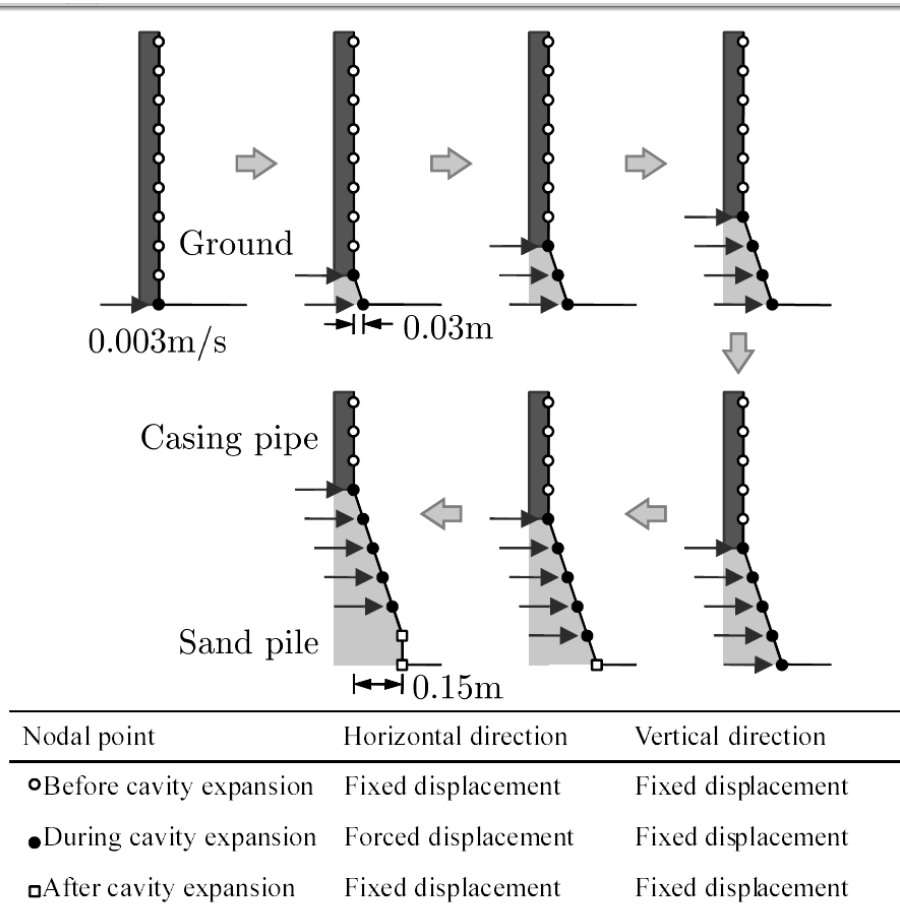


図 A11.1 砂杭拡径計算の概要

A12 高有機質土地盤の長期・大沈下に関する課題

高有機質土は、一般に高含水比で超軟弱であるため圧密降伏応力 p_c が小さく、盛土増加荷重 Δp によって、圧密降伏応力 p_c を大きく跨ぐため「安定」が問題となり、一般になんらかの地盤対策工が施される。そのため、旧日本道路公団においても、高有機質土地盤に無処理のまま施工した事例はなく、長期・大沈下の事例もない。

しかし、高有機質土は、無処理地盤における施工事例がないだけで、実際は長期・大沈下する可能性がある。その理由として、①高有機質土の二次圧密係数は、有機物含有量が 30% を超えると無機質土の 10 倍～20 倍と極めて大きな値を示す¹⁾ (なお、二次圧密沈下の大きさは、標準圧密試験の一次圧密終了後の沈下が時間の対数に対して直線表示できる性質を利用して、その直線部分の勾配を二次圧密係数として表される)。②高有機質土は、土粒子の骨格に加え、有機物の骨格が圧縮して排水されるという考えから、沈下は長期に亘りだらだらと続く²⁾、言われているからである。

そこで、実際に高有機質土を含む厚い軟弱地盤において、深部の高有機質土を無処理のまま盛土载荷を行った地区の、沈下の実態と将来沈下予測を行った事例を以下に示す^{3), 4)}。

舞鶴若狭自動車道の向笠地区は、ピートを含む軟弱層が 50m と厚く堆積し軟弱地盤対策が課題となったため、カードボードドレーン (CBD)、サンドドレーン (SD)、地盤改良による対策無し、の 3 種の試験盛土が 2006 年 2 月から盛り立てられた。図 A12.1 は SD 区間の地層横断面図を示すが、サンドドレーン (SD) の改良範囲は深さ GL-20m までで、深部の高有機質層は未改良である。なお、全ての区間で押さえ盛土は実施している。

