– 学位論文 –
QCD+QED 格子計算によるクォーク質量の決定

名古屋大学 大学院理学研究科 素粒子宇宙物理学専攻
宇野　隼平

平成 23 年 2 月 6 日

概 要

本論文では、QED+QCD の格子計算により軽いクォーク、アップクォーク、ダウンクォーク、ストレンジクォークの質量 (m_u, m_d, m_s) を決定する。本研究では QED を導入することにより、アップクォークとダウンクォークの質量差 $m_u - m_d$ の精密決定を可能としている。今回の格子計算は RBC/UKQCD により $2+1$ ドメインウォールフェルミオンを用いて生成された QCD の配位と、クエンチ近似格子 QED で別途生成した $U(1)$ 配位を組み合わせた $U(3)$ 配位を用いた。QED 配位は、本研究において定式化を行った有限体積中に 1 粒子状態を定義する QED を用いて生成された。この配位から、クォーク質量を決定するため、軽い中間子 (π^+, K^+, K^0) の質量を計算した。そのうち、$SU(3)$ のカイラル摂動論の適用範囲内から外れる K 中間子の質量をフィットするため、新たに $SU(2)$ のカイラル摂動論の定式化を行い、$O(\alpha_{\mathrm{em}} p^2)$ までの中間子の質量の解析的な式を求めた。電磁相互作用が長距離力であることに由来する中間子の質量における有限体積効果の評価を行うために、有限体積中の $O(\alpha_{\mathrm{em}} p^2)$ までのカイラル摂動論の表式を求めた。また、クォーク質量及び電磁相互作用に特に依存する量として、陽子-中性子質量差の電磁相互作用による寄与、$m_u \neq m_d$ による寄与を格子計算及びカイラル摂動論を用いた解析により第一原理から見積もった。

以上の解析から、まず、$SU(3)$ 及び $SU(2)$ のカイラル摂動論の低エネルギー定数の値を計算し、有限体積効果による影響、カイラル摂動論の展開の収束性を議論した。得られた低エネルギー定数から、アップクォーク質量 $m_u^{\overline{MS}} = 2.24\ (10)\ (34)$ MeV, ダウンクォーク質量 $m_d^{\overline{MS}} = 4.65\ (15)\ (32)$ MeV, ストレンジクォーク質量 $m_s^{\overline{MS}} = 97.6\ (2.9)\ (5.5)$ MeV を得た。ここで、$\overline{MS}$ の繰り込み点は 2 GeV である。また、得られたクォーク質量、低エネルギー定数から、荷電-中性パイ中間子の質量差の最低次の値 $(m_{\pi^+} - m_{\pi^0})_{\mathrm{QED}} = 3.38(23)$ MeV 及び次の次数までの値 $(m_{\pi^+} - m_{\pi^0}) = 4.50(23)$ MeV を計算した。ここで、次のオーダーの中性パイ中間子質量では、一部の項を含まない近似的な式を用いている。K 中間子の質量差における電磁相互作用からの寄与は $(m_{K^+} - m_{K^0})_{\mathrm{QED}} = 1.87(10)$ MeV, $m_u \neq m_d$ からの寄与は $(m_{K^+} - m_{K^0})_{(m_u - m_d)} = -5.840(96)$ MeV を得た。また、得られたクォーク質量を用いることで、陽子-中性子質量差に関しては、電磁相互作用からの寄与が $(m_p - m_n)_{\mathrm{QED}} = 0.383(68)$ MeV, $m_u \neq m_d$ による寄与が $(m_p - m_n)_{(m_u - m_d)} = -2.51(14)$ MeV、両者を合わせて、$m_p - m_n = -2.13(16)(70)$ MeV を得た。以上において 1 番目の誤差は統計誤差、2 番目の誤差 (存在するものは) 系統誤差を示している。

目 次

1　序論

1.1　低エネルギー QCD と標準模型を越える理論の検証

素粒子に対する現在の基本理論は、6 個のレプトン粒子、6 個のクォーク粒子とその間に働く力 (電磁力、弱い力、強い力) を記述する標準模型である [1,2]。このうちクォーク間に働く強い力を記述する QCD は、高エネルギーで相互作用が弱くなる性質 (漸近的自由性 [3,4])、クォークを単体では取り出すことが出来ないという性質 (カラーの閉じ込め [5]) をはじめとした他の力には無い非常に特徴的な性質を有する力学である。特に閉じ込の性質のため、クォークはそれ自身を単体で観測することは出来ず、メソン (クォークと反クォークの束縛状態) やバリオン (3 つのクォークからなる束縛状態) といったハドロンとして観測される。

QCD は、結合定数 α_s(ここでは $\overline{MS}$ による有効結合定数を意味するものとする) とクォーク質量 m_q をパラメータとして、クォークの力学を記述するゲージ理論である。QCD は高エネルギーの物理現象においては、通常の量子摂動展開を用いて計算した結果と実験との比較により、その正しさの検証、確認がなされてきた。これは、漸近的自由性により高エネルギーほど結合定数 α_s が弱くなり、量子摂動展開を比較的良い精度で行うことが出来るためである。

その一方で、QCD の結合定数は、低エネルギーになるにつれて強くなり、量子摂動展開では計算することが出来なくなる。そのため、クォーク質量 m_q や結合定数 α_s が与えられたとしても、低エネルギーのハドロン物理量、メソンやバリオンの質量などを解析的に計算することは出来ない。こうした低エネルギー QCD の効果により、実験の精度に比較して標準模型からの理論計算による予言の精度が低い物理量は数多く存在している。低エネルギーにおけるハドロン物理量の定量的な計算を行い、実験との比較を行うことは QCD が高エネルギーの摂動的な領域だけでなく、低エネルギーのハドロンの物理学までの幅広いエネルギー領域に適用可能な理論であることを確認するために必要不可欠である。

他方で、ハドロンの物理量は、標準模型を越える基礎的な理論 (大統一模型、超対称模型など) の検証を行う上でも重要な役割を果たす。QCD を含めた標準模型から定量的な予言を行い、実験値との比較を行うことで、標準模型を越える理論の存在を議論することが可能となる。特に標準模型を越える基礎的な理論の検証において重要な過程及び物理量として、

- K^0 崩壊における CP 対称性の破れ
- 陽子崩壊
- CKM 行列要素

などが挙げられる。これらは、それぞれハドロンやクォークに関連する過程、物理量であるため、実験値と摂動的な理論計算との直接的な比較を行うことが困難である。また、こういったハドロンが直接的に関連する物理量ばかりではなく、μ 粒子の異常磁気モーメントにおいても、輻射補正を通じて誘導される QCD からの寄与が誤差の主要な部分をしめており、実験との正確な比較を行うことが出来ていない状況がある。以上のような低エネルギー QCD に由来する困難を解決し、QCD の物理学に対して定量的な予言を与える可能性のある理論は、現在までのところ格子ゲージ理論を用いた数値計算のみである。

1.2　格子理論による物理量の決定

低エネルギー QCD を第一原理から計算可能な唯一の理論は、現在のところ格子ゲージ理論を用いた数値計算をおいて他に無い。格子理論は、対象とするゲージ系を有限体積の離散的な時空上に実現する場の量子論の定式化である。格子数値計算を行うことは、この仮想世界を計算機上につくりあげ、その世界での実験を行うということに相当している。格子ゲージ理論は、一度その定式化が与えられてしまえば、作用に含まれるパラメータである裸の結合定数 α_s、クォーク質量 m_q を与えることにより、(原理的には) 任意のハドロン物理量に対して数値計算を行うことが可能な非常に強力な理論である。

格子計算により、第 1.1 節に挙げたハドロンの関連する物理量を標準模型の第 1 原理から定量的に求めることが可能となった。例として、中性 K 中間子 K^0 の崩壊を特徴づける $|\epsilon_K|$ というパラメータを考える。この量は、標準模型の範囲内では

$$|\epsilon_K| = (\text{known factor}) \times B_K(\mu) \times f\left(\bar{\rho}, \bar{\eta}\right), \tag{1.2.1}$$

の形に書くことが出来る [6]。ここで、$f\left(\bar{\rho}, \bar{\eta}\right)$ は既知の関数であり、$\bar{\rho}$,$\bar{\eta}$ は CKM 行列の行列要素を示すパラメータである。B_K は実験や摂動計算からは良い制度で決定されていない量であり、

$$B_K(\mu) = \frac{\langle\overline{K^0}|\, \bar{d}\gamma_\mu\left(1-\gamma_5\right) s\, \bar{d}\gamma_\mu\left(1-\gamma_5\right) s\, |K^0\rangle}{\frac{8}{3} f_K^2 m_K^2} \tag{1.2.2}$$

と定義されている。この中で f_K,m_K は実験などにより良く決められているパラメータであるため、ハドロン行列要素 $\langle\overline{K^0}|\, \bar{d}\gamma_\mu\left(1-\gamma_5\right) s\, \bar{d}\gamma_\mu\left(1-\gamma_5\right) s\, |K^0\rangle$ を定量的に評価することが出来れば、CKM 行列要素のパラメータ $\bar{\eta}$ と $\bar{\rho}$ の関係式を得ることが出来る。このハドロン行列要素を格子計算で評価することにより、例えば [7–15] を初めとした多くの研究により、$|\epsilon_K|$ の値が見積もられている。

同様に他の物理量に対しても、CKM 行列要素 V_{us} に関しては、K 中間子のレプトン崩壊 $K \to l\nu$ の崩壊幅と格子計算により決定された崩壊定数 f_K/f_π の値を組み合わせて求める方法 [16–27] 及び格子計算から決定するパイ中間子-K 中間子の行列要素と K 中間子の半レプトン崩壊 $K \to \pi l\nu$ の崩壊幅を組み合わせて用いる方法 [28–33] により、格子計算を利用することでその値が得られている。また、陽子崩壊の崩壊率に関しても、例えば [34–36] などにおいて核子-真空のハドロン行列要素を格子計算で決定することにより計算されている。以上をはじめとした低エネルギーの QCD が関連する様々な物理量に対して、格子 QCD 計算により、非摂動的な QCD の力学を解くことで、定量的な予言を与えることが可能となっている。

1.3　基本パラメータの精密決定

以上の節で紹介した物理量をはじめとする、様々なハドロンに関連した標準模型の物理量が、これまでの多くの格子数値計算により定量的に見積もられてきた。近年の格子計算は、様々な発展 (例えば、計算機性能の向上、計算アルゴリズムの改善、格子誤差を少なくする新しい格子作用、有限体積効果の理論的な理解、非摂動繰り込みなど) により、その計算精度が飛躍的に上昇している。特に、核子やパイ中間子の質量などの物理量に関しては $O(1)\%$ 以下の誤差で計算されており [22,37–40]、格子理論を用いた標準模型からの予言と、多様な実験結果との精密な比較を行う環境が整いつつある。

こうした発展により、様々な物理量に対して誤差の少ない予言を行うことが可能となってきた格子 QCD であるが、一方で、格子 QCD を用いてハドロン物理量の精密な予言を行うためには、精

密な計算を行うことに加えて、計算のパラメータである結合定数 α_s 及びクォーク質量 m_u, m_d, m_s を精密に決定しておく必要がある。ところが、QCD の結合定数をはじめとした多くの標準模型のパラメータが 1% 以下の高精度で決められているのに対して、軽いクォーク質量の決定精度は表 1に見られるように 25%以上の誤差と非常に悪い。次世代格子 QCD の精密な数値計算により、標準模型の検証を行うためには、理論のパラメータであるクォーク質量を決定しておくことが必要不可欠である。また、クォーク質量の決定は、こうした数値計算の入力パラメータとして用いるためだけでなく、標準模型を越える物理のフレーバーの情報、Strong CP 問題に対する $m_u = 0$ という解の検証という理論的な観点からも重要であると考えられる [41, 42]。

m_e [MeV]	m_μ [MeV]	$\alpha_{\rm em}$	$\alpha_s(m_Z)$
0.510998910(13)	105.658367(4)	1/137.035999679(94)	0.1184(7)
m_u[MeV]	m_d [MeV]	m_s [MeV]	
$1.7 \sim 3.3$	$4.1 \sim 5.8$	$101\,^{+29}_{-21}$	

表 1: 標準模型のパラメータの一部を示した図 [6]。上段の左から電子質量 m_e、ミュー粒子質量 m_μ, 電磁相互作用の微細構造定数 $\alpha_{\rm em}$, 強い相互作用の結合定数 α_s、下段の左からアップクォーク質量 m_u, ダウンクォーク質量 m_d, ストレンジクォーク質量 m_s を示している。他のクォーク質量やレプトンの質量、CKM 行列要素も同様に 1%以下の精度で精密に決定されている [6]。(未だ観測されていないヒッグス粒子に関する物理量を除けば) 他の物理量に比較して軽いクォーク質量の決定精度は著しく悪い。

軽いクォーク質量の決定に際して、最も大きな困難はクォークが QCD の閉じ込めの性質である。この性質のため、クォークを単体では観測することが出来ず、クォーク質量を実験的に測定することは出来ない。このため、クォーク質量を決定するには観測することが出来るハドロンの物理量をクォーク質量と定量的に結びつける何らかの理論的な考察が必要となる。

格子計算では、QCD の力学を解き、ハドロンの実験値を再現するパラメータを探ることによりクォーク質量を決定することを実現している。例として、パイ中間子質量からクォーク質量を得ることを考える。QCD の低エネルギー有効理論であるカイラル摂動論 (第 3 節) によれば、パイ中間子の質量はアップクォーク質量 m_u、ダウンクォーク質量 m_d などのクォーク質量のべきの形に書くことが出来る [43]；

$$M_\pi^2 = B_\pi\,(m_u + m_d) + C_\pi\,(m_u + m_d)^2 + \cdots \tag{1.3.1}$$

ここで、B_π,C_π は共に QCD の非摂動的な力学により本来的には決まっている量であるが、カイラル摂動論においては未定の係数である。格子計算では、仮想的にクォーク質量を様々に変化させることが出来るため、それぞれのクォーク質量値に対するパイ中間子の質量 M_π を測定することで、式 (1.3.1)に現れる係数 B_π, C_π を決めることができる。一旦係数を固定することが出来てしまえば、実際のパイ中間子の質量値を再現するように式 (1.3.1)中のクォーク質量を調整することで、クォーク質量を決定することが出来る。

軽いクォーク質量 m_u, m_d, m_s を決定するためには、対応する 3 個のハドロン物理量の実験値が必要である。通常、格子計算では、3 個のハドロン物理量としてパイ中間子及び K 中間子の質量 $M_{\pi^+}, M_{K^+}, M_{K^0}$ を選ぶ [18, 22, 37, 44]。これは

- 実験的に非常に良い精度で測定されている
- 格子計算において良い精度で値を得ることが出来る

- $M_{\pi^+}, M_{K^+}, M_{K^0}$ はクォーク質量に大きく依存する関数系である

といった理由による。

格子 QCD 数値計算の発展以前より、クォーク質量は、ハドロンに対する低エネルギー実験とカイラル摂動論のみから求められてきた [45]。この手法ではクォーク質量とカイラル摂動論の Lagrangian のパラメータ (QCD では 14 個のパラメータ [45]、電磁相互作用を導入することで更に 25 個のパラメータ [46]) を実験値に同時フィットすることで決める必要がある。これには多くの精度の良い実験値が必要であり、少なくともこれまでのところ精度の良いクォーク質量の決定は果たされていない。これに対して、格子計算を用いたクォーク質量の決定では、(上に述べたように) 仮想的世界のクォーク質量を変えることが出来るため、3 個のクォーク質量に対して、3 個の物理量を用いるだけでよい。このため、3 個の物理量として実験精度の良い物理量を選んだ上で格子計算の精度を挙げていけば、精度のよいクォーク質量の値を得ることが出来る。

これまでに行われている格子 QCD の計算からは、残念ながら、アップクォークの質量 m_u、ダウンクォークの質量 m_d を個別に決定することは出来ていない。この理由としては、これまでの格子数値計算が用意するのは QCD のみから成る仮想世界であることである。他方で、クォークは電磁相互作用に関する電荷を帯びており、アップクォークの電荷 $(2e/3)$ はダウンクォークの電荷 $(-e/3)$ とは異なる。このため、通常クォーク質量を求めるために用いている荷電-中性 K 中間子の質量差 $M_{K^0} - M_{K^+}$ や荷電-中性パイ中間子の質量差 $M_{\pi^+} - M_{\pi^0}$ は以下の 2 要素からの影響を受けることとなる。

- アップクォークとダウンクォークの質量差 $m_u - m_d \neq 0$ による効果
- アップクォークとダウンクォークの電荷の違い $q_u \neq q_d$ による効果

K 中間子の質量差は、K 中間子の質量に対して 1%程度であり、単純には $O(\alpha_{\rm EM}) \sim O(1/137) \sim O(1)\%$ 程度であると考えられる電磁相互作用の寄与を無視することは出来ない。実際に (その質量差のほとんどが電磁相互作用の効果によると考えられている) 荷電-中性 π 中間子質量差では $(m_{\pi^+} - m_{\pi^0})/m_{\pi^+} \sim 3\%$ 程度の寄与を与えることが知られている。このため、クォーク質量差 $m_u - m_d$ を K 中間子の質量自身の 1%程度である荷電-中性 K 中間子質量差から見積もるには、電磁相互作用からの寄与を大きさを押さえておく必要がある。実際に、(電磁相互作用の効果を陽に計算していない) MILC による大規模な格子計算では、クォーク質量差を決定する上で電磁相互作用の不定性が大きく、クォーク質量差 $m_u - m_d$ を実質的に決定することが出来ていない [47]。また、アイソスピンの破れの大きさは $1 \sim 10$MeV であることから、近い将来、格子 QCD 数値計算がハドロンの物質量を $O(1)\%$ 以下の精度で定量的に実際的な方法を提供することを考慮すると、格子 QCD 計算において量子論的な電磁相互作用 (QED) の効果を含める何らかの手法を考えることは不可欠である。

本研究では、ハドロン物理量への QED 効果を計算するため、電磁相互作用を格子上に導入する。ハドロン物理量への影響は $O(100)$ MeV 以下の光子の量子揺らぎで支配されると考えられるため、カットオフ $O(1/a)$ が充分大きければ格子 QED の作用の詳細によらないことが期待される。その上で、この方法により、電磁相互作用の効果がパイ中間子及び K 中間子に与える影響の大きさを第一原理から見積り、より正確な軽いクォーク質量 m_u,m_d 及び m_s を求める。そして、これらのクォーク質量を用いて、クォーク質量差及び電磁相互作用に特に影響を受ける物理量である陽子-中性子質量差の大きさを格子計算により決定し、今回の方法が機能しているかを検証する。現実には陽子と中性子の質量は、わずかに中性子が重いため、中性子は非常に緩やかに崩壊し、また、原子核内では、中性子は安定な物質となることになり、現在の宇宙、炭素から成る生物が形づくられ

ている [48–50]。本研究の格子理論を用いた数値計算では、電磁相互作用のみの寄与を考えると、陽子よりも中性子の方が軽いという結果が得られる。この電磁相互作用による陽子-中性子質量差の値は本研究において始めて見ることが出来た値である。本研究により、現実に観測される陽子-中性子の微妙な質量差は電磁相互作用の寄与と QCD による $m_u - m_d$ の寄与の絶妙なバランスの上に成り立っているということを示す。

1.4 本論文の構成

本論文では、まず第 2 節において格子理論の概要を説明する。初めにスカラー理論を用いて簡単に格子理論の基本的事項を説明し (第 2.1 節)、次に格子上にゲージ場を導入する方法 (第 2.2 節)、フェルミオン場を導入する方法とその困難、解決について説明する (第 2.3 節, 第 2.4 節, 第 2.5 節)。特に第 2.4 節で与えられるドメインウォールフェルミオンは格子上においてカイラル対称性を保つ比較的新しい定式化であり、今回の格子計算では、この定式化を用いて格子計算を行っている。第 2.6 節及び第 2.7 節ではクォーク質量を格子計算により決定される擬スカラーメソン質量を用いて決定する方法を紹介する。その後、第 2.8 節では格子数値計算の特性として達成される、ループ中のクォーク質量と外線の質量を異なる質量にする定式化 (Partially Quenching) を紹介し、その後、格子計算にクエンチと呼ばれる近似において電磁相互作用を導入する方法を紹介する (第 2.9 節, 第 2.10 節)。特に第 2.10 節は本研究により新しく有限体積中の電磁相互作用を定式化したものであり、今回の数値計算においてもこの定式化に基づいた計算を行っている。この節の最後に、今回の格子計算に用いたパラメータを示し (第 2.11 節)、ドメインウォールフェルミオンのカイラル対称性の破れに対する電磁相互作用の影響を数値計算により導いた結果を示す (第 2.12 節)。

次に第 3 節ではカイラル摂動論について説明する。現在の格子計算では、現実のクォーク質量より重い質量での数値計算が行われており、現実的なクォーク質量における物理量を導出するためには何らかの外挿が必要となる。本研究では、カイラル対称性を保つドメインウォールフェルミオンを用いた格子計算を行うため、カイラル対称性により導かれる通常のカイラル摂動論を用いた外挿を行うことが可能である。第 3 節では、まず QCD におけるカイラル対称性 (第 3.1 節) とそこから導かれるカイラル摂動論の基本事項を紹介し (第 3.2 節, 第 3.3 節)、その後、格子理論に特有の Partially Quenching を行った QCD に対応するカイラル摂動論 (PQChPT) を紹介する (第 3.4 節)。次に今回の電磁相互作用を含んだ格子計算を外挿するのに必要となる電磁相互作用を含んだカイラル摂動論を紹介する (第 3.5 節)。その後、本研究により導いた有限体積中の電磁相互作用による影響の大きさをカイラル摂動論を用いて評価する方法を紹介する (第 3.6 節)。これは格子計算は有限体積の箱の中で数値計算を行うため、長距離力である電磁力は特に大きな影響を受けることが想定されるからである。次に、第 3.7 節では、K 中間子を重い粒子としてパイ中間子とは別の手法で扱う方法を紹介する。これは、近年の格子計算によれば、K 中間子はカイラル摂動論の適用限界を越えているという結果が出ているためである [16, 17, 39, 51, 52]。まず、通常の QCD における SU(2)+Heavy Kaon の理論 (HKChPT) [53] を第 3.7.1 節において紹介し、その後、今回の格子計算のために構成した電磁相互作用を含む理論を第 3.7.2 節において紹介する。また、構成した理論により $O(\alpha_{\mathrm{em}} p^2)$ までの K 中間子質量の有限体積効果を含む表式を計算する。この節の最後に実際に数値計算からクォーク質量を導く際に用いた表式をまとめる (第 3.8 節, 第 3.9 節)。

最後に第 4 節は、この論文における主要な格子計算の結果である。第 4.1 節では、メソンの質量差を格子計算により $\pm e$ トリック [44] と呼ばれる方法を用いて決定する。この方法により、メソンの質量自身と比較して非常に高精度なメソン質量差の数値計算が可能となる。第 4.2 節では、有限体積効果を考慮した上で、カイラル摂動論の係数を、SU(3) のカイラル摂動論の場合、SU(2)

のカイラル摂動論の場合に対してそれぞれ決定する。この際、電磁相互作用を含めた場合の有限体積効果、SU(3) 及び SU(2) カイラル摂動論を用いた際の収束性の違い及び電磁相互作用の大きさの違いを議論する。続く第 4.3 節では、クォーク質量を求める。この時、クォーク質量を決定する際に考えられる系統誤差を詳細に議論する。その後、第 4.4 節では、一旦 u, d の質量を決めるとアウトプットとして得られるメソンの物理量 $(\Delta M_\pi^2, \kappa, Q^2)$ を示す。最後に、第 4.5 節において u,d の質量及び電磁相互作用が特に重要な物理量として格子計算により得られた陽子-中性子質量差に対する格子計算の結果を示す。

2 格子計算の準備

本節では、強い相互作用の理論を非摂動的に計算することが可能な唯一の理論である格子ゲージ理論について説明する。格子理論では、有限体積の 4 次元のユークリッド時空を離散化し、自由度を有限にすることで、数値計算を可能としている。まず初めに記法の確認をかねて簡単に格子ゲージ理論を概観する。また、今回の研究で用いたドメインウォールフェルミオンの説明、配位生成の方法について述べる。次に、格子上に電磁相互作用をクエンチ近似と呼ばれる方法で導入する方法を述べその後、電磁相互作用を単純に有限体積内に導入する困難と今回採用した解決の方法に関して説明する。

2.1 格子上のスカラー場

この節では、スカラー理論での格子上での定式化を簡単に説明する。また、スカラー理論は最も基本的な理論であるため、スカラー理論を用いて格子理論の基本的な概念及び表記の導入を行う。

連続時空上の場の理論では、自由スカラー場の Lagrangian は以下のように書くことができる。

$$L(x) = -\frac{1}{2}\phi(x)\partial_\mu\partial_\mu\phi(x) + \frac{1}{2}m^2\phi(x)^2, \tag{2.1.1}$$

ここで、x_μ はユークリッドの 4 次元座標、ϕ は 4 次元時空上のスカラー場、m はスカラー場の質量である。また、繰り返し現れる添字はアインシュタインの規約をとっている；

$$\partial_\mu\partial_\mu\phi = \sum_{\mu=1}^{4}\partial_\mu\partial_\mu\phi. \tag{2.1.2}$$

経路積分量子化の定式化においては、量子場の理論の全ての情報が Green 関数に含まれている。Green 関数は作用 $S(\phi) = \int d^4xL(x)$ を用いて以下のように表される。

$$G(x, y, \cdots) = \frac{\int D\phi\ \phi(x)\phi(y)\cdots\ e^{-S(\phi)}}{\int D\phi\ e^{-S(\phi)}}. \tag{2.1.3}$$

ここで $D\phi$ は形式的に

$$D\phi = \prod_x d\phi(x_\mu) \tag{2.1.4}$$

と定義されている。今、連続的な x_μ であるため、数学的に意味を持たないこの積分に意味を持たせるため、時空を格子間隔 a の下で離散化する。この時、格子点は、整数 n_μ $(\mu = 1 \sim 4)$ を用いて $x_\mu = n_\mu a$ と表される。式 (2.1.4)の積分は、

$$\prod_n d\phi(na) \tag{2.1.5}$$

における $a \to 0$ の極限で定義されることになる。

以上の格子化に対応して、作用を格子化することを考える。作用を格子化する際の指導原理として以下の条件を要請する。

1. 格子理論の作用は連続極限において、連続理論における作用と一致する；
$$\lim_{a\to 0} S_{lat.} = S_{cont.} \tag{2.1.6}$$
2. 格子理論の作用は連続理論の作用と「なるべく」同じ対称性を持つように要請する。「なるべく」というのはローレンツ対称性などは明らかに格子上で実現することはできず、これらの対称性は連続極限で回復することを期待する。ゲージ対称性に関しては、格子作用においても尊重されるように構成する。

この条件を満たす作用は無数にあるがここではもっとも単純に微分を中央差分化することを考える。中央差分は以下のように定義される。

$$\partial_\mu \phi \to \frac{\phi\left(na + \hat{\mu}a\right) - \phi(na - \hat{\mu}a)}{2a}. \tag{2.1.7}$$

ここで $\hat{\mu}$ は μ 方向の単位ベクトルである。2 階微分は差分操作を繰り返すことにより以下のようにえられる。

$$\partial_\mu \partial_\mu \phi \to \sum_\mu \frac{\phi(na + \hat{\mu}a) + \phi(na - \hat{\mu}a) - 2\phi(na)}{a^2}. \tag{2.1.8}$$

また、空間積分は格子点上の和

$$\int d^4x \to a^4 \sum_n \tag{2.1.9}$$

に置き換えられ、格子上の作用は

$$S_{lat.} = -\frac{1}{2} a^4 \sum_n \left(\phi(na) \sum_\mu \frac{\phi(na + \hat{\mu}a) + \phi(na - \hat{\mu}a) - 2\phi(na)}{a^2} + m^2 \phi(na)^2 \right) \tag{2.1.10}$$

となる。

次にのちの便利のため、無次元な量のみで全ての物理量を表現し、様々な場所に現れる a を除去することを考える。作用は、自然単位系では無次元であり、よって全ての量を無次元な変数で表せば、理論の中にスケールは現れない。この書き直しは次元の無い計算機内に仮想世界を構成する上で必要なプロセスである。次元を持つ量、質量 m や、スカラー場 ϕ を格子間隔 a によりスケールする；

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_n &= a\phi\left(na\right) \\ \hat{m} &= am \end{aligned} \tag{2.1.11}$$

このようにすると、Green 関数は

$$\langle \hat{\phi}_n \hat{\phi}_m \cdots \rangle = \frac{\int \prod_l d\hat{\phi}_l \hat{\phi}_n \hat{\phi}_m \cdots e^{-S}}{\int \prod_l d\hat{\phi}_l e^{-S}} \tag{2.1.12}$$

と書き直される。ここで

$$S_{lat.} = -\frac{1}{2} \sum_{n,\mu} \hat{\phi}_n \hat{\phi}_{n+\mu} + \frac{1}{2}\left(8 + \hat{m}^2\right) \sum_n \hat{\phi}_n \hat{\phi}_n \tag{2.1.13}$$

となり、スケールは次元のある量はどこにも現れなくなる。ここでの μ の和はマイナスも含めた全ての方向に関しての和をとっている。

作用 $S_{lat.}$ から導かれる伝搬関数を考える。フーリエ変換を使って場を運動量空間で書き直す。

$$\hat{\phi}_n = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4\hat{k}}{(2\pi)^4} e^{i\hat{k}\cdot n} \hat{\phi}(\hat{k}). \tag{2.1.14}$$

ここで $\hat{k}_\mu = k_\mu a$ は a により無次元化した運動量を表す。この時作用は以下のように書き直せる。

$$\begin{aligned} S &= \int \frac{d^4\hat{k}}{(2\pi)^4} \hat{\phi}(-\hat{k}) \bar{K}(\hat{k}) \hat{\phi}(\hat{k}), \\ \bar{K}(\hat{k}) &= 4\sum_{\mu=1}^{4} \sin^2 \frac{\hat{k}_\mu}{2} + \hat{m}^2. \end{aligned} \tag{2.1.15}$$

この作用から導かれる 2 点相関関数は

$$G(n, m; \hat{m}) = \langle \hat{\phi}_n \hat{\phi}_m \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4\, k}{(2\pi)^4} \frac{e^{i\hat{k}\cdot(n-m)}}{\sum_{\mu=1}^{4} \left(2\sin\frac{\hat{k}_\mu}{2}\right)^2 + \hat{m}^2}. \tag{2.1.16}$$

となる。ここで左辺は、右辺が n, m および $\hat{m}$ に依存することを示している。この格子上の相関関数から連続極限をとることにより、連続理論の相関関数を導く。連続極限は、ある質量の次元を持った物理的に意味のある量を固定することで決定される (スケーリング)。今のスカラー場の場合には物理的な質量 m を固定することにすると、自由場における $\hat{m}$ の a 依存性は式 (2.1.11)により与えられる。これを考慮すると、連続理論の 2 点関数は格子上の相関関数を用いて以下のように表せる。

$$\begin{aligned} \langle \phi(x)\phi(y) \rangle &= \frac{1}{a^2} \lim_{a\to 0} G\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}; ma\right) \\ &= \lim_{a\to 0} \int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ik\cdot(x-y)}}{\sum_\mu \left(\frac{2}{a}\sin\frac{k_\mu a}{2}\right)^2 + m^2}. \end{aligned} \tag{2.1.17}$$

ここで、積分範囲 $\left[-\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{a}\right]$ において支配的なのは $k \ll \frac{1}{a}$ の領域であり、その領域で $\lim_{a\to 0} \frac{2}{a} \sin \frac{k_\mu a}{2} = k_\mu$ と近似出来ることを使えば、

$$\langle \phi(x)\phi(y) \rangle \sim \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ik\cdot(x-y)}}{k^2 + m^2}. \tag{2.1.18}$$

となり、よく知られている連続理論の相関関数の形になっている。以上のような単純な差分化により格子スカラー理論は大きな成功を収めてきた. 連続極限で通常の伝搬関数が得られるという状況はフェルミオン場の場合には大きく異なってる。このことに関しては後の第 2.3 節で見ていくこととする。

以上の定式化は、全てユークリッド空間上で行われているが、この定式化により得られる相関関数の結果を通常の相対論的なミンコフスキー空間上の相関関数を解析接続する必要がある。この手続き行うための必要十分条件は [54–56] により与えられている。この条件のうち、遷移行列の正定値性を保証する Reflection Positivity は格子理論では非自明な条件であり、多くの議論がなされている [57–63]。

2.2 格子上のゲージ理論

次に格子上にゲージ場を導入することを考える。格子上のゲージ理論を考えるために、再び連続理論のゲージ理論から出発する。連続理論では、SU(N) ゲージ理論の Lagrangian は次のように与えられる。

$$L = \bar{\psi}\gamma_\mu \left(D_\mu + m\right)\psi + \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,F_{\mu\nu}^2. \tag{2.2.1}$$

ここで ψ は $SU(N)$ の基本表現のディラック場であり、γ_μ は $\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\delta_{\mu\nu}$ を満たす 4 次元のガンマ行列である。D_μ は $D_\mu = \partial_\mu + igA_\mu$ と定義される共変微分であり、ゲージ場 A_μ は 4 次元のベクトル場であり、g は SU(N) ゲージ理論における結合の強さを表すパラメータである。また場の強さ $F_{\mu\nu}$ は以下のように定義される。

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= \frac{1}{ig}\left[D_\mu, D_\nu\right] \\ &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ig[A_\mu, A_\nu]. \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

この理論は以下の局所連続変換で不変となっている。

$$\begin{aligned} \psi(x) &\to G(x)\psi(x), \\ \bar{\psi}(x) &\to \bar{\psi}(x)G^{-1}(x), \\ A_\mu(x) &\to G(x)A_\mu(x)G^{-1}(x) - \frac{i}{g}G(x)\partial_\mu G^{-1}(x). \end{aligned} \tag{2.2.3}$$

ここで SU(N) の元 $G(x)$ は局所ゲージ変換関数である。この時、共変微分 D_μ は以下のように変換する；

$$D_\mu \to G(x)D_\mu G^{-1}(x) \tag{2.2.4}$$

以上の議論を基に格子上のゲージ理論を作っていくことを考える。格子上のフェルミオンは後の節第 2.3 節で考えるが、格子点上で定義されるフェルミオンでは、スカラー理論と同様に微分項から $\psi(n)\psi(n \pm \hat{\mu})$ のような非局所的な項が現れることが予想される。この様に非局所な双一次形式をゲージ不変にする方法は連続理論においては以下に説明するよく知られた方法を用いている。このような非局所な双一次形式をゲージ不変にすることを、連続理論において微小に離れた 2 点 x と $y = x + \Delta x$ に関して考える。この時、$\bar{\psi}(x)\psi(x+\Delta x)$ の間に以下のようにゲージ場に依存する項をはさむことにより、ゲージ不変な双一次形式を書くことができる。

$$\bar{\psi}(x)\left(1 + ig\Delta x_\mu A_\mu(x)\right)\psi(x+\delta x) = \bar{\psi}(x)\left(1 + \Delta x_\mu\left(\partial_\mu + igA_\mu\right)\right)\psi(x) + O\left((\Delta x)\right) \tag{2.2.5}$$

有限に離れた x、y を考える場合には以下の変更が必要となる。

$$\bar{\psi}(x)P\exp\left(ig\int_x^y A_\mu(z)dz_\mu\right)\psi(x) \equiv \bar{\psi}(x)U(x,y)\psi(x). \tag{2.2.6}$$

ここで定義される $U(x,y)$ は Wilson line と呼ばれる。また、P は経路順序積と呼ばれる操作を意味し、以下のように定義される；

$$P\exp\left(ig\int_x^y A_\mu(z)dz_\mu\right) = \lim_{N\to\infty}\prod_{n=0}^{N-1}\left(1 + igA_\mu\left(x_n\right)\Delta x_\mu\right). \tag{2.2.7}$$

ここで、$|\Delta x| = |y-x|/N$、$x_n = x + \Delta x$ である。Wilson line のゲージ変換則を確認すると、$1+igA_\mu(x_n)\Delta x_\mu$ の変換則が

$$
\begin{aligned}
1+igA_\mu(x_n)\Delta x_\mu &= 1+G(x_n)\partial_\mu G^{-1}(x_n)\Delta x_\mu + igG(x_n)A_\mu(x_n)G^{-1}(x_n)\Delta x_n \\
&= G(x_n)G^{-1}(x_{n+1}) + igG(x_n)A_\mu(x_n)G^{-1}(x_{n+1})\Delta x_n + O\left((\Delta x)^2\right) \\
&= G(x_n)\left(1+igA_\mu\left(x_n\right)\Delta x_\mu\right)G^{-1}(x_n) + O\left((\Delta x)^2\right).
\end{aligned}
\tag{2.2.8}
$$

となることから、Wilson line の変換則は

$$
\begin{aligned}
U(x,y) &\to \lim_{N\to\infty}\left\{\prod_{n=0}^{N-1} G(x_n)\left(1+igA_\mu\left(x_n\right)\Delta x_\mu\right)G^{-1}(x_{n+1}) + O\left((\Delta x)^2\right)\right\} \\
&= G(x)\lim_{N\to\infty}\left\{\prod_{n=0}^{N-1}\left(1+igA_\mu\left(x_n\right)\Delta x_\mu\right)\right\}G^{-1}(y) \\
&= G(x)U(x,y)G^{-1}(y)
\end{aligned}
\tag{2.2.9}
$$

であり、式 (2.2.6)は、確かにゲージ変換不変な量となっている。ここで格子理論に現れる双一次形式 $\bar\psi(n)\psi(n\pm\hat\mu)$ を考えると、以下のように変更を行えばよいことが分かる。

$$
\begin{aligned}
\bar\psi(n)\psi(n+\hat\mu) &\to \bar\psi(n)U(n,n+\hat\mu)\psi(n+\hat\mu) = \bar\psi(n)U_\mu(n)\psi(n+\hat\mu) \\
\bar\psi(n)\psi(n-\hat\mu) &\to \bar\psi(n)U(n,n-\hat\mu)\psi(n-\hat\mu) = \bar\psi(n)U_\mu^{-1}(n)\psi(n-\hat\mu)
\end{aligned}
\tag{2.2.10}
$$

ここで定義される隣の格子点を結ぶ Wilson line $U_\mu(n)\equiv U(n,n+\hat\mu)$ はリンク変数と呼ばれる。

次にゲージ場の運動項 $F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ を格子上で実現する方法を考えていく。$F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ は、ゲージ不変性で CP 不変なゲージ場のみからなる繰り込み可能な量であることを考慮すると、以下のような、Wilson loop の閉じた線 (Wilson loop) で表せることが予想される。

$$
\operatorname{tr}\left(\prod_{C_n} U\right) \equiv \operatorname{tr}\left(U_{n,\hat\mu_1}U_{n+\hat\mu_1,\hat\mu_2}\cdots U_{n-\hat\mu_k,\hat\mu_k}\right)
\tag{2.2.11}
$$

最も単純な Wilson loop の例として μ、ν 曲面の 1 つの格子を囲む正方形 (プラケット) を選ぶことを考える；

$$
U_{\mu\nu}(n) \equiv U_\mu(n)U_\nu(n+\hat\mu)U_\mu^{-1}(n+\hat\nu)U_\nu^{-1}(n)
\tag{2.2.12}
$$

この時作用は、比例定数 β を用いて

$$
S_{\mathrm{plq}} = \sum_{n,\mu\neq\nu}\beta\operatorname{tr}\left(U_{\mu\nu}(n)\right) = \sum_{n,\mu<\nu}2\beta\operatorname{Re}\operatorname{tr}\left[U_{\mu\nu}(n)\right]
\tag{2.2.13}
$$

と書けることが予想される。係数 β と連続の式におけるパラメータ g の関係式を決めるために Baker-Campbell-Hausdorff の定理

$$
e^A e^B = \exp\left(A+B+\frac{1}{2}\left[A,B\right]+\cdots\right).
\tag{2.2.14}
$$

を用いて計算すると、

$$
\operatorname{tr}U_{\mu\nu}(n) = \beta\operatorname{tr}\left[1-\frac{a^4g^2}{2}F_{\mu\nu}^2\left(n+\frac{\hat\mu}{2}+\frac{\hat\nu}{2}\right)\right] + O(a^6).
\tag{2.2.15}
$$

であることから、作用式 (2.2.13)の連続極限は

$$\lim_{a\to 0} S_{\mathrm{plq}} = \int d^4x \left(\beta N - \frac{\beta g^2}{2} \operatorname{tr} F_\mu \nu^2\right). \tag{2.2.16}$$

となる。つまり、連続極限の作用 $\int d^4x \frac{1}{2} \operatorname{tr} F_{\mu\nu}^2$ を再現するためには

$$\begin{aligned} S_G(U) &= \beta \sum_{n,\mu<\nu} \left(1 - \frac{1}{N} \mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\left(U_{\mu\nu}(n)\right)\right), \\ \beta &= \frac{2N}{g^2}. \end{aligned} \tag{2.2.17}$$

とすれば良いことがわかる。こうして得られる作用はプラケット作用と呼ばれる。

次に量子力学を行うために、経路積分の表式を考える。今、作用に対してゲージ不変性を課したが、理論がゲージ不変であるためには、作用に関してもゲージ不変である必要がある。つまり、V を SU(N) の元としたとき、各リンク変数に対して

$$dU_l = d(VU_l) = d(U_l V) \tag{2.2.18}$$

が成り立つ必要がある。ここで添字 l は l 番目のリンク変数を表す。このような積分測度は Haar 測度と呼ばれる。Haar 測度の具体的な構成は例えば SU(3) の場合には [64] などにある。これを用いて Green 関数の積分測度は

$$DU = \prod_l dU_l \tag{2.2.19}$$

と書かれる。SU(N) の Haar 測度には以下のような積分の関係式が導かれる [65]；

$$\begin{aligned} \int dU\mathbf{1} &= 1, \\ \int dUU^{ab} &= 0, \\ \int dUU^{ab}\left(U^\dagger\right)^{kl} &= \frac{1}{N}\delta^{al}\delta^{bk}, \\ \int dUU_{a_1,b_1}U_{a_2,b_2}\cdots U_{a_N,b_N} &= \frac{1}{N!}\epsilon_{a_1a_2\cdots a_N}\epsilon_{b_1b_2\cdots b_N} \\ \int dUU_{a_1,b_1}U_{a_2,b_2}\cdots U_{a_M,b_M} &= 0\,(M \mathrm{mod} N \neq 0) \end{aligned} \tag{2.2.20}$$

この積分測度を用いて Green 関数は

$$\begin{aligned} &< \psi^{a_1}_{\alpha_1}(n_1)\cdots\bar{\psi}^{b_1}_{\beta_1}(m_1)\cdots U^{cd}_{\mu_1}(k_1)\cdots > \\ &\qquad = \frac{1}{Z}\int DUD\bar{\psi}D\psi\psi^{a_1}_{\alpha_1}(n_1)\cdots\bar{\psi}^{b_1}_{\beta_1}(m_1)\cdots U^{cd}_{\mu_1}(k_1)\cdots e^{-S_{\mathrm{QCD}}}, \\ &\qquad Z = \int DUD\bar{\psi}D\psi e^{-S_{\mathrm{QCD}}}. \end{aligned} \tag{2.2.21}$$

と書くことができる。

最も小さい 1×1 正方形の Wilson loop を用いて作られるプラケット作用に対して、1×2 の長方形の Wilson loop を加えた格子作用もまたゲージ不変な量であり、連続理論においてゲージ場の作用を再現すると考えられる。長方形の Wilson loop を加えた作用は

$$S_G(U) = -\beta \sum_{n,\mu\neq\mu} \left[(1-8c_1)\operatorname{tr}\left(U_{\mu\mu}(n)\right) + c_1 \operatorname{tr}\left(R_{\mu\mu\nu}(n) + R_{\nu\nu\mu}(n)\right)\right], \tag{2.2.22}$$

と書くことが出来る。ここで、$\beta = \frac{1}{g_0^2}$ であり、$R_{\mu\mu\nu}$ は Rectangular 項と呼ばれ、

$$R_{\mu\mu\nu} = U_\mu(n)U_\mu(n+\hat{\mu})U_\nu(n+2\hat{\mu})U_\mu^{-1}(n+\hat{\mu}+\hat{\nu})U_\mu^{-1}(n+\hat{\nu})U_\nu^{-1}(n) \tag{2.2.23}$$

と定義されている。c_1 は任意の定数であり、プラケット項と Rectangular 項の係数の関係は、単純な (自由場の) 連続極限において通常のゲージ場の作用と同じになるように選んである。

プラケット作用には無い、パラメータ c_1 を用いて、Renormalized Trajectory により近い作用を数値実験に用いようというゲージ作用に対する繰り込み改善 (Renormalization Group Improvement) がなされてきた。Renormalized Trajectory 上の作用は、長距離 (低エネルギー) における物理が固定点上における物理の長距離での振る舞いと一致する理想的な作用である [66]。近似的な Renormalized Trajectory 上の作用においても、連続理論に近い物理が実現されることが期待される。Renormalized Trajectory の異なった近似の方法により、2 つの有名なとり方が知られている；

- $c_1 = -0.331$:Iwasaki 作用 [67–69]
- $c_1 = -1.4069$:DBW2 作用 [70, 71]

これらの作用をドメインウォールフェルミオンについて試した結果、DBW2 作用ではカイラル対称性の破れが小さい一方で、Topological Charge の遷移がほとんど見られなかった [72]。このため、今回の数値計算においては Iwasaki 作用を用いた計算を行っている。

2.3 格子上のフェルミオンとダブリング問題

第 2.1 節で説明されたスカラー理論とは異なり、フェルミオンを格子上に導入する場合にはダブリング問題と呼ばれるフェルミオン特有の困難が生じる。この問題を解決するために多くの格子上のフェルミオンの定式化が提案されてきた。この節では、ダブリング問題を自由ディラック場に関して説明し、それを解決する一つの方法として Wilson フェルミオンを紹介する。

格子上のフェルミオンの構成も、再び連続理論から出発する。ユークリッド空間における 4 次元の自由ディラックフェルミオンの作用は

$$S_F^{\mathrm{cont}}\left[\psi,\bar{\psi}\right] = \int d^4x\bar{\psi}(x)\left(\gamma_\mu\partial_\mu + M\right)\psi(x). \tag{2.3.1}$$

と書くことが出来た。ここで、$\psi(x)$ は、4 成分のスピノールであり、$\bar{\psi}(x) = \psi^\dagger(x)\gamma^0$ で定義される。また、ガンマ行列 γ_μ は以下の関係式を満たす 4×4 行列である。

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\delta_{\mu\nu}. \tag{2.3.2}$$

この時対応する Green 関数の経路積分での表式は

$$\langle\psi_\alpha(x)\cdots\bar{\psi}_\beta(y)\cdots\rangle = \frac{\int D\bar{\psi}D\psi\,\psi_\alpha(x)\cdots\bar{\psi}_\beta(y)\cdots e^{S_F^{\mathrm{cont}}\left[\psi,\bar{\psi}\right]}}{\int D\bar{\psi}D\psi\, e^{S_F^{\mathrm{cont}}\left[\psi,\bar{\psi}\right]}} \tag{2.3.3}$$

となる。ここで、α などのギリシャ文字の添字はスピノールの成分を表す。ここで形式的に定義されている式 (2.3.3)中の汎関数積分を数学的に定義するために時空間を格子化する。この時、場 ψ や $\bar{\psi}$ は再び格子間隔 a の格子上に住んでいるものとし、積分測度を

$$D\bar{\psi}D\psi = \prod_{a,n} d\bar{\psi}_\alpha\left(na\right)\prod_{\beta,m} d\psi_\beta(ma). \tag{2.3.4}$$

とする。微分を格子化する際に式 (2.1.7)と同様に、中央差分をとる；

$$\partial_\mu \psi_\alpha(x) \to \frac{\psi_\alpha\left(na+\hat{\mu}a\right)-\psi_\alpha(na-\hat{\mu}a)}{2a}. \tag{2.3.5}$$

スカラー場の時と同様に次元のある量が理論中に現れないように、格子間隔 a を用いて、次元のある量をスケールする：

$$\begin{aligned}\hat{\psi}_\alpha(n) &= a^{\frac{3}{2}}\psi_\alpha\left(na\right),\\ \hat{\bar{\psi}}_\alpha(n) &= a^{\frac{3}{2}}\bar{\psi}_\alpha\left(na\right),\\ \hat{M} &= aM.\end{aligned} \tag{2.3.6}$$

すると、作用は、

$$\begin{aligned}S_F\left[\hat{\psi},\hat{\bar{\psi}}\right] &= \sum_n \left(\frac{1}{2}\sum_\mu \left(\hat{\bar{\psi}}\left(n+\hat{\mu}\right)-\hat{\psi}\left(n-\hat{\mu}\right)\right)\gamma_\mu\hat{\psi}(n)+\hat{M}\hat{\bar{\psi}}(n)\hat{\psi}(n)\right)\\ &= \int_{-\pi}^{\pi}\frac{d^4\hat{k}}{(2\pi)^4}\hat{\bar{\psi}}(-\hat{k})\left[\gamma_\mu\sin\left(\hat{k}_\mu\right)+\hat{M}\right]\hat{\psi}(\hat{k}).\end{aligned} \tag{2.3.7}$$

と書ける。ただし、$\hat{\psi}(\hat{k})$ は、$\hat{\psi}(n)$ のフーリエ成分であり

$$\hat{\psi}_\alpha(n) = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{d^4\hat{k}}{(2\pi)^4}e^{i\hat{k}\cdot n}\hat{\psi}(\hat{k}). \tag{2.3.8}$$

と定義される。相関関数は、

$$\langle\hat{\psi}_\alpha(n)\cdots\hat{\bar{\psi}}_\beta(m)\cdots\rangle = \frac{\int D\hat{\bar{\psi}}D\hat{\psi}\,\hat{\psi}_\alpha(n)\cdots\hat{\bar{\psi}}_\beta(m)\cdots e^{S_F\left[\hat{\psi},\hat{\bar{\psi}}\right]}}{\int D\hat{\bar{\psi}}D\hat{\psi}\,e^{S_F\left[\hat{\psi},\hat{\bar{\psi}}\right]}} \tag{2.3.9}$$

と書ける。式 (2.3.7)の作用から導かれる格子上の 2 点相関関数は、

$$\begin{aligned}G_F\left(n,m;\hat{M}\right) &= <\hat{\psi}_\alpha(n)\hat{\bar{\psi}}_\beta(m)>\\ &= \int_{-\pi}^{\pi}\frac{d^4\hat{k}}{(2\pi)^4}\frac{\left[-i\sum_\mu\gamma_\mu\tilde{k}_\mu+\hat{M}\right]_{\alpha\beta}}{\sum_\mu\tilde{k}_\mu^2+\hat{M}^2}e^{i\hat{k}(m-n)}.\end{aligned} \tag{2.3.10}$$

と書ける。ここで $\tilde{k}_\mu$ は

$$\tilde{k}_\mu = \frac{1}{a}\sin\hat{k}_\mu. \tag{2.3.11}$$

と定義される。ここから、連続極限の 2 点相関関数は、

$$\begin{aligned}\langle\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y)\rangle &= \lim_{a\to 0}\frac{1}{a^3}G_F\left(\frac{x}{a},\frac{y}{a};aM\right)\\ &= \lim_{a\to 0}\int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}}\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{\left[-i\sum_\mu\gamma_\mu\tilde{k}_\mu+M\right]_{\alpha\beta}}{\sum_\mu\tilde{k}_\mu^2+M^2}e^{ik(x-y)}.\end{aligned} \tag{2.3.12}$$

である。ここで極限 $a\to 0$ はスカラーの時とは状況が異なる。積分範囲 $\left[-\frac{\pi}{a},\frac{\pi}{a}\right]$ において支配的な領域として、$\hat{k}_\mu\sim 0$ と $\hat{k}_\mu\sim\frac{\pi}{a}$ の 2 つの領域が各軸に対し現れる。2 点関数の極は粒子を表すので式 (2.3.12)は、16 個の粒子を表すことになる。これらの余分な自由度はダブラーと呼ばれ、また、このように余分な自由度が現れる問題はダブリング問題と呼ばれる。

粒子数は、物理の性質に大きな影響を与えるので望む以上の余分な自由度が現れることは好ましい状況では無い。以上の議論においてはダブリング問題はフェルミオン 2 点関数の分母に現れる sin 関数の領域がスカラーの 2 倍であることに由来し、それは微分の差分化の仕方の問題に思える。この問題に対して、問題は単なる差分化における問題点では無いということがニールセン-二宮の定理 [73] により示されている。ニールセン-二宮の定理では、格子理論がエルミート性、平行移動不変性、カイラル対称性、局所性の仮定を満たすときダブラーが必ず現れることが示されている。このことは、格子上ではカイラル対称性を破らない限り、ダブリング問題を回避出来ないことを意味している。

ダブリング問題の解決法の一つとして、Wilson フェルミオン [74] が Wilson により提案された。Wilson フェルミオンでは、格子上において、連続理論の対称性であるカイラル対称性を 0 質量のフェルミオンに対しても壊す代わりに、ダブリング問題を回避している。Wilson フェルミオンの作用は、単純なフェルミオン作用式 (2.3.7)に 2 次の微分の項を付け加えることにより実現される。

$$S_F^{(W)} = S_F - \frac{r}{2}\sum_n \bar{\hat{\psi}}(n)\hat{\Box}\hat{\psi}(n). \tag{2.3.13}$$

ここで r は Wilson パラメータであり、また $\hat{\Box}$ はダランベルシアンである。この項は、カイラル対称性を破り、かつ、素朴な連続極限で 0 になる項である。式 (2.3.13)を運動量空間で書き直すと、

$$S_F^{(W)} = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{d^4\hat{k}}{(2\pi)^4}\bar{\hat{\psi}}(-\hat{k})\left[\gamma_\mu \sin\left(\hat{k}_\mu\right) + \hat{M} + r\sum_\mu\left(1-\cos\left(\hat{k}_\mu\right)\right)\right]\hat{\psi}(\hat{k}). \tag{2.3.14}$$

であり、ここから導かれる連続極限における 2 点相関関数は、

$$\langle\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y)\rangle = \lim_{a\to 0}\int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}}\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{\left[-i\sum_\mu \gamma_\mu\tilde{k}_\mu + M(k)\right]_{\alpha\beta}}{\sum_\mu \tilde{k}_\mu^2 + M(k)^2}e^{ik(x-y)}. \tag{2.3.15}$$

となる。ここで $M(p)$ は

$$M(k) = M + \frac{2r}{a}\sum_\mu \sin\left(\frac{k_\mu a}{2}\right) \tag{2.3.16}$$

と定義され運動量に依存する質量と解釈できる。ここで $\hat{k}_\mu$ を固定したまま連続極限 $a\to 0$ を考えると、質量項は $M(k)\to M$ となる。また、$\hat{k}_\mu$ が $\frac{\pi}{a}$ の周りの状況での連続極限 $a\to 0$ を考えると、$M(k)$ は発散する。スカラー場と同様に $k_\mu\sim\frac{\pi}{a}$ はダブラーに対応しており、大きな質量を持つダブラーは低エネルギーの物理には寄与しい。以上のようにして、ダブリング問題は解決するが、作用のカイラル対称性が $M=0$ に対しても壊れ、有限格子間隔に置ける Symanzik の有効作用 [75] によれば、Wilson 項の効果によりクォーク質量は $O(1/a)$ の補正を受けることになる。これにより、カイラル対称性により保証されるパイ中間子とフェルミオン質量の関係、フェルミオン質量の加法的な繰り込みの禁止などの便利な性質が成り立たなくなる。この問題を解決し、格子上で適当なカイラル対称性を持つ理論が Kaplan により提唱されたドメインウォールフェルミオンであり [76]、Furman,Shamir によりその数値計算に適した形が与えられた [77, 78]。

2.4 ドメインウォールフェルミオン

以上において導入されたカイラル対称性を明示的に破っており、クォーク質量に対して $O(1/a)$ の繰り込みが生じるなどの不便な性質がある。ドメインウォールフェルミオンは奇数次元の空間依存する質量を持つ理論から、偶数次元のゼロ質量のフェルミオンを出すというアイディアである。

初めに $d=2k+1$ 次元の連続のユークリッド空間から始める。d 次元の座標を

$$x_a=\{x_0,x_1,\cdots,x_{2k-1},s\}=\{x_\mu,s\} \tag{2.4.1}$$

と書くと、$2k+1$ 次元のガンマ行列は

$$\{\gamma_0,\gamma_1\cdots,\gamma_{2k-1},\Gamma\} \tag{2.4.2}$$

と書くことができる。今、フェルミオンの質量として次のように d 次元目の空間に依存する質量を考える；

$$\begin{aligned} m\left(s\right) &= m\epsilon(s) \\ &= \begin{cases} m & (s>0) \\ 0 & (s=0) \\ -m & (s<0) \end{cases} \end{aligned} \tag{2.4.3}$$

この質量では $d=2k+1$ 次元の Poincare 対称性は壊すことになる一方で、$2k$ 次元の Poincare 対称性は残っている。ゲージ場は、s に依存しない、各 $2k$ 次元平面上の $A_\mu(x_\mu)$ として導入する。

このとき、ディラック方程式は $\not{D}$ を $2k$ 次元の共変微分とすると、

$$\left[\not{D}+\Gamma\partial_s+m\left(s\right)\right]\psi\left(x_\mu,s\right)=0 \tag{2.4.4}$$

と書くことができる。ここで、$\psi\left(x_\mu,s\right)$ を次のように s の関数と、x_μ のスピノールの関数に展開すると

$$\psi\left(x_\mu,s\right)=\sum_n\left[b_n(s)P_++f_n(s)\right]\psi_n(x_\mu) \tag{2.4.5}$$

と書くことができる。ここで、$P_\pm$ は Γ を用いて

$$P_\pm=\frac{1\pm\Gamma}{2} \tag{2.4.6}$$

と書くことができる射影演算子であり、また、$b_n(s)$、$f_n(s)$ 及び $\psi_n(x_\mu)$ は

$$\begin{aligned} \left[\partial_s+m(s)\right]b_n(s) &= \mu_n f_n(s) \\ \left[-\partial_s+m(s)\right]f_n(s) &= \mu_n b_n(s) \\ \left[\not{D}+\mu_n\right]\psi_n(x) &= 0 \end{aligned} \tag{2.4.7}$$

を満たす。ここで方程式式 (2.4.7)の中にはスケールとして m が入っているのみであるので、固有値 μ_n の大きさは $O(m)$ 程度であることが予想される。ところが、実際には以下のように $\mu=0$ の解が存在する。

$$b_0(s)=N\exp\left[-\int_0^s mds'(s')\right] \tag{2.4.8}$$

この解は $s=0$ 付近に局在するモードとなっている。一方で、対応する同様の解 $f_0(s)=N\exp\left[\int_0^s m\left(s'\right)ds'\right]$ は、規格化可能な関数ではないため、存在できない。そのため、低エネルギーでは、右巻のゼロモードのみが残ることになる。右、左巻きのゼロモードうち、片方のモードのみが規格化できる解であるという性質は $m(\pm\infty)$ が、逆符号であるということによっている。

格子理論では、自由度を有限にするため、s 方向の長さも有限の理論から出発する必要がある。この時、$s=0$ 以外に、$m(s)$ にもう一つ特異な点を導入する必要が生ずる。例えば s 方向の長さ

として $2s_0$ の周期的境界条件 $\psi\left(x_\mu, s+2s_0\right)=\psi(x_\mu, s)$ を課した状況を考える。理論空間として $-s_0$ から s_0 の間を選んだ時、同様に、質量項を

$$m\left(s\right)=m\frac{s}{|s|} \tag{2.4.9}$$

とする。式 (2.4.7)のように同様にして展開すると、2 つのゼロモードの解が存在する。

$$\begin{aligned} b_0(s)&=N\exp\left[-\int_{-s_0}^{s}ds'm\left(s'\right)\right]\\ f_0(s)&=N\exp\left[-\int_{+s_0}^{s}ds'm\left(s'\right)\right] \end{aligned} \tag{2.4.10}$$

$b_0(s)$ は $s=0$ 付近に局在する右巻きフェルミオンであり、$f_0(s)$ は $s=s_0$ 付近に局在する左巻きフェルミオンである。今の 0 質量のモードは $\int_{-s_0}^{s_0}m(s)=0$ であることによっている。この性質は、位相幾何学的なものからくるようなものではなく、相互作用などにより容易に変化する可能性がある。例えば、結合定数 α を持つ相互作用の弱い理論を考えると、その破れの大きさはおよそ $\delta m(s)\sim O\left(\alpha m\right)$ であり、それから誘導されるクォーク質量は右巻と左巻きの重なりにより

$$\begin{aligned} \delta\mu_0&=\delta m\int dsb_0(s)f_0(s)\\ &=\delta mN^2\\ &\sim\alpha m\frac{2ms_0}{\cosh\left(ms_0\right)} \end{aligned} \tag{2.4.11}$$

と予想される。この時現れる余分なクォーク質量は $s_0\to0$ で指数関数的に 0 になるような量である。この右巻と左巻の場を組み合わせることにより指数関数的にカイラル対称性の破れが小さくなるクォーク場が実現できることになる。

数値計算に適した形のドメインウォールフェルミオンは Furman,Shamir により、5 次元方向に対して Dirichlet 型の境界条件を課すことで得られた [77,78]。その式は、以上の連続理論の式に置ける微分を差分に置き換えることで得られる。5 次元目の方向を s で表しその格子数を L_s とし、他の方向の座標を n と表すと、

$$\begin{aligned} S_{DW,F}^{\text{free}}=\sum_{n}\sum_{s}^{L_s}&\left[\sum_{a=1}^{5}\bar{\hat{\psi}}\left(n,s\right)\gamma_a\hat{\partial}_a\hat{\psi}\left(n,s\right)\right.\\ &\left.-m_5\bar{\hat{\psi}}\left(n,s\right)\bar{\hat{\psi}}(n,s)-\frac{r}{2}\sum_{a=1}^{5}\bar{\hat{\psi}}\left(n,s\right)\hat{\partial}_a\hat{\partial}_a\hat{\psi}(n,s)\right] \end{aligned} \tag{2.4.12}$$

である。ここで、m_5 は 5 次元の質量項、最後の項は 5 次元の Wilson 項であり、$\hat{\partial}_a$ は式 (2.1.7)で定義される a 方向の中央差分である。境界条件は $s=0$ 及び $s=L_s+1$ で、場の値が 0 になるようにとっている。

ゲージ場を導入するため、式 (2.2.10)と同様に、s の方向以外の 4 次元の差分にリンク変数を導入する。5 次元方向の力学変数は存在しないため、s の自由度を単なるフレーバーの自由度と捉え、$\psi_s(n)\equiv\psi(n,s)$ と書くことにする。この時、式 (2.4.12)は、クォーク質量項及び 4 次元のゲージ場を加えることで以下のように書き直される。

$$S_{DW,F}=-\sum_{s,s'}\sum_{n,m}\bar{\hat{\psi}}_s(n)\left(D_F\right)_{n,s;m,s'}\hat{\psi}_{s'}(m), \tag{2.4.13}$$

ここで $(D_F)_{n,s;m,s'}$ は以下のように定義される。

$$(D_F)_{n,s;m,s'} = \delta_{s,s'} D^{\parallel}_{n,m} + \delta_{n,m} D^{\perp}_{s,s'} \tag{2.4.14}$$

$$\begin{aligned} D^{\parallel}_{n,m} &= \frac{1}{2}\sum_{\mu}\Big(\left(1+\gamma_\mu\right)U_{n,\hat{\mu}}\delta_{n+\hat{\mu},m} + \left(1-\gamma_\mu\right)U^{\dagger}_{m,\hat{\mu}}\delta_{n-\hat{\mu}m}\Big) \\ &\quad + \left(m_5 - 4\right)\delta_{n,m} \end{aligned} \tag{2.4.15}$$

$$D^{\perp}_{s,s'} = \begin{cases} P_L\delta_{2,s'} - \delta_{1,s'}, & \text{if } s=1, \\ P_L\delta_{s+1,s'} + P_R\delta_{s-1,s'} - \delta_{s,s'}, & \text{if } 1<s<L_s, \\ P_R\delta_{L_s-1,s'} - \delta_{L_s,s'}, & \text{if } s=L_s, \end{cases} \tag{2.4.16}$$

ここで $P_{R,L}$ は

$$P_{R,L} = \frac{1}{2}\left(1\pm\gamma_5\right), \tag{2.4.17}$$

である。

　ゼロモードの存在を確かめるために、グルーオンが存在しない、自由場の理論を考える。作用中のフェルミオン場を運動量表示に書き換えると

$$S_F = \sum_{s,s'}\int\frac{d^4\hat{p}}{\left(2\pi\right)^4}\bar{\hat{\psi}}_s(-\hat{p})\left(i\hat{\not{p}} + \left(M(\hat{p})P_L + M^{\dagger}(\hat{p})P_R\right)\right)_{s,s'}\hat{\psi}_{s'} \tag{2.4.18}$$

ここで、$\hat{\not{p}} = \sum_{\mu=1}^{4}\gamma_\mu\sin\left(\hat{p}_\mu\right)$ であり、$M\left(p\right), M^{\dagger}(p)$ は、

$$\begin{aligned} M(\hat{p}) &= \begin{cases} \Big(1-m_5+\sum_\mu\left(1-\cos\left(\hat{p}_\mu\right)\right)\Big)\delta_{1,s'} & \text{if } s=1 \\ \Big(1-m_5+\sum_\mu\left(1-\cos\left(\hat{p}_\mu\right)\right)\Big)\delta_{s,s'} - \delta_{s-1,s'} & \text{if } 1<s\le L_s \end{cases} \\ M^{\dagger}(\hat{p}) &= \begin{cases} \Big(1-m_5+\sum_\mu\left(1-\cos\left(\hat{p}_\mu\right)\right)\Big)\delta_{s,s'} - \delta_{s+1,s'} & \text{if } 1\le s<L_s \\ \Big(1-m_5+\sum_\mu\left(1-\cos\left(\hat{p}_\mu\right)\right)\Big)\delta_{s,s'} & \text{if } s=L_s \end{cases} \end{aligned} \tag{2.4.19}$$

という行列である。この時ドメインウォールフェルミオンは、質量項

$$\bar{\hat{\psi}}_L M(\hat{p})\hat{\psi}_R + \bar{\hat{\psi}}_R M^{\dagger}(\hat{p})\hat{\psi}_L \tag{2.4.20}$$

という、非対角な、運動量に依存する質量行列を持つ多フレーバーの自由フェルミオンであると考えられる。この質量項を対角化することで、ゼロ固有値の解、

$$\sum_{s'} M_{s,s'}u_L\left(s',\hat{p}\right) = 0 \tag{2.4.21}$$

$$\sum_{s'} M^{\dagger}_{s,s'}u_R\left(s,\hat{p}\right) = 0 \tag{2.4.22}$$

から、0 質量のディラックフェルミオンを

$$\hat{\psi}_s = P_L u_L(s',\hat{p}) + P_R u_R(s,\hat{p}) \tag{2.4.23}$$

と構成することができる。0 質量解の存在を示すために式 (2.4.21)の条件を具体的に書き下すと、

$$\begin{array}{ll} \sum_{s'} M_{s,s'}\phi_t = W\phi_s - \phi_{s+1} = 0 & \text{if } 1\le s<L_s \\ W\phi_s = 0 & \text{if } s=L_s \end{array} \tag{2.4.24}$$

と書くことができる。ここで W は、

$$W = 1 - m_5 + \sum_{\mu} \left(1 - \cos\left(\hat{p}_\mu\right)\right) \tag{2.4.25}$$

と定義される。漸化式式 (2.4.24)の上式から

$$\phi_s = W^{s-1}\phi_1 \tag{2.4.26}$$

が導かれるが、この式は、L_s が有限である限り、式 (2.4.24)の下式を満たさないためこのようなゼロモード解は存在しない。しかし、L_s が無限大かつ $|W| < 1$ であれば、

$$\lim_{L_s \to \infty} W^{L_s} = 0 \tag{2.4.27}$$

が成り立つため、漸化式式 (2.4.24)を満たすことができる。規格化条件 $\lim_{L_s\to\infty} \phi_s^\dagger \phi_s = 1$ を考慮すると、

$$\phi_s = C_0 W^{s-1} \tag{2.4.28}$$

が得られる。ここで、$C_0 = \sqrt{1 - W^2}$ である。同様にして、式 (2.4.22)から、

$$\phi_s = C_0 W^{L_s - s} \tag{2.4.29}$$

が得られる。この様にして、$|W|$ の条件により、$L_s \to \infty$ の極限でゼロモードの解が存在する。ここで、$|W| < 1$ の条件を書き下すと、

$$0 < m_5 - \sum_{\mu} \left(1 - \cos\left(\hat{p}_\mu\right)\right) < 2 \tag{2.4.30}$$

と書くことができる。

クォーク場として、ゼロモードをそのまま使うことは、特に相互作用が入った場合には困難である。そこで、ゼロモードが $s = 0, L_s$ 付近に局在することから、ゼロモードとの重なりが大きいと思われる以下の量をクォーク場と定義する；

$$\begin{aligned} q_n &= P_L \hat{\psi}_1(n) + P_R \hat{\psi}_{L_s}(n), \\ \bar{q}_n &= \bar{\hat{\psi}}_1(n) P_R + \bar{\hat{\psi}}_{L_s}(n) P_L. \end{aligned} \tag{2.4.31}$$

この時、このクォーク場を用いて、クォークの質量項を

$$m_f \bar{q}_n q_n = m_f \left[\bar{\hat{\psi}}_1(n) P_R \bar{\hat{\psi}}_{L_s}(n) + \bar{\hat{\psi}}_{L_s}(n) P_L \psi_1(n)\right] \tag{2.4.32}$$

と書くことができる。この時、$D^{\perp}_{s,s'}$ は

$$D^{\perp}_{s,s'} = \begin{cases} P_L \delta_{2,s'} - m_f P_R \delta_{L_s,s'} - \delta_{1,s'}, & \text{if } s = 1, \\ P_L \delta_{s+1,s'} + P_R \delta_{s-1,s'} - \delta_{s,s'}, & \text{if } 1 < s < L_s, \\ -m_f P_L \delta_{1,s'} + P_R \delta_{L_s-1,s'} - \delta_{L_s,s'}, & \text{if } s = L_s, \end{cases} \tag{2.4.33}$$

と書き直される。

ドメインウォールフェルミオンの作用には、軽いモード以外からの $L_s - 1$ 個の有効作用 S_{eff} に対する余分な寄与を除去するためのスカラー場の寄与 Pauli-Villars 場を含める必要がある [79]。

Pauli-Villars 場の作用は、D_F の L_s 及び m_f 依存性を明示的に $D_F(L_s, m_f)$ と書いたときに以下の式により与えられる；

$$S_{PV}\left(\hat{\phi}^\dagger, \hat{\phi}, U\right) = \sum_{l,m,n} \hat{\phi}_s^\dagger(n) D_F^\dagger(L_s/2, 1)_{n,s;l,s''} D_F(L_s/2, 1)_{l,s'';m,s'} \hat{\phi} \tag{2.4.34}$$

この Pauli-Villars 場を用いて $e^{-S_{eff}}$ が有限になるということは、[78] により示された。

次に、この理論を用いた格子計算においてカイラル対称性の破れの大きさを得るために Ward-Takahashi 恒等式を用いる。カイラル変換として、以下の変換を定義する。

$$\begin{aligned} \hat{\psi}\,(n,s) &\to e^{i\theta_s^a T^a}\,\hat{\psi}_s\,(n) \\ \bar{\hat{\psi}}\,(n,s) &\to \bar{\hat{\psi}}_s\,(n)\,e^{-i\theta_s^a T^a} \end{aligned} \tag{2.4.35}$$

ここで T^a は SU(N) 変換の生成子であり、また、θ_s^a の s 依存性は

$$\theta_s^a = \begin{cases} -\theta^a & (1 \le s \le \frac{L_s}{2}) \\ \theta^a & (\frac{L_s}{2} + 1 \le s \le L_s) \end{cases} \tag{2.4.36}$$

と定義される。この変換は、確かにクォーク場に対して以下のようなカイラル変換となる。

$$\begin{aligned} q_n \to q_n' &= \left(e^{-i\theta^a T^a} P_L + e^{i\theta^a T^a} P_R\right) q_n = e^{i\theta^a T^a \gamma_5} q_n \\ \bar{q}_n \to \bar{q}_n' &= \bar{q}_n \left(e^{-i\theta^a T^a} P_L + e^{i\theta^a T^a} P_R\right) = \bar{q}_n e^{i\theta^a T^a \gamma_5} \end{aligned} \tag{2.4.37}$$

この変換から導かれる Ward-Takahashi 恒等式は

$$\langle \hat{\partial}_\mu \mathcal{A}_\mu^a(n) O(m) \rangle - i \langle \delta^a O(m) \rangle = 2m_f \langle J_5^a(n) O(m) \rangle + 2 \langle J_{5q}^a(n) O(m) \rangle \tag{2.4.38}$$

である、ここで、$O(m)$ は任意の局所演算子でありまた、$\mathcal{A}_\mu(n)$ は

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\mu^a(n) &= \sum_s^{L_s} \mathrm{sign}\left(s - \frac{L_s}{2}\right) j_\mu^a(n,s), \\ j_\mu^a(n,s) &= \frac{1}{2}\Big[\bar{\hat{\psi}}_s\,(n+\hat{\mu})\,(1+\gamma_\mu)\,U_{n+\hat{\mu},\mu}^\dagger T^a \hat{\psi}_s\,(n) \\ &\quad - \bar{\hat{\psi}}_s\,(n)\,(1-\gamma_\mu)\,U_{n,\mu} T^a \hat{\psi}_s\,(n+\hat{\mu})\Big] \end{aligned} \tag{2.4.39}$$

と定義される。J_5^a は

$$\begin{aligned} J_5^a(n) &= \bar{\hat{\psi}}_{L_s}\,(n)\,P_L T^a \hat{\psi}_1\,(n) + \bar{\hat{\psi}}_1\,(n)\,P_R T^a \hat{\psi}_{L_s}\,(n) \\ &= \bar{q}_n T^a \gamma_5 q_n \end{aligned} \tag{2.4.40}$$

で定義され、これは連続理論のカイラル Ward-Takahashi 恒等式で現れる擬スカラーに一致する。$J_{5q}^a(n)$ は、連続理論のカイラル Ward-Takahashi 恒等式には現れない項であり、$s = L_s/2$ 周りの場を用いて書くことができる項で

$$J_{5q}^a(n) = \bar{\hat{\psi}}_{L_s/2}\,(n)\,P_L T^a \hat{\psi}_{L_s/2+1}\,(n) + \bar{\hat{\psi}}_{L_s/2+1}\,(n)\,P_R T^a \hat{\psi}_{L_s/2}\,(n) \tag{2.4.41}$$

である。ここで式 (2.4.38)の右辺第 2 項は O がクォーク場のみからなる場合に $L_s \to \infty$ の極限で 0 になることが [78] により示されている。実際の格子計算は有限の L_s で行う必要があり、その時、カイラル対称性の破れの大きさを定量的に評価する指標をモニターすることが重要となる。