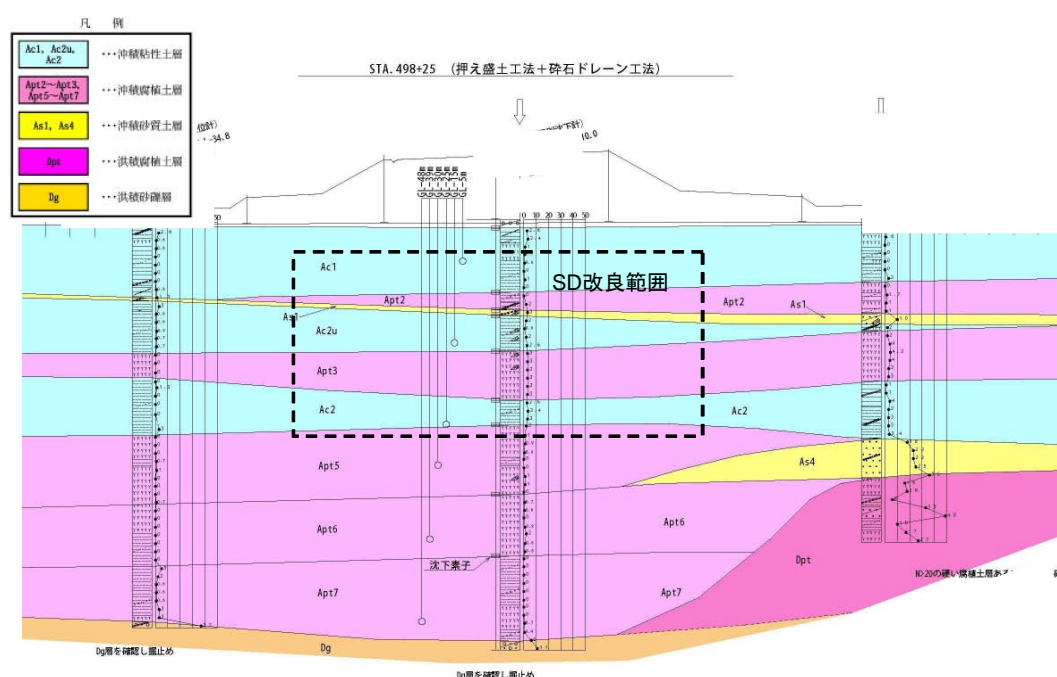


図 A12.1 向笠地区の SD 区間の地層横断面図

深部の高有機質層は、自然含水比が200%を超える軟弱な土であり、盛土前の圧密降伏応力が、通常の水圧分布より算定した有効土被り圧（図 A12.3 の黒色実線）よりも小さいという特異性も見られた。

図 A12.2 に各試験盛土の盛土中央における盛土高と沈下量を示す。盛土構築完了時点で非常に大きな沈下が発生し、最も軟弱層厚が大きいSD 区間では、盛土計画高約7mを確保するために、盛土厚（=盛土高+沈下量）が15mにも達した。盛土前の予測沈下量は、深部ピート層まで沈下対象領域とした場合に8.6m（SD部）であったが、それを大きく上回り、2010年1月現在、沈下量は約11mもの大沈下となり、4.0cm/月（SD部）の速度で進行中であり未だ収束傾向にない。