今、Symanzik の格子上の有効 Lagrangian [75,80] を思い起こすと、連続極限に近い状況では、有効 Lagrangian の形は、通常の QCD の Lagrangian の形に一致するはずである。QCD の Lagrangian のうち、唯一のカイラル対称性を破る項は、質量項である。このため、有限 L_s によるカイラル対称性の破れを m_{res} と書くと、元々の質量項 m_f と合わせて、有効 Lagrangian の質量項は

$$m_{\mathrm{eff}} = m_f + m_{\mathrm{res}} \tag{2.4.42}$$

と書くことができる。このとき有効理論からの Word-Takahashi 恒等式を考えると式 (2.4.38)の右辺の代わりに $m_{\mathrm{eff}} J_5^a$ が現れるはずである。つまり、連続極限で、$J_{5q}^a \sim m_{\mathrm{eff}} J_5^a$ となる。そこで、特に低エネルギーの量であるパイ中間子に対応する演算子を用いて m_{res} を以下のように定義することにする；

$$m_{\mathrm{res}} = \frac{\langle \sum_{\vec{n}} J_{5q}^a\left(\vec{n}, t\right) \pi^a(0) \rangle}{\langle \sum_{\vec{n}} J_5^a\left(\vec{n}, t\right) \pi^a(0) \rangle} \tag{2.4.43}$$

ここで $\pi^a(n)$ は

$$\pi^a(n) = i\bar{q}(n) T^a \gamma_5 q(n) \tag{2.4.44}$$

と定義される。

2.5 ドメインウォール演算子とオーバーラップ演算子との関係

次に以上のようにして導入されたドメインウォールフェルミオンと、オーバーラップフェルミオンの関係を見ていく。オーバーラップフェルミオンは [79,81] において導入された「格子上のカイラル対称性」を保つフェルミオンの定式化である。この節では、ドメインウォール演算子とオーバーラップ演算子が単純な線形変換により結びつくということを見る。

格子上のカイラル対称性を見るためにカイラル対称性を持つ連続理論の自由フェルミオンの作用から出発する。(以下の導出は [82] による)。

$$S_{\mathrm{cont}}\left(\bar{\psi}, \psi\right) = \bar{\psi} \not{D} \psi \tag{2.5.1}$$

今、この作用は $SU(N)$ カイラル変換

$$\begin{gathered} \psi \to e^{i\theta\gamma_5}\psi, \bar{\psi} \to \bar{\psi} e^{i\theta\gamma_5}, \\ \theta = \theta^A T^A, \end{gathered} \tag{2.5.2}$$

の下で不変であるとする。このようにカイラル対称性をもつ連続理論における作用をもとにして、格子上のフェルミオン ϕ_n の有効作用 $S_{\mathrm{eff}(\phi)}$ を以下のようにブロックスピン変換により定義する；

$$\begin{aligned} \exp\left(-S_{\mathrm{eff}}\left(\bar{\phi}, \phi\right)\right) &= \exp\left(\sum_{n,m} \phi(n) D_{\mathrm{eff}}\left(n, m\right) \phi(m)\right) \\ &= \int d\bar{\psi} d\psi \exp\left[S_{\mathrm{cont}} - \alpha \sum_n \left(\bar{\phi}_n - \bar{\psi}_n\right)\left(\phi_n - \psi_n\right)\right] \end{aligned} \tag{2.5.3}$$

ここで、ψ_n は、$\psi(x)$ から格子点 n の周りの連続理論の場 $\psi(x)$ から適当な重みをつけて足した場 ($\psi_n = \int d^4x f(x,n)\psi(x)$) である。有効作用のカイラル変換における性質を見るために、格子上の

場 $\bar{\psi}_n, \phi_n$ に対するカイラル変換を考える。

$$\begin{aligned}\exp\left(-S_{\text{eff}}\left(\bar{\phi}e^{i\theta\gamma_5}, e^{i\theta\gamma_5}\phi\right)\right) &= \exp\left(\sum_{n,m}\phi(n)e^{i\theta\gamma_5}D_{\text{eff}}\left(n,m\right)e^{i\theta\gamma_5}\phi(m)\right)\\ &= \int d\bar{\psi}d\psi\exp\left[S_{\text{cont}} - \alpha\sum_n\left(\bar{\phi}_n e^{i\theta\gamma_5} - \bar{\psi}_n\right)\left(e^{i\theta\gamma_5}\phi_n - \psi_n\right)\right]\\ &= \int d\bar{\psi}d\psi\exp\left[S_{\text{cont}} - \alpha\sum_n\left(\bar{\phi}_n - \bar{\psi}_n\right)\ e^{2i\theta\gamma_5}\left(\phi_n - \psi_n\right)\right]\end{aligned} \tag{2.5.4}$$

ここで、最後の行では、変数変換 $\psi \to e^{i\theta\gamma_5}\psi, \bar{\psi} \to \bar{\psi}e^{i\theta\gamma_5}$ 及び作用 S_{cont} がカイラル変換の下で不変であるという性質を用いた。今、θ が非常に小さいとして式 (2.5.4)の第 2 式を θ の 1 次の項は

$$\begin{aligned}&\exp\left(\sum_{n,m}\phi(n)(1+i\theta\gamma_5)D_{\text{eff}}\left(n,m\right)(1+i\theta\gamma_5)\phi(m)\right)\Bigg|_{\theta^1}\\ &= e^{-S_{\text{eff}}\left(\bar{\phi},\phi\right)}\sum_{m,n}\bar{\phi}(n)\, i\theta\left(\gamma_5 D_{\text{eff}}(n,m) + D_{\text{eff}}(n,m)\gamma_5\right)\phi(m)\end{aligned} \tag{2.5.5}$$

が得られ、また、右辺からは

$$\begin{aligned}&\int d\bar{\psi}d\psi\ \exp\left[S_{\text{cont}} - \alpha\sum_n\left(\bar{\phi}_n - \bar{\psi}_n\right)\ (1+2i\theta\gamma_5)\left(\phi_n - \psi_n\right)\right]\Bigg|_{\theta^1}\\ &= -i\frac{2}{\alpha}\sum_n\frac{\delta}{\delta\phi(n)}\theta\gamma_5\frac{\delta}{\delta\bar{\phi}(n)}e^{-S_{\text{eff}}\left(\bar{\phi},\phi\right)}\\ &= e^{-S_{\text{eff}}\left(\bar{\phi},\phi\right)}\frac{2}{\alpha}\sum_{l,m,n}\bar{\phi}(l)D_{\text{eff}}(l,m)\theta\gamma_5 D_{\text{eff}}(m,n)\phi(n)\end{aligned} \tag{2.5.6}$$

が導かれる。両辺を見比べることにより、格子上のディラック演算子がカイラル対称性に対して持つ Ginsparg-Wilson 関係式 [82]

$$\gamma_5 D_{\text{eff}} + D_{\text{eff}}\gamma_5 = \frac{2}{\alpha}D_{\text{eff}}\gamma_5 D_{\text{eff}} \tag{2.5.7}$$

が導かれる。ここから、新たに

$$\hat{\gamma}_5 = \gamma_5 - \frac{2}{\alpha}D_{\text{eff}}\gamma_5 D_{\text{eff}} \tag{2.5.8}$$

を定義しておけばブロックスピン変換を受けた格子上の作用は、「新しいカイラル変換」

$$\begin{aligned}\psi \to e^{i\theta\gamma_5}\psi, \bar{\psi} \to \bar{\psi}e^{i\theta\hat{\gamma}_5},\\ \theta = \theta^A T^A,\end{aligned} \tag{2.5.9}$$

の下で不変になっている [83]。

以上の意味でのカイラル対称性を持つ 1 つの具体的なディラック演算子がオーバーラップ演算子 (Neuberger-Dirac 演算子) である [79, 81];

$$\begin{aligned}D(m) &= \frac{1}{2}\left(1 + m + (1-m)\frac{D_W}{\sqrt{D_W^\dagger D_W}}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(1 + m + (1-m)\gamma_5\frac{H_W}{\sqrt{H_W^2}}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(1 + m + (1-m)\ \gamma_5\,\text{sign}\left(H_W\right)\right)\end{aligned} \tag{2.5.10}$$

ここで、$\mathrm{sign}(A)$ は、行列 A の固有値に対する符号関数であり、また、H_W はウィルソン演算子 D_W を用いて $H_W = \gamma_5 D_W$ と定義される。この演算子が 0 質量の極限で式 (2.5.7)を満たすことを確かめる。そのために $V = \frac{D_W}{\sqrt{D_W^\dagger D_W}}$ を定義する。V がウィルソン演算子が γ_5 エルミート性 $\gamma_5 D_W \gamma_5 = D_W^\dagger$ を持つことから導かれる

$$
\begin{aligned}
V\gamma_5 V &= D_W \left(D_W^\dagger D_W\right)^{-\frac{1}{2}} \gamma_5 D_W \left(D_W^\dagger D_W\right)^{-\frac{1}{2}} \\
&= D_W \left(D_W^\dagger D_W\right)^{-\frac{1}{2}} D_W^\dagger \left(D_W D_W^\dagger\right)^{-\frac{1}{2}} \gamma_5 \\
&= D_W \left(D_W^\dagger D_W\right)^{-\frac{1}{2}} \left(D_W^\dagger D_W\right)^{-\frac{1}{2}} D_W^\dagger \gamma_5 \\
&= \gamma_5
\end{aligned}
\tag{2.5.11}
$$

を満たすことを用いると、0 質量のオーバーラップ演算子が Ginsparg-Wilson 関係式を満たすことが確かめられる；

$$
\begin{aligned}
D(0)\gamma_5 D(0) &= \frac{1}{2}(1+V)\gamma_5(1+V) \\
&= \frac{1}{4}(\gamma_5 + V\gamma_5 + \gamma_5 V + V\gamma_5 V) \\
&= \frac{1}{2}\{\gamma_5, D\}
\end{aligned}
\tag{2.5.12}
$$

以上の Ginsparg-Wilson 関係式の確認に用いた性質は、D_W が γ_5 エルミート性を満たすということだけであるので、D_W は γ_5 エルミート性を満たす任意の行列を用いることで、Ginsparg-Wilson 関係式を満たすことがわかる。

次に、以上で定義されるオーバーラップ演算子とドメインウォール演算子の関係を考えていく。このために式 (2.4.13),(2.4.16) のドメインウォールフェルミオンを拡張した Möbius Fermion を考える [84];

$$
S_{DW,F} = -\sum_{s,s'}\sum_{n,m} \bar{\hat{\psi}}_s(n)\left(D_F\right)_{n,s;m,s'} \hat{\psi}_{s'}(m),
\tag{2.5.13}
$$

ここで $\left(D_F\right)_{n,s;m,s'}$ は以下のように定義される。

$$
\left(D_F\right)_{n,s;m,s'} = \delta_{s,s'} D^{\parallel}_{n,m} + \delta_{n,m} D^{\perp}_{s,s'}
\tag{2.5.14}
$$

$$
D^{\parallel}_{n,m} = b_i D_W\left(m_5\right)
\tag{2.5.15}
$$

$$
D^{\perp}_{s,s'} = \begin{cases}
D_-^{(1)}\left(-P_L\delta_{2,s'} + m_f P_R \delta_{L_s,s'}\right) - \delta_{1,s'}, & \text{if } s = 1, \\
D_-^{(s)}\left(-P_L\delta_{s+1,s'} - P_R \delta_{s-1,s'}\right) - \delta_{s,s'}, & \text{if } 1 < s < L_s, \\
D_-^{(L_s)}\left(m_f P_L\delta_{1,s'} - P_R \delta_{L_s-1,s'}\right) - \delta_{L_s,s'}, & \text{if } s = L_s,
\end{cases}
\tag{2.5.16}
$$

ここで $D_W(M_5)$ はウィルソン演算子

$$
\begin{aligned}
D_W\left(m_5\right) = \frac{1}{2}\sum_\mu &\left(\left(1+\gamma_\mu\right) U_{n,\hat{\mu}}\delta_{n+\hat{\mu},m} + \left(1-\gamma_\mu\right) U^\dagger_{m,\hat{\mu}}\delta_{n-\hat{\mu}m}\right) \\
&+ \left(m_5 - 4\right)\delta_{n,m}
\end{aligned}
\tag{2.5.17}
$$

であり、$D_-^{(i)}$ は、

$$
D_-^{(i)} = c_i D_W\left(n_5\right) - 1,
\tag{2.5.18}
$$

と定義されている。b_i,c_i は $b_i - c_i$ 一定の実変数であり、これらの変数を変化させることにより、様々なドメインウォールフェルミオンが実現される；

$$\begin{array}{lll} \text{Shamir(第 2.4 節)} & b_i = 1 & c_i = 0 \\ \text{Borici([85])} & b_i = 1 & c_i = 1 \\ \text{Chiu([86])} & b_i = a_i & c_i = a_i \end{array} \tag{2.5.19}$$

ここで、a_i は、sign 関数に対する Zoloterev 近似を与えるように決められている。こうして定義される Möbius Fermion の演算子は、オーバーラップ演算子の近似と線形変換により、関係づけることが出来る。ここで、オーバーラップ演算子の近似式とは、式 (2.5.10)における符号関数を有限の多項式により近似したものである。4 次元のオーバーラップの近似式を $D_{OV}(m)$ と書き、また、$D_{OV}^{(5)}(m)$ を

$$D_{OV}^{(5)}(m) = \begin{cases} \delta_{1,s'} D_{OV}(m) & \text{if } s = 1 \\ \delta_{s,s'} & \text{if } 1 < s \leq L_s \end{cases} \tag{2.5.20}$$

と書くと、Möbius Fermion の演算子は、オーバーラップ演算子の線形変換は以下のように書くことが出来る。

$$L D_{DW}(m) R = F D_{OV}^{(5)}(m). \tag{2.5.21}$$

L, R, F はそれぞれ以下のように定義される。

$$F = L D_{DW}(1) R, \tag{2.5.22}$$

$$L_{s,s'} = \sum_{i=0}^{L_s - s} \delta_{s+i,s'} \prod_{j=s}^{s'-1} S_j \left(Q^{(s')} \right)^{-1} \gamma_5, \tag{2.5.23}$$

$$R = P \hat{R},$$

$$P_{s,s'} = \begin{cases} \delta_{s,s'} P_L + \delta_{s+1,s'} P_R & \text{if } 1 \leq s < L_s \\ \delta_{L_s,s'} P_L + \delta_{1,s'} P_R & \text{if } s = L_s \end{cases}, \tag{2.5.24}$$

$$\hat{R}_{s,s'} = \begin{cases} -\delta_{1,s'} & \text{if } s = 1 \\ -\delta_{1,s'} \prod_{i=s}^{L_s} S_i d + \delta_{s,s'} & \text{if } 1 < s \leq L_s \end{cases}, \tag{2.5.25}$$

ここで $\prod_{i=s}^{L_s} S_i = S_s S_{s+1} \cdots S_{L_s}$ である。それぞれの行列要素は以下のように定義されている。

$$Q_+^{(i)} = \gamma_5 D_W \left(b_i P_R + c_i P_L \right) + 1, \tag{2.5.26}$$

$$Q_-^{(i)} = \gamma_5 D_W \left(b_i P_L + c_i P_R \right) - 1, \tag{2.5.27}$$

$$S_i = T_i^{-1} = - \left(Q_-^{(i)} \right)^{-1} Q_+^{(i)}, \tag{2.5.28}$$

$$d = P_R - m P_L, \tag{2.5.29}$$

この時、F 及び $D_{OV}(1)$ の具体的な表式は $S = \prod_{i=1}^{L_s} S_i$ を用いて、

$$F = \begin{cases} \delta_{1,s'} \left(S + 1 \right) \gamma_5 & \text{if } s = 1 \\ \delta_{s,s'} & \text{if } 1 < s \leq L_s \end{cases}, \tag{2.5.30}$$

$$D_{OV}(m) = \frac{1}{2} \left(1 + m + (1-m) \gamma_5 \frac{(S-1)}{(S+1)} \right), \tag{2.5.31}$$

と計算することが出来る。ここで、もし、$(S-1)/(S+1)$ が、ある行列の符号関数の近似で書くことが出来ていれば、式 (2.5.31)は、オーバーラップ演算子の近似式と見なすことが出来る。この

関係式が存在するかどうかを考えるために、$H_T^{(i)}$ を

$$S_i = \frac{H_T^{(i)} + 1}{H_T^{(i)} + 1}, \tag{2.5.32}$$

と定義する。この時、S_i の具体形を代入すると、

$$H_T^{(i)} = (b_i + c_i)\,\gamma_5 D_W \frac{1}{2 + (b_i - c_i)\, D_W}, \tag{2.5.33}$$

となる。カーネル H_T を

$$\begin{aligned} H_T &= \gamma_5 D_W \frac{1}{2 + (b_i - c_i)\, D_W}, \\ &= \frac{1}{b_i + c_i} H_T^{(i)} \end{aligned} \tag{2.5.34}$$

と定義する。$H_T^{(i)}$ を使って、$(S-1)/(S+1)$ は、以下のように書き直すことが出来る。

$$\frac{(S-1)}{(S+1)} = \frac{A-B}{A+B}, \tag{2.5.35}$$

ここで、

$$A = \prod_{i=1}^{L_s} \left(H_T^{(i)} + 1 \right), B = \prod_{i=1}^{L_s} \left(H_T^{(i)} - 1 \right), \tag{2.5.36}$$

である。$H_T^{(i)}$ の中の、b_i 及び c_i を適当に選ぶことにより、この式をカーネル H_T の符号関数と近似することが出来る。今、$b_i - c_i$ は一定であるので、すべての i に関して $H_T^{(i)}$ の値は一定である。既知の関数系としては、

- $c_i + b_i = const$:符号関数の通常の極分解の式が得られる。
- $c_i + b_i$ を Zolotarev 係数 [86, 87] ととる。

ととることにより、符号関数の近似が得られることが知られている。例えば、Shamir のドメインウォールフェルミオンの場合には $b_i - c_i = 1$ 及び $b_i + c_i = 1$ と置くことで、式 (2.5.35)は

$$\frac{(S-1)}{(S+1)} = \frac{(1+H_T)^{L_s} - (1-H_T)^{L_s}}{(1+H_T)^{L_s} + (1-H_T)^{L_s}} \xrightarrow{L_s \to \infty} \mathrm{sign}\,(H_T) \tag{2.5.37}$$

となり、確かに $L_s \to \infty$ の極限でオーバーラップ型の演算子になっており、ドメインウォール演算子が、オーバーラップ演算子の 1 つの近似を与えていることがわかった。

2.6 Hadronic Renormalization とマッチング

ここまでの格子理論は全て無次元の量を用いて計算しており、その結果得られる量は、例えば m_π/m_K などの無次元の量である。次にここからどのように QCD の裸のパラメータを固定し、ハドロンの物理量を予言するかについて説明する。また、得られる繰り込まれた理論と、通常の $\overline{MS}$ などの摂動的に繰り込まれた理論との関係を簡単に説明する。

通常、格子 QCD では裸のパラメータを固定するために、Hadronic Renormalization と呼ばれる、ハドロンの質量などを用いた方法を用いている。格子理論では理論に出現するパラメータは、

(裸の) ゲージ結合定数 g_0 及び (裸の) クォーク質量 m_u, m_d, m_s である。これらのパラメータは数値計算においては、入力値であり、自由に動かせるパラメータである。このとき、数値計算により計算されるハドロン質量などの値は、入力値の関数として表されることになる。この時パラメータは、現実のハドロンの質量などの実験から得られる値を再現するように固定される。例えば、4 個のパラメータ g_0, m_u, m_d, m_s を固定するために、4 つの実験値 $m_\Omega, m_{\pi^+}, m_{K^+}, m_{K^0}$ を考えることができる；

$$\begin{aligned}\frac{(am_\Omega)^{\text{lat}}}{m_\Omega^{\text{exp}}} = a\left(g_0, m_u, m_d, m_s\right), \qquad & \frac{(am_{\pi^+})^{\text{lat}}}{(am_\Omega)^{\text{lat}}} = \frac{m_{\pi^+}^{\text{exp}}}{m_\Omega^{\text{exp}}} \\ \frac{(am_{K^+})^{\text{lat}}}{(am_\Omega)^{\text{lat}}} = \frac{m_{K^+}^{\text{exp}}}{m_\Omega^{\text{exp}}}, \qquad & \frac{(am_{K^0})^{\text{lat}}}{(am_\Omega)^{\text{lat}}} = \frac{m_{K^0}^{\text{exp}}}{m_\Omega^{\text{exp}}}\end{aligned} \tag{2.6.1}$$

QCD は繰り込み可能な理論であるので、こうして決められた裸のパラメータを用いた計算を行うことでその他のハドロンの物理量を予言することが出来る。

次にこうして求められた裸のパラメータと $\overline{MS}$ などの高エネルギー領域における摂動展開により定義される繰り込みに現れる量との関係について考える。これは、QCD の基本的なパラメータである、繰り込まれた結合定数や繰り込まれた質量を低エネルギーのハドロンの物理量により決定するということであり、そのような基本パラメータを第一原理から予言するということである。この手法を知るための教育的な出発点として、PCAC 関係式 [88, 89] を考える。PCAC 関係式から、K 中間子の質量は以下のように書くことが出来る。

$$f_K m_K^2 = \left(\bar{m}_u + \bar{m}_s\right) \langle 0| \left(\bar{u}\gamma_5 s\right) |K^+\rangle \tag{2.6.2}$$

ここで、$\bar{u}\gamma_5 s$ は擬スカラーメソンの演算子、$\bar{m}_u$ 及び $\bar{m}_d$ は、繰り込み手法に依存する PCAC 質量である。ここから実験値 f_K 及び m_K を用いてクォーク質量の値 $\bar{m}_u + \bar{m}_s$ を求めようと思えば格子数値計算において行列要素 $\langle 0| (\bar{u}\gamma_5 s) |K^+\rangle$ を計算すれば良い。ここで、左辺は観測可能な物理量のみから構成されるため、スケール依存性及び繰り込み手法依存性は右辺の組み合わせで完全に相殺している必要がある。そのため、$\overline{MS}$ における $\bar{m}_u + \bar{m}_s$ を格子計算の結果から (Hadronic Renormalization から) 得るには、格子上の擬スカラーメソンの行列要素と、$\overline{MS}$ で求められるものとの関係式を計算しなければならない。

$$\left(\bar{u}\gamma_5 s\right)_{\overline{MS}} = Z_P\left(g_0, a\mu\right) \left(\bar{u}\gamma_5 s\right)_{\text{lat}}, \tag{2.6.3}$$

ここで、μ は $\overline{MS}$ の繰り込みスケールである。繰り込み定数 Z_P をもし知ることが出来れば、以上の関係式から、$(\bar{m}_u + \bar{m}_s)$ を得ることが出来る。Z_P は、$\overline{MS}$ における擬スカラーメソンを含む Green 関数と Hadronic Renormalization との適当なマッチングを課すことにより得ることが出来る。Hadronic Renormalization が非摂動的な方法であるのに対して、$\overline{MS}$ は摂動的に定義される理論であるため、この条件は実際には非摂動的に課すことは出来ない。1-loop の格子摂動計算により、Z_P は以下のように計算されている。

$$Z_P\left(g_0, a\mu\right) = 1 + \frac{g_0^2}{4\pi}\left\{\frac{2}{\pi}\ln\left(a\mu\right) + C\right\} + O(g_0^4) \tag{2.6.4}$$

ここで C は、QCD 作用の離散化方法によって変化する定数である。この方法は非常に単純に遂行することが可能である一方で、裸のパラメータ g_0 による展開は収束が非常に緩やかであり、誤差の大きさを見積もることが困難である [90, 91]。

この問題は、2 つの繰り込み手法の間に中間的な繰り込み手法を導入することにより解決される。中間的に用いる繰り込み手法として RI/MOM [92] 及び Schrödinger Functional [93–95] とよばれ

る 2 つの方法が非常によく使われている。本論文でのクォーク質量の決定においては、中間的手法として RI/MOM に改良を加えた RI/SMOM [96] を用いて計算を行っている。

2.7 擬スカラーメソンの質量とクォーク質量の決定

この節では、格子計算の結果を用いてどのように擬スカラーメソンの質量を決定するか、また、そこからどのようにクォーク質量を導き出すかについて述べる。格子計算の計算手法は次節でのべ、ここでは、格子計算により、擬スカラー演算子の 2 点関数の値が格子計算により計算可能であるということを仮定する。

擬スカラー演算子の 2 点関数を考える；

$$C_\pi^{ab}(n_0) = \sum_{\vec{n}} \langle \pi^a(n_0,\vec{n})\pi^b(0)\rangle . \tag{2.7.1}$$

ここで、$\pi^a(n)$ は

$$\pi^a(n) = \bar{\hat{\psi}}(n)T^a\gamma_5\hat{\psi}(n) \tag{2.7.2}$$

と定義される。ここで、T^a は $SU(N)$ 演算子の生成子であり、また、ゼロ運動量を考えるために空間方向 $\vec{n}$ についての和をとっている。$|E_k(\vec{p})\rangle$ を無次元の運動量 $\vec{p}$ を持つ状態とし、$\hat{m}_k$ をその粒子の無次元の質量、無次元のエネルギーを $E_k(\vec{p})^2 = \hat{m}_k^2 + \vec{p}^2$ とした時の場の量子論の完全性関係

$$\mathbf{1} = |0\rangle\langle 0| + \sum_k \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} |E_k(\vec{p})\rangle\langle E_k(\vec{p})| \frac{1}{2E_k(\vec{p})} + \dots, \tag{2.7.3}$$

を用いると、2 点関数は以下のように書き直される。

$$\begin{aligned} C_\pi^{ab}(n_0) &= \sum_{\vec{n}} \langle 0|\pi^a(n)\pi^b(0)|0\rangle \\ &= \sum_{\vec{n}} \langle 0|\pi^a(n)|0\rangle\langle 0|\pi^b(0)|0\rangle \\ &+ \sum_{\vec{n}}\sum_k \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_k(\vec{p})} \langle 0|\pi^a(n)|E_k(\vec{p})\rangle\langle E_k(\vec{p})|\pi^b(0)|0\rangle + \dots \\ &= \sum_{\vec{n}} \langle 0|\pi^a(0)|0\rangle\langle 0|\pi^b(0)|0\rangle \\ &+ \sum_{\vec{n}}\sum_k \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_k(\vec{p})} e^{i\vec{p}\cdot\vec{n}-E_k(\vec{p})n_0} \\ &\quad \times \langle 0|\pi^a(0)|E_k(\vec{p})\rangle\langle E_k(\vec{p})|\pi^b(0)|0\rangle + \dots . \end{aligned} \tag{2.7.4}$$

ここで第 1 項目の真空期待値は以下のように経路積分表示をすることで、$\mathrm{tr}\,[T^a] = 0$ であることから 0 になることがわかる；

$$\begin{aligned} \langle 0|\bar{\hat{\psi}}\gamma_5 t^a\hat{\psi}|0\rangle &= \int dUd\hat{\psi}d\bar{\hat{\psi}}\left(\bar{\hat{\psi}}(0)\gamma_5T^a\hat{\psi}(0)\right) \\ &\quad\times\exp\left(-S_G(U) - \sum_n \bar{\hat{\psi}}(n)(\not{D}+m_f)\hat{\psi}(n)\right) \\ &= \int dU \prod_k \mathrm{tr}\left(\gamma_5T^a(\not{D}+m_q)^{-1}_{00}\right)\exp\left(-S_G(U)\right) \\ &= 0. \end{aligned} \tag{2.7.5}$$

次に式 (2.7.4)の第 2 項中の $\vec{x}$ の和を実行するために関係式

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{ip\cdot x} = 2\pi\delta(p) \tag{2.7.6}$$

を用いると、$C_\pi^{ab}(n_0)$ は

$$\begin{aligned} C_\pi^{ab}(x_0) &= \sum_{\vec{n}}\sum_k \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_k(\vec{p})} e^{i\vec{p}\cdot\vec{n}} e^{-E_k(\vec{p})n_0} \\ &\quad \times \langle 0|\,\pi^a(0)\,|E_k(\vec{p})\rangle \langle E_k(\vec{p})|\,\pi^b(0)\,|0\rangle + \dots \\ &= \sum_k \frac{1}{2\hat{m}_k} e^{-\hat{m}_k x_0} \langle 0|\,\pi^a(0)\,|\hat{m}_k\rangle \langle \hat{m}_k|\,\pi^b(0)\,|0\rangle \cdots . \end{aligned} \tag{2.7.7}$$

となる。ここで、x_0 を充分大きくとれば、

$$\begin{aligned} C_\pi^{ab}(x_0) &= \frac{\langle 0|\,\pi^a(0)\,|\hat{m}_k\rangle \langle \hat{m}_k|\,\pi^b(0)\,|0\rangle}{2\hat{m}_0} \\ &\quad \times \exp\left(-\hat{m}_0 x_0\right)\left(1 + \sum_k O\left(e^{-(\hat{m}_k - \hat{m}_0)x_0}\right)\right) + \cdots . \end{aligned} \tag{2.7.8}$$

となる。ここで、m_0 は π^a に結合する粒子のうちで最も軽いものの質量である。格子計算では時間方向を有限にとらなければならないので、その影響を考慮する必要がある。例として、時間方向に長さ T の周期的境界条件をとった場合を考えると、$0 \le n_0 \le T$ の場合、$\langle \pi^a(n_0, \vec{n})\pi^b(0)\rangle$ の寄与と同時に $\langle \pi^a(n_0 + T, \vec{n})\pi^b(0)\rangle$ からの影響も受けることになる。これを考慮すると、周期的境界条件を課した時の 2 点関数は

$$\begin{aligned} C_\pi^{ab}(x_0) &\sim \frac{\langle 0|\,\pi^a(0)\,|\hat{m}_k\rangle \langle \hat{m}_k|\,\pi^b(0)\,|0\rangle}{2\hat{m}_0}\left(e^{-\hat{m}_0 x_0} + e^{-\hat{m}_0(T - x_0)}\right) + \cdots \\ &= \frac{\langle 0|\,\pi^a(0)\,|\hat{m}_k\rangle \langle \hat{m}_k|\,\pi^b(0)\,|0\rangle}{2\hat{m}_0} e^{-\hat{m}_0\frac{T}{2}} \cosh\left(\hat{m}_0\left(t - \frac{T}{2}\right)\right) + \cdots \end{aligned} \tag{2.7.9}$$

と cosh の振る舞いになる。この式と格子計算により得る $C_\pi^{ab}(x_0)$ の時間依存性を比較することで擬スカラーメソンの質量を得ることができる。ところが、実際の格子計算では、計算時間の制約のため時間方向の格子数をそれほど多く用意できない。そこで、有効質量

$$\hat{m}_{\mathrm{eff}}(t) = -\log\left[\frac{C_\pi(t+\hat{t})}{C_\pi\,(t)}\right] \tag{2.7.10}$$

を定義する。この量は $t \to \infty$ で特定の値 $\hat{m}_f$ に収束する量である。実際の計算では、$m_{\mathrm{eff}(t)}$ が一定の値になる $t_{\min}$ と $t_{\max}$ を見つけ、その間の t に於いて式 (2.7.9)などを用いてフィットすることで擬スカラーメソンの質量を得る。励起状態の質量を求めたい時には、式 (2.7.9)に 2 番目に軽い粒子の質量を m_1 として、$\exp(-m_1 t)$ まで含めてフィットを行えば良い。

以上のようにして得られる格子上の物理量を現実の物理量と関連付けるためには、格子理論のパラメータであるゲージ結合定数 g_0 と、軽いクォーク質量 m_u, m_d, m_s を決定する必要がある。今、ゲージ結合定数は、格子間隔と関係付くため、格子間隔 a とクォーク質量と考えても良い。今、4 つの未定のパラメータが存在するため、その全てを決定するには 4 つの物理量が必要となる。例えば、3 つのクォーク質量間の比 $\frac{m_u a}{m_s a}$ などを決める物理量として、Ω バリオンの質量及び擬スカラーメソンの質量 m_{π^+}、m_{K^+}、m_{K^0} の 4 つを用いることにする。クォーク質量を固定するには、これら 4 つの物理量による無次元量、例えば $\frac{m_{\pi^+}a}{m_{K^+}a} = \frac{134.98}{494.521} \sim 0.27$ などを再現するように、格子計算のクォーク質量パラメータを調節すればよいが、実際の数値計算では、パイ中間子の質量を再現するようなクォーク質量 m_u、m_d を実現することは困難である。これは以下のような理由による。

- クォーク質量を下げ、軽いパイ中間子が現れることで、有限体積効果の効果を受けやすくなるためより大きな格子を使う必要が生ずる。

- ディラック演算子の条件数はクォーク質量の逆数に比例するため、ディラック演算子の逆を求める時間がより多くかかってしまう。

このため、現実のクォーク質量で計算することは出来ず、より重いクォーク質量の何点かでハドロンの質量の計算を行い、そこから現実の質量への外挿を行うという方法を取る。また、その後、この操作を複数の格子間隔 a に対し行い、それを $a \to 0$ の連続極限へと外挿する必要があるが、今回の計算では論じない。

今回の計算では、質量外挿の関数系としては、カイラル対称性が近似的に成り立つ場合に一般に成立する有効理論であるカイラル摂動論を用いる。この際、カイラル摂動論に現れる Gasser-Leutwyler 係数の値も決めることが出来る。カイラル摂動論による予言によれば擬スカラーメソンのクォーク質量 m_f に対する依存性は $m_f \log(m_f)$ であり [45]、多項式近似を用いた場合と較べ大きくクォーク質量が変化する可能性がある。カイラル摂動論に関しては次章で説明を行う。また、今回の計算において選ばれた Ω バリオンの質量は、カイラル摂動論によれば m_u や m_d クォークに関する非線形な項が存在しない [97,98]。そのため、m_u,m_d に関して線形に外挿することで容易に比較的信頼可能な外挿が可能となっている。

カイラル摂動論によれば、擬スカラーメソンの質量は、クォーク質量に非常に大きく依存しており、クォーク質量を決定する物理量として非常に適している。また、格子計算により、高精度で計算することが可能であるという特徴も兼ね備えている。さらに、擬スカラーメソンの質量は実験的に非常に精度よく測定されているため、クォーク質量を決定する際には、実験誤差がほとんど依存しないというのも重要な点である。以上の理由により、今回のクォーク質量の計算では、Hadronic Renormalization に用いるハドロン物理量として m_{π^+}、m_{K^+}、m_{K^0} 及び m_Ω を選んだ。

2.8 配位生成と Partially Quenching

これまで、格子上におけるゲージ場、クォーク場の定義など、格子理論の定式化に関しての説明を行ってきた。この節では、以上により構成された格子上の理論から、数値計算によりどのように相関関数の値を得るのかに関して簡単な概念を述べておく。

格子 QCD の作用を

$$\begin{aligned} S\left[\bar{\hat{\psi}},\hat{\psi},U\right] &= S_G(U) + S_F\left[\bar{\hat{\psi}},\hat{\psi},U\right] \\ &= S_G(U) + \bar{\hat{\psi}}\left(\not{D}(U)+M\right)\hat{\psi} \\ &= S_G(U) + \sum_q \bar{\hat{\psi}}_q\left(\not{D}(U)+m_q\right)\hat{\psi}_q. \end{aligned} \tag{2.8.1}$$

と書く。ここで、$S_G(U)$ は、格子上のゲージ場の作用であり、また、$\not{D}(U)$ は格子上の共変微分であり、q はクォークの種類を表す指標、m_q はクォーク q の質量である。空間、カラー及びスピノールの和の表記は省略している。ゲージ場 U 及びクォーク場 $\bar{\hat{\psi}},\hat{\psi}$ からなる任意の演算子 $O\left(\bar{\hat{\psi}},\hat{\psi},U\right)$ の真空期待値は以下のように書くことができる；

$$\langle O\left(\bar{\hat{\psi}}.\hat{\psi},U\right)\rangle = \frac{\int dUd\bar{\hat{\psi}}d\hat{\psi}O\left(\bar{\hat{\psi}},\hat{\psi},u\right)e^{-S\left[\bar{\hat{\psi}},\hat{\psi},U\right]}}{\int dUd\bar{\hat{\psi}}d\hat{\psi}e^{-S\left[\bar{\hat{\psi}},\hat{\psi},U\right]}} \tag{2.8.2}$$

ソース項 η、$\bar{\eta}$ を導入することで、$O\left(\bar{\hat{\psi}},\hat{\psi},U\right)$ の中の $\bar{\hat{\psi}}$、$\hat{\psi}$ をソースに対する微分 $\frac{\partial}{\partial\bar{\eta}}$、$\frac{\partial}{\partial\eta}$ に変更することができ、したがって、フェルミオン部分の積分を実行できる;

$$\begin{aligned}
&\int dU d\bar{\hat{\psi}} d\hat{\psi} O\left(\bar{\hat{\psi}},\hat{\psi},U\right) e^{-S\left[\bar{\hat{\psi}},\hat{\psi},U\right]} \\
&= \int dU d\bar{\hat{\psi}} d\hat{\psi} O\left(\bar{\hat{\psi}},\hat{\psi},U\right) e^{-S_G(U)} e^{-\bar{\hat{\psi}}\left(\not{D}+m_q\right)\hat{\psi}+\bar{\hat{\psi}}\eta+\bar{\eta}\hat{\psi}}\Big|_{\eta=\bar{\eta}=0} \\
&= \int dU d\bar{\hat{\psi}} d\hat{\psi} O\left(-\frac{\partial}{\partial\eta},\frac{\partial}{\partial\bar{\eta}},U\right) e^{-S_G(U)} e^{-\bar{\hat{\psi}}\left(\not{D}+m_q\right)\hat{\psi}+\bar{\hat{\psi}}\eta+\bar{\eta}\hat{\psi}}\Big|_{\eta=\bar{\eta}=0} \\
&= \int dU e^{-S_G(U)} O\left(-\frac{\partial}{\partial\eta},\frac{\partial}{\partial\bar{\eta}},U\right) \prod_q \det\left(\not{D}+m_q\right)\exp\left[\bar{\eta}D^{-1}(U)\eta\right]\Big|_{\eta=\bar{\eta}=0}
\end{aligned} \tag{2.8.3}$$

ここで $d\bar{\hat{\psi}}d\hat{\psi}$ は

$$d\bar{\hat{\psi}}d\hat{\psi} = \prod_q d\hat{\psi}_q d\bar{\hat{\psi}}_q \tag{2.8.4}$$

を意味する。

以下に $O\left(-\frac{\partial}{\partial\eta},\frac{\partial}{\partial\bar{\eta}},U\right)$ の構成の例として非対角的なパイ中間子に関しての計算を示す。フレーバーに対する行列 T^a パイ中間子の演算子を $\pi^a(x)=\bar{\psi}(x)\gamma_5 T^a\psi(x)$ と書くと、2 点関数は以下のように書き直せる。

$$\begin{aligned}
C_\pi^{ab}(t) &= \left\langle \sum_{\vec{x}} \pi^a(\vec{x},t)\pi^b(0) \right\rangle \\
&= \left\langle \bar{\hat{\psi}}(\vec{x},t)\gamma_5 T^a\hat{\psi}(\vec{x},t)\bar{\hat{\psi}}(0)\gamma_5 T^b\hat{\psi}(0) \right\rangle \\
&= \int dU \det\left(\not{D}+m_q\right) e^{-S_G(U)} \\
&\sum_{\vec{x}} \left[\left(\left(-\frac{\partial}{\partial\eta(\vec{x},t)}\right)\gamma_5 T^a\left(\frac{\partial}{\partial\bar{\eta}(\vec{x},t)}\right)\left(-\frac{\partial}{\partial\eta(0)}\right)\gamma_5 T^b\left(\frac{\partial}{\partial\bar{\eta}(y)}\right)\right)\right] \\
&\times \exp\left[\bar{\eta}D^{-1}(U)\eta\right]\Big|_{\eta=\bar{\eta}=0} \\
&= \int dU \det\left(\not{D}+m_q\right) e^{-S_G(U)} \sum_{\vec{x}} \left[-\mathrm{Tr}\left(\gamma_5 T^a D^{-1}(U)_{x0}\gamma_5 T^b D^{-1}(U)_{0x}\right)\right. \\
&\qquad \left. +\mathrm{Tr}\left(\gamma_5 T^a D^{-1}(U)_{xx}\right)\cdot\mathrm{Tr}\left(\gamma_5 T^b D^{-1}(U)_{00}\right)\right]
\end{aligned} \tag{2.8.5}$$

ここで 4 元ベクトル $x=(t,\vec{x})$ である。もし U に関する積分を実行できれば、格子上の物理量を求めることができる。U の積分を行うためには、カラー自由度 8、μ の方向 4、格子間の個数 $V=L^4$ についての積分を行う必要があるが、例えば格子点の個数を 10 個としても $8\times4\times10^4$ 個の多重積分を実行する必要があり、これを直接的に実行することは現実的ではない。たった 10 点のメッシュを各積分で考えたとしても、積分は 10^{320000} 項の和をとることが必要となる。

これに対して、現在の多くの計算では、期待値の計算に統計的な手法を用いている。実際、ほとんどのゲージ配位では作用が非常に大きな値をとるため、積分に寄与する配位はほんのわずかなものであり、それらの配位を考えることで重要な情報の多くを (確率的に) 引き出すことが出来る。具体的には、確率密度 $\exp[-S_G(U)]\det\left[(\not{D}+m_q)\right]$ でリンク変数を発生させてそれを基に期待値を計算することで、期待値式 (2.8.3)を計算することができる；

$$< O > \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} O\left(\{U\}_i\right). \tag{2.8.6}$$

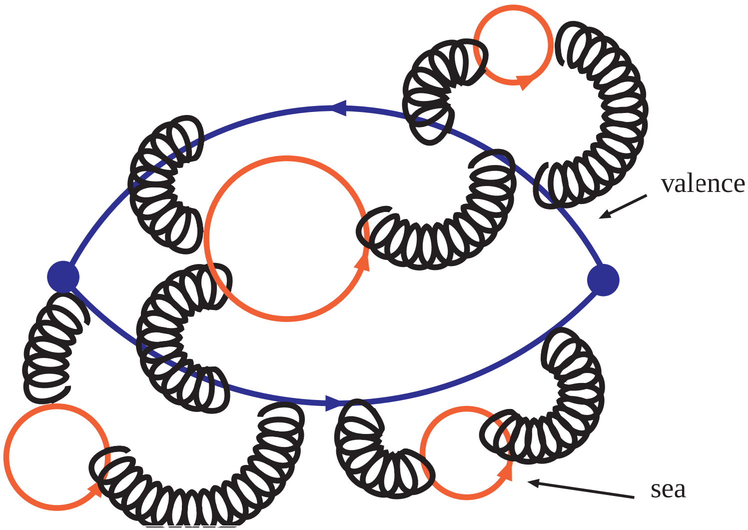


図 1: バレンスクォーク質量とシークォーク質量の説明のための擬スカラーメソンの 2 点関数のファインマン図。実線がクォークの線、巻線はグルーオンを表す。シークォーク質量は、青い線で表される内線のクォークループ中の質量、バレンスクォーク質量は赤い線で表される外線と繋がるクォークの質量に相当している。

ここで $\{U\}_i\,(i=1,\cdots,N)$ は確率密度 $\exp[-S_G(U)]\det[(\not{D}+m_q)]$ に従って発生させた配位を表す。このように重要な配位だけを取り出して計算する方法は importance sampling と呼ばれる。

次に Partially Quenching について説明する。以上のように確率的な手法を用いて期待値の計算を行う際、確率的に $\{U\}_i$ を発生させる部分と、それを用いて $O(\{U\}_i)$ を行う部分の計算は完全に独立に行うことができる。このため、配位生成の際に用いる行列式 $\det[(\not{D}+m_q)]$ に現れる質量と、演算子 $O(U_i)$ に現れる質量を全く異なるものをとることができる。この行列式中に現れるクォーク質量をシークォーク質量と呼び m_S と表記し、演算子中に現れるクォーク質量をバレンスクォーク質量と呼び m_V と表記する。シークォーク質量とバレンスクォーク質量として異なるものをとることを Partially Qunenching と言い、Partially Quenching の処方を行った QCD を PQQCD と呼ぶ。また、$m_s\to\infty$ としたもの (同じ意味で、配位生成の際に $\det(\not{D}+m_q)$ を 1 と置くこと) を Quenching と呼ぶ。シークォークとバレンスクオークを模式的に現した図が図 2.8である。

格子計算の計算時間は、行列式の計算と、演算子の計算では後者の方がはるかに計算時間が短くて済む。そのため、PQQCD を用いることで 1 つのシークォーク質量から得られたゲージ配位に対し、複数のバレンスクォーク質量による演算子を用いて計算を行うことで、データ点を増やし、より正確な予言ができるようにしている。このような非物理的な PQQCD の格子計算と、実際の QCD の物理量を結ぶために次節で説明する PQQCD の有効理論である PQ カイラル摂動論を用いる。

また、PQQCD による格子計算と PQ カイラル摂動論から物理量を得ることは、計算時間の短縮以上の利点がある。それは、パラメータであるクォーク質量を 2 つに分離し、独立に変化させることにより、決められる低エネルギー定数の数が増えるということである [99]。これを見るために、例えば $m_f=m_u=m_d$ と縮退したクォーク質量におけるメソン質量の NLO までの通常のカイラ

ル摂動論における表式を考える；

$$m_\pi^2 = \left(1 + \frac{\chi}{2(4\pi F)^2}\ln\left(\frac{\chi}{\mu^2}\right) + \frac{8\chi}{F^2}\left(2L_8 - L_5 + 4L_6 - 2L_4\right)\right). \tag{2.8.7}$$

ここで F,L_i は低エネルギー定数であり、χ はクォーク質量 m_f と低エネルギー定数 B_0 を用いて $\chi = 2B_0 m_f$ と定義される。この式を用いた時には、m_f を様々に変化させて得られる低エネルギー定数は B_0、F、$2l_8 - l_5 + 4l_6 - 2l_4$ という 3 種類である。これに対し、PQ カイラル摂動論におけるメソン質量の表式は

$$\begin{aligned} m_\pi^2 = \chi_V \Bigg(1 &+ \frac{(2\chi_V - \chi_S)}{2(4\pi F)^2}\ln\left(\frac{\chi_V}{\mu^2}\right) + \frac{\chi_V - \chi_S}{2(4\pi F)^2} \\ &+ \frac{8}{F^2}[(2L_8 - L_5)\chi_V + (2L_6 - L_4)n\chi_S]\Bigg). \end{aligned} \tag{2.8.8}$$

である。ここで χ_V はバレンスクォーク質量 m_V を用いて $\chi_V = 2B_0 m_V$、χ_S はシークォーク質量を用いて $\chi_S = 2B_0 m_S$ と定義されており、また、n はシークォークの種類の数である。式 (2.8.8)は $m_V, m_S \to m_f$ の極限において、式 (2.8.7)と一致する式になっている。格子計算により m_V と m_S を独立に動かし、式 (2.8.8)を用いてフィットを行うことにより得られる物理量は B_0、F、$2l_8 - l_5$、$4l_6 - 2l_4$ という 4 種類になり、PQ の計算をしない場合に較べ決められる低エネルギー定数の個数が増えることになる。

この節の最後に、PQQCD の場の理論的な定式化を示す。その方法は Morel により [100] で与えられた。この方法で、理論が保持する対称性が明らかになることにより、低エネルギー有効理論である PQ カイラル摂動論を構成することが可能となる。Morel の方法を説明するために分配関数

$$Z_0 = \int DU \prod_q \det(\not{D} + m_{S_q})e^{-S_g}. \tag{2.8.9}$$

を考える。ここで S_q はシークォークの種類を示すインデックスであり、m_{S_q} はシークォークの質量である。ここで恒等演算子

$$1 = \frac{\prod_q \det(\not{D} + m_{V_q})}{\prod_q \det(\not{D} + m_{V_q})}, \tag{2.8.10}$$

を分配関数中に挿入すると

$$\begin{aligned} Z_0 &= \int DU \prod_q \det(\not{D} + m_{S_q})e^{-S_g} \\ &= \int DU \prod_q \det(\not{D} + m_{S_q})\frac{\prod_q \det(\not{D} + m_{V_q})}{\prod_q \det(\not{D} + m_{V_q})}e^{-S_g} \\ &= \int DU D\bar{q}_S Dq_S D\bar{q}_V Dq_V D\tilde{q}_V^\dagger D\tilde{q}_V \\ &\quad \exp\Bigg(-S_g - \sum_{q=1}^{N}\int d^4x \bar{q}_{S_q}(\not{D} + m_{S_q})q_{S_q} - \sum_{q=1}^{N_V}\int d^4x \bar{q}_{V_q}(\not{D} + m_{V_q})q_{V_q} \\ &\qquad - \sum_{q=1}^{N_V}\int d^4x \tilde{q}_{V_q}^\dagger(\not{D} + m_{V_q})\tilde{q}_{V_q}\Bigg). \end{aligned} \tag{2.8.11}$$

最終行で用いた、q_{V_q}、q_{S_q} はフェルミオン場でそれぞれバレンスクォーク場、シークォーク場と呼ばれる。N_V 及び N はそれぞれ、バレンスクォーク、シークォークの個数である。$\tilde{q}_{V_q}$ は、ゴース

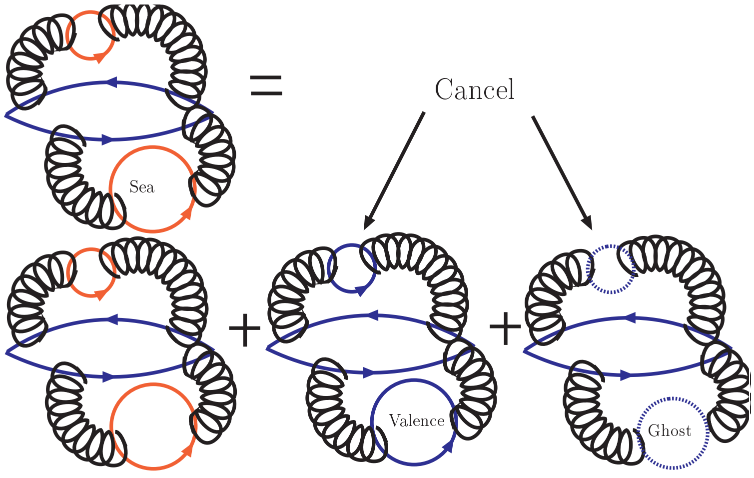


図 2: ゴースト場とバレンスクォーク場の相殺を模式的に現した図。ボソン場であるゴーストクォーク場とフェルミオン場であるバレンスクォーク場のループを同時に加えることにより、元の振幅を再現する。

トクォーク場と呼ばれるボソン場でバレンスクォークと同じ質量を持つ；

$$\int D\tilde{q}^\dagger D\tilde{q} e^{-\int d^4x \tilde{q}^\dagger (\not{D}+m_q)\tilde{q}} = \frac{1}{\det(\not{D}+m_q)} \tag{2.8.12}$$

バレンスクォークとゴーストクォークの導入を模式図として図 2に描いた。

有効理論を導くのに対称性を見やすくするために、バレンスクォーク場、シークォーク場及びゴーストクォーク場をまとめて Q と書く；

$$\begin{aligned} Q^t &= (\underbrace{q_{V_1}, \ldots, q_{V_{N_V}}}_{\text{valence}}, \underbrace{q_{S_1}, \ldots, q_{S_N}}_{\text{sea}}, \underbrace{\tilde{q}_{V_1}, \ldots, \tilde{q}_{V_{N_V}}}_{\text{ghost}}), \\ \overline{Q} &= (\underbrace{\bar{q}_{V_1}, \ldots, \bar{q}_{V_{N_V}}}_{\text{valence}}, \underbrace{\bar{q}_{S_1}, \ldots, \bar{q}_{S_N}}_{\text{sea}}, \underbrace{\tilde{q}^\dagger_{V_1}, \ldots, \tilde{q}^\dagger_{V_{N_V}}}_{\text{ghost}}). \end{aligned} \tag{2.8.13}$$

また、質量行列もまとめて、

$$M = \mathrm{diag}(\underbrace{m_{V_1}, \ldots, m_{V_{N_V}}}_{\text{valence}}, \underbrace{m_{S_1}, \ldots, m_{S_N}}_{\text{sea}}, \underbrace{m_{V_1}, \ldots, m_{V_{N_V}}}_{\text{ghost}}). \tag{2.8.14}$$

と書く。この時、分配関数から作用を抜き出すと、

$$\begin{aligned} S_{PQ} &= S_g + \int d^4x \bar{Q}(\not{D}+M)Q \\ \bar{Q}(\not{D}+M)Q &= \sum_{i=1}^{N_V} \bar{q}_{V_i}(\not{D}+M_{V_i})q_{V_i} + \sum_{i=1}^{N} \bar{q}_{S_i}(\not{D}+M_{S_i})q_{S_i} \\ &\quad + \sum_{i=1}^{N_V} \tilde{q}^\dagger_{V_i}(\not{D}+M_{V_i})\tilde{q}_{V_i}. \end{aligned} \tag{2.8.15}$$

この作用を用い、また、演算子 O には、シークォーク場やゴーストクォーク場を含まないとすると Partially Quenching の方法と同じ振幅を再現することができる。確認のため、この作用におけ

る相関関数を求めてみると、

$$
\begin{aligned}
C_\pi^{PQ}(t) &= -Z_{PQ}^{-1}\int DUD\bar{Q}DQe^{-S_{PQ}}\sum_{\vec{x}}\bar{u}_V\gamma_5 d_V(\vec{x},t)\bar{d}_V\gamma_5 u_V(0) \\
&= \frac{1}{Z_{PQ}}\int DU\prod_{j=1}^{N}\prod_{i=1}^{N_V}\frac{\det(\not{D}+m_{S_j})\det(\not{D}+m_{V_i})}{\det(\not{D}+m_{V_i})}e^{-S_g} \\
&\sum_{\vec{x}}\left(\mathrm{tr}\left(\gamma_5\left(\frac{1}{\not{D}+m_{V_d}}\right)_{x0}\gamma_5\left(\frac{1}{\not{D}+m_{V_u}}\right)_{0x}\right)\right) \\
&= \frac{1}{Z_{PQ}}\int DU\prod_{j=1}^{N}\det(\not{D}+m_{S_j})e^{-S_g} \\
&\sum_{\vec{x}}\left(\mathrm{tr}\left(\gamma_5\left(\frac{1}{\not{D}+m_{V_d}}\right)_{x0}\gamma_5\left(\frac{1}{\not{D}+m_{V_u}}\right)_{0x}\right)\right)
\end{aligned}
\tag{2.8.16}
$$

で確かに Partially Quenching の方法と同じ式が得られる。また、$m_{V_u}=m_{S_j}$,$m_{V_d}=m_{S_k}$ と置くことにより

$$
\begin{aligned}
C_\pi^{PQ}(t) &= Z_{PQ}^{-1}\int DUD\bar{Q}DQe^{-S_{PQ}}\sum\vec{x}\bar{u}_V\gamma_5 d_V(\vec{x},t)\bar{d}_V\gamma_5 u_V(0) \\
&= Z_{PQ}^{-1}\int DUD\bar{Q}DQe^{-S_{PQ}}\sum\vec{x}\bar{q}_{S_j}\gamma_5 q_{S_k}(\vec{x},t)\bar{q}_{S_k}\gamma_5 q_{S_j}(0) \\
&= Z_{PQ}^{-1}\int DUD\prod_{i=1}^{N}D\bar{q}_{S_i}Dq_{S_i}e^{-S_{PQ}}\sum\vec{x}\bar{q}_{S_j}\gamma_5 q_{S_k}(\vec{x},t)\bar{q}_{S_k}\gamma_5 q_{S_j}(0) \\
&= C_\pi^{QCD}(t).
\end{aligned}
\tag{2.8.17}
$$

であり、PQQCD が通常の QCD をその部分空間として含んでいることが確認される。

2.9 QCD+qQED system の生成

クォーク質量差の電磁相互作用からの寄与を見積もるには、ハドロンへの電磁相互作用の寄与を知る必要がある。電磁相互作用のハドロンへの寄与を第一原理から見積もる唯一の方法が電磁相互作用を含んだ格子計算を行うことである。

電磁相互作用によるハドロン物理量への寄与の大きさは単純には $\alpha_{\mathrm{EM}}\sim 1/137\sim 1\%$ 程度であると考えることが出来、実際に荷電-中性 π 中間子の質量から $(m_{\pi^+}-m_{\pi^0})/m_{\pi^+}\sim 3\%$ 程度である。格子計算の計算精度が上昇し、$O(1)$%での計算が出来るようになった現在、こうした電磁相互作用の効果を単純に無視することは出来ない。

QCD+QED のゲージ配位の生成は [101] の方法にしたがう。この方法では、クエンチ近似により電磁相互作用を導入する (シークォークの質量を 0 に置く)。その結果、ゲージ配位を 1 から作り直す必要はなく、既存の QCD の配位を再利用することが可能となっている。これは、QCD+クエンチ QED による確率密度関数が関数が、QCD の確率密度関数とクエンチ QED の確率密度関数に分解可能なことによっている。以下、この方法の詳細を、パイ中間子の 2 点関数を例に見ていく。

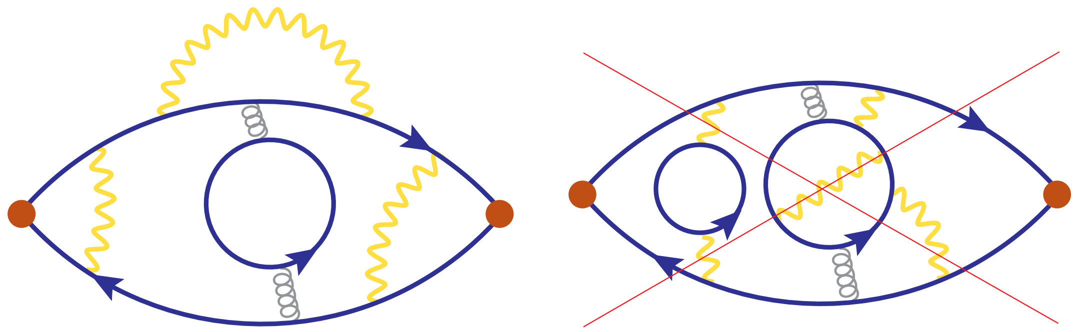


図 3: クエンチ QED に含まれる図 (左図) 及び含まれていない図 (右図) を示した図。図は擬スカラーメソンの 2 点関数を示している。図中で青の実線はクォークの線、黄の波線は光子の線、灰の巻線はグルーオンの線を表す。クエンチ QED では、シークォークと結合するバーテックスは禁止されているため、右図に含まれるような光子の線は含めることが出来ない。今回の計算には含まれないこれらの図は、re-weighting と呼ばれる手法により、導入することが可能である [102, 103]。

QCD+クエンチ QED の Lagrangian は

$$\begin{aligned} L_{pqQCD+qQED} &= \overline{Q}\,(\not{D}+m)\,Q + F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu,a} + F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\ D_\mu &= \partial_\mu + i\,\mathcal{Q}\,A_\mu + i\,g\,G^a_\mu T^a, \\ F^a_{\mu\nu} &= \partial_\mu G^a_\nu - \partial_\nu G^a_\mu + igf^a{}_{bc}G^b_\mu G^c_\nu, \\ F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu . \end{aligned} \tag{2.9.1}$$

ここで、G_μ、A_μ はそれぞれ QCD、QED のゲージ場、Q はバレンスクォーク場 q_{V_i}、シークォーク場 q_{S_i}、ゴーストクォーク場 $\tilde{q}_{V_i}$ からなる場、T^a は SU(3) の生成子である。また、$\mathcal{Q}$ は電荷行列であり、バレンスクォークの電荷 $e_{V_1}, \cdots e_{V_{N_V}}$ 及びシークォークの電荷 $e_{S_1}, \cdots e_{S_N}$ を用いることにより、

$$\mathcal{Q} = \mathrm{diag}\left(e_{V_1}, \cdots e_{V_{N_V}}, e_{S_1}, \cdots e_{S_N}, e_{V_1}, \cdots e_{V_{N_V}}\right) \tag{2.9.2}$$

と定義される。クエンチ QED では、シークォークの電荷 $e_{S_1}, \cdots e_{S_N}$ は全て 0 である。クエンチ QED において許される図、許されない図の例を図 3に図示した。

この時、$L_{pqQCD+qQED}$ を用いた分配関数は

$$
\begin{aligned}
Z_0 &= \int DG\, DA\, DQ\, D\bar{Q}\ \exp(-\int d^4x L_{pqQCD+qQED}) \\
&= \underbrace{\int DG \prod_{j=1}^{N} Dq_{S_j}\, D\bar{q}_{S_j}\ \exp\left(-\int d^4x\left(F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu,a} + \bar{q}_{S_j}(\not{D}(A=0) + m_{q_{S_j}})q_{S_j}\right)\right)}_{Z_0|_{\mathrm{QCD}}} \\
&\times \quad \underbrace{\int DA\ \exp\left(-F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right)}_{Z_0|_{\mathrm{EM}}} \\
&\times \int \prod_{i=1}^{N_V} Dq_{V_i} D\bar{q}_{V_i}\ \exp\left(-\bar{q}_{V_i}\left(\not{D} + m_{q_{V_i}}\right) q_{V_i}\right) \\
&\times \int \prod_{i=1}^{N_V} D\tilde{q}_{V_i} D\bar{\tilde{q}}_{V_i}\ \exp\left(-\bar{\tilde{q}}_{V_i}\left(\not{D} + m_{q_{V_i}}\right) q_{V_i}\right) \\
&= Z_0\ |_{\mathrm{QCD}}\ Z_0\ |_{\mathrm{EM}}
\end{aligned}
\tag{2.9.3}
$$

と書き直すことが出来る。ここで最後の行の変形ではバレンスクォークの寄与と、ゴーストクォークの寄与が完全に相殺することを用いた。$L_{pqQCD+qQED}$ を用いた理論における u と d から成るパイ中間子の 2 点相関関数は以下のように書ける。

$$
\begin{aligned}
&C_\pi\,(0,t) \\
&= -Z_0^{-1} \int DG\, DA\, D\bar{Q}\, DQ e^{-\int d^4x\, L_{pqQCD+qQED}} \\
&\times \sum_{\vec{x}} \bar{u}\,(\vec{x},t)\,\gamma_5 d(\vec{x},t)\bar{d}(0)\gamma_5 u(0) \\
&= -\frac{1}{Z_0}\int DG\, DA \prod_{j=1}^{N}\prod_{i=1}^{N_V} \frac{\det(\not{D} + m_{S_j})\det(\not{D} + m_{V_i})}{\det(\not{D} + m_{V_i})} \\
&\times e^{-\int d^4x\left(F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu,a} + F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right)} \\
&\times \sum_{\vec{x}}\left(\mathrm{tr}\left(\gamma_5 \frac{1}{\not{D} + m_{V_d}}\right)_{\vec{x}\vec{x}} \mathrm{tr}\left(\gamma_5 \frac{1}{\not{D} + m_{V_u}}\right)_{00}\right. \\
&\qquad \left. - \mathrm{tr}\left(\gamma_5 \left(\frac{1}{\not{D} + m_{V_d}}\right)_{\vec{x}0} \gamma_5 \left(\frac{1}{\not{D} + m_{V_u}}\right)_{0\vec{x}}\right)\right) \\
&= -\frac{1}{Z_0}\int DG \prod_{j=1}^{N} \det(\not{D} + m_{S_j}) e^{-F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu,a}} \int DA e^{-F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}} \\
&\sum_{\vec{x}}\left(\mathrm{tr}\left(\gamma_5 \frac{1}{\not{D} + m_{V_d}}\right)_{\vec{x}\vec{x}} \mathrm{tr}\left(\gamma_5 \frac{1}{\not{D} + m_{V_u}}\right)_{00}\right. \\
&\qquad \left. - \mathrm{tr}\left(\gamma_5 \left(\frac{1}{\not{D} + m_{V_d}}\right)_{\vec{x}0} \gamma_5 \left(\frac{1}{\not{D} + m_{V_u}}\right)_{0\vec{x}}\right)\right) \\
&\equiv -\left\langle \sum_{\vec{x}}\left(\mathrm{tr}\left(\gamma_5 \frac{1}{\not{D} + m_{V_d}}\right)_{\vec{x}\vec{x}} \mathrm{tr}\left(\gamma_5 \frac{1}{\not{D} + m_{V_u}}\right)_{00}\right.\right. \\
&\qquad \left.\left. - \mathrm{tr}\left(\gamma_5 \left(\frac{1}{\not{D} + m_{V_d}}\right)_{\vec{x}0} \gamma_5 \left(\frac{1}{\not{D} + m_{V_u}}\right)_{0\vec{x}}\right)\right)\right\rangle_{\mathrm{pqQCD+qQED}}
\end{aligned}
\tag{2.9.4}
$$

ここで F に対する括弧 $\langle F\rangle_{\mathrm{pqQCD+qQED}}$ は以下により定義される確率密度 $p_{\mathrm{pqQCD+qQED}}[G,A]$ による F の期待値を表す。

$$\begin{aligned}
p_{\mathrm{pqQCD+qQED}}[G,A] &= \frac{1}{Z_0}\prod_{j=1}^{N}\det(\not{D}+m_{S_j})e^{-\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu,a}-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}} \\
&= \underbrace{\frac{1}{Z_0\mid_{\mathrm{pqQCD}}}\prod_{j=1}^{N}\det(\not{D}+m_{S_j})e^{-\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu,a}}}_{p_{\mathrm{pqQCD}}}\underbrace{\frac{1}{Z_0\mid_{\mathrm{EM}}}e^{-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}}}_{p_{\mathrm{EM}}}
\end{aligned} \tag{2.9.5}$$

以上のように確率密度関数が完全に pqQCD 部分と電磁相互作用部分に分離可能である。このことを利用して、QCD の配位を利用して、QCD+qQED の配位を生成することが可能となっている。

2.10　有限体積中の QED

以上のようにして QCD の配位を利用することでクエンチ近似の電磁相互作用を導入することが可能となるが、有限体積上に電磁相互作用を導入することは別の問題が生じることとなる。この節では、この問題と、解決のために新しく導入した有限体積上の QED について述べる。この節の内容は [104] に従っている。

まず、初めに単純に作成した有限体積上の電磁相互作用の理論 $\mathrm{QED}_{\mathbb{Z}}$ における問題点を次節で述べるカイラル摂動論を用いて説明する。無限体積のカイラル摂動論における光子を含む自己エネルギーの 1 つの項の例として以下の項を考える。

$$J(M^2,\infty)=\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{i}{k^2((k+p)^2-M^2)}\bigg|_{p^2=M^2} \tag{2.10.1}$$

この項は、$d=4$ では赤外有限な項である。

次に対応する、有限な箱 L の中の、通常の QED に長さ L で周期的境界条件を課した $\mathrm{QED}_{\mathbb{Z}}$ での項を考える。$\mathrm{QED}_{\mathbb{Z}}$ に対するカイラル摂動論は、ゲージ場に周期的境界条件を課すことにより得られ、上記の運動量積分は単純に運動量空間での和に置き換わり

$$\begin{gathered}
J(M^2,L)=\int\frac{dk^0}{2\pi}\frac{1}{V}\sum_{\vec{k}\in\tilde{\Gamma}}\frac{i}{k^2(k^2-m_\pi^2)}, \\
\vec{k}=\frac{2\pi}{L}\vec{n},\qquad \vec{n}\in\mathbb{Z}.
\end{gathered} \tag{2.10.2}$$

この式は無限体積では現れない赤外発散の項を含んでいる。

$$\begin{aligned}
J(M^2,L)=&\frac{dk^0}{2\pi}\frac{1}{V}\sum_{\vec{k}\in\tilde{\Gamma}}\frac{i}{k^2(k^2-m_\pi^2)} \\
=&\overbrace{\int\frac{dk^0}{2\pi}\frac{1}{V}\frac{i}{{k^0}^2({k^0}^2-m_\pi^2)}}^{\text{diverge in the limit } k^0\to 0}+\int\frac{dk^0}{2\pi}\frac{1}{V}\sum_{\vec{k}\neq 0}\frac{i}{k^2(k^2-m_\pi^2)}
\end{aligned} \tag{2.10.3}$$

この無限体積の理論では出現しない赤外発散により、単純な有限体積の理論は無限体積の理論への単純な接続ができない。これは単純に有限体積化した理論では、有限体積上の電磁相互作用をきちんと定義できていないことを意味している。

また、この現象は以下に述べるような古典電磁気学における問題とも深く関連していると考えられる。電磁相互作用の Lagrangian から得られる、ガウスの法則を考える。

$$\nabla \cdot \mathbb{E}(t, \vec{x}) = \rho(t, \vec{x}). \tag{2.10.4}$$

ここで電荷密度として、電荷 e を持ち、質量無限大という状況を考えると、

$$\rho(t, \vec{x}) = \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^3} e \delta^3(\vec{x} - L\vec{n}). \tag{2.10.5}$$

となる。ここで、式 (2.10.3)の両辺に関して 3 次元のトーラス上の積分を行うと左辺は 0 になるのに対して、右辺は有限の値が残ることになる。これは、与えた理論、Lagrangian では、１粒子状態がうまく定義されないことを示している。

以上のような諸問題を避ける、１粒子状態を許すような新しい電磁相互作用の理論 $\mathrm{QED}_{\mathbb{L}}$ を考える。$\mathrm{QED}_{\mathbb{L}}$ では、通常の QED と同様の作用だが、ゼロ運動量を持つゲージ場が理論の中に存在しないような理論、すなわち、ゲージ場 $A_\mu(t, \vec{x})$ として以下の条件を持つ理論を考える。

$$\tilde{A}_\mu(t, \vec{0}) = 0, \tag{2.10.6}$$

ただしここで $\tilde{A}_\mu(t, \vec{k})$ を以下のように定義する。

$$\begin{aligned} A_\mu(t, \vec{x}) &= \frac{1}{L^3} \sum_{\vec{k} - \{\vec{0}\} \in \tilde{\Gamma}} \tilde{A}_\mu(t, \vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}, \\ \tilde{\Gamma} &= (\frac{2\pi}{L} n_1, \cdots, \frac{2\pi}{L} n_d), \quad \vec{n_i} \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \tag{2.10.7}$$

この理論において、上記にあらわれた問題がどのように解決していくのかを見ていく。まず、カイラル摂動論を用いた場合に考えると、$\mathrm{QED}_{\mathbb{L}}$ における式 (2.10.2)に対応する式は、

$$J(M^2, L) = \int \frac{dk^0}{2\pi} \frac{1}{V} \sum_{\vec{k} \neq 0} \frac{i}{k^2(k^2 - m_\pi^2)}. \tag{2.10.8}$$

となり、この積分には赤外発散が現れない。この式の紫外発散の構造は式 (2.10.1)と全く同じである。

古典電磁気学におけるガウスの法則の問題に関して考える。通常の QED の場合と同様にして、$\mathrm{QED}_{\mathbb{L}}$ において、作用の無限小変換から運動方程式を求める。

$$\begin{aligned} \delta S_{\mathrm{QED}_{\mathbb{L}}} &= \int d^4x \left[-\frac{1}{2} \delta F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \delta A_\mu j^\mu \right] \\ &= \int d^4x \left[\delta A_0 \left(-\partial_k F^{0k} + j^0 \right) + \delta A_k \left(\partial_0 F^{0k} - \partial_j F^{kj} + j^k \right) \right] \\ &= \int dt \sum_{\vec{k} \neq 0} \left[\delta A_0(t, \vec{k}) \int d^3x\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \left(-\nabla \cdot \mathbb{E} + \rho \right) + \delta A_k(t, \vec{k}) \right. \\ \times & \qquad \left. \int d^3x\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \left(\partial_t E^k - \epsilon^{kjl} \partial_j B^l + j^k \right) \right]. \end{aligned} \tag{2.10.9}$$

よって $\mathrm{QED}_{\mathbb{L}}$ におけるガウスの法則は以下のように変更を受ける。

$$0 = \int_{\mathbb{T}^3} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} (\nabla \cdot \mathbb{E} - \rho) \quad (\text{for } \vec{k} \neq 0). \tag{2.10.10}$$

式 (2.10.5)及びその下の議論ではゼロモードに関する式

$$0 = \int_{\mathbb{T}^3} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E} - \rho) \tag{2.10.11}$$

が問題であった。これに対して、$\mathrm{QED}_{\mathbb{L}}$ では、ゼロモードの式に制約はなく、1 粒子状態を定義することが可能となっている。

次に、今回の QED においてゲージ場の非物理的な自由度を除去するのに十分なゲージ対称性が存在することの確認をする。このために、まず単純に 3 次元方向に対して単純な有限体積化を行った QED の $\mathrm{QED}_{\mathbb{Z}}$ のゲージ対称性を考える。電荷 e を持つ物質場として、$\Phi(x)$ を導入する。この時、物質場 $\Phi(x)$ とゲージ場 $A_\mu(x)$ は空間方向に対して周期的である。周期性を考慮すると、ゲージ変換は

$$\begin{aligned} \Phi &\to \Phi' = e^{ie\Lambda}\Phi, \\ A_\mu &\to A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \Lambda. \end{aligned} \tag{2.10.12}$$

と書くことが出来る。このゲージ場から作られるリンク変数は

$$e^{-iA'_\mu(x)} = e^{i\Lambda(x)} e^{-iA_\mu(x)} e^{-i\Lambda(x)} \tag{2.10.13}$$

のように変換をする。場の周期性からゲージパラメータ $\Lambda(x)$ は

$$\Lambda(t, \vec{x}) = \Lambda_P(t, \vec{x}) + \frac{2\pi \vec{m} \cdot \vec{x}}{eL} \qquad (\vec{m} \in \mathbb{Z}), \tag{2.10.14}$$

と書くことが出来る。ここで、$\Lambda_P(t, \vec{x})$ は $\Lambda_P(t, \vec{x} + L\vec{m}) = \Lambda_P(t, \vec{x})$ を満たす周期関数である。このゲージ変換が、$\mathrm{QED}_{\mathbb{L}}$ においてどのように変換するかを考えるために式 (2.10.14)の運動量空間での表示を考える。今、$\Lambda_P(t, \vec{x})$ は空間方向に対して周期的であるため、以下のようなフーリエ展開を行うことが出来る。

$$\begin{aligned} A_\mu(t, \vec{x}) &= \frac{1}{L^3} \sum_{\vec{k} \in \tilde{\Gamma}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \tilde{A}_\mu(t, \vec{k}) \\ \Lambda_P(t, \vec{x}) &= \frac{1}{L^3} \sum_{\vec{k} \in \tilde{\Gamma}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \tilde{\Lambda}_P(t, \vec{k}). \end{aligned} \tag{2.10.15}$$

この時、ゲージ場のゲージ変換は時間方向、空間方向でそれぞれ

$$\begin{aligned} \tilde{A'}_t(t, \vec{k}) &= \tilde{A}_t(t, \vec{k}) + \partial_t \tilde{\Lambda}(t, \vec{k}) \\ \tilde{A'}_j(t, \vec{k}) &= \tilde{A}_j(t, \vec{k}) + 2\pi \frac{m^j}{L} \times L^3 \delta_{\vec{k},0} + ik^j \tilde{\Lambda}(t, \vec{k}). \end{aligned} \tag{2.10.16}$$

と書き直される。$\mathrm{QED}_{\mathbb{L}}$ の条件式 (2.10.6)が保存されるためには、ゲージパラメータは条件

$$\partial_t \tilde{\Lambda}(t, \vec{0}) = 0, \quad \vec{m} = 0. \tag{2.10.17}$$

を満たす必要がある。この条件を持つゲージ変換は U(1) のゲージ対称性を持つということを示すことが出来る；$\Lambda_{(1)}$、$\Lambda_{(2)}$ を式 (2.10.17)を満たすゲージパラメータであるとする。この時、

1. 可換群の 2 項演算則:和 $\Lambda = \Lambda_{(1)} + \Lambda_{(2)}$ もまた同じ条件 $\partial_t \Lambda(x) = \partial_t \Lambda_{(1)} + \partial_t \Lambda_{(2)} = 0$ を満たす。