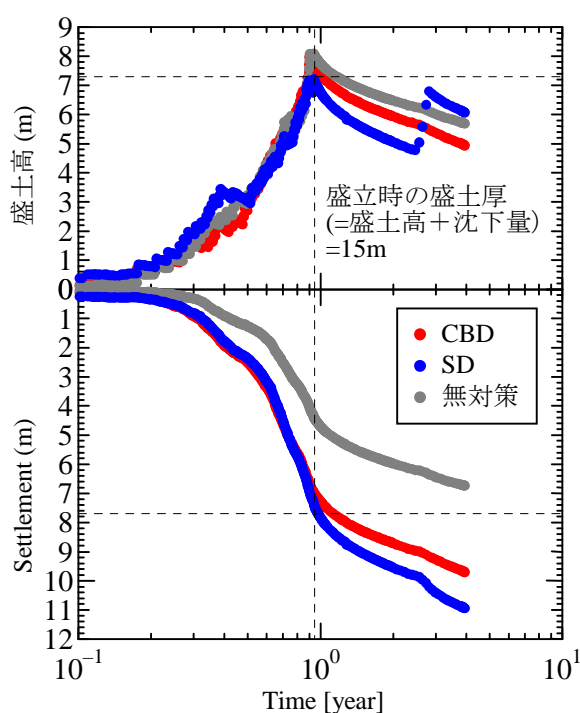


図 A12.2 盛土中央の時間～沈下の関係(実測値)³⁾

そこで、名古屋大学地盤力学研究グループにより、大沈下の発生メカニズムの解明と今後発生する沈下量の推定将来予測を目的とした解析が実施されることになり、初期状態を推定するために土質調査が実施された。図 A12.3 に示す間隙水圧の実測値、地盤内の圧密降伏応力分布を示す。当地区の地盤は、隆起・沈降が繰り返された結果、谷底が常に「被圧」した状態で有機物が厚く堆積して形成されたことが推定され、図 A12.3 の赤・青色実線で示すように、盛土载荷前の地盤内の水圧分布とそれに基づく有効土被り圧分布を算定した。そして、この結果を元に、地盤内の不均質性や乱れを考慮して初期状態を推定し、土の弾塑性構成式としてSYSカムクレイモデルを搭載した水～土骨格連成有限変形解析プログラム **GEOASIA**^{5),6),7)}を用いて沈下の再現および将来予測を行った。

- : 通常の静水圧分布（被圧考慮無し）の場合
- : Dg層の被圧を考慮（As1層のみ中間排水層として寄与）の場合
- : Dg層の被圧を考慮（As6層も中間排水層として寄与）の場合

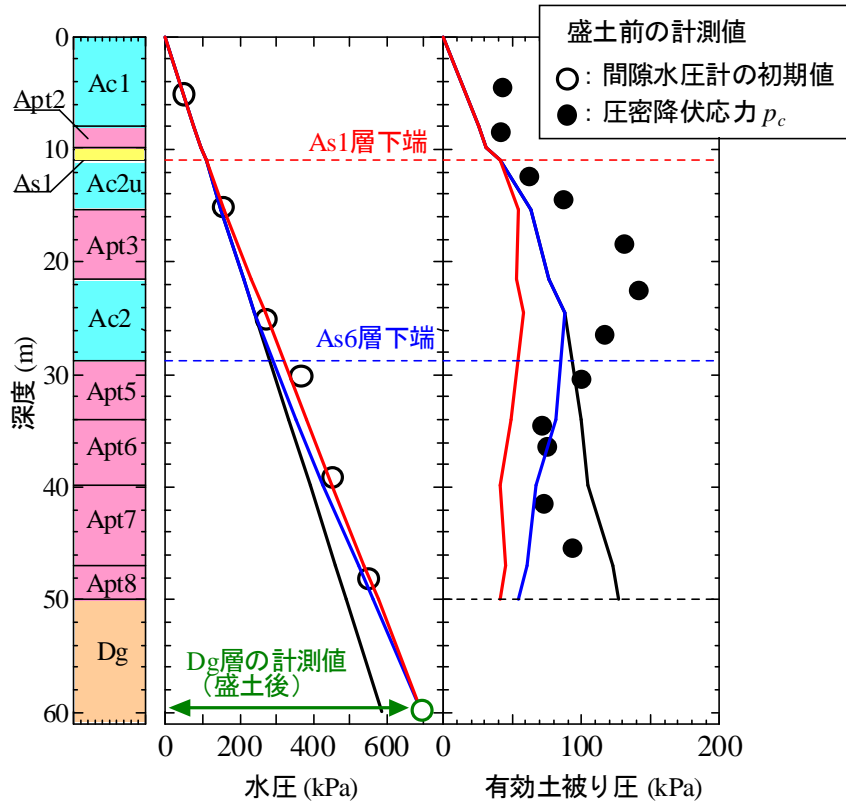


図 A12.3 推定した初期（盛土前）の水圧分布と有効土被り厚分布³⁾

図 A12.4 に、解析結果より得られた盛土中央における地表面沈下と層別沈下の経時変化を示す。現在までの大沈下挙動を再現するように原位置の初期状態・透水係数を決定し、そのまま同じパラメータで計算を続けることでその後の沈下挙動を予測した。本解析では、今後約 70 年に亘り約 1.5m の沈下が予測された。また、深部の高有機質層は、初期には大間隙を有し盛土载荷により急激な大圧縮を示すが、ある程度間隙が小さくなってくると透水性が極端に悪くなり過剰水圧がなかなか消散しないため、長期に亘る大沈下を引き起こすことが本解析より予想された。

当地区の高有機質土の圧縮指数比は 1.5 を超えるが、鋭敏比は 4 程度で小さな値であり、これは本論文で述べた簡易判定法によれば、長期・大沈下の可能性がない土に該当する。しかし、実際には上記の通り、長期に亘る大沈下が発生しており、この原因は高有機質土の鋭敏比の求め方に問題があると考えられる。粘土に比べて高有機質土は、