2. 単位律:単位元 $\Lambda(x) = 0$ もまた条件式 (2.10.17)を満たす。

3. 可逆律:Λ が条件式 (2.10.17)を満たす限り、逆元 $-\Lambda(x)$ もまた条件式 (2.10.17)を満たす。

このゲージ対称性は連続理論と同様に、固定条件 $\partial_j A_j(t,\vec{x})=0$ を課すだけで固定することが可能である。これは、$\mathrm{QED}_{\mathbb{L}}$ の場合に、有限空間に由来する余分なゲージ固定条件 $\tilde{A}_0(t,\vec{0})=0$ が必要だった [44] こととは対照的である。

今回の解析ではこの $\mathrm{QED}_{\mathbb{L}}$ にしたがってゲージ場の生成を行い、また、これをもとにしたカイラル摂動論を用いた解析を行った。カイラル摂動論に関しては次節以降で説明する。

2.11 格子計算のセットアップ

この節では本論文の計算で用いる格子計算のセットアップに関して述べる。本計算で用いた QED は 第 2.9 節の方法により、QCD の配位を利用することで non-compact な QED をクエンチ近似により導入することで得られる。また、この有限体積上の QED としては、第 2.10 節で説明された 1 粒子状態を許す定式化を用いる。用いる QCD の配位は、RBC/UKQCD により生成された 2+1 flavor ドメインウォールフェルミオン、Iwasaki ゲージ作用 ($\beta=2.13$) の配位である [39]。格子の大きさは $16^3\times 32$ と $24^3\times 64$ を用いる。ただし、結果として採用するのは $24^3\times 64$ の格子からえられたもののみであり、$16^3\times 32$ の格子は、有限体積効果を見る目的で使われる。また、格子間隔は Ω バリオンの質量から計算されており、$a^{-1}=1.784(44)$GeV である。ここから計算される物理的な格子の大きさはそれぞれおよそ $(1.75\mathrm{fm})^3$ と $(2.65\mathrm{fm})^3$ である。また、クォーク質量はバレンスクォークに対して $0.001\sim 0.03$ の 5 点、シークォークに対しては $0.01\sim 0.03$ の 3 点を用いている。ここで、クォーク質量は、格子理論における無次元のパラメータである。以下の節においても格子理論の結果を述べる際には、特に明記しない限り、格子上の無次元量を用いていく。ここであげたバレンス質量では、メソンの質量に換算しておよそ $250\sim 700$MeV の領域を見ていることになる。また、5 次元の質量項 (domain wall height)M_5 は 1.8、5 次元方向の長さ L_s は 16 をとっている。

2.12 Residual Quark Mass From EM

ドメインウォールフェルミオンでは、カイラル対称性のわずかな破れによりクォーク質量は 5 次元方向の長さにより加法的な補正 (residual quark mass) を受けることは第 2.4 節において既に説明した。この節では今回の QCD+QED の系に補正の大きさの計算結果を提示する。まず最初に QCD のみの residual quark mass の計算を行い、次に QED による補正に関して議論する。

	16^3	24^3
m_f	$m_{\mathrm{res}}^{\mathrm{QCD}}$	$m_{\mathrm{res}}^{\mathrm{QCD}}$
chiral limit	0.003148(46)	0.003203(15)
0.005	N/A	0.003222(16)
0.01	0.003177(31)	0.003230(15)
0.02	0.003262(29)	0.003261(16)
0.03	0.003267(28)	0.003297(15)

表 2: $m_{\mathrm{res}}^{\mathrm{QCD}}$ を各クォーク質量に関して計算した表。ここで各クォーク質量は $m_{\mathrm{val}}=m_{\mathrm{sea}}$ のユニタリポイントでの計算を示している。1 行目の値は他のデータから外挿してえられたものである。

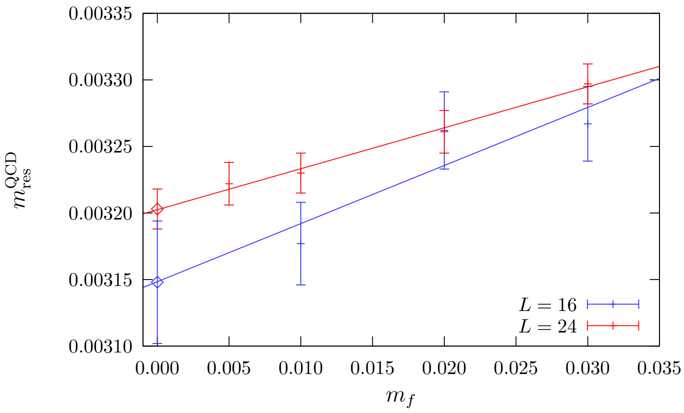


図 4: 格子計算から得られた $m_{\rm res}^{\rm QCD}$ の値及びそこからのカイラル極限への外挿を示したグラフである。青い点、赤い点がそれぞれ $L = 16$、$L = 24$ の格子データから得られた $m_{\rm res}^{\rm QCD}$ を表している。最左の点は、その他の点から外挿されたカイラル極限での $m_{\rm res}^{\rm QCD}$ を表している。

ドメインウォールフェルミオンでは residual quark mass は、次の相関関数の比から求められる。

$$R(t) = \frac{\left\langle \sum_x J_{5q}^a(\vec{x}, t)\pi^a(0) \right\rangle}{\left\langle \sum_x J_5^a(\vec{x}, t)\pi^a(0) \right\rangle}, \tag{2.12.1}$$

ここで t は Euclid の時間、J_{5q}^a は 5 次元の軸の中央の点を用いて定義された擬スカラー密度、π^a は通常の 4 次元の擬スカラー密度である。residuak quark mass はクォーク質量が 0 の時の WT 恒等式の破れとして定義され、よって t が充分大きい場合に対し、$\lim_{m_f \to 0} R(t)$ である。そこで、相関関数を $N_t/2$ で折りたたんだものに関して $9 \leq t \leq N_t/2$ の範囲で $R(t)$ を平均したものを各クォーク質量での residual quark mass とし、こうして得られた residual quark mass に対して 0 クォーク質量極限をとることとする。電磁相互作用の無い通常の QCD における residual qaurk mass($m_{\rm res}^{\rm QCD}$) を各クォーク質量において計算したもの及びカイラル極限に外挿したものが表 2であり、また、対応するグラフが図 4である。表 2の表をみると、カイラル極限での $m_{\rm res}^{\rm QCD}$ の値は 2 つの体積 $L = 16$ と $L = 24$ の間で非常に近い値を示しており、residual quark mass の大きさが第 5 次元の大きさによって決まることを確認することができる。residual quark mass の大きさは物理的な質量に換算すると約 9[MeV] 程度であり、今回の計算で用いたクォーク質量と比較して、シークォーク $m_{\rm sea}$ の最小の値 0.005 と同じ程度、バレンスクォーク質量 $m_{\rm val}$ の最小の値 0.001 と比較すると約 3 倍程度の大きさである。

次に QED による、residual quark mass に対する補正を考える。今、計算に用いた電荷 e が十分に小さいことを考慮すると、QCD+QED のシステムにおける電荷 q_i を持つクォークに対して 0 質量極限で評価された residual quark mass $m_{\rm res,i}^{\rm QCD+QED}$ と QCD のシステムにおいて 0 質量で評価された residual qaurk mass $m_{\rm res}^{\rm QCD}$ の差はクォークの電荷 q_i^2 のべきで展開することが可能であると考えれられる。

$$m_{\rm res}^{\rm EM} \equiv m_{\rm res,i}^{\rm QCD+QED} - m_{\rm res}^{\rm QCD} = C_2 q_i^2 + \cdots \tag{2.12.2}$$

$u\bar{u}$ 及び $d\bar{d}$ のそれぞれに対応する相関関数から式 (2.12.2)を用いて、C_2 を求めた値を表 3に示した。この表から、C_2 の値は $u\bar{u}$ から求めた場合と $d\bar{d}$ から求めた場合とで、2 桁の精度で同じ値

L_s	$u\bar{u}$	$d\bar{d}$
	16^3 lattice size	
16	2.597(23)	2.532(22)
32	0.309(16)	0.301(16)
	24^3 lattice size	
16	2.585(7)	2.519(7)

表 3: 式 (2.12.2)における C_2 ($\times 10^3$) の値を示した表。横軸 $u\bar{u}$ 及び $d\bar{d}$ は計算に用いた相関関数の大きさを示す。

を示すことから、式 (2.12.2)の近似に於いて、e^2 以上の高次の項の寄与はほとんど無視して良いことがわかる。また、C_2 の大きさは、3 次元体積にはよらず、5 次元目の大きさ L_s のみによって変化することがわかる。

3 電磁相互作用を含んだカイラル摂動論

以上の節で説明されてきた格子計算による計算では、数値計算の技術的な理由により、現実のクォークより大きな質量のクォークを用いた計算を行っている。重いクォークの質量のデータから、現実のクォークの質量まで外挿するために何らかの理論が必要である。本節では、この外挿の理論として、QCD の低エネルギー有効理論であるカイラル摂動論に関しての解説を行う。今回の計算ではカイラル摂動論が良く成り立つドメインウォールフェルミオンを用いるため特に有効に外挿を行うことができる。[1]

まず、記法の確認をかねて、QCD の場合のカイラル摂動論をまとめ、次に、格子計算においては外線の質量及び電荷がループ中のクォークに現れるものと異なるものを用いている PQQCD に対応しループ中に現れるクォーク質量カイラル摂動論 (PQ カイラル摂動論) を提示する。その後、電磁相互作用を含んだカイラル摂動論の説明を行い、その有限体積効果について議論する。また、K 中間子が重く擬 NG ボソンと見なせないと考えたときの理論である SU(2)+Heavy Kaon カイラル摂動論 (HKChPT) に関して説明し、電磁相互作用、有限体積効果を含んだ場合に拡張したものを提示する。最後に実際にフィットで用いた関数をまとめる。

3.1 QCD の大局的対称性

この節では最初に後の節で必要となる QCD の基本事項を示す。有効理論は、基本理論の対称性及びその破れを基にするため QCD の対称性を理解しておく必要がある。QCD の Lagrangian は以下のように書ける。

$$L_{QCD} = \bar{Q}_L i\not{D} Q_L + \bar{Q}_R i\not{D} Q_R - \bar{Q}_L M Q_R - \bar{Q}_R M Q_L + \frac{1}{2}\operatorname{tr} F_{\mu\nu}^2. \tag{3.1.1}$$

[1] ドメインウォールフェルミオンにおいては、カイラル対称性が保存されるため、カイラル対称性を破る項は現れない。そのため、カイラル Lagrangian として異なる項は、Euclidian の回転対称性を破る項 (ただし軸の入れ替えの対称性は保持される) のみである。軸の入れ替えの対称性の関係あるのは微分の項のみであり、また、それは非常に高次で現れることになる。このため、ドメインウォールフェルミオンに対して通常のカイラル摂動論を使ってフィットを行い、カイラル極限を取ることが出来る。このことは、Wilson フェルミオンの場合には、カイラル対称性の破れを考慮した有効理論 (Wilson ChPT) を使う、またはカイラル極限をとる前に連続極限を取る必要があるのと対照的である [105]。

ここで Q は N_f フレーバーのクォーク場をまとめたベクトル $Q^t = (q_1, \cdots, q_{N_f})$ であり、$\not{D}$ は普通の共変微分であり、$F_{\mu\nu}$ は G_μ をグルーオン場として

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= \frac{1}{ig}\left[D_\mu, D_\nu\right] \\ &= \partial_\mu G_\nu - \partial_\nu G_\mu + ig[G_\mu, G_\nu]. \end{aligned} \tag{3.1.2}$$

で定義される場の強さである。また、Q_L, Q_R は射影演算子

$$P_\pm = \frac{1 \pm \gamma_5}{2} \tag{3.1.3}$$

を用いて、

$$\begin{aligned} Q_{L,R} &= P_\mp Q, \\ \bar{Q}_{L,R} &= \bar{Q} P_\pm. \end{aligned} \tag{3.1.4}$$

と定義される。この Lagrangian は質量 0 の極限では、以下の大局的なカイラル変換のもとで不変である。

$$\begin{aligned} &Q_L \to L Q_L,\ Q_R \to R Q_R, \\ &\bar{Q}_L \to \bar{Q}_L L^\dagger, \bar{Q}_R \to \bar{Q}_R R^\dagger, \quad L, R \in SU(N_f)_{L,R}. \end{aligned} \tag{3.1.5}$$

このカイラル対称性は、QCD の力学により、以下の量が秩序変数となることにより破れると考えられている。

$$\Omega_{ij} = \langle 0 | \bar{Q}_i Q_j | 0 \rangle \tag{3.1.6}$$

ここで i, j はフレーバーのを表すインデックスである。ベクトル型の相互作用しかない場合には、ベクトル型のフレーバー対称性は自発的に破れないことが知られており [106]、Ω は定数 ω を用いて、ベクトル変換不変な形で、

$$\Omega = \omega \delta_{ij} \tag{3.1.7}$$

と書ける。$\omega \neq 0$ の時、カイラル対称性は破れ、対称性の破れのパターンは以下のようになる；

$$SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R \to SU(N)_V. \tag{3.1.8}$$

ここで、破れた生成子の個数は $N^2 - 1$ 個であり、Nambu-Goldstone の定理により対応する NG ボソンが出現することになる。現実の最も軽い 2 つのクォーク u, d の質量は非常に小さいため、近似的なカイラル対称性を持っており、これにより現れる NG ボソンがパイ中間子であると考えられている。

以上で説明される対称性により、Green 関数の間には Ward-Takahashi 恒等式と呼ばれる関係式が成り立つことになる。大局的変換により導かれる Ward-Takahashi 恒等式は、経路積分により定式化では、外場の局所的変換として現すことになる。次にこの状況を説明していく。

まず、0 質量における QCD の大局的対称性 $SU(N)_L \times SU(N)_R$ に対応するカレントは

$$\begin{aligned} J^a_{\mu,L} &= i\bar{Q}_L \gamma_\mu T^a Q_L \\ J^a_{\mu,R} &= i\bar{Q}_R \gamma_\mu T^a Q_R \end{aligned} \tag{3.1.9}$$

と書ける。ここでカレントは $\partial_\mu J^{a,\mu}_{L,R}$ を満たす。ベクトルカレント、軸性カレントを

$$\begin{aligned} J^a_{\mu,V} &= J_{R,\mu} + J_{L,\mu} \\ J^a_{\mu,A} &= J_{R,\mu} - J_{L,\mu} \end{aligned} \tag{3.1.10}$$

と書く。T^a は $SU(N)$ の生成子であり、以下のように規格直交化されている；

$$\mathrm{tr}\left(T^a T^b\right) = 2\delta^{an}. \tag{3.1.11}$$

次に QCD の大局的対称性 $SU(N)_L \times SU(N)_R$ による Ward-Takahashi 恒等式の例として、以下の Green 関数を考える。

$$G^{ab}_\mu(x,y) = \langle 0|\, T\left(\Phi^a(x) J^b_{\mu,L}\right)|0\rangle \tag{3.1.12}$$

ここで、$\Phi^a(x)$ は

$$\Phi^a = \bar{Q}\gamma_5 T^a Q \tag{3.1.13}$$

で定義される擬スカラー演算子であり、また、式 (3.1.12)に現れる T は時間順序積である。今、J^μ_L は、保存カレントであるため、Green 関数の divergence に対して以下の関係式が成り立つ；

$$\begin{aligned} \partial^\mu_y G^{ab}_\mu(x,y) &= \partial^\mu_y \langle 0|\, T\left(\Phi^a(x) J^b_{\mu,L}(y)\right)|0\rangle \\ &= \langle 0|\left(\partial^\mu_y \theta(x^0-y^0)\Phi^a(x) J^b_{\mu,L}(y) + \partial^\mu_y \theta(y^0-x^0) J^b_{\mu,L}(y)\Phi^a(x)\right)|0\rangle \\ &= -i\delta^{(4)}(x-y)\langle 0|\,\delta^b_L \Phi^a(x)\,|0\rangle, \end{aligned} \tag{3.1.14}$$

ここで、最後の式ではクォーク場に対する同時刻反交換関係を用い、また、$\delta^b_L\Phi^a$ は $\left[iJ^b_{0,L}, \Phi^b\right]$ と定義した。これが Ward-Takahashi 恒等式の一つの例である。この様にして、様々な Ward-Takahashi 恒等式を導ける一方で、このようにして Ward-identity を逐次的に導いていくことは、Green 関数中に多数のクォーク場が含まれる場合には著しく困難になる。これに対し、生成汎関数の方法において非常に簡潔に全ての Green を構成する方法が存在する。この方法では、Ward-Takahashi 恒等式は、外場の局所変換の下での対称性と同値であることが示される [107]。生成汎関数 $Z(s,p,v_\mu,a_\mu)$ は、外場 s,p,v_μ,a_μ がある場合の Lagrangian

$$\begin{aligned} L &= L_{QCD} + L_{\mathrm{source}} \\ &= L_{QCD} + \bar{Q}\gamma_\mu(v^\mu + \gamma_5 a^\mu)Q - \bar{Q}(s - i\gamma_5 p)Q. \end{aligned} \tag{3.1.15}$$

により、真空から真空への遷移振幅から

$$\exp(iZ(s,p,v^\mu,a^\mu)) = \langle 0;\mathrm{out} \mid 0;\mathrm{in}\rangle_{s,p,v,a} \tag{3.1.16}$$

と定義される [43,45]。ここで $|0;\mathrm{in}\rangle$ は $x^0 \to -\infty$、$|0;\mathrm{out}\rangle$ は $x_0 \to \infty$ における真空状態である。生成汎関数であることをよりわかりやすく、L_{QCD} の真空 $\langle 0|$ で表すと、

$$\exp(iZ(s,p,v^\mu,a^\mu)) = \langle 0|\, T\exp\left(i\int d^4x L_{\mathrm{source}}\right)|0\rangle_{s,p,v,a} \tag{3.1.17}$$

であり、また、経路積分形式で表せば、

$$\exp(iZ(s,p,v^\mu,a^\mu)) = \int DQD\bar{Q}DG_\mu\bar{Q}D\exp\left(i\int d^4x L_{QCD}\right) \tag{3.1.18}$$

である。次に大局的な変換式 (3.1.5)に対応した局所変換を課す。

$$\begin{aligned} &Q_L(x) \to L(x)Q_L(x),\ Q_R(x) \to R(x)Q_R(x) \\ &\bar{Q}_L(x) \to \bar{Q}_L(x)L^\dagger(x), \bar{Q}_R(x) \to \bar{Q}_R(x)R^\dagger(x), \quad L(x), R(x) \in SU(N)_{L,R}. \end{aligned} \tag{3.1.19}$$

この時、Lagrangian 式 (3.1.15)から、外場の変換則は

$$
\begin{aligned}
r_\mu &\to R r_\mu R^\dagger + iR\partial_\mu R^\dagger \\
l_\mu &\to L l_\mu L^\dagger + iL\partial_\mu L^\dagger \\
s + ip &\to R(s+ip)L^\dagger \\
s - ip &\to L(s-ip)R^\dagger .
\end{aligned}
\tag{3.1.20}
$$

である。また、CPT 変換に対して式 (3.1.15)が不変であることを要請することにより、外場の CPT 変換則が得られる。クォーク場に対するパリティー変換

$$
Q_i(t,\vec{x}) \xrightarrow{P} \gamma^0 Q(t,-\vec{x}) \tag{3.1.21}
$$

から、外場の変換則は

$$
\begin{aligned}
v^\mu\,(t,\vec{x}) &\xrightarrow{P} v_\mu\,(t,-\vec{x})\,, \\
a^\mu\,(t,\vec{x}) &\xrightarrow{P} -a_\mu\,(t,-\vec{x})\,, \\
s\,(t,\vec{x}) &\xrightarrow{P} s\,(t,-\vec{x})\,, \\
p\,(t,\vec{x}) &\xrightarrow{P} p\,(t,-\vec{x})\,,
\end{aligned}
\tag{3.1.22}
$$

となり、また、同様にして、荷電共役変換の下でクォーク場は

$$
Q_i \xrightarrow{C} i\gamma^2\gamma^0(\bar{Q})^t . \tag{3.1.23}
$$

と変換するため、外場の荷電共役変換の下での変換性は

$$
\begin{aligned}
v_\mu &\xrightarrow{C} -v_\mu^t, \\
a_\mu &\xrightarrow{C} a_\mu^t, \\
s, p &\xrightarrow{C} s^t, p^t .
\end{aligned}
\tag{3.1.24}
$$

である。次の節では、この対称性を尊重するように QCD の低エネルギー有効理論を構成していく。

3.2 カイラル摂動論と変換則

この節では、カイラル摂動論の基本事項を概観する。有効理論の Lagrangian の出発点となるのは、Weinberg の定理である [108]；

> 漸近状態が与えられたとき、対称性により許される全ての項を含んだ Lagrangian により、解析性、摂動的なユニタリ性、クラスター分解性及び対称性を持つ最も一般的な S 行列要素が与えられる。

低エネルギーでは QCD に現れるクォークでは無く、メソンやバリオンを力学的自由度として理論は記述される。この時、対応する Lagrangian には、無限個の項、無限個のパラメーターが必要になる。この理論を使って実際上の計算を行うには 2 つのステップが必要となる。

- 対称性から許される Lagrangian を系統的に構成する。
- 得られた Lagrangian により計算される振幅の大きさの系統的な評価を行う。

このうち前者についてこの節で説明を行い、後者について次節で説明を行う。

まず、対称性の破れのパターンが一般に $G \to H$ の場合の N-G ボソンの変換性を第 3.2.1 節で議論し、次に QCD の場合に第 3.2.2 節で適用する。その後、第 3.2.3 節で $O(p^4)$ の次数までの Lagrangian の構成を示す。

3.2.1 NG ボソンの変換性

ハミルトニアン $\mathcal{H}$ がコンパクトな Lie 群 G の下で不変である一方で、基底状態は G の部分群である H に対してのみ不変であるという状況を考える。G,H の Lie 代数をそれぞれ $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ と書き、またその次元を d_G,d_H と書く。この時、Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の要素は $\mathfrak{h}$ に属する部分 $\{S^\alpha\}_{\alpha=1,\cdots,d_H}$ とそれ以外の $\mathfrak{g}-\mathfrak{h}$ に部分 $\{X^a\}_{a=1,\cdots,n}$ とに分割することができる。ここで、$n = d_G - d_H$ は破れた対称性に対応する生成子の個数である。ここで破れた生成子は以下の直交条件を満たすように選択する；

$$\mathrm{tr}\left(S^\alpha X^a\right) = 0. \tag{3.2.1}$$

生成子の規格化は以下のようにとる；

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}\left(S^\alpha S^\beta\right) &= 2\delta^{\alpha\beta}, \\ \mathrm{tr}\left(X^a X^b\right) &= 2\delta^{ab}. \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

ここで、式 (3.2.1)から、

$$\mathrm{tr}\left(S^\alpha\left[S^\beta, X^a\right]\right) = \mathrm{tr}\left(\left[S^\alpha, S^\beta\right]X^a\right) = 0. \tag{3.2.3}$$

が成り立つので、

$$\left[S^\alpha, X^a\right] \in \mathfrak{g} - \mathfrak{h} \tag{3.2.4}$$

が常に成り立つことになる。破れた生成子同士の交換関係 $\left[X^a, X^b\right]$ は一般には X^a と T^α の線形結合で表されるが、特に商空間が対称空間である場合、すなわち

$$\left[X^a, X^b\right] \in \mathfrak{h} \tag{3.2.5}$$

を満たすときを考える。この時 g の要素に対して "内部パリティー" 変換を

$$\begin{aligned} S^\alpha &\xrightarrow{\mathcal{P}} S^\alpha, \\ X^a &\xrightarrow{\mathcal{P}} -X^a. \end{aligned} \tag{3.2.6}$$

と定義すると、式 (3.2.1), 式 (3.2.4)及び式 (3.2.5)から代数は不変である。これは S^α に内部パリティ+1 を、X^a に内部パリティ-1 を課すことが出来るということである。

南部-Goldstone の定理 [109–111] によれば、商空間 G/H の次元と同数の N-G 粒子が出現することが知られている。また、対称性 H は破れていないため、H による変換に対して NG ボソン場 $\Pi^a(x)$ は線形に変換する。この時、式 (3.2.4)から、NG ボソン場 $\Pi(x)$ を

$$\Pi(x) = \sum_{a=1}^{n} \pi^a(x) X^a \tag{3.2.7}$$

と書くことができる。この時、商空間 G/H に値を持つ場を

$$u\left(\Pi(x)\right) = e^{-\Pi(x)} \tag{3.2.8}$$

で表すことができる。

パイ中間子の場をこの様にパラメトライズすることにより、変換 G の下での $u\left(\Pi(x)\right)$ 及び $\Pi(x)$ の変換則を得ることができる。G の変換 g を $\Pi(x)$ に作用させたとき、その元は G の元 g' に移る。G の任意の元は G/H の元と H の元の積に一意的に分解することができるので、

$$gu\left(\Pi(x)\right) = u\left(\Pi'(x)\right)h\left(g,\Pi\right). \tag{3.2.9}$$

と書くことができる。ここで h は Π を含む非線形な変換である。以上から、NG ボソンの大局的変換 G の下での変換則は

$$u(\Pi'(x)) = gu(\Pi(x))h(g,\Pi(x))^{-1}. \tag{3.2.10}$$

と定義される。

3.2.2 QCD における NG ボソンの変換性

次に以上で求めた NG ボソンの変換則を QCD の場合に適用することを考える。第 3.1 節で見たように、QCD では、Lagrangian が大局的対称性 $G = SU(N)_L \times SU(N)_R = \{(L,R) \mid L \in SU(N)_L,\ R \in SU(N)_R\}$ を持つ一方で、基底状態は $H = SU(N)_V = \{(V,V) \mid V \in SU(N)_V\}$ の下のみで対称という状況になっている。商空間の代表元を

$$u\left(\Pi(x)\right) = \left(u_L\left(\Pi(x)\right), u_R\left(\Pi(x)\right)\right) = \left(u_R^{-1}\left(\Pi(x)\right), u_R\left(\Pi(x)\right)\right) \in G \tag{3.2.11}$$

と選ぶと、$u\left(\Pi(x)\right)$ の変換則は

$$\begin{aligned}
&\left(u_R^{-1}\left(\Pi'(x)\right), u_R\left(\Pi'(x)\right)\right)\\
&= (L,R)\left(u_R^{-1}\left(\Pi(x)\right), u\left(\Pi(x)\right)\right)\left(h\left((L,R),\Pi(x)\right), h((L,R),\Pi(x))\right)^{-1}\\
&= \left(Lu_R^{-1}\left(\Pi(x)\right)h^{-1}\left((L,R),\Pi(x)\right),\ Ru_R^{-1}\left(\Pi(x)\right)h^{-1}\left((L,R),\Pi(x)\right)\right)
\end{aligned} \tag{3.2.12}$$

である。よって、$u_R^{-1}\left(\Pi(x)\right)$ の変換則は

$$u_R(\Pi'(x)) \quad = Ru_R(\Pi)h\left((L,R),\Pi(x)\right)^{-1} \tag{3.2.13}$$

$$= h((L,R),\Pi(x))u_R(\Pi(x))L^{-1}. \tag{3.2.14}$$

u_R の代わりに、場 $U(x) = u_R u_L^\dagger$ を定義するとその変換則は式 (3.2.14)から

$$U \to U' = RUL^{-1} \tag{3.2.15}$$

と書ける。

3.2.3 カイラル Lagrangian の構成

以上の対称性を基に、Weinberg の定理に従い、Lorentz 不変かつカイラル不変な理論を構成していくことにより QCD の有効理論, カイラル摂動論を得ることが可能である。

QCD の時と同様にカイラル摂動論に対しても外場の方法を使うのが便利である。QCD と、カイラル摂動論における生成汎関数で同じ外場を用い、低エネルギーでは両者の生成汎関数が一致することを仮定する；

$$\begin{aligned}
\exp(iZ(s,p,v^\mu,a^\mu)) &= \int DQD\bar{Q}DG_\mu\bar{Q}D\exp\left(i\int d^4xL_{QCD}\right)\\
&= \int DU\exp\left(i\int d^4xL_{ChPT}\right)
\end{aligned} \tag{3.2.16}$$

ここで、L_{ChPT} は外場を含んだカイラル摂動論の Lagrangian である。外場は QCD と共通のものを用いるので、局所カイラル変換に対する外場の変換則式 (3.1.20)を用いて、(局所的な) カイラル変換に対する共変微分 $D_\mu U$ を

$$\begin{aligned} D_\mu U &\equiv \partial_\mu U - ir_\mu U + iUl_\mu, \\ D_\mu U^\dagger &\equiv \partial_\mu U^\dagger + iU^\dagger r_\mu - il_\mu U^\dagger, \end{aligned} \tag{3.2.17}$$

と定義することができる。D_μ は $(L,R) \in G$ の下で、

$$D_\mu U(x) \xrightarrow{G} D_\mu U' = R\left(D_\mu U\right)L, \tag{3.2.18}$$

と変換する。外場 l_μ,r_μ 用いて場の強さ $f_L^{\mu\nu}, f_R^{\mu\nu}$ を

$$\begin{aligned} f_{\mu\nu}^R &\equiv \partial_\mu r_\nu - \partial_\nu r_\mu - i[r_\mu, r_\nu], \\ f_{\mu\nu}^L &\equiv \partial_\mu l_\nu - \partial_\nu l_\mu - i[l_\mu, l_\nu]. \end{aligned} \tag{3.2.19}$$

と定義することができる。これらの量の変換則は

$$\begin{aligned} f_{\mu\nu}^R &\xrightarrow{G} Rf_{\mu\nu}^R R^\dagger, \\ f_{\mu\nu}^L &\xrightarrow{G} Lf_{\mu\nu}^L L^\dagger. \end{aligned} \tag{3.2.20}$$

である。

次にクォーク質量を導入する。これまでの議論は、全て質量 0 の極限で行っていたが、実際の世界では、クォーク質量項

$$L_M = Q_R M Q_L - \bar{Q}_L M^\dagger Q_R, \tag{3.2.21}$$

により、カイラル対称性は明示的に破れている。クォーク場は、定数の行列であり、カイラル変換により変換はしないのであるが、クォーク場を spurion 場 $M = s + ip$ に拡張し、以下の変換則を付与することにより質量項式 (3.2.21)はカイラル不変になる [112]。

$$M \xrightarrow{G} RML^\dagger, \qquad M^\dagger \xrightarrow{G} LM^\dagger R^\dagger \tag{3.2.22}$$

spurion 場を導入した QCD の Lagrangian から有効理論を作り、外場 $s + ip$ を最終的にクォーク質量に固定することにより、短距離でのカイラル対称性の破れと同じ構造を持つ有効 Lagrangian を構成することが可能となる。例えば、最低次の項は

$$L_{ChPT}^M = 2B_0\left(UM^\dagger + MU^\dagger\right). \tag{3.2.23}$$

などである。ここで B_0 は新しく導入した定数であり、また、便利のため $\chi = 2B_0 M$ と定義する。任意のカイラル対称性を破る項に対しても同様の方法でカイラル対称性を破る項の有効 Lagrangian への影響を見ることができる。

次にパリティ変換則について考える。NG 粒子は、南部-Goldstone の定理 [109–111] によれば、破れたカレント $J_{\mu,A}$ と NG 粒子の状態ベクトル $\Pi\left(|\vec{p}\rangle\right)$ の間は以下の関係式で結ばれる。

$$\langle 0| J_{\mu,a} |\Pi\left(\vec{p}\right)\rangle \neq 0, \qquad \langle \Pi\left(\vec{p}\right)| \Pi(x) |0\rangle \neq 0. \tag{3.2.24}$$

今、$J_{\mu,A}$ は負のパリティを持つことから、$\Pi\left(t,\vec{x}\right)$ のパリティ変換則は

$$\Pi\left(t,\vec{x}\right) \xrightarrow{P} -\Pi\left(t,-\vec{x}\right) \tag{3.2.25}$$

Operator	G	C	P
U	$RUL^\dagger$	U^t	$U^\dagger$
$D_{\lambda_1}\cdots D_{\lambda_n}U$	$RD_{\lambda_1}\cdots D_{\lambda_n}UL^\dagger$	$(D_{\lambda_1}\cdots D_{\lambda_n}U)^t$	$(D_{\lambda_1}\cdots D_{\lambda_n}U)^\dagger$
χ	$R\chi L^\dagger$	χ^t	$\chi^\dagger$
$D_{\lambda_1}\cdots D_{\lambda_n}\chi$	$RD_{\lambda_1}\cdots D_{\lambda_n}\chi L^\dagger$	$(D_{\lambda_1}\cdots D_{\lambda_n}\chi)^t$	$(D_{\lambda_1}\cdots D_{\lambda_n}\chi)^\dagger$
r_μ	$Rr_\mu R^\dagger + iR\partial_\mu R^\dagger$	$-l_\mu^t$	l^μ
l_μ	$Ll_\mu L^\dagger + iL\partial_\mu L^\dagger$	$-r_\mu^t$	r^μ
$f_{\mu\nu}^R$	$Rf_{\mu\nu}^R R^\dagger$	$-(f_{\mu\nu}^L)^t$	$(f^L)^{\mu\nu}$
$f_{\mu\nu}^L$	$Lf_{\mu\nu}^L L^\dagger$	$-(f_{\mu\nu}^R)^t$	$(f^R)^{\mu\nu}$

表 4: NG 場、質量項及び外場の変換則をまとめた表。G は $SU(N)_L \times SU(N)_R$ の下での変換則 P が、パリティの下での変換則 (引数の変化は省略)、C が荷電共役変換の下での変換則である。

であり、$U(t,\vec{x})$ の変換則は

$$U(t,\vec{x}) \xrightarrow{P} U^\dagger(t,-\vec{x}) \tag{3.2.26}$$

である。

最後に、荷電共役変換を考える。このと、荷電共役変換の下で、粒子は反粒子に変換するはずであり ($\pi^0 \to \pi^0, \pi^+ \leftrightarrow \pi^-, \eta \to \eta, K^+ \leftrightarrow K^-, K^0 \leftrightarrow \overline{K^0}$) この結果例えば $SU(3)$ の場合には

$$\Pi = \begin{pmatrix} \pi^0 + \frac{1}{3}\eta & \sqrt{2}\pi^+ & \sqrt{2}K^+ \\ \sqrt{2}\pi^- & -\pi^0 + \frac{1}{3}\eta & \sqrt{2}K^0 \\ \sqrt{2}K^- & \sqrt{2}K^0 & -\frac{2}{\sqrt{3}}\eta \end{pmatrix} \tag{3.2.27}$$

$$\xrightarrow{C} \begin{pmatrix} \pi^0 + \frac{1}{3}\eta & \sqrt{2}\pi^+ & \sqrt{2}K^+ \\ \sqrt{2}\pi^- & -\pi^0 + \frac{1}{3}\eta & \sqrt{2}K^0 \\ \sqrt{2}K^- & \sqrt{2}K^0 & -\frac{2}{\sqrt{3}}\eta \end{pmatrix} = \Pi^t \tag{3.2.28}$$

である。このことは一般性を失わずに $SU(N)$ の場合に拡張できる。以上、この節で求めた変換則及び第 3.1 節で求めた変換則は表 4にまとめられている。

摂動展開を適切に行うには、Weinberg の Power Counting [108] に従い、各項に対して、Order Counting の法則を定める必要がある。今、NG ボソンの質量 M が非常に小さいとすると、空間方向の運動量 $\vec{p}$ が小さいときには、4 次元運動量 $p_\mu = \left(\sqrt{|\vec{p}|^2 + M^2}, \vec{p}\right)$ も小さいと見なすことができる。この時、運動量、または NG ボソンの微分によって Lagrangian を展開できる。。微分を $O(p)$ と書くと、PCAC 関係式 [88, 89] により χ は $O(p^2)$ で表すことができる。また、共変微分を考慮すると l_μ, r_μ もまた $O(p)$ である。この時カイラル Lagrangian は以下のように p のオーダーによって展開することができる。

$$\begin{aligned} L_{ChPT} &= L_2 + L_4 + L_6 + \cdots \\ &= L_{\mathrm{LO}} + L_{\mathrm{NLO}} + L_{\mathrm{NNLO}} + \cdots, \end{aligned} \tag{3.2.29}$$

ここで、L_{2n} は $O(p^{2n})$ の Lagrangian であり、偶数次元のみが現れるのは、$O(p)$ である微分を潰す縮約を行う必要のためである。p に関する最低次 $O(p^2)$ の Lagrangian は以下のように書くことができる;

$$L_{\mathrm{LO}} = \frac{F_0^2}{4}\left(D_\mu U D^\mu U^\dagger\right) + \frac{F_0^2}{4}\,\mathrm{tr}\left(\chi U^\dagger + U^\dagger \chi\right). \tag{3.2.30}$$

ここで導入したパラメータ $F_0 \sim 94\mathrm{MeV}$ はカイラル極限における崩壊定数である。L_{LO} には F_0、B_0 という 2 つの自由なパラメータが導入されている。

最後に次の次数 $O(p^4)$ の Lagrangian を書き下すが、$O(p^4)$ における "運動方程式項" と呼ばれる項を場の再定義を用いて消去するために運動方程式を導いておく必要がある [113, 114]。U に対する運動方程式は

$$O^{(2)}_{\mathrm{EOM}}(U) = \left(D^2U\right)U^\dagger - U\left(D^2U\right)^\dagger - \chi U^\dagger + U\chi^\dagger \frac{1}{N}\mathrm{tr}\left(\chi U^\dagger - U\chi^\dagger\right) = 0. \tag{3.2.31}$$