- ① 液性限界より自然含水比が小さく、また、繊維があることによって練返しが不十分となりやすいため、練返し強度が高くなる。
- ② 試料採取から試験までの間に乱れの影響が大きく、乱さない試料の強度は低くなる⁸⁾。という特徴を有するため、鋭敏比を小さく見積もる傾向にあると考えられる。すなわち、

実際の高有機質土は、実験から得られる鋭敏比から想定されるよりも、より高位な構造を有した状態にあることが推定され、この点に関しては今後の課題である。

以上のように、高有機質土の長期・大沈下挙動はまだ不確定な点が多くあるが、無処理地盤に盛土施工を行う場合には長期・大沈下する可能性があるため、事前に地盤対策をすることが望ましい。

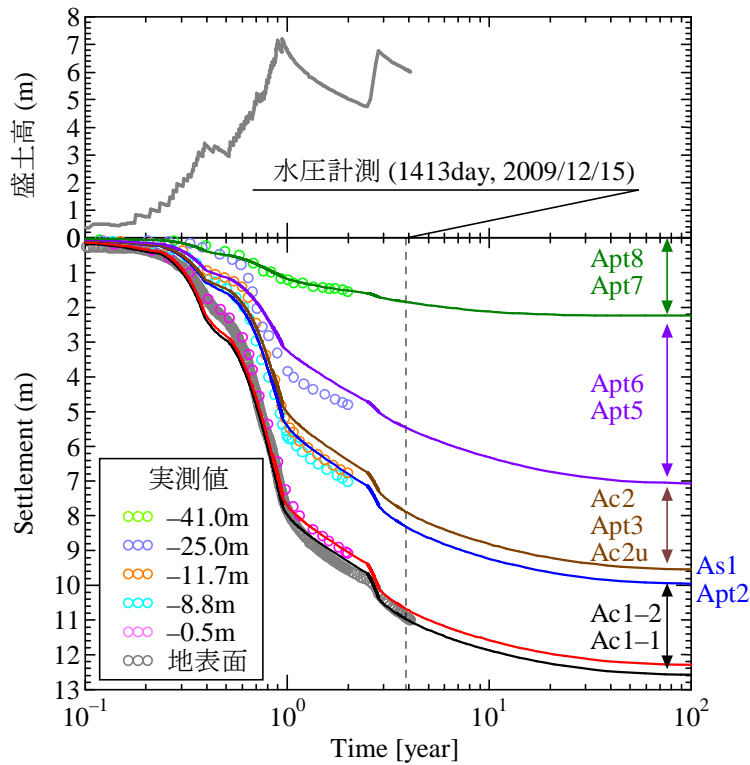


図 A12.4 盛土中央部の時間～沈下の関係(解析値)⁴⁾

参考文献

- 1) 小暮敬二, 大平至徳, 今福博文, 門田正順: 泥炭の一次元圧密沈下予測法に関する基礎的研究, 防衛大学理工学研究報告, 29 巻, 1 号, pp.111-122, 1991.
- 2) 松尾啓, 山口晴幸, 大平至徳: 泥炭の二次圧密係数について, 土質工学会論文報告集, 26(1), pp.139-150, 1986.
- 3) 稲垣太浩, 榊原和成, 山田耕一, 田代むつみ, 野田利弘, 中野正樹, 浅岡顕: 盛土載荷に伴い大変形を起こしたピートを含む超軟弱地盤の初期状態の推定, 第 45 回地盤工学研究発表会講演集, pp.751-752, 2010.
- 4) 田代むつみ, 野田利弘, 中野正樹, 浅岡顕, 稲垣太浩, 榊原和成, 山田耕一: 水～土連成有限変形解析によるピートを含む超軟弱地盤上盛土の残留沈下予測, 第 45 回地盤工学研究発表会

講演集,pp.749-750, 2010.

- 5) 旧日本道路公団:設計要領第一集 土工編 第5章 軟弱地盤上の盛土, p.5-10, 2005.
- 6) Asaoka, A., Nakano, M. and Noda, T. :Soil-water coupled behavior of saturated clay near/at critical state, *Soils and Foundations*, **34**(1), pp.91-105,1994.
- 7) Asaoka, A. and Noda, T.: All soils all states all round geo-analysis integration, International Workshop on Constitutive Modeling - Development, Implementation, Evaluation, and Application, Hong Kong, China, pp.11-27, 2007.
- 8) Noda, T., Asaoka, A. and Nakano, M.: Soil-water coupled finite deformation analysis based on a rate-type equation of motion incorporating the SYS Cam-clay model, *Soils and Foundations*, **48**(6), pp.771-790, 2008.
- 9) 三田地利之,対馬雅己:泥炭の一軸及び三軸強度に及ぼすサンプリング時の応力開放の影響, 高有機質土に関するシンポジウム論文集,pp.47-50,1989.