である。$O(p^2)$ 運動方程式を用いて関係が付く演算子のいずれかを消去することで、$O(p^4)$ までの独立な演算子を書き下すことができる。

ここまでに書き下された、Lagrangian の構成要素 $U, U^\dagger, \chi, \chi^\dagger, f^L_{\mu\nu}, f^R_{\mu\nu}$ を用いて高次の Lagrangian を書き下せるが、以上の構成要素を用いてカイラル不変な Lagrangian を構成しようとすると、似たような計算の繰り返しとなり、非常に手間がかかる。そこで、Lagrangian の構成単位を、同じ変換則を行うようにまとめるのが便利である。そこで、以下の量を定義する；

$$\chi^{\mu\nu} \equiv \chi, \qquad G^{\mu\nu} \equiv f^{\mu\nu}_R U + U f^{\mu\nu} L, \qquad H^{\mu\nu}_R U - U f^{\mu\nu} L \tag{3.2.32}$$

と定義すれば、これらは全て G の下で U と同じ変換則を持ち、同じ $O(p^2)$ の量となっている。ここまでで、Lagrangian の構成要素として $\chi^{\mu\nu}$,U 及びその共変微分が構成要素となる。共変微分は、次のように定義されている。

$$\begin{aligned}
A \xrightarrow{G} RAL^\dagger : &\qquad D_\mu A = \partial_\mu A - ir_\mu A + iAl_\mu,\\
B \xrightarrow{G} LBR^\dagger : &\qquad D_\mu B = \partial_\mu B - il_\mu B + iBr_\mu,\\
C \xrightarrow{G} RCR^\dagger : &\qquad D_\mu C = \partial_\mu C - ir_\mu C + iCr_\mu,\\
D \xrightarrow{G} LCL^\dagger : &\qquad D_\mu D = \partial_\mu D - il_\mu D + iDl_\mu,\\
E \xrightarrow{G} E : &\qquad D_\mu E = \partial_\mu E.
\end{aligned} \tag{3.2.33}$$

ここで左側はその量の G の下での変換則を表し、右辺で共変微分を表している。この様に共変微分を定義することで、共変微分の分配則が成り立つことになる。次にこれらの量を以下のようにエルミートと反エルミートな量に次のように分解する。

$$(O)_\pm = u^\dagger O u^\dagger \pm u O^\dagger u, \tag{3.2.34}$$

ここで、A は、$\chi^{\mu\nu}$ や、D_μ 及びその他共変微分が多数かかった量である。この時、$(O)_\pm$ の G の下での変換則は

$$(O)_\pm \xrightarrow{G} h\,(O)_\pm\,h^\dagger, \tag{3.2.35}$$

と非線形な斉次変換となる。ここで $h\left((L,R),\Pi(x)\right)$ を h と省略した。この量に対して共変微分を

$$D_\mu\left(A_\pm\right) = \partial_\mu\left(A\right)_\pm + \left[\Gamma_\mu, (A)_\pm\right], \tag{3.2.36}$$

と定義する。ここで接続 Γ は、

$$\Gamma = \frac{1}{2}\left[u^\dagger, \partial_\mu u\right] - \frac{i}{2}u^\dagger r_\mu u - \frac{i}{2}u l_\mu u^\dagger. \tag{3.2.37}$$

である。この時、$(O)_\pm$ の C, P の変換則を確かめることで簡単に Lagrangian を構成することができる。最初に O として iD_μ を選ぶことを考える。この時 $(iD_\mu)_+$ は 0 になるので、特に $(iD_\mu)_-$ を

$$\Delta_\mu = i\left[u^\dagger\left(\partial_\mu - ir\mu\right)u - u\left(\partial_\mu - il_\mu\right)u^\dagger\right] \tag{3.2.38}$$

と定義すると C 及び P の下での変換則は

$$\begin{aligned}\Delta_\mu &\xrightarrow{P} -\Delta^\mu,\\ \Delta_\mu &\xrightarrow{C} -\left(\Delta_\mu\right)^t.\end{aligned} \tag{3.2.39}$$

となる。$\chi_\pm$ は

$$\chi_\pm = u\chi^\dagger u \pm u^\dagger \chi u^\dagger. \tag{3.2.40}$$

と定義され、その変換則は

$$\begin{aligned}\chi_\pm &\xrightarrow{P} \pm\chi_\pm,\\ \chi_\pm &\xrightarrow{C} \left(\chi_\pm\right)^t.\end{aligned} \tag{3.2.41}$$

である。最後に式 (3.2.32)の $G_{\mu\nu}$ 及び $H_{\mu\nu}$ から作られる量を

$$f_\pm^{\mu\nu} = u f_u^{\mu\nu} L^\dagger \pm u^\dagger f_R^{\mu\nu} u \tag{3.2.42}$$

と書くとその C, P 変換則は

$$\begin{aligned}f_\pm^{\mu\nu} &\xrightarrow{P} \pm\left(f_\pm\right)_{\mu\nu},\\ f_\pm^{\mu\nu} &\xrightarrow{C} \mp\left(f_\pm^{\mu\nu}\right)^t.\end{aligned} \tag{3.2.43}$$

である。以上の変換則をまとめた表が表 5である。

Operator	P	C	Order
Δ_μ	$-\Delta^\mu$	$-\left(\Delta_\mu\right)^t$	$O(p)$
$\chi_\pm$	$\pm\chi_\pm$	$\chi_\pm^t$	$O(p^2)$
$f_\pm^{\mu\nu}$	$\pm\left(f_\pm\right)_{\mu\nu}$	$\mp\left(f_\pm^{\mu\nu}\right)^t$	$O(p^2)$

表 5: Lagrangian の構成要素の C,P の下での変換性及びカイラルオーダーを書いた表。これらの演算子は全ては G の下で $O \xrightarrow{G} hOh^\dagger$ と変換する。

以上の構成要素を用いて最低次 $O(p^2)$ の Lagrangian は

$$L_{\mathrm{LO}} = \frac{F_0^2}{4}\,\mathrm{tr}(\Delta^\mu\Delta_\mu + \chi_+), \tag{3.2.44}$$

と書き直せる。この時、運動方程式は

$$D_\mu u_\mu - \frac{i}{2}\left(\chi_- - \mathrm{tr}\left(\chi_-\right)\right), \tag{3.2.45}$$

となる。次の次数 $O(p^4)$ の Lagrangian は、

$$
\begin{aligned}
L_{\mathrm{NLO}} &= \sum_i l_i L_i + \sum_i h_i H_i, \\
L_0 &= \mathrm{tr}\left(\Delta^\mu \Delta^\nu \Delta_\mu \Delta_\nu\right), \\
L_1 &= \mathrm{tr}\left(\Delta^\mu \Delta_\mu\right)^2, \\
L_2 &= \mathrm{tr}\left(\Delta^\mu \Delta^\nu\right) \mathrm{tr}\left(\Delta_\mu \Delta_\nu\right), \\
L_3 &= \mathrm{tr}\left((\Delta^\mu \Delta_\mu)^2\right), \\
L_4 &= \mathrm{tr}\left(\Delta^\mu \Delta_\mu\right) \mathrm{tr}\left(\chi_+\right), \\
L_5 &= \mathrm{tr}\left(\Delta^\mu \Delta_\mu \chi_+\right), \\
L_6 &= \mathrm{tr}\left(\chi_+\right)^2, \\
L_7 &= \mathrm{tr}\left(\chi_-\right)^2, \\
L_8 &= \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\chi_+^2 + \chi_-^2\right), \\
L_9 &= -i\,\mathrm{tr}\left(f_+^{\mu\nu} \Delta_\mu \Delta_\nu\right), \\
L_{10} &= \frac{1}{4}\mathrm{tr}\left(f_+^2 - f_-^2\right), \\
H_1 &= \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(f_+^2 + f_-^2\right), \\
H_2 &= \mathrm{tr}\left(\chi \chi^\dagger\right).
\end{aligned}
\tag{3.2.46}
$$

ここで l_i 及び h_i は新しく導入した低エネルギー定数 (自由パラメータ) である。N が 2 や 3 の時には Appendix Cにおいて解説される Cayley-Hamilton の定理を使って項の数を減らすことができる。

カイラル摂動論の Lagrangian の表式は QCD の対称性のみを考慮して構成されている。対称性以外の力学的な性質は、低エネルギー定数に含まれており、これらの低エネルギー定数を決定することは QCD の力学的な性質を (クォーク質量のある次数までで) 決定することに相当している。以上で挙げられた QCD の低エネルギー定数は実験値を用いることで、[43, 45] において決められている。実験値を用いて低エネルギー定数の値を固定するためには、低エネルギー定数 1(14 個) とクォーク質量 (3 個) を合わせて、少なくとも 17 個の精度のよいハドロン実験値が要求される。この方法では ([43, 45] にみられるように) LEC の高精度の決定は達成されていない。

一方で、格子計算を用いることでもこれらの低エネルギー定数を求めることは可能である;

- 様々なクォーク質量の世界を数値計算で実現し、そのクォーク質量の仮想世界におけるハドロンの物理量を計算する。
- 得られたハドロンの物理量をクォーク質量の関数であるカイラル摂動論を用いてフィットすることでハドロン物理量に係数を得る。

実験を用いた方法と大きく異なる点は、実験 (現実) では固定されているクォーク質量を動かすことが出来るため、ハドロン物理量のクォーク質量依存性 (クォーク質量に依存する力学的な性質) を知ることができるという事である。このため、(格子計算により高精度に計算することができる物理量に限れば) その物理量に現れる低エネルギー定数の線形結合を決定することが出来るのである[2]。また、第 2.8 節に説明したように格子計算を Partially Quenching で行うことにより、さらに多く

[2]例えばπ中間子の質量を使えば 14 の低エネルギー定数のうち 3 個を決定することが出来る。

の低エネルギー定数を決定することが可能である。こうして得られた低エネルギー係数は第 2.6 節で説明されるマッチングの因子を除いて決定されている。以上の手順を異なるハドロンに対して繰り返すことにより、様々な低エネルギー定数を取り出すことが可能である。このように格子計算では、非物理的な仮想世界 (異なるクォーク質量、Partially Quenching) を考えることを利用して、QCD の力学的な情報である低エネルギー定数を引き出している。

3.3 Chiral Order Counting

以上にように構成すれば、カイラル対称性、ローレンツ対称性、パリティ対称性の下で不変な有効 Lagrangian を作ることが出きるが、その構成法から、明らかにこの Lagrangian は無限個の項、無限個のパラメータを含むことになる。次に、この Lagrangian から計算する振幅のうち、どの振幅が重要な役割を果たすのか見極める必要がある。このために、個々の振幅の寄与をクォーク質量または外線の運動量のオーダーとして評価する方法をこの節で述べる。

カイラル摂動論の Lagrangian はメソンの運動量を $O(p)$、クォーク質量を $O(p^2)$ と数えたときに、

$$L = L_2 + L_4 + L_6 + \cdots \tag{3.3.1}$$

と展開することができる。ここで、L_{2n} は $O(p^{2n})$ の Lagrangian である。p に関しての偶数次数のみが現れるのは、微分に関しては縮約を行う必要があるということ、また、クォーク質量は $O(p^2)$ であるということに拠っている。

Weinberg の Power Counting では、全ての外場の運動量 p_i を e^t と変化させ、同時にクォーク質量 m_q を $e^{2t}m_q$ と変化させた時のファインマン図の振幅 $\mathcal{M}$ の反応を見る [108]。各ファインマン図のカイラル次元 D は以下のように定義される。

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(e^t p_i, e^{2t} m_q) &= e^{Dt}\mathcal{M}(p_i, m_q), \\ D &= 2 + \sum_{n=1}^{\infty} 2(n-1)N_{2n} + 2N_L. \end{aligned} \tag{3.3.2}$$

ここで、N_L はループの数、N_{2n} は、L_{2n} から生成されるの頂点の数である。ここから、メソンの運動量及びクォーク質量が十分に小さいときに支配的なファインマン図は D が小さな図からの寄与、つまり、小数の低いカイラル次元の頂点とループから計算される量であることがわかる。このため、Lagrangian には無限の項が入るにもかかわらず、わずかなダイアグラムを計算するだけで p の展開によって適切な精度が求められることになる。

以上のカイラル次元の証明を行うために、まず、メソンのプロパゲータの運動量の変換 $p \to e^t p$ 及びクォーク質量の変換 $m_q \to e^{2t}m_q$ の下での反応を考えると、

$$\begin{aligned} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{i}{k^2 - M^2 + i\epsilon} &\to e^{-2t}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{i}{e^{-2t}k^2 - M^2 + i\epsilon} \\ &= e^{2t}\int \frac{d^4l}{(2\pi)^4}\frac{i}{l^2 - M^2 + i\epsilon}. \end{aligned} \tag{3.3.3}$$

となりプロパゲーター毎に e^{2t} で変化することが分かる。また $O(p^{2n})$ の頂点は p^{2n} の運動量依存性を持つので、e^{2tn} と変化する。以上から、内線の数を N_I と書くと、振幅の運動量の変化の下で

の変換は

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M}(e^t p_i, e^{2t} m_q) = e^{Dt}\mathcal{M}(p_i, m_q),& \\
D = 4 + 2N_I + \sum_{n=1}^{\infty} N_{2n}(2n-4)& \\
= (\text{overall } \delta \text{ function}) + (\text{number of internal lines})& \\
+ (\text{number of vertex}) \times (\text{vertex -}\delta \text{ function}).&
\end{aligned}
\tag{3.3.4}
$$

と書くことができる。ここで、関係式 $N_L = N_I - (N_V - 1)$ 及び $\sum_n N_{2n} = N_V$ を使うことにより式 (3.3.2)を導くことができる。

ここで得られるファインマン図は運動量積分による UV の発散を含んでいる。この時、運動量積分を有限部分と発散部分に分離し、発散部分を適当な係数に吸収する必要がある。カイラル摂動論では運動量積分の正則化には通常は次元正則化を用いる。この正則化では、カイラル対称性をまもり、そのため Ward-Takahashi 恒等式が成り立つことになる、次元正則化では時空の次元 d を 4 から微小にずらすことにより運動量積分を収束させる。NLO まで次数では、L_2 の頂点から求めた 1-loop の運動量積分で、発散が現れる。この発散は Order Counting から $O(p^4)$ に現れることになる。1-loop での発散は

$$
\lambda = \frac{\mu^{d-4}}{16\pi^2}\left\{\frac{1}{d-4} - \frac{1}{2}[\ln(4\pi) + \gamma_E + 1]\right\}. \tag{3.3.5}
$$

ここで μ は繰り込みのスケール、γ_E はオイラー定数である。

この発散を吸収するに NLO の係数 L_i, H_i を

$$
\begin{aligned}
L_i &= L_i^r(\mu) + \Gamma_i \lambda, \\
H_i &= H_i^r(\mu) + \Delta_i \lambda,
\end{aligned}
\tag{3.3.6}
$$

と分解する。この時、Γ_i 及び Δ_i を全て求めれば $O(p^4)$ で有限な Green 関数を求めることが出来、また L_i^r 及び H_i^r は観測可能な物理量となる。Γ_i 及び Δ_i の値は Gasser-Leutwyler により、背景場の方法と Heat Kernel の方法を用いて求められた [43, 45]。表 6がその値である。表 6の値を用いることで、1-loop の発散と L_i 及び H_i の発散が相殺することで、有限な物理量を得ることができる。$L_i(\mu)$ 及び $H_i(\mu)$ のスケール依存性は、

$$
L_i^r(\mu_2) = L_i^r(\mu) + \frac{\Gamma_i}{16\pi^2}\log\left(\frac{\mu_1}{\mu^2}\right) H_i^r(\mu_2) = H_i^r(\mu) + \frac{\Delta_i}{16\pi^2}\log\left(\frac{\mu_1}{\mu^2}\right) \tag{3.3.7}
$$

で与えられる。この時、全ての物理量が繰り込みスケール不変になる。

Γ_0	$\frac{N}{48}$	Γ_7	0
Γ_1	$\frac{1}{16}$	Γ_8	$\frac{N^2-4}{16N}$
Γ_2	$\frac{1}{8}$	Γ_9	$\frac{N}{12}$
Γ_3	$\frac{N}{24}$	Γ_{10}	$-\frac{N}{12}$
Γ_4	$\frac{1}{8}$	Δ_1	$-\frac{N}{24}$
Γ_5	$\frac{N}{8}$	Δ_2	$\frac{N^2-4}{8N}$
Γ_6	$\frac{N^2+2}{16N^2}$		

表 6: Γ_i と Δ_i の表。Γ_i 及び Δ_i の定義は式 (3.3.6)

3.4 PQ カイラル摂動論

格子 QCD の数値計算においては、軽いクォーク質量での計算は困難であり、そのため第 2.8 節で説明したように Partially Quencing と呼ばれる手法を用いる。この時、数値計算は、非物理的なものとなっており、この非物理的な計算結果から物理的に意味のある量を抜き出す方法を見出す必要がある。この手法は PQQCD の有効理論を使う方法であり、PQ カイラル摂動論と呼ばれている [99, 115]。この節では、PQ カイラル摂動論の基本的事項を紹介する。PQ カイラル摂動論の構成法は

1. PQQCD の対称性を見出す。
2. カイラル対称性の破れのパターンを仮定する。
3. NG ボソンの自由度を用いてカイラル Lagrangian を構成する。

と通常のカイラル摂動論とほとんど同じ手順を踏む。まず、対称性を見出すことから始めていく。

PQQCD の Lagrangian は式 (2.8.15)から

$$
\begin{aligned}
L_{PQ} &= L_g + L_F^{PQ} \\
L_F^{PQ} &= \sum_{i=1}^{N_V} \bar{q}_{V_i}(\not{D} + M_{V_i})q_{V_i} + \sum_{i=1}^{N} \bar{q}_{S_i}(\not{D} + M_{S_i})q_{S_i} \\
&\qquad + \sum_{i=1}^{N_V} \tilde{q}^{\dagger}_{V_i}(\not{D} + M_{V_i})\tilde{q}_{V_i}.
\end{aligned} \tag{3.4.1}
$$

で与えられる。この作用は通常の QCD の時と同様に、$M \to 0$ の極限では、右手系と左手系に分離することができる；

$$
\begin{aligned}
L_F^{PQ} &\xrightarrow{M\to 0} \bar{Q}\not{D}Q \\
&= \bar{Q}_R\not{D}Q_R + \bar{Q}_L\not{D}Q_L
\end{aligned} \tag{3.4.2}
$$

ここで、Q_L, Q_R は

$$
\begin{aligned}
Q_L &= \frac{1+\gamma_5}{2}Q, & Q_R &= \frac{1-\gamma_5}{2}Q, \\
\overline{Q}_L &= \overline{Q}\frac{1-\gamma_5}{2}, & \overline{Q}_R &= \overline{Q}\frac{1+\gamma_5}{2}.
\end{aligned} \tag{3.4.3}
$$

と定義される。この作用は以下の変換の下で不変となっている。

$$
Q_{L,R} \to U_{L,R}Q_{L,R}, \quad \bar{Q}_{L,R} \to \bar{Q}_{L,R}U^{\dagger}_{L,R}, \quad \mathrm{for} U_{L,R} \in U_{L,R}(N_V + N \mid N_V), \tag{3.4.4}
$$

ここで $U_{L,R}(N_V + N \mid N_V)$ は、Super Unitary 群の元である。Super Unitary 軍の詳細を Appendix Bにまとめた。Super Unitary 群では、フェルミオン変数とボソン変数を混ぜ合わせる。この対称性は則をを保存しない成分を含むため、anomaly を含んでいる。そこで、anomaly を除去するために

$$
\mathrm{sdet}L = \mathrm{sdet}R = 1. \tag{3.4.5}
$$

を課す。ここで sdet は Appendix Bに定義される Super 行列式である。この結果、PQQCD の対称性は

$$
\mathrm{SU}(N_V + N \mid N_V) \otimes \mathrm{SU}(N_V + N \mid N_V) \otimes U(1)_V. \tag{3.4.6}
$$

で与えれることになる。式 (3.4.6)の対称性は、ゴーストクォークの収束性を考慮すると真の対称性ではない一方で、式 (3.4.6)の対称性を使って真の対称性を使った場合と同じ結論が得られることが示された [115]。そこで、以下の議論では、式 (3.4.6)の対称性を基に議論を進めていく。

次に、対称性の破れのパターンを考える。QCD の時と同じように、秩序パラメータ

$$\Omega_{ab} \equiv \langle 0| \bar{Q}_a Q_b |0\rangle . \tag{3.4.7}$$

を考える。ここで、a, b はフレーバーのインデックスである。まず、ベクトル対称性を考えると、ベクトル型のゲージ相互作用においては通常のベクトル対称性は破れない [106]。この証明においては、クォーク行列式がゲージ場の汎関数積分において正の寄与を与えることが重要な点であった。これは PQQCD においても同様に成り立つことであり、Ω_{ab} もまた、ベクトル対称性の下で不変である。このことから何が導かれるかを見るために以下で定義される $\tilde{\Omega}_{ab}$ を考える。

$$\tilde{\Omega}_{ab} \equiv \langle 0| Q_{b\tau} \bar{Q}_{a\tau} |0\rangle . \tag{3.4.8}$$

ここで、τ は、スピノールとカラーのインデックスを合わせたものである。ベクトル変換の下でこの量は

$$\tilde{\Omega} \to V\tilde{\Omega}V^\dagger, \qquad V \in SU(N_V + N \mid N_V). \tag{3.4.9}$$

と変換する。$\tilde{\Omega}$ がこの変換の下で不変であることから

$$\tilde{\Omega}_{ab} = \omega\delta_{ab}, \tag{3.4.10}$$

とかける。ここで ω は定数である。式 (3.4.10)の Q と $\bar{Q}$ を入れ替えることで

$$\Omega_{ab} = -\omega\delta_{ab}\epsilon_a, \tag{3.4.11}$$

が得られる。ここで ϵ_i は

$$\epsilon_i = \begin{cases} +1 & \text{for bosonic index} \\ -1 & \text{for fermionic index} \end{cases} \tag{3.4.12}$$

QCD の場合と同様に PQQCD においても、$\omega \neq 0$ でカイラル対称性が破れる。この時、対称性の破れのパターンは

$$SU(N_V + N \mid N_V)_L \otimes SU(N_V + N \mid N_V)_R \otimes U(1)_V \to SU(N_V + N \mid N_V)_V \otimes U(1)_V. \tag{3.4.13}$$

シークォーク部分は、通常の QCD と全く同じ構造をしていることから、今の ω の値は QCD の時の ω の値と一致することが期待される。

以上により、PQQCD の対称性及びその破れのパターンを見出すことにより、有効 Lagrangian を作ることができる。この対称性の破れのパターンから $(2N_V + N) - 1$ 個の NG 粒子は商空間

$$SU(N_V + N \mid N_V)_L \times SU(N_V + N \mid N_V)_R / SU(N_V + N \mid N_V)_V. \tag{3.4.14}$$

によりパラメトライズすることができる。具体的には

$$\begin{gathered} U = \exp\left(\frac{i\Phi(x)}{F_0}\right),\ \Phi(x) = \begin{pmatrix} \phi(x) & \eta_1(x) \\ \eta_2(x) & \tilde{\phi}(x) \end{pmatrix}, \\ \phi(x)^\dagger = \phi(x), \quad \tilde{\phi(x)}^\dagger = \tilde{\phi}(x), \quad \eta_1^\dagger(x) = \eta_2(x). \end{gathered} \tag{3.4.15}$$

ここで、ϕ はボソン的な変数を要素として持つ N_V+N 次正方行列、$\tilde{\phi}$ はボソン的な変数を要素として持つ N_V 次正方行列、η_1 はフェルミオン的な変数を要素として持つ $(N_V+N)\times N_V$ の行列である。また、F_0 は定数であり、この値は通常の QCD の場合と一致する。これは PQQCD が部分空間として QCD を含んでいるためである ($m_v \to m_s$ で通常の QCD の振幅と一致)。ここで SU 群であることから、

$$\mathrm{str}\Phi(x) = \mathrm{tr}\,\phi(x) - \mathrm{tr}\,\tilde{\phi}(x) = 0. \tag{3.4.16}$$

が成り立つ必要がある。この時、U の変換則は

$$U \to LUR^\dagger,\ \text{ where } L,R \in SU(N_V+N \mid N_V). \tag{3.4.17}$$

であり、また通常の QCD の時と同様に質量 M を spurion 場としてその変換則を

$$M \xrightarrow{G} RML^\dagger, \qquad M^\dagger \xrightarrow{G} LM^\dagger R^\dagger \tag{3.4.18}$$

とすれば、最低次の Lagrangian は

$$\begin{aligned} L_{PQChPT} &= \frac{F_0^2}{4}\mathrm{str}\left(\partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger\right) + \frac{F_0^2}{4}\mathrm{str}\left(\chi U^\dagger + U\chi\right) \\ &= \frac{F_0^2}{4}\mathrm{str}\left(\Delta_\mu \Delta^\mu + \chi_+\right) \end{aligned} \tag{3.4.19}$$

と与えることができる。ここで $\chi = 2B_0M$ であり、また str はスーパートレースを表す。また、Δ_μ,χ_+ は式 (3.2.38), 式 (3.2.40)と同様の定義を PQQCD で行ったものである。ここで現れる F_0 や B_0 は通常のカイラル摂動論に現れるものと同じ値を持つ。これは PQQCD が通常の QCD を部分空間として持つためである。このため Partially Quenching を行った格子計算の結果を、PQ カイラル摂動論を用いてフィットすることにより、通常のカイラル摂動論の低エネルギー定数を得ることが出きる。NLO の Lagrangian は通常の QCD の Lagrangian 式 (3.2.46)において、U や χ を PQ で定義されるものにし、tr を str に置き換えることにより得られる。ただし、Cayley-Hamilton の定理は超行列の場合には、Appendix Cで説明されるように高次で成り立つため ($N_V=2, N=2$ とした場合でも 6 個の行列の掛け算が必要)、これを使って項の数を減らすことは (今回の次数では) 出来ない。PQ カイラル摂動論における擬スカラーメソンの質量は [99] により求められた。シークォークの種類 $N=3$、バレンスクォーク質量 $m_i \neq m_j$ の場合には

$$\begin{aligned} M_{ij}^2 &= \chi_{ij} + 2ZF_0^2 q_{ij}^2 \\ &\quad + \frac{48L_6 - 24L_4}{F_0^2}\chi_{ij}\bar{\chi} + \frac{16L_8 - 8L_5}{F_0^2}\chi_{ij}^2 \\ &\quad + \frac{\chi_{ij}}{3F_0^2}\left(\sum_{\substack{m,n=\{\pi,\eta\}\\ m\neq n}} R_{nij}^m I\left(\chi_m\right) + \sum_{\substack{p,q=\{i,j\}\\ i\neq j}} R_{q\pi\eta}^p I\left(\chi_p\right)\right) \\ &= \chi_{ij} + 2ZF_0^2 q_{ij}^2 \\ &\quad + \frac{48L_6^r - 24L_4^r}{F_0^2}\chi_{ij}\bar{\chi} + \frac{16L_8^r - 8L_5^r}{F_0^2}\chi_{ij}^2 \\ &\quad + \frac{1}{3}\frac{\chi_{ij}}{16\pi^2F_0^2}\left(\sum_{\substack{m,n=\{\pi,\eta\}\\ m\neq n}} R_{nij}^m \chi_m \log\left(\frac{\chi_m}{\mu^2}\right) + \sum_{\substack{p,q=\{i,j\}\\ i\neq j}} R_{q\pi\eta}^p \chi_p \log\left(\frac{\chi_p}{\mu^2}\right)\right) \end{aligned} \tag{3.4.20}$$

ここで i,j はバレンスクォークのインデクスであり、また、4,5,6 のインデックスはシークォークを表している。また、[116] と同様に $\chi_i = 2B_0 m_i$,$\chi_{ij} = \frac{\chi_i + \chi_j}{2}$ はクォーク質量を m_i と書いた時の LO のメソン質量であり、$\overline{\chi}$,χ_π,χ_η 及び R^i_{jkl} は以下のように定義されている。

$$\begin{aligned}
\overline{\chi} &= \frac{\chi_4 + \chi_5 + \chi_6}{3}, \\
\chi_\pi + \chi_\eta &= 2\overline{\chi}, \\
\chi_\pi \chi_\eta &= \frac{\chi_4\chi_5 + \chi_5\chi_6 + \chi_6\chi_4}{3}, \\
R^i_{jkl} &= \frac{(\chi_i - \chi_4)(\chi_i - \chi_5)(\chi_i - \chi_6)}{(\chi_i - \chi_k)(\chi_i - \chi_l)(\chi_i - \chi_m)}.
\end{aligned} \tag{3.4.21}$$

$I(M^2)$ は運動量積分を実行する前の表式であり、

$$I\left(M^2\right) = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{i}{k^2 - M^2} = \frac{M^2}{(4\pi)^2}\left(R + \ln\left(\frac{M^2}{\mu}\right)\right), \tag{3.4.22}$$

と定義されている。ここで R は発散を含む定数

$$R = -\frac{2}{4-d} - \ln 4\pi + \gamma - 1. \tag{3.4.23}$$

であり、L_i により吸収される量である。

3.5 電磁相互作用

低エネルギーにおいては QCD 以外に QED の寄与も残ることになる。このため、ハドロンに関しても低エネルギーの物理に関して正確な予言を行うためには QED の寄与を考慮する必要がある。例えば、電磁相互作用は $SU(N)_L \times SU(N)_R$ を明示的に破るため (u,d の電荷がそれぞれ $q_u = \frac{2}{3}e, q_d = -\frac{1}{3}e$ であることから)、パイ中間子の質量を生成する。QCD に置けるパイ中間子の質量は $SU(N)_L \times SU(N)_R$ を破る非常に小さなクォーク質量から生じるため、電磁相互作用の効果は特に重要となる。電磁相互作用のハドロンへの影響を調べるために、カイラル摂動論に電磁相互作用を含めることを考えていく。この節で行う手法は [46] に従っている。

カイラル摂動論においては、電磁相互作用は、ベクトル型の外場として導入される；

$$D_\mu U = \partial_\mu U - i r_\mu U + i U l_\mu \tag{3.5.1}$$

$$r_\mu = v_\mu + Q_R A_\mu + a_\mu \tag{3.5.2}$$

$$l_\mu = v_\mu + Q_L A_\mu - a_\mu \tag{3.5.3}$$

ここで A_μ は電磁場あり、Q_L, Q_R は対角的な電荷行列であり、例えば 3 フレーバーの場合には

$$Q_L = Q_R = \mathrm{diag}\left(q_u, q_d, q_s\right), \tag{3.5.4}$$

である。Q_L と Q_R は同じ電荷行列であるが、対称性を見るために異なる spurion 場と見なす。カイラル変換性は、

$$Q_I \xrightarrow{G} U_I Q_I U_I^\dagger, \qquad I = L, R, \tag{3.5.5}$$

である。最低次数の Lagrangian は

$$\begin{aligned}
L^{\mathrm{EM}}_{\mathrm{LO}} = &-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2 \\
&+ \frac{1}{4}F_0^2 \,\mathrm{tr}\left(D^\mu U^\dagger D_\mu U + \chi U^\dagger + \chi^\dagger U\right) + C\,\mathrm{tr}\left(Q_R U Q_L U^\dagger\right),
\end{aligned} \tag{3.5.6}$$

とかける。ここで、第 2 項はゲージ固定項であり、C は電荷を入れることにより新しく現れる低エネルギー定数、電磁場の強さ $F_{\mu\nu}$ は、

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \tag{3.5.7}$$

と定義される。電磁相互作用の項のオーダーを考えると、外場 r_μ 及び l_μ が $O(p)$ であることから、$QA_\mu \sim O(p)$ であることがわかる。そこで、$Q_L, Q_R \sim O(e) \sim O(p)$、$A_\mu \sim O(1)$ とカイラルオーダーを割り当てる。この節では、$O(p^4)$ と同じ次数である $O(e^2p^2)$ 及び $O(e^4)$ に関して考えていく。実際の格子計算では、QCD の展開係数 $(M_\pi)^2/(4\pi F_0)^2$ と QED の展開係数 $\alpha_{\mathrm{EM}} = e^2/4\pi$ では、QCD の展開係数の方が大きくなるため、格子計算のフィット関数としては $O(e^4)$ の項は無視をすることになる。

Lagrangian の構成要素として斉次的に変換する量

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}_L &= uQ_L u^\dagger, \\
\mathcal{Q}_R &= u^\dagger Q_R u, \\
\hat{D}_\mu \mathcal{Q}_L &= uD_\mu Q_L u^\dagger, \\
\hat{D}_\mu \mathcal{Q}_R &= u^\dagger D_\mu Q_R u,
\end{aligned} \tag{3.5.8}$$

を定義する。共変微分 D_μ は変換性により式 (3.2.33)で定義されている。この時、式 (3.5.6)は次のように書き直すことができる。

$$\begin{aligned}
L_{\mathrm{LO}}^{\mathrm{EM}} = &-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2 \\
&+ \frac{F_0^2}{4}\,\mathrm{tr}(\Delta^\mu \Delta_\mu + \chi_+) + C\,\mathrm{tr}\left(\mathcal{Q}_L \mathcal{Q}_R\right),
\end{aligned} \tag{3.5.9}$$

対称性を考慮することにより NLO の項は運動方程式を考慮することにより得られる。$O(e^2p^2)$,$O(e^4)$ の項を

$$L_{\mathrm{NLO}}^{\mathrm{EM}} = \sum_i K_i Q_i^s \tag{3.5.10}$$

と書くと、Q_i^s は

$$
\begin{aligned}
Q_1^s &= \frac{1}{2}(\mathcal{Q}_L^2 + \mathcal{Q}_R^2)\,\mathrm{tr}\,(\Delta^\mu \Delta_\mu)\,,\\
Q_2^s &= \mathrm{tr}\,(\mathcal{Q}_L \mathcal{Q}_R)\,\mathrm{tr}\,(\Delta^\mu \Delta_\mu)\,,\\
Q_3^s &= -\,\mathrm{tr}\,(\mathcal{Q}_L \Delta_\mu)\,\mathrm{tr}\,(\mathcal{Q}_L \Delta^\mu) - \mathrm{tr}\,(\mathcal{Q}_R \Delta_\mu)\,\mathrm{tr}\,(\mathcal{Q}_R \Delta^\mu)\,,\\
Q_4^s &= \mathrm{tr}\,(\mathcal{Q}_L \Delta_\mu)\,\mathrm{tr}\,(\mathcal{Q}_R \Delta^\mu)\,,\\
Q_5^s &= \mathrm{tr}\,\left((\mathcal{Q}_L^2 + \mathcal{Q}_R^2)\Delta_\mu \Delta^\mu\right),\\
Q_6^s &= \mathrm{tr}\,((\mathcal{Q}_L \mathcal{Q}_R + \mathcal{Q}_R \mathcal{Q}_L)\Delta_\mu \Delta^\mu)\,,\\
Q_7^s &= \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,\left(\mathcal{Q}_L^2 + \mathcal{Q}_R^2\right)\mathrm{tr}\,(\chi_+)\,,\\
Q_8^s &= \mathrm{tr}\,(\mathcal{Q}_L \mathcal{Q}_R)\,\mathrm{tr}\,(\chi_+)\,,\\
Q_9^s &= \mathrm{tr}\,\left((\mathcal{Q}_L^2 + \mathcal{Q}_R^2)\chi_+\right),\\
Q_{10}^s &= \mathrm{tr}\,((\mathcal{Q}_L \mathcal{Q}_R + \mathcal{Q}_R \mathcal{Q}_L)\chi_+)\,,\\
Q_{11}^s &= \mathrm{tr}\,((\mathcal{Q}_L \mathcal{Q}_R - \mathcal{Q}_R \mathcal{Q}_L)\chi_-)\,,\\
Q_{12}^s &= i\,\mathrm{tr}\,([D_\mu \mathcal{Q}_R, \mathcal{Q}_R]\Delta^\mu - [D_\mu \mathcal{Q}_L, \mathcal{Q}_L]\Delta^\mu)\,,\\
Q_{13}^s &= \mathrm{tr}\,\left(D_\mu \mathcal{Q}_L \hat{D}^\mu \mathcal{Q}_R\right),\\
Q_{14}^s &= \mathrm{tr}\,\left(D_\mu \mathcal{Q}_L \hat{D}^\mu \mathcal{Q}_L + D_\mu \mathcal{Q}_R D^\mu \mathcal{Q}_R\right),\\
Q_{15}^s &= \mathrm{tr}\,(\mathcal{Q}_R \mathcal{Q}_L)^2\,,\\
Q_{16}^s &= \mathrm{tr}\,(\mathcal{Q}_R \mathcal{Q}_L)\,\mathrm{tr}\,\left(\mathcal{Q}_R^2 + \mathcal{Q}_L^2\right),\\
Q_{17}^s &= \mathrm{tr}\,\left(\mathcal{Q}_R^2 + \mathcal{Q}_L^2\right),\\
Q_{18}^s &= \mathrm{tr}\,(\mathcal{Q}_L \Delta_\mu \mathcal{Q}_L \Delta^\mu + \mathcal{Q}_R \Delta_\mu \mathcal{Q}_R \Delta^\mu)\,,\\
Q_{19}^s &= \mathrm{tr}\,(\mathcal{Q}_L \Delta_\mu \mathcal{Q}_R \Delta^\mu)\,,\\
Q_{20}^s &= \mathrm{tr}\,\left(\mathcal{Q}_L^2 \mathcal{Q}_R^2\right),\\
Q_{21}^s &= \mathrm{tr}\,(\mathcal{Q}_L \mathcal{Q}_R \mathcal{Q}_L \mathcal{Q}_R)\,,\\
Q_{22}^s &= \mathrm{tr}\,\left(\mathcal{Q}_R^2 - \mathcal{Q}_L^2\right)^2,\\
O_{23} &= \mathrm{tr}\,(\mathcal{Q}_R)\,\mathrm{tr}\,\left(\mathcal{Q}_R \mathcal{Q}_L^2\right) + \mathrm{tr}\,(\mathcal{Q}_L)\,\mathrm{tr}\,\left(\mathcal{Q}_L \mathcal{Q}_R^2\right),\\
O_{24} &= \mathrm{tr}\,(\mathcal{Q}_L)\,\mathrm{tr}\,(\mathcal{Q}_R \Delta_\mu \Delta^\mu) + \mathrm{tr}\,(\mathcal{Q}_R)\,\mathrm{tr}\,(\mathcal{Q}_L \Delta_\mu \Delta^\mu)\,,\\
O_{25} &= \mathrm{tr}\,(\mathcal{Q}_L)\,\mathrm{tr}\,(\mathcal{Q}_R \chi_+) + \mathrm{tr}\,(\mathcal{Q}_R)\,\mathrm{tr}\,(\mathcal{Q}_L \chi_+)\,.
\end{aligned}
\tag{3.5.11}
$$

と書くことが出来る。

1-loop の発散を吸収するに NLO の係数 K_i を

$$
K_i = K_i^r(\mu) + k_i \lambda, \tag{3.5.12}
$$

と変化させる。ここで λ は式 (3.3.5)で定義される。k_i の値は [46] の中で、背景場の方法及び Heat Kernel の方法を用いて求められた。k_i の値は表 7にまとめてある。

PQ カイラル摂動論では、U を式 (3.4.15)、電荷行列を

$$
Q = \mathrm{diag}\left(q_{V_1}, \cdots, q_{V_{N_V}}, q_{S_1}, \cdots, q_{S_N}, q_{V_1}, \cdots, q_{V_{N_V}}\right), \tag{3.5.13}
$$

k_1	0	k_{14}	0
k_2	$\frac{C}{F_0^2}$	k_{15}	$\frac{3}{2}F_0^4 + \frac{8C^2}{F_0^4}$
k_3	0	k_{16}	$-\frac{3}{2}F_0^4$
k_4	$\frac{2C}{F_0^2}$	k_{17}	$\frac{3}{8}F_0^4$
k_5	$-\frac{3}{4}F_0^2$	k_{18}	$\frac{3}{4}F_0^2$
k_6	$\frac{CN}{2F_0^2}$	k_{19}	0
k_7	0	k_{20}	$2\frac{C^2N}{F_0^4} - 3C$
k_8	$\frac{C}{F_0^2}$	k_{21}	$\frac{2C^2N}{F_0^4} + 3C$
k_9	$-\frac{F_0^2}{4}$	k_{22}	$-\frac{C^2}{F_0^4}$
k_{10}	$\frac{F_0^2}{4} + \frac{NC}{2F_0^2}$	k_{23}	$-\frac{8C^2}{F_0^4}$
k_{11}	$\frac{F_0^2}{8}$	k_{24}	$-\frac{C}{F_0^2}$
k_{12}	$\frac{F_0^2}{4}$	k_{25}	$-\frac{C}{F_0^2}$
k_{13}	0	k_{26}	0
k_{27}	0		

表 7: k_i の値をまとめた表。

と拡張し、tr を str とすることで得られる [116]。ここで、質量の時と同様にバレンスクォークの電荷とゴーストクォークの電荷は同じにしておく必要がある。

以上の定式化の枠内で、特に今回の格子計算に対応する PQChPT の場合の擬スカラーメソンの質量公式は [116] において計算が行われた。シークォークの種類 $N = 3$、バレンスクォーク質量

$m_i \neq m_j$ の時、

$$
\begin{aligned}
M_{ij}^2 &= \chi_{ij} + 2ZF_0^2 q_{ij}^2 \\
&+ \frac{48L_6 - 24L_4}{F_0^2}\chi_{ij}\bar{\chi} + \frac{16L_8 - 8L_5}{F_0^2}\chi_{ij}^2 \\
&- 12Y_1\overline{Q^2}\chi_{ij} + 4Y_2\left(q_i^2\chi_i + q_j^2\chi_j\right) + 4Y_3 q_{ij}^2\chi_{ij} - 4Y_4 q_i q_j \chi_{ij} + 12Y_5 q_{ij}^2\overline{\chi} \\
&+ \frac{\chi_{ij}}{3F_0^2}\left(\sum_{\substack{m,n=\{\pi,\eta\}\\ m\neq n}} R_{nij}^m I\left(\chi_m\right) + \sum_{\substack{p,q=\{i,j\}\\ i\neq j}} R_{q\pi\eta}^p I\left(\chi_p\right)\right) \\
&- 2Z\sum_{x=4,5,6} I\left(\chi_{ix}\right) q_{ix} q_{ij} - 2Z\sum_{x=4,5,6} I\left(\chi_{jx}\right) q_{jx} q_{ji} \\
&- q_{ij}^2\left\{4\chi_{ij} J\left(\chi_{ij}\right) + 2p^\mu K_\mu\left(\chi_{ij}\right)\right\} + 3q_{ij}^2 I^0 \\
&= \chi_{ij} + 2ZF_0^2 q_{ij}^2 \\
&+ \frac{48L_6^r - 24L_4^r}{F_0^2}\chi_{ij}\bar{\chi} + \frac{16L_8^r - 8L_5^r}{F_0^2}\chi_{ij}^2 \\
&- 12Y_1^r\overline{Q^2}\chi_{ij} + 4Y_2^r\left(q_i^2\chi_i + q_j^2\chi_j\right) + 4Y_3^r q_{ij}^2\chi_{ij} - 4Y_4^r q_i q_j \chi_{ij} + 12Y_5^r q_{ij}^2\overline{\chi} \\
&+ \frac{1}{3}\frac{\chi_{ij}}{16\pi^2 F_0^2}\left(\sum_{\substack{m,n=\{\pi,\eta\}\\ m\neq n}} R_{nij}^m \chi_m \log\left(\frac{\chi_m}{\mu^2}\right) + \sum_{\substack{p,q=\{i,j\}\\ i\neq j}} R_{q\pi\eta}^p \chi_p \log\left(\frac{\chi_p}{\mu^2}\right)\right) \\
&- 2Z\sum_{x=4,5,6}\frac{1}{16\pi^2}\chi_{ix}\log\left(\frac{\chi_{ix}}{\mu^2}\right) q_{ix} q_{ij} - 2Z\sum_{x=4,5,6}\frac{1}{16\pi^2}\chi_{jx}\log\left(\frac{\chi_{jx}}{\mu^2}\right) q_{jx} q_{ji} \\
&- \frac{q_{ij}^2}{16\pi^2}\chi_{ij}\left\{3\log\left(\frac{\chi_{ij}}{\mu^2}\right) - 4\right\}
\end{aligned}
\tag{3.5.14}
$$

と書くことができる。ここで、Z、q_{ij},$\overline{Q^2}$ は次のように定義され

$$
\begin{aligned}
q_{ij} &= q_i - q_j, \\
\overline{Q^2} &= \frac{q_4^2 + q_5^2 + q_6^2}{3}, \\
Z &= \frac{C}{F_0^4}.
\end{aligned}
\tag{3.5.15}
$$

積分 $I^0, J(M^2), K^\mu\left(M^2\right)$ は、

$$
\begin{aligned}
I^0 &= \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D}\frac{i}{k^2} = 0 \\
J(M^2) &= \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D}\frac{i}{k^2\left((k+p)^2 - M^2\right)} = \frac{1}{(4\pi)^2}\left(R + \ln\left(\frac{M^2}{\mu}\right) + 1\right), \\
K^\mu(M^2) &= \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D}\frac{ik^\mu}{k^2\left((k+p)^2 - M^2\right)} = \frac{p^\mu}{2(4\pi)^2}\left(R + \ln\left(\frac{M^2}{\mu}\right)\right),
\end{aligned}
\tag{3.5.16}
$$

と定義されている。Y_i は [116] と同様に K_i の線形結合により

$$
\begin{aligned}
Y_1 &= K_1 + K_2 - K_7 - K_8, \\
Y_2 &= K_9 + K_{10}, \\
Y_3 &= -K_5 - K_6 + 2K_{10} + 2K_{11}, \\
Y_4 &= 2K_5 + 2K_6 + 2K_{18} + K_{19}, \\
Y_5 &= K_8.
\end{aligned} \tag{3.5.17}
$$

と定義される量である。

3.6 有限体積効果

実際の格子計算においては、積分変数の自由度を有限にする必要があるため、有限の体積の箱の中での数値計算を行うことになる。一般的に、有限体積の世界で求められた物理量の値は、無限体積 (我々の通常の世界) における物理量の値とは異なる。このため、有限体積で求めた物理量がどの程度無限体積の物理量からずれるのかを (理論的に) 見積もっておく必要がある。有限体積効果は理論の低エネルギー (空間的に広がりのある) の物理により支配されるため、その解析にはカイラル摂動論が有用である。この節ではメソン質量に対する有限体積効果の解析を行う。カイラル摂動論を用いた QCD 由来の有限体積効果の解析は [117–119] により行われた。QCD では閉じ込めの性質のため有限体積効果は比較的小さく抑えられることになる。電磁相互作用を考慮したとすると、それは長距離力であるため、有限体積効果が大きいことが予想され、ハドロンの性質における電磁相互作用の寄与に大きな影響を与える可能性がある。

この節では、まず通常の QCD の場合に対する有限体積効果の影響を概観、その後、電磁相互作用による有限体積効果の影響を考える。

有限体積効果を考えるために、空間方向に長さ L の周期的境界条件を課した箱を考える。この時、運動量は次のような離散的な値をとることになる；

$$
\vec{p} \in \tilde{\Gamma} \equiv \left\{ \frac{2\pi}{L} n_1, \ldots, \frac{2\pi}{L} n_d \mid n_i \in \boldsymbol{Z} \right\} \tag{3.6.1}
$$

ここで $\vec{p}$ は空間方向の運動量であり、d は空間方向の次元で時空の次元 D と $d = D - 1$ の関係にある。ある物理量が運動量積分を用いて $\int d^d p H(p)$ とかかれている時、運動量積分 $\tilde{\Gamma}$ 上の離散的な運動量の和に変化する；

$$
\int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} H(p) \xrightarrow{\text{P.B.C}} \frac{1}{(2\pi)^d} \left(\frac{2\pi}{L} \right)^d \sum_{\vec{p} \in \tilde{\Gamma}} H(\vec{p}) = \frac{1}{V} \sum_{\vec{p} \in \tilde{\Gamma}} H(\vec{p}). \tag{3.6.2}
$$

ここで $V = L^d$ は箱の体積である。次にこの式を恒等式

$$
\frac{1}{V} \sum_{\vec{p} \in \tilde{\Gamma}} \delta^d(\vec{p}' - \vec{p}) = \frac{1}{(2\pi)^d} \sum_{\vec{x} \in \Gamma} e^{i\vec{p}' \vec{x}} \tag{3.6.3}
$$

を用いて変形する。ここで Γ は

$$
\Gamma \equiv \{ m_1 L, \ldots, m_d L \mid m_i \in \boldsymbol{Z} \} \tag{3.6.4}
$$

と定義される。この時式 (3.6.2)は

$$\begin{aligned}
\frac{1}{V}\sum_{\vec{p}\in\tilde{\Gamma}} H(\vec{p}) &= \frac{1}{V}\sum_{\vec{p}\in\tilde{\Gamma}}\int d^d p' \delta^p(p'-p) H(\vec{p}') \\
&= \int d^d p' H(\vec{p}') \frac{1}{V}\sum_{\vec{p}\in\tilde{\Gamma}} \delta^d(\vec{p}'-\vec{p}) \\
&= \int d^d p' H(\vec{p}') \frac{1}{(2\pi)^d}\sum_{\vec{x}\in\Gamma} e^{\vec{p}'\vec{x}}.
\end{aligned} \tag{3.6.5}$$

ここでフーリエ変換

$$\tilde{H}(\vec{x}) = \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} e^{i\vec{p}\vec{x}} H(\vec{p}), \tag{3.6.6}$$

を考えると

$$\frac{1}{V}\sum_{\vec{p}\in\tilde{\Gamma}} H(\vec{p}) = \sum_{\vec{x}\in\Gamma}\tilde{H}(\vec{x}). \tag{3.6.7}$$

が得られる。これは、特に、周期的な世界の全ての寄与の和をとることに対応している。

以下、この離散化を PQ カイラル摂動論におけるメソン質量に現れる式 (3.4.22)及び式 (3.5.16)の 4 種類の積分に関して適用をしていく。

$$I\left(M^2\right) = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D}\frac{i}{k^2-M^2}, \tag{3.6.8}$$

$$J(M^2) = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D}\frac{i}{k^2\left((k+p)^2-M^2\right)}, \tag{3.6.9}$$

$$K^\mu(M^2) = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D}\frac{ik^\mu}{k^2\left((k+p)^2-M^2\right)}, \tag{3.6.10}$$

$$I^0 = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D}\frac{i}{k^2}, \tag{3.6.11}$$

$$\tag{3.6.12}$$

ここで、上の 2 つは QCD におけるパイ中間子のループにより生じる積分であり、下の 3 つは電磁相互作用により新たに生じる積分である。

3.6.1 QCD の効果による有限体積効果

初めに QCD により生じる有限体積効果式 (3.6.8) について考えていく。このために次の積分を考える；

$$I_r(M^2;\infty) = \int \frac{d^D k}{i(2\pi)^D}\frac{\Gamma(r)}{(-k^2+M^2-i\epsilon)^r} \tag{3.6.13}$$

空間方向の長さを有限にしたとき、対応する量は

$$I_r(M^2;L) = \int \frac{dk^0}{(2\pi)}\frac{1}{V}\sum_{\vec{k}\in\tilde{\Gamma}}\frac{\Gamma(r)}{(-k^2+M^2-i\epsilon)^r}. \tag{3.6.14}$$

である。式 (3.6.7)を用いると、

$$I_r(M^2;L) = \int \frac{dk^0}{i(2\pi)}\sum_{\vec{x}\in\Gamma}\int\frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}\frac{\Gamma(r)}{(-k^2+M^2-i\epsilon)^r}. \tag{3.6.15}$$

と書き換えることができる。次に恒等式

$$\int_0^\infty d\lambda \frac{(i\lambda)^r}{\lambda} e^{ia\lambda} = \frac{\Gamma(r)}{a^r}, \qquad \text{if}\, \mathrm{Re}(r) > 0 \,\text{and}\, \mathrm{Im}\,(a) < 0 \tag{3.6.16}$$

を用いることで、プロパゲータを Schwinger の固有時間表示 [120] に書き換える；

$$\frac{1}{(-k^2 + M^2 - i\epsilon)^r} = \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda} (i\lambda)^r \exp\left(-i\lambda(-k^2 + M^2 - i\epsilon)\right), \tag{3.6.17}$$

また、$x = (0, \vec{x})$ を導入すると、式 (3.6.15)は

$$\begin{aligned}
I_r(M^2; L) &= \sum_{\vec{x} \in \Gamma} \int \frac{d^D k}{i(2\pi)^d} e^{ikx} \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda} (i\lambda)^r \exp[-i\lambda(-k^2 + M^2 - i\epsilon)] \\
&= \sum_{\vec{x} \in \Gamma} \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda} (i\lambda)^r \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \exp\left[i\lambda\left(\left(k - \frac{x}{2\lambda}\right)^2 - M^2 + i\epsilon - \frac{x^2}{4\lambda^2}\right)\right] \\
&\overset{\text{Wick rotation}}{=} \sum_{\vec{x} \in \Gamma} \int_0^\infty d\lambda (\lambda)^{r-1} \int \frac{d^D k_E}{(2\pi)^D} \exp\left[-\lambda\left(k_E^2 + M^2 + \frac{x^2}{4\lambda^2}\right)\right] \\
&\overset{\text{Gauss integral}}{=} \sum_{\vec{x} \in \Gamma} \int_0^\infty d\lambda \frac{\lambda^{r-1}}{(4\pi\lambda)^{\frac{D}{2}}} \exp(-\lambda M^2 - \frac{x^2}{4\lambda}).
\end{aligned} \tag{3.6.18}$$

ここで 3 行目では Wick 回転 $k^0 \to ik^D$ 及び解析接続 $\lambda \to -i\lambda$ を用いた。ここで $I_r\left(M^2; \infty\right)$ が

$$\begin{aligned}
I_r(M^2; \infty) &= \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda} (i\lambda)^r \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \exp\left[i\lambda\left(k - \frac{x}{2\lambda}\right)^2 - M^2 + i\epsilon\right] \\
&\overset{\text{Wick rotation}}{=} \int_0^\infty d\lambda (\lambda)^{r-1} \int \frac{d^D k_E}{(2\pi)^D} \exp\left[-\lambda\left(k_E^2 + M^2\right)\right] \\
&\overset{\text{Gauss integral}}{=} \int_0^\infty d\lambda \frac{\lambda^{r-1}}{(4\pi\lambda)^{\frac{D}{2}}} \exp(-\lambda M^2) \\
&= I(L) \mid_{\vec{x}=0}
\end{aligned} \tag{3.6.19}$$

と $I_r\left(M^2; L\right)$ において $\vec{x} = 0$ とおいたものに対応していることを用いれば、有限体積中の振幅と無限体積中の振幅の差 $\Delta I_r\left(M^2; L\right) = I_r(M^2; L) - I_r(M^2; \infty)$ は以下のように書くことができる。

$$\begin{aligned}
&\Delta I_r(M^2; L) \\
&= \sum_{\vec{x} \neq 0} \int_0^\infty d\lambda \frac{\lambda^{r-1}}{(4\pi\lambda)^2} \exp(-\lambda M^2 - \frac{x^2}{4\lambda}) \\
&= \frac{1}{16\pi^2} \int_0^\infty d\lambda \lambda^{r-3} \exp(-\lambda M) \sum_{\vec{n} \neq 0} \exp\left(-\frac{1}{4\lambda} \mid \vec{n} \mid^2\right) \\
&\overset{\lambda \to \frac{L^2}{4\pi}\lambda}{=} \frac{1}{16\pi^2} \int_0^\infty d\lambda \left(\frac{L^2}{4\pi}\right)^{r-2} \lambda^{r-3} \exp\left(-\frac{(LM)^2}{4\pi}\lambda\right) \sum_{\vec{n} \neq 0} \exp\left(-\frac{\pi}{\lambda} \mid \vec{n} \mid^2\right) \\
&= \frac{1}{16\pi^2} \int_0^\infty d\lambda \left(\frac{L^2}{4\pi}\right)^{r-2} \lambda^{r-3} \exp\left(-\frac{(LM)^2}{4\pi}\lambda\right) \sum_{\vec{n} \neq 0} \exp\left(-\frac{\pi}{\lambda}(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2)\right) \\
&= \frac{1}{16\pi^2} \int_0^\infty d\lambda \left(\frac{L^2}{4\pi}\right)^{r-2} \lambda^{r-3} \exp\left(-\frac{(LM)^2}{4\pi}\lambda\right) \left(\theta_3\left(0, \frac{i}{\lambda}\right)^3 - 1\right).
\end{aligned} \tag{3.6.20}$$

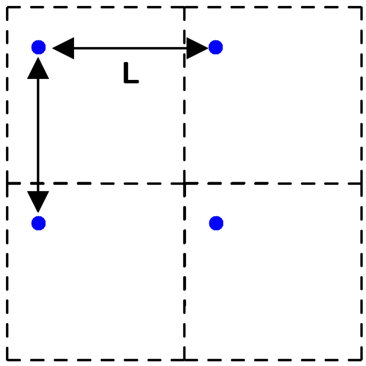


図 5: 長さ L の周期的境界条件を図示した表。粒子は自身のコピーによる影響を受ける。

ここで最後の行では、Jacobi の θ 関数

$$\theta_3(v;\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(\pi\tau i n^2 + 2\pi v i n) \tag{3.6.21}$$

を用いた。

この式から、QCD における有限体積効果の大きさは、擬スカラーメソンの質量 M_π により、箱の長さにより指数関数的に小さくなる形 $\sim e^{M_\pi L}/L^2$ になっている。これは、長さ L の周期的境界条件により、自分自身のコピーが自身から距離 L の点にできることによる影響と考えることができる (図 5)。

3.6.2 QED による効果

次に電磁相互作用による積分式 (3.6.9)、式 (3.6.10)、式 (3.6.11) を議論していく。第 2.10 節で議論したように、光子の 0 運動量成分を含まないことにより有限体積中で電磁相互作用を定義することができる。この時、

$$\begin{aligned} J(M^2;L) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk^0}{i(2\pi)} \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}\neq\vec{0}} \frac{1}{(-k^2 - i\epsilon)(-(k+p)^2 + M^2 - i\epsilon)} \\ &= \int_0^1 dx \int_0^1 dy \delta(1-x-y) \int \frac{dk_0}{i(2\pi)} \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}\neq\vec{0}} \frac{1}{(-(k+yp)^2 + D(x,y) - i\epsilon)^2}. \end{aligned} \tag{3.6.22}$$

この時式 (3.6.7)もまた以下のように変更される。

$$\begin{aligned} \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}\neq\vec{0}} \delta^d(\vec{k}' - \vec{k}) &= \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}\in\tilde{\Gamma}} \delta^d(\vec{k}' - \vec{k}) - \delta^d(\vec{k}') \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \sum_{\vec{x}\in\Gamma} e^{i\vec{k}\vec{x}} - \frac{1}{V} \int d^d x e^{i\vec{k}\vec{x}} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \left(\sum_{\vec{x}\in\Gamma} - \frac{1}{V} \int d^d x \right) e^{i\vec{k}\vec{x}} \end{aligned} \tag{3.6.23}$$

この時、式 (3.6.22)は前節と同様に以下のように書き直される。

$$
\begin{aligned}
J(M^2;L) = &\int_0^1 dx \int_0^1 dy \delta(1-(x+y)) \\
&\left(\sum_{\vec{x}} - \frac{1}{V}\int d^d x\right) \underbrace{\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} e^{-ik\cdot x} \frac{1}{(-(k+yp)^2 + D(x,y) - i\epsilon)^2}}_{\equiv A}.
\end{aligned}
\tag{3.6.24}
$$

A の部分に関して固有時間表示の式 (3.6.17)を行うと、

$$
\begin{aligned}
A &= \int \frac{d\lambda}{\lambda}(i\lambda)^r \int \frac{d^D k}{i(2\pi)^D} \exp\left[i\lambda(-(k+yp)^2 + D(x,y) - i\epsilon) - ikx\right] \\
&= \int \frac{d\lambda}{\lambda}(i\lambda)^r \int \frac{d^D k}{i(2\pi)^D} \\
&\qquad \times \exp\left[i\lambda\left(\left(k + yp - \frac{x}{2\lambda}\right)^2 - \left(yp - \frac{x}{2\lambda}\right)^2 - D(x,y) + (yp)^2\right)\right] \\
&\overset{\text{Wick rotation}}{=} \int \frac{d\lambda}{\lambda}(\lambda)^r \int \frac{d^D k_E}{(2\pi)^D} \\
&\qquad \times \exp\left[-\lambda\left(k_E^2 - \left(yp - i\frac{x}{2\lambda}\right)^2 - (yp)^2 + D(x,y)\right)\right] \\
&= \int \frac{d\lambda}{\lambda}(\lambda)^r \int \frac{d^D k_E}{(2\pi)^D} \exp\left[-\lambda\left(k_E^2 - \frac{x^2}{4\lambda^2} - i\frac{yp\cdot x}{\lambda} + D(x,y)\right)\right] \\
&= \int \frac{d\lambda}{\lambda}(\lambda)^r \int \frac{d^D k_E}{(2\pi)^D} \exp\left[-\lambda\left(k_E^2 + \frac{\vec{x}^2}{4\lambda^2} + i\frac{y\vec{p}\cdot\vec{x}}{\lambda} + D(x,y)\right)\right]
\end{aligned}
\tag{3.6.25}
$$

が得られる。ガウス積分を実行することで、

$$
\begin{aligned}
J(M^2;L) = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \delta(1-(x+y)) \left(\sum_{\vec{x}} - \frac{1}{V}\int d^d x\right) \\
\int \frac{d\lambda}{\lambda} \frac{\lambda^2}{(4\pi\lambda)^{\frac{D}{2}}} \exp\left[-\lambda D(x,y) - \frac{|\vec{x}|^2}{4\lambda} - i\frac{y\vec{p}\cdot\vec{x}}{\lambda}\right].
\end{aligned}
\tag{3.6.26}
$$

となる。ここで、$J(M^2;\infty)$ が

$$
J(M^2;\infty) = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \delta(1-(x+y)) \int \frac{d\lambda}{\lambda} \frac{\lambda^2}{(4\pi\lambda)^{\frac{D}{2}}} \exp\left[-\lambda D(x,y)\right]. \tag{3.6.27}
$$

とかけることを用いて、また、運動量を $p=(M,\vec{0})$ に固定すると、有限体積補正 $\Delta J(M^2;L)=J(M^2;L)-J(M^2;\infty)$ は

$$
\begin{aligned}
\Delta J(M^2;L) = &\int_0^1 dy \left(\sum_{\vec{x}\neq 0} - \frac{1}{V}\int d^3x \right) \\
&\int d\lambda \frac{1}{16\pi^2\lambda} \exp\left[-\lambda y^2 M^2 - \frac{|\vec{x}|^2}{4\lambda} \right] \\
&\overset{\lambda \to \frac{L^2}{4\pi}\lambda, \mathrm{x} \to \mathrm{Ln}}{=} \frac{1}{16\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda} \exp\left(-\lambda x^2 \frac{(LM)^2}{4\pi} \right) \\
&\left(\sum_{\vec{n}\neq 0} \exp\left(-\frac{\pi}{\lambda} |\vec{n}|^2 \right) - \int d^3n e^{-\frac{\pi}{\lambda}n^2} \right) \\
&\overset{\text{式 (3.6.21)}}{=} \frac{1}{16\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda} \exp\left(-\lambda x^2 \frac{(LM)^2}{4\pi} \right) \sum_{\vec{n}\neq 0} \left[\theta(0, \frac{i}{\lambda})^3 - 1 - \lambda^{\frac{3}{2}} \right] \\
&\overset{\sqrt{\frac{\lambda}{4\pi}}(LM)x = s}{=} \frac{1}{16\pi^2} \sqrt{\frac{4\pi}{\lambda}} \frac{1}{LM} \int_0^{LM\sqrt{\frac{\lambda}{4\pi}}} ds \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda} e^{-s^2} \sum_{\vec{n}\neq 0} \left[\theta(0, \frac{i}{\lambda})^3 - 1 - \lambda^{\frac{3}{2}} \right] \\
&\overset{\text{式 (3.6.29)}}{=} \frac{1}{16\pi} \frac{1}{LM} \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^{\frac{3}{2}}} \mathrm{erf}\left(LM\sqrt{\frac{\lambda}{4\pi}} \right) \sum_{\vec{n}\neq 0} \left[\theta(0, \frac{i}{\lambda})^3 - 1 - \lambda^{\frac{3}{2}} \right]
\end{aligned}
\tag{3.6.28}
$$

ここで erf は

$$
\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x ds e^{-s^2} \tag{3.6.29}
$$

と定義される。

同様の計算を行うことで式 (3.6.10)、式 (3.6.11)に対する有限体積効果も計算することが可能である [104]。式 (3.6.8), 式 (3.6.9), 式 (3.6.10), 式 (3.6.11) に対する有限体積補正の結果をまとめると

$$
\begin{aligned}
\Delta I(M^2;L) &= \frac{1}{4\pi L^2} \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^2} \exp\left(-\frac{(LM)^2}{4\pi}\lambda \right) \left[\theta_3\left(0, \frac{i}{\lambda}\right)^3 - 1 \right], \\
\Delta J(M^2;L) &= \frac{1}{16\pi} \frac{1}{LM} \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^{\frac{3}{2}}} \mathrm{erf}\left(LM\sqrt{\frac{\lambda}{4\pi}} \right) \\
&\quad \times \sum_{\vec{n}\neq 0} \left[\theta(0, \frac{i}{\lambda})^3 - 1 - \lambda^{\frac{3}{2}} \right], \\
\Delta K^\mu(M^2;L) &= -\frac{p^\mu}{8\pi L^2 M^2} \int \frac{d\lambda}{\lambda^2} \left(1 - \exp\left(-\frac{L^2M^2}{4\pi}\lambda \right) \right) \\
&\quad \times \sum_{\vec{n}\neq 0} \left[\theta\left(0, \frac{i}{\lambda}\right)^3 - 1 - \lambda^{\frac{3}{2}} \right], \\
\Delta I^0(L) &= \frac{1}{4\pi L^2} \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^2} \left[\theta_3\left(0, \frac{i}{\lambda}\right)^3 - 1 - \lambda^{\frac{3}{2}} \right].
\end{aligned}
\tag{3.6.30}
$$

となる。これらを擬スカラーメソンの質量の式 (3.4.20)及び式 (3.5.14)の対応する部分に足すことにより、有限体積中の擬スカラーメソン質量を得ることが出来る。

3.7 SU(2)+重い K 中間子のカイラル摂動論

ここまでの議論では、擬スカラーメソンは、QCD の典型的なスケールに比較し、充分軽く、擬 NG ボソンと見なせることを仮定して議論を進めてきた。ところが、現実世界では K 中間子の質量はパイ中間子の質量と比べて重く、K 中間子のループによる寄与により u, d, s クォークに対する $SU(3)$ 対称性を基にしたカイラル摂動論の Power Counting が収束しない物理量が存在することが示唆されており [121]、格子理論を用いた数値計算においてもこうした状況は現れている [16,17,39,51,52]。そこで、パイ中間子のみを擬 NG ボソンと見なすこととし、K 中間子を重い物質場として取り扱う。K 中間子を重い物質場として系統的に扱う方法は、バリオンのカイラル摂動論 (Heavy Baryon ChPT, HBChPT) [122,123] を参考に [53] により定式化され (Heavy Kaon ChPT, HKChPT)、その後 [39] において PQQCD の場合に拡張された。本節では、最初に第 3.7.1 節において QCD の HKChPT を解説し、その後、第 3.7.2 節において電磁相互作用を導入した場合について議論する。

3.7.1 pure QCD Lagrangian と質量公式

この節では、K 中間子を重い物質場として導入する [53]。この時、擬 NG ボソンはパイ中間子のみであり、理論の対称性は $SU(2)_L \times SU(2)_R$ であると考えられる。擬 NG ボソンと、K 中間子のの相互作用を知るには K 中間子のカイラル変換則を見出す必要がある。非 NG ボソンの変換則、NG ボソンとの結合を知る系統的な方法は [124,125] により与えられた。場 $K, K^\dagger$ を $SU(2)_V$ のアイソスピン $\frac{1}{2}$ 表現の場として

$$K(x) = \begin{pmatrix} K^+(x) \\ K^0(x) \end{pmatrix}, \qquad K^\dagger(x) = \begin{pmatrix} -\overline{K^0}(x) \\ K^-(x) \end{pmatrix} \tag{3.7.1}$$

と導入する。この場の $SU(2)_L \times SU(2)_R$ の下での変換則として

$$K(x) \to K' = h\,(R, L, u)\,K(x) \tag{3.7.2}$$

を定義する。この作用は $L = R$ の下では $SU(2)_V$ のアイソスピン $\frac{1}{2}$ として振る舞う。K の変換性に関して $SU(2)_V$ のみの考慮からえることができる理由は例えば [126] に見られる。この時、Lagrangian は以下のような項に分割することができる；

$$L_{\mathrm{HKChPT}} = L_\pi + L_{\pi KK} + L_{\pi KKKK} + \cdots \tag{3.7.3}$$

ここで L_π はパイ中間子のみからなる Lagrangian,$L_{\pi KK}$ は K に関しての双一次とパイ中間子から成る項などである。

K 中間子の Power Counting を考える。K 中間子の質量はパイ中間子とは異なり、Λ_{QCD} と同じ程度に大きく、3 元運動量 $\vec{p}$ が小さい場合にも 4 元運動量 $p_\mu = \left(\sqrt{M_k^2 + |\vec{p}|}^2, \vec{p}\right)$ は小さくならず、Power Counting を壊すことが予想される。実際に K 中間子のみのループによる寄与を考えると、例えば tadpole 型のグラフによる寄与を次元正則化により計算した場合、その寄与の大きさは K 中間子の質量を M_K と書いたとき、$\sim M_K^2 \log\left(M_k^2/\mu^2\right)$ 程度であり、高次の項が大きな寄与を与えることになる。一方で、この tadpole 型の寄与はパイ中間子の質量とは独立であるため、低エネルギー定数に再定義することができる。このため、K 中間子の閉じたループは理論から除去することが可能であり、外線がパイ中間子から成る寄与は、第 3.2.3 節で議論された通常のパイ中間子のみのカイラル摂動論と全く同じ形 $L_\pi = L_{ChPT}$ と書くことができる (同様の議論はバリオンについてのカイラル摂動論にも見られる [127])。以下では、K 中間子の 2 点関数の計算のため in,out

状態ともに K 中間子の 1 粒子状態の場合を考える。K 中間子だけから成る閉じたループが理論から除去できることを考慮すると、この場合には式 (3.7.3)の最初の 2 項のみを取り扱うだけで良い。

この他の場合として、パイ中間子と K 中間子の両方から成るループの寄与も考えることは可能であり、これにより Power Counting が壊される可能性がある。Power Counting を壊す伝搬関数 $\left(p^2 - M_K\right)^2$ を導く K 中間子の運動項は

$$S_K^{\mathrm{kin}} = \int d^4x \left(\partial_\mu K^\dagger \partial^\mu K - M^2 K^\dagger K\right), \tag{3.7.4}$$

と書くことができる。この時、HBChPT [123] と同様に以下のようにして場 k を定義する。

$$K(x) = e^{iM_k v\cdot x} k(x), \tag{3.7.5}$$

ここで、v_μ は 4 次元速度と呼ばれる量であり、v^2 を満たすベクトルである。式 (3.7.5)を式 (3.7.4)に代入することで、

$$S_K^{\mathrm{kin}} = \int d^4x \left(-2iMv^\mu k^\dagger \partial_\mu k + \partial_\mu k^\dagger \partial^\mu k\right), \tag{3.7.6}$$

と書き直すことができる。この時、伝搬関数は $(-2M_k v\cdot p)^{-1}$ であり、k にかかる微分は $i\partial_\mu \sim \left(\sqrt{M_k^2 + |\vec{p}|}^2 - M_k, \vec{p}\right)$ と見なすことが出来ることから、$O(p^2)$ の頂点と考えることができる。HBChPT [123] の時と同様にして、k に対する微分は微小量と見なせるので、k とパイ中間子の場 u を用いて、Lagrangian を構成し、非相対論的な計算を行うことにより適切な Power Counting を持つ理論を構成していくことができる。この時、Lorentz 対称性により、係数の間に適当な関係を成り立たせる。それに対して [53] は非相対論的な k と u を用いて $O(p^4)$ までの Lagrangian を構成した後、同値の異なる計算方法をとった。[53] では、k と u から成る非相対論的な Lagrangian を基礎においた上で、式 (3.7.5)を用いることにより、Lorentz 不変な Lagrangian を構成している (異なった関連する方法として parameterization invariance を基にした Lagrangian の構成は [128] において行われた)。この時、振幅の計算は K 中間子のループ積分を除いては完全に Lorentz 不変に行われる。K 中間子のループ積分を含む場合には K 中間子質量の逆数 $\frac{1}{M_k}$ に関する展開を行う。例えば、ループ積分として

$$J_{\pi K}\left(p_1, p_2\right) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{i}{k^2 - M_\pi^2} \frac{1}{(p_1 - p_2 - k)^2 - M_k^2} \tag{3.7.7}$$

を考える。この式は Lorentz 不変なので、外部運動量 p_2 を $p_2 = M_k v = M_k(1,0,0,0)$ を満たすように自由にとることができる。この時、上記の積分は

$$J_{\pi K}\left(p_1, p_2\right) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{i}{k^2 - M_\pi^2} \left(-\frac{1}{2v\cdot(p_1 - k)} \frac{1}{M_k} - \frac{(p_1 - k)^2}{4\left(v\cdot(p_1 - k)\right)^2} \frac{1}{M_k^2} + \cdots\right) \tag{3.7.8}$$

と $\frac{1}{M_k}$ で展開することができる。この式から式 (3.7.6)と同様に第 1 項が新しい伝搬関数、第 2 項以降を適当なカイラル次元を持った頂点と見なすことが出来る。以上により、L_{HKChPT} から導かれる振幅を通常の $\frac{p}{4\pi F_0}$ に関する展開と同時に $\frac{p}{M_k}$ の展開と見なすことができる。以上の議論から K 中間子の伝搬関数を $O(p^3)$ と見なすことにより、HKChPT のカイラル次元は通常のカイラル摂動論におけるカイラル次元式 (3.3.2) から以下のように変更される。

$$D = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(2n-2)N_{2n}^{\pi\pi} + \sum_{m=1}^{\infty} N_m^{\pi K}(m-1) + 2N_L. \tag{3.7.9}$$

ここで、$N_{2n}^{\pi\pi}$ は $O(p^{2n})$ のパイ中間子の頂点の個数、$N_n^{\pi K}$ は $O(p^n)$ の K 中間子とパイ中間子からなる頂点の個数、N_K はループの個数を意味する。カイラル次元勘定により、通常のカイラル摂動

論の時と同様に少数のダイアグラムを計算することにより適当な精度の振幅を計算できることがわかる。

次に、Lagrangian の構成を考える。$O(p^4)$ までの Lagrangian を考えるとすると、

$$L_{\text{HKChPT}} = L_\pi^{(2)} + L_\pi^{(4)} + L_{\pi KK}^{(1)} + L_{\pi KK}^{(2)} + L_{\pi KK}^{(3)} + L_{\pi KK}^{(4)} \tag{3.7.10}$$

と書くことができる。ここで、これまでの議論から、$L_\pi^{(2)}$ 及び $L_\pi^{(4)}$ は、第 3.2.3 節で構成した通常のパイ中間子の Lagrangian である。K 中間子部分の Lagrangian の構成要素としては通常のカイラル摂動論の場合表 5 に加え、非相対論的な場 $k(x)$ 及び速度ベクトル v_μ を使った量を定義する。パリティー変換の下で $K(x) \xrightarrow{P} -K(x)$ と変換し、荷電変換の下で、$K(x) \xrightarrow{C} K^\dagger(x)$ と変換することを考慮すると $k(x), v$ の変換則は、

$$\begin{aligned} k(x) &\xrightarrow{P} -k(x), & v_\mu &\xrightarrow{P} v^\mu, \\ k(x) &\xrightarrow{C} k^\dagger(x), & v_\mu &\xrightarrow{C} -v^\mu, \end{aligned} \tag{3.7.11}$$

と割り当てられることがわかる。k のカイラルオーダーは $O(1)$ が割り当てられ、その微分 $\partial^n k$ は $O(p^n)$ が割り当てられる。Lagrangian の構成要素を

$$\begin{aligned} k_{\pm,\mu} &\equiv i\left((D_\mu k)k^\dagger \pm k\,(D_\mu k)^\dagger\right)\,, \\ k_{(\mu\nu)} &\equiv D_{(\mu}kD_{\nu)}k^\dagger \\ &= \frac{1}{2}\left(D_\mu k D_\nu k^\dagger + D_\nu k D_\mu k^\dagger\right) \\ k_{[\mu\nu]} &\equiv D_{[\mu}kD_{\nu]}k^\dagger \\ &= \frac{1}{2}\left(D_\mu k D_\nu k^\dagger - D_\nu k D_\mu k^\dagger\right)\,, \\ k_{\pm,\mu\nu} &\equiv (D_{\mu\nu}k)\,k^\dagger \pm k\,(D_{\mu\nu}k)^\dagger\,, \quad D_{\mu\nu} \equiv D_\mu D_\nu + D_\nu D_\mu\,, \\ \Delta_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}\left(D_\mu \Delta_\nu + D_\nu \Delta_\mu\right). \end{aligned} \tag{3.7.12}$$

としたときそれぞれの C, P の下での変換性及びカイラルオーダーは表 8にまとめた。これらを用

	P	C	Order
$kk^\dagger$	$kk^\dagger$	$\left(kk^\dagger\right)^t$	$O(1)$
$k_{\pm,\mu}$	$k_\pm^\mu$	$\pm\left(k_{\pm,\mu}\right)^t$	$O(p)$
$k_{(\mu\nu]}$	$k^{(\mu\nu]}$	$\pm\left(k_{(\mu\nu]}\right)^t$	$O(p^2)$
$k_{\pm,\mu\nu}$	$k_\pm^{\mu\nu}$	$\pm\left(k_{\pm,\mu\nu}\right)^t$	$O(p^2)$
$\Delta_{\mu\nu}$	$-\Delta^{\mu\nu}$	$\left(\Delta_{\mu\nu}\right)^t$	$O(p^2)$

表 8:　式 (3.7.12)で定義される量に対して、カイラルオーダー $O(p^2)$ までの Lagrangian の構成要素に関してパリティ変換、荷電変換の下での変化、及びカイラル次元を書いた表。以上の量は $SU(2)_L \times SU(2)_R$ の下で $A \to hAh^\dagger$ と変換する。

いた C,P 不変な Lagrangian は [53] において構成された；

$$O(p^0): \quad \mathrm{tr}(kk^\dagger), \tag{3.7.13}$$

$$O(p^1): \quad v_\mu\,\mathrm{tr}(kk_-^\mu), \tag{3.7.14}$$

$$\begin{aligned} O(p^2): \quad & \overbrace{\mathrm{tr}\left(k_{+,\mu}^\mu\right)}^{(*)}, \\ & \mathrm{tr}\left(\Delta_\mu\Delta^\mu\right)k^\dagger k, v^\mu v^\nu\,\mathrm{tr}\left(\Delta_\mu\Delta_\nu\right)k^\dagger, \\ & \mathrm{tr}\left(\chi_+ kk^\dagger\right), \mathrm{tr}\left(\chi_+\right)k^\dagger k \end{aligned} \tag{3.7.15}$$

$$\begin{aligned} O(p^3): \quad & \overbrace{v^\mu\,\mathrm{tr}\left(\Delta_\mu\Delta_\nu\right)\mathrm{tr}\left(k_-^\nu\right)}^{(*)}, \\ & \overbrace{v^\mu\,\mathrm{tr}\left([\Delta_{\mu\nu},\Delta^\nu]kk^\dagger\right)}^{(*)}, v^\mu v^\nu v^\rho\,\mathrm{tr}\left([\Delta_{\mu\nu},\Delta_\rho]kk^\dagger\right), \\ & v^\mu\,\mathrm{tr}\left([\chi_-,\Delta_\mu]kk^\dagger\right) \end{aligned} \tag{3.7.16}$$

$$\begin{aligned} O(p^4): \quad & \overbrace{\mathrm{tr}\left(\Delta_\mu\Delta_\nu\right)\mathrm{tr}\left(k_+^{\mu\nu}\right)}^{(*)}, \\ & \overbrace{\mathrm{tr}\left([\Delta_{\mu\nu},\Delta^\nu]k_-^\mu\right)}^{(*)}, \overbrace{v^\mu v^\nu\,\mathrm{tr}\left(\Delta_{\mu\nu}\Delta_\rho\right)\mathrm{tr}\left(k_+^\rho\right)}^{(*)}, \overbrace{\mathrm{tr}\left([\chi_-,\Delta_\mu]k_-^\mu\right)}^{(*)}, \\ & \overbrace{v^\mu v^\nu\,\mathrm{tr}\left(\chi_-\Delta_{\mu\nu}\right)k^\dagger k}^{(*)}, \\ & \mathrm{tr}\left(\Delta_{\mu\nu}\Delta^\nu\right)\mathrm{tr}\left(k_+^\mu\right), v^\mu v^\nu\,\mathrm{tr}\left(\Delta_{\mu\rho}\Delta_\nu\right)\mathrm{tr}\left(k_+^\rho\right), \\ & v^\mu v^\nu v^\rho v^\sigma\,\mathrm{tr}\left(\Delta_{\mu\nu}\Delta_{\rho\sigma}\right)k^\dagger k, \\ & \mathrm{tr}\left(\chi_+ k_{+\mu}^\mu\right), \mathrm{tr}\left(\chi_+\right)\mathrm{tr}\left(k_{+\mu}^\mu\right), \mathrm{tr}\left(\chi_-\Delta_\mu\right)\mathrm{tr}\left(k_+^\mu\right), \\ & \mathrm{tr}\left(\Delta_\mu\Delta^\mu\right)\mathrm{tr}\left(\chi_+ kk^\dagger\right), \mathrm{tr}\left(\Delta_\mu\Delta^\mu\right)\mathrm{tr}\left(\chi_+\right)k^\dagger k, \\ & v^\mu v^\nu\,\mathrm{tr}\left(\Delta_\mu\Delta_\nu\right)\mathrm{tr}\left(\chi_+ kk^\dagger\right), v^\mu v^\nu\,\mathrm{tr}\left(\Delta_\mu\Delta_\nu\right)\mathrm{tr}\left(\chi_+\right)k^\dagger k, \\ & v^\mu v^\nu\,\mathrm{tr}\left(\left\{\left\{\Delta_\mu,\Delta_\nu\right\},\chi_+\right\}kk^\dagger\right) \\ & \mathrm{tr}\left(\chi_+\right)k^\dagger\chi_+ k, \mathrm{tr}\left(\chi_+^2\right)k^\dagger k, \mathrm{tr}\left(\chi_+\right)^2 k^\dagger k, \mathrm{tr}\left(\chi_-^2\right)k^\dagger k \end{aligned} \tag{3.7.17}$$

ここで、$SU(2)$ の Cayley-Hamilton の定理式 (C.9)及び $O(p)$ の運動方程式項 $v^\mu D_\mu k$ やパイ中間子の運動方程式である式 (3.2.45)を用いて項の数を減らしている。Roessl は、以上を基に相対論的な Lagrangian を式 (3.7.5)から相対論的な Lagrangian を構成した [53]。非相対論的な Lagrangian の項と相対論的な Lagrangian の項は 1 対 1 対応しているわけではなく、$(*)$ の印をつけた項は、相対論的な Lagrangian では、より低い次数または同じ次数の Lagrangian の 1 部となっている。低エネルギー定数を A_i, B_i, C_i、K 中間子の最低次における質量を $M_{K,0}$ と表すと、相対論的な HKChPT

の Lagrangian は以下のように書ける；

$$
\begin{aligned}
L^{(1)}_{\pi KK} &= D_\mu K^\dagger D^\mu K - M_K^2 K^\dagger K \ , && (3.7.18)\\
L^{(2)}_{\pi KK} &= A_1 \operatorname{tr}\bigl(\Delta_\mu \Delta^\mu\bigr) K^\dagger K + A_2 \operatorname{tr}\bigl(\Delta^\mu \Delta^\nu\bigr) D_\mu K^\dagger D_\nu K \\
&\quad + A_3 K^\dagger \chi_+ K + A_4 \operatorname{tr}\bigl(\chi_+\bigr) K^\dagger K \ , && (3.7.19)\\
L^{(3)}_{\pi KK} &= B_1 \left(K^\dagger \bigl[\Delta^{\nu\mu},\, \Delta_\nu\bigr] D_\mu K - D_\mu K^\dagger \bigl[\Delta^{\nu\mu},\, \Delta_\nu\bigr] K\right) \\
&\quad + B_2 \operatorname{tr}\left(\Delta^{\mu\nu}\Delta^\rho\right) \left(D_{\mu\nu} K^\dagger D_\rho K + D_\rho K^\dagger D_{\mu\nu} K\right) \\
&\quad + B_3 \left(K^\dagger \bigl[\Delta_\mu,\, \chi_-\bigr] D^\mu K - D_\mu K^\dagger \bigl[\Delta^\mu,\, \chi_-\bigr] K\right) \ , && (3.7.20)\\
L^{(4)}_{\pi KK} &= C_1 \operatorname{tr}\left(\Delta_\nu \Delta^{\mu\nu}\right) \left(K^\dagger D_\mu K + D_\mu K^\dagger K\right) \\
&\quad + C_2 \operatorname{tr}\left(\Delta^{\mu\rho}\Delta^\nu\right) \left(D_{\mu\nu} K^\dagger D_\rho K + D_\rho K^\dagger D_{\mu\nu} K\right) \\
&\quad + C_3 \left(\operatorname{tr}\bigl(\Delta^{\mu\nu}\Delta^\rho\bigr)\bigl(D_{\mu\nu} K^\dagger D_\rho K + D_\rho K^\dagger D_{\mu\nu} K\bigr)\right. \\
&\qquad\quad \left. -2\bigl(D^{\mu\nu} K^\dagger \Delta_\mu \Delta_{\nu\rho} D^\rho K + D^\rho K^\dagger \Delta_{\nu\rho} \Delta_\mu D^{\mu\nu} K\bigr)\right) \\
&\quad + C_4 \operatorname{tr}\left(\Delta^{\mu\nu}\Delta^{\rho\sigma}\right) \left(D_{\mu\nu} K^\dagger D_{\rho\sigma} K + D_{\rho\sigma} K^\dagger D_{\mu\nu} K\right) \\
&\quad + C_5 \left(D_\mu K^\dagger \chi_+ D^\mu K - M_K^2 K^\dagger \chi_+ K\right) \\
&\quad + C_6 \left(\operatorname{tr}\bigl(\chi_+\bigr) D_\mu K^\dagger D^\mu K - M_K^2 \operatorname{tr}\bigl(\chi_+\bigr) K^\dagger K\right) \\
&\quad + C_7 \operatorname{tr}\left(\Delta_\mu \chi_-\right) \left(K^\dagger D^\mu K + D^\mu K^\dagger K\right) \\
&\quad + C_8 \operatorname{tr}\left(\Delta_\mu \Delta^\mu\right) K^\dagger \chi_+ K + C_9 \operatorname{tr}\left(\Delta_\mu \Delta^\mu\right) \operatorname{tr}\left(\chi_+\right) K^\dagger K \\
&\quad + C_{10} \operatorname{tr}\left(\Delta^\mu \Delta^\nu\right) \left(D_\mu K^\dagger \chi_+ D_\nu K + D_\nu K^\dagger \chi_+ D_\mu K\right) \\
&\quad + C_{11} \operatorname{tr}\left(\Delta^\mu \Delta^\nu\right) \operatorname{tr}\left(\chi_+\right) \left(D_\mu K^\dagger D_\nu K + D_\nu K^\dagger D_\mu K\right) \\
&\quad + C_{12} D_\mu K^\dagger \Bigl\{\bigl\{\Delta^\mu,\, \Delta^\nu\bigr\},\, \chi_+\Bigr\} D_\nu K + C_{13} \operatorname{tr}\left(\chi_+\right) K^\dagger \chi_+ K + \\
&\quad C_{14} \operatorname{tr}\left(\chi_+^2\right) K^\dagger K + C_{15} \left(\operatorname{tr}\bigl(\chi_+\bigr)\right)^2 K^\dagger K + C_{16} \operatorname{tr}\left(\chi_-^2\right) K^\dagger K \ . && (3.7.21)
\end{aligned}
$$

ここで、Power Counting から、発散を吸収する役割をするのは、B_i、C_i のみであり、A_i は単なる定数である。以上の定式化を用いた K 中間子の質量、崩壊定数の計算は [53] で、π-K の σ 項の計算は [129]、$\Delta S = 2$ の weak 演算子の計算は [39] で行われている。PQQCD への拡張は [39] において場 K を

$$
K = \begin{pmatrix} K_V^\dagger \\ K_V^0 \\ K^\dagger \\ K^0 \\ \tilde{K}_V^\dagger \\ \tilde{K}_V^0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} u_V \bar{s}_V \\ d_V \bar{s}_V \\ u_S \bar{s}_V \\ d_S \bar{s}_V \\ \tilde{u}_V \bar{s}_V \\ \tilde{d}_V \bar{s}_V \end{pmatrix} . \tag{3.7.22}
$$

と拡張することにより行われている。K 中間子の閉じたループは現れないため、理論のシークォークやゴーストクォークのストレンジクォークへの拡張は必要では無い。この時低エネルギー定数は、ストレンジシークォークの質量に暗に依っていることになる。

3.7.2 電磁相互作用

次に今の重い K 中間子の理論に第 3.5 節と同様に電磁相互作用を導入することを考える。SU(2) の PQChPT では、電荷行列は

$$\mathcal{Q} = \mathrm{diag}\left(q_{uV}\,,\, q_{dV}\,,\, q_{uS}\,,\, q_{dS}\,,\, q_{uV}\,,\, q_{dV}\right)\,, \tag{3.7.23}$$

この節においても、第 3.5 節と同様に $O(e^2)$ までの寄与を考える。バレンスストレンジクォーク電荷 $Q_{s,V}$ やシーストレンジクォーク電荷 $Q_{s,S}$ の依存性も明示的に書いていく。最初に非相対論的な K 中間子の場 k 及び第 3.5 節で与えられた $\mathcal{Q}_L$ 及び $\mathcal{Q}_R$ を用いることにより $O(e^2)$ の Lagrangian を構成していく。$\mathcal{Q}_L$ 及び $\mathcal{Q}_\mathcal{R}$ を用いた $O(e^2)$ の Lagrangian の構成要素及びその C, P の下での変換性を表 9に示した。

O	definition	order	P	C
$\langle\mathcal{Q}\rangle\ \mathcal{Q}_\pm$	$\langle\mathcal{Q}\rangle\left(\mathcal{Q}_R \pm \mathcal{Q}_L\right)$	$O(e^2)$	$\pm\langle\mathcal{Q}\rangle\,\mathcal{Q}_\pm$	$\pm\langle\mathcal{Q}\rangle\left(\mathcal{Q}_\pm\right)^T$
$\mathcal{Q}^2_{(\pm)}$	$\left(\mathcal{Q}_R\right)^2 \pm \left(\mathcal{Q}_L\right)^2$	$O(e^2)$	$\pm\mathcal{Q}^2_{(\pm)}$	$\pm\left(\mathcal{Q}^2_{(\pm)}\right)^T$
$\mathcal{Q}_{RL,\,\pm}$	$\mathcal{Q}_R\mathcal{Q}_L \pm \mathcal{Q}_L\mathcal{Q}_R$	$O(e^2)$	$\pm\mathcal{Q}_{RL,\,\pm}$	$\left(\mathcal{Q}_{RL,\,\pm}\right)^T$

表 9: カイラル次元 $O(e^2)$ の演算子及びその変換性を示した表。これらの量はカイラル変換に対して $A \to hAh^\dagger$ と変換する。

	order	P	C
$k_\pm^{W,\,\mathcal{Q}_+}$	$O(e^2)$	$k_\pm^{W,\,\mathcal{Q}_+}$	$\pm\left(k_\pm^{W,\,\mathcal{Q}_+}\right)^T$
$k_\pm^{W,\,\mathcal{Q}_-}$	$O(e^2)$	$-k_\pm^{W,\,\mathcal{Q}_-}$	$\mp\left(k_\pm^{W,\,\mathcal{Q}_-}\right)^T$

表 10: 式 (3.7.24)に定義される量に対するカイラル次元及び C,P 変換性を示した表。これらの量はカイラル変換に対して $A \to hAh^\dagger$ と変換する。

次に、k 及び $\mathcal{Q}_L, \mathcal{Q}_R$ を用いて $O(e^2)$ の Lagrangian の構成要素を次のように定義する。

$$k_\pm^{W,\,\mathcal{Q}_\pm} \equiv W\left(kk^\dagger\mathcal{Q}_\pm \pm \mathcal{Q}_\pm kk^\dagger\right)\,. \tag{3.7.24}$$

ここで、W はストレンジクォークの電荷 $Q_{s,V}$ 又は $Q_{s,S}$ を表している。QED の振幅が、$e \to -e$ の入れ替えに対して不変であることを反映して、有効理論に於いて $O(e)$ や $O(ep^2)$ の項は禁止している。式 (3.7.24)の C, P 変換則を表 10に示す。

以上の構成要素を用いると $O(e^2)$ の C, P 不変な量は以下の 13 種類の演算子である。

$$\left\langle kk^\dagger\mathcal{A}\right\rangle\,,\quad W\left\langle kk^\dagger\mathcal{B}\right\rangle\,,\quad W_1W_2\left\langle kk^\dagger\right\rangle\,, \tag{3.7.25}$$

ここで、W は $Q_{s,\,V}$ 又は $Q_{s,\,S}$ であり、$\mathcal{A}, \mathcal{B}, W_1, W_2$ は

$$\begin{gathered}\mathcal{A} \in \left\{\mathcal{Q}^2_{(+)}\,,\, \mathcal{Q}_{RL,\,+}\,,\, \langle\mathcal{Q}\rangle\,\mathcal{Q}_+\,,\, \left\langle\mathcal{Q}^2\right\rangle\,,\, \left\langle\mathcal{Q}_{RL,\,+}\right\rangle\,,\, \left(\langle\mathcal{Q}\rangle\right)^2\right\}\,,\\ \mathcal{B} \in \left\{\mathcal{Q}_+,\, \langle\mathcal{Q}\rangle\right\}\,,\\ \left(W_1,\, W_2\right) \in \left\{\left(Q_{s,\,V}\,,\, Q_{s,\,V}\right),\, \left(Q_{s,\,V}\,,\, Q_{s,\,S}\right),\, \left(Q_{s,\,S}\,,\, Q_{s,\,S}\right)\right\}\,.\end{gathered} \tag{3.7.26}$$

と定義される。

ここから、関係式である式 (3.7.5)を用いることにより、相対論的な $O(e^2)$ の Lagrangian が得られる。新しい低エネルギー定数を $A_K^{(i)}$ と定義すると Lagrangian は

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{K,\,e^2} =& - A_K^{(1,\,1)}\, K^\dagger \left((\mathcal{Q}_R)^2 + (\mathcal{Q}_L)^2 \right) K \\
& - A_K^{(1,\,2)}\, \mathrm{str} \left((\mathcal{Q}_R)^2 + (\mathcal{Q}_L)^2 \right) K^\dagger K \\
& - A_K^{(2,\,1)}\, K^\dagger \left(\mathcal{Q}_R \mathcal{Q}_L + \mathcal{Q}_L \mathcal{Q}_R \right) K - A_K^{(2,\,2)}\, \mathrm{str} \left(\mathcal{Q}_R \mathcal{Q}_L + \mathcal{Q}_L \mathcal{Q}_R \right) K^\dagger K \\
& - A_K^{(3)}\, \mathrm{str}\left(\mathcal{Q} \right) K^\dagger \left(\mathcal{Q}_R + \mathcal{Q}_L \right) K - A_K^{(4)}\, \mathrm{str}\left(\mathcal{Q} \right)^2 K^\dagger K \\
& - A_K^{(s,\,1)}\, Q_{s,\,V}^2\, K^\dagger K - A_K^{(s,\,1,\,2)}\, Q_{s,\,S}^2\, K^\dagger K - A_K^{(s,\,1,\,3)}\, Q_{s,\,V}\, Q_{s,\,S}\, K^\dagger K \\
& - A_K^{(s,\,2)}\, Q_{s,\,V} K^\dagger \left(\mathcal{Q}_R + \mathcal{Q}_L \right) K \\
& - A_K^{(s,\,3)}\, \mathrm{str}\left(\mathcal{Q} \right) Q_{s,\,V}\, K^\dagger K - A_K^{(s,\,3,\,2)}\, \mathrm{str}\left(\mathcal{Q} \right)\, Q_{s,\,S}\, K^\dagger K \\
& - A_K^{(s,\,3,\,3)}\, Q_{s,\,S}\, K^\dagger \left(Q_R + Q_L \right) K\,.
\end{aligned}
\tag{3.7.27}
$$

と書かれる。次に $O(e^2 p)$ の Lagrangian を考える。$O(e^2 p)$ の Lagrangian は、今の場合には式 (3.7.26)における $kk^\dagger$ を置き換えることにより全ての可能な項を得ることができる。これらの項による K 中間子の質量への寄与は、ツリーレベルでは無く、また、スカラー QED タイプのループの $O(e^2 p^2)$ に対しても 0 である。その一方で、QCD の場合 [53] と同様に、波動関数繰り込みにより K 中間子の質量に $O(e^2 p^2)$ の寄与を与える可能性もある。このことに関しては後ほど議論する。

	P	C
$k^{W,\,\mathcal{Q}_\pm}_{(\mu\nu]_{(1)},\,\pm_{(2)}}$	$k^{W,\,\mathcal{Q}_\pm,\,(\mu\nu]_{(1)}}_{\pm_{(2)}}\,(\tilde{x})$	$\left(\pm_{(1)}1\right)\left(\pm_{(2)}1\right)\left(\pm 1\right)\left(k^{W,\,\mathcal{Q}_\pm}_{(\mu\nu]_{(1)},\,\pm_{(2)}}\right)^T$
$k^{W,\,Q_+}_{\pm_{(1)},\,\pm_{(2)},\,\mu\nu}$	$k^{W,\,Q_+,\,\mu\nu}_{\pm_{(1)},\,\pm_{(2)}}$	$\left(\pm_{(1)}1\right)\left(\pm_{(2)}1\right)\left(k^{W,\,Q_+}_{\pm_{(1)},\,\pm_{(2)},\,\mu\nu}\right)^T$
$k^{W,\,Q_-}_{\pm_{(1)},\,\pm_{(2)},\,\mu\nu}$	$k^{W,\,Q_-,\,\mu\nu}_{\pm_{(1)},\,\pm_{(2)}}$	$-\left(\pm_{(1)}1\right)\left(\pm_{(2)}1\right)\left(k^{W,\,Q_-}_{\pm_{(1)},\,\pm_{(2)},\,\mu\nu}\right)^T$
$k^{W,\,\nabla_\nu Q_+}_{\pm_{(1)},\,\pm_{(2)},\,\mu}$	$k^{W,\,\nabla^\nu Q_+,\,\mu}_{\pm_{(1)},\,\pm_{(2)}}$	$\left(\pm_{(1)}1\right)\left(\pm_{(2)}1\right)\left(k^{W,\,\nabla_\nu Q_+}_{\pm_{(1)},\,\pm_{(2)},\,\mu}\right)^T$
$k^{W,\,\nabla_\nu Q_-}_{\pm_{(1)},\,\pm_{(2)},\,\mu}$	$k^{W,\,\nabla^\nu Q_-,\,\mu}_{\pm_{(1)},\,\pm_{(2)}}$	$-\left(\pm_{(1)}1\right)\left(\pm_{(2)}1\right)\left(k^{W,\,\nabla_\nu Q_-}_{\pm_{(1)},\,\pm_{(2)},\,\mu}\right)^T$
$k^{W,\,\nabla_{\mu\nu} Q_\pm}$	$k^{W,\,\nabla^{\mu\nu} Q_\pm}$	$\pm\left(k^{W,\,\nabla_{\mu\nu} Q_\pm}\right)^T$

表 11: 式 (3.7.28)で定義される量の P 及び C 変換の下では変換性を示した表。全ての量はカイラル次元 $O(e^2 p^2)$ であり、カイラル変換の下での変換性は $A \to hAh^\dagger$ である。

次に $O(e^2 p^2)$ の項の中でツリーレベルで K 中間子の質量への寄与を与える項を挙げていく。新たに Lagrangian の構成要素として

$$
\begin{aligned}
k^{W,\,\mathcal{Q}_\pm}_{(\mu\nu],\,\pm} &\equiv W\left(k_{(\mu\nu]}\mathcal{Q}_\pm \pm \mathcal{Q}_\pm k_{(\mu\nu]}\right)\,, \\
k^{W,\,\mathcal{Q}_\pm}_{\pm_{(1)},\,\pm_{(2)},\,\mu\nu} &\equiv W\left(k_{\pm_{(1)},\,\mu\nu}\mathcal{Q}_\pm \pm_{(2)} \mathcal{Q}_\pm k_{\pm_{(1)},\,\mu\nu}\right)\,, \\
k^{W,\,\nabla_\nu \mathcal{Q}_\pm}_{\pm_{(1)},\,\pm_{(2)},\,\mu} &\equiv W\left(k_{\pm_{(1)},\,\mu}\nabla_\nu \mathcal{Q}_\pm \pm_{(2)} \left(\nabla_\nu \mathcal{Q}_\pm\right) k_{\pm_{(1)},\,\mu}\right)\,, \\
k^{W,\,\nabla_{\mu\nu} \mathcal{Q}_\pm}_{\pm} &\equiv W\left(kk^\dagger\, \nabla_{\mu\nu} \mathcal{Q}_\pm \pm \left(\nabla_{\mu\nu} \mathcal{Q}_\pm\right) kk^\dagger\right)\,.
\end{aligned}
\tag{3.7.28}
$$

を定義する。これらの量の C, P の基における変換則は表 11にまとめた。この時、微分を含まない

$O(e^2p^2)$ の項は以下のものである。

$$
\begin{gathered}
\left\langle kk^\dagger \left\{\chi_+, \mathcal{C}_+\right\}\right\rangle , \quad \left\langle kk^\dagger \mathcal{Q}_+\chi_+\mathcal{Q}_+\right\rangle , \quad \left\langle kk^\dagger \mathcal{Q}_-\chi_+\mathcal{Q}_-\right\rangle , \\
\left\langle kk^\dagger \left[\chi_-, \mathcal{C}_-\right]\right\rangle , \quad \left\langle kk^\dagger \left\{\chi_- , \mathcal{Q}_{RL,-}\right\}\right\rangle , \\
\left\langle kk^\dagger \left(\mathcal{Q}_+\chi_-\mathcal{Q}_- - \mathcal{Q}_-\chi_-\mathcal{Q}_+\right)\right\rangle , \\
k^\dagger k \left\langle \chi_+\mathcal{C}_+\right\rangle , \quad \left\langle kk^\dagger\mathcal{C}_+\right\rangle \left\langle \chi_+\right\rangle , \quad \left\langle kk^\dagger\chi_+\right\rangle \left\langle \mathcal{C}_+\right\rangle , \quad k^\dagger k \left\langle \chi_+\right\rangle \left\langle \mathcal{C}_+\right\rangle , \\
\left\langle kk^\dagger \mathcal{Q}_+\right\rangle \left\langle \chi_+\mathcal{Q}_+\right\rangle , \quad \left\langle kk^\dagger \mathcal{Q}_-\right\rangle \left\langle \chi_+\mathcal{Q}_-\right\rangle , \\
\left\langle kk^\dagger \mathcal{Q}_{RL,-}\right\rangle \left\langle \chi_-\right\rangle , \quad k^\dagger k \left\langle \chi_-\mathcal{Q}_{RL,-}\right\rangle , \\
W\left\langle kk^\dagger \left\{\chi_+, \mathcal{Q}_+\right\}\right\rangle , \quad W\left\langle kk^\dagger \left[\chi_-, \mathcal{Q}_-\right]\right\rangle , \\
Wk^\dagger k \left\langle \chi_+\mathcal{Q}_+\right\rangle , \quad W\left\langle kk^\dagger\chi_+\right\rangle \left\langle \mathcal{Q}\right\rangle , \quad W\left\langle kk^\dagger\mathcal{Q}_+\right\rangle \left\langle \chi_+\right\rangle , \\
Wk^\dagger k \left\langle \chi_+\right\rangle \left\langle \mathcal{Q}\right\rangle , \\
W_1W_2\left\langle kk^\dagger\chi_+\right\rangle , \quad W_1W_2\, k^\dagger k \left\langle \chi_+\right\rangle , \qquad (3.7.29)
\end{gathered}
$$

ここで、$\mathcal{C}_+$ 及び $\mathcal{C}_-$ は

$$
\mathcal{C}_+ \in \left\{\left\langle \mathcal{Q}\right\rangle \mathcal{Q}_+ ,\ \mathcal{Q}_{(+)}^2 ,\ \mathcal{Q}_{RL,+}\right\} , \quad \mathcal{C}_- \in \left\{\left\langle \mathcal{Q}\right\rangle \mathcal{Q}_- ,\ \mathcal{Q}_{(-)}^2\right\} . \qquad (3.7.30)
$$

と定義される。ツリーレベルで K 中間子の質量に寄与する 2 つの微分を含む $O(e^2p^2)$ の項は以下のように与えられる。

$$
\begin{gathered}
\left\langle \eta^{\mu\nu}k_{(\mu\nu)}\mathcal{A}\right\rangle , \quad \left\langle \eta^{\mu\nu}k_{+,\,\mu\nu}\mathcal{A}\right\rangle , \\
W\left\langle \eta^{\mu\nu}\, k_{(\mu\nu)}\, \mathcal{B}\right\rangle , \quad W\left\langle \eta^{\mu\nu}\, k_{-,\,\mu\nu}\, \mathcal{Q}_-\right\rangle , \quad W\left\langle \eta^{\mu\nu}\, k_{+,\,\mu\nu}\, \mathcal{B}\right\rangle , \\
W_1W_2\left\langle \eta^{\mu\nu}k_{(\mu\nu)}\right\rangle , \quad W_1W_2\left\langle \eta^{\mu\nu}k_{+,\,\mu\nu}\right\rangle , \qquad (3.7.31)
\end{gathered}
$$

ここで $\eta^{\mu\nu}$ は、Minkowski 計量である。

次に、以上において定義された Lagrangian を用いて計算される K 中間子の質量の表式を示す。$O(e^2)$ の Lagrangian のツリーレベルによる $O(e^2)$ の寄与 $(M_{K^+}^{e^2})^2$ は、$\mathcal{Q}$ に式 (3.7.23)、$Q_{s,\,V} = q_{sV}$,$Q_{s,\,S} = q_{sS}$ を代入することで得られる。

$$
\begin{aligned}
(M_{K^+}^{e^2})^2 = 2(&(A_K^{(1,1)} + A_K^{(2,1)})q_{uV}^2 + (2A_K^{(1,2)} + 2A_K^{(2,2)} + A_K^{(4)})(q_{uS}^2 + q_{dS}^2) \\
&+ 2A_K^{(3)}(q_{uS} + q_{dS})q_{uV} \\
&+ A_K^{(s,1)}q_{sV}^2 + A_K^{(s,1,2)}q_{sS}^2 + A_K^{(s,1,3)}q_{sV}q_{sS} \\
&+ 2A_K^{(s,2)}q_{uV}q_{sV} \\
&+ A_K^{(s,3)}(q_{uS} + q_{dS})q_{sV} + A_K^{(s,3,2)}(q_{uS} + q_{dS})q_{sS} \\
&+ 2A_K^{(s,3,3)}q_{uV}\, q_{sS}.
\end{aligned} \qquad (3.7.32)
$$

となる。クエンチの場合 $q_{uS} = q_{dS} = q_{sS} = 0$ では、

$$
(M_{K^+}^{e^2})^2 \quad = \quad 2e^2(A_K^{(1,1)} + A_K^{(2,1)})q_{uV}^2 + e^2A_K^{(s,1)}q_{sV}^2 + 2e^2A_K^{(s,2)}q_{uV}q_{sV} . \qquad (3.7.33)
$$

となる。

中性 K 中間子に対する $O(e^2)$ の寄与 $(M_{K^0}^{e^2})^2$ は、式 (3.7.32)の q_{dV} を q_{uV} に置き換えることで得られる。

次にループダイアグラムからの寄与を考える。スカラー QED タイプのダイアグラムの寄与は、軽いメソンの質量を含まないため K 中間子の $O(e^2)$ や $O(e^2p)$ の再定義により処理することができる。このため、ループによる寄与は、タッドポール型のダイアグラムによる寄与に限られることになる。式 (3.7.27)により生成されるループの寄与を計算した結果は

$$\begin{aligned}
(M_{K,i}^{\log})^2 = &-\frac{1}{16\pi^2}\frac{A_K^{(1,1)}}{F_0^2}\sum_{n:\mathrm{sea}}\left(q_{iV}^2-q_{nS}^2\right)\chi_{in}\ln\left(\frac{\chi_{in}}{\mu^2}\right)\\
&-\frac{1}{16\pi^2}\frac{A_K^{(2,1)}}{F_0^2}\sum_{n:\mathrm{sea}}\left\{2q_{iV}\left(q_{iV}-q_{nS}\right)+\left(q_{iV}-q_{nS}\right)^2\right\}\chi_{in}\ln\left(\frac{\chi_{in}}{\mu^2}\right)\\
&-\frac{1}{16\pi^2}\frac{2\,A_K^{(2,2)}}{F_0^2}\sum_{n,\,m:\mathrm{sea},\,n\neq m}\left(q_{nS}-q_{mS}\right)^2\chi_{mn}\ln\left(\frac{\chi_{mn}}{\mu^2}\right)\\
&-\frac{1}{16\pi^2}\frac{A_K^{(3)}\,N_S\,\overline{Q}+A_K^{(s,2)}\,q_{sV}+A_K^{(s,3,3)}\,q_{sS}}{F_0^2}\\
&\qquad\times\sum_{n:\mathrm{sea}}\left(q_{iV}-q_{nS}\right)\chi_{in}\ln\left(\frac{\chi_{in}}{\mu^2}\right),
\end{aligned}\tag{3.7.34}$$

である。ここで、バレンスクォークの種類 $i=u$ 又は d であり、μ は繰り込みスケールである。今回の数値計算では、シークォークの電荷は 0 とし、また、軽いシークォークの質量に関して $m_{uS}=m_{dS}$ としていることを考慮すると

$$\begin{aligned}
(M_{K,i}^{\log})^2 = &-2\,\frac{1}{16\pi^2}\,\frac{1}{F_0^2}\\
&\times\left\{q_{iV}^2\left(A_K^{(1,1)}+3\,A_K^{(2,1)}\right)+q_{iV}q_{sV}\,A_K^{(s,2)}\right\}\chi_{i(S)}\ln\left(\frac{\chi_{i(S)}}{\mu^2}\right).
\end{aligned}\tag{3.7.35}$$

ここで $\chi_{i(S)}\equiv B_0\left(m_i+m_{(S)}\right)$ と定義されている。

次に有限体積効果による寄与を考える。スカラー QED のダイアグラムによる有限体積効果の寄与は、擬スカラーメソンと同様の計算を繰り返すことにより

$$\begin{aligned}
\Delta\left(M_{K^+}\right)^2\Big|_{\mathrm{EM,\,photonic}}(L) \;=\; (q_K)^2&\left\{-3\,\frac{\kappa}{4\pi}\,\frac{1}{L^2}+\frac{1}{(4\pi)^2}\frac{\mathcal{K}(m_KL)}{L^2}\right.\\
&\left.\quad-4\,\frac{1}{(4\pi)^2}\,\frac{m_K}{L}\,\mathcal{H}(m_KL)\right\},
\end{aligned}\tag{3.7.36}$$

と得ることができる。ここで有限体積の関数は以下のように定義されている。

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(x) &= \pi\int_0^\infty\frac{d\lambda}{\lambda^{\frac{3}{2}}}\mathrm{erf}\left(x\sqrt{\frac{\lambda}{4\pi}}\right)\mathcal{S}(\lambda),\\
\mathcal{K}(x) &= 4\pi\int_0^\infty\frac{d\lambda}{\lambda}\,\frac{1}{\lambda}\left(1-e^{-\frac{x^2}{4\pi}\lambda}\right)\mathcal{S}(\lambda),\\
\kappa &= \int_0^\infty\frac{d\lambda}{\lambda^2}\,\mathcal{S}(\lambda).
\end{aligned}\tag{3.7.37}$$

式 (3.7.34)に対する有限体積補正 $\Delta\left(M_{K,i}^{\log}\right)^2(L)$ は式中の log の項を以下のように置き換えることにより得られる。

$$m^2\ln\left(\frac{m^2}{\mu^2}\right)\;\Rightarrow\;\frac{\mathcal{M}(mL)}{L^2},\tag{3.7.38}$$

ここで $\mathcal{M}(x)$ は

$$\mathcal{M}\left(x\right)=4\pi\int_0^\infty\frac{d\lambda}{\lambda^2}\exp\left(-\frac{x^2}{4\pi}\lambda\right)\mathcal{T}\left(\lambda\right), \tag{3.7.39}$$

と定義されている。この他 $O(e^2p)$ の項によって計算される $O(e^2)$ の波動関数繰り込みに対する有限体積補正により、QCD の場合 [53] と同様に K 中間子の質量に対する $O(e^2p^2)$ の項が生じる可能性がある。$O(e^2)$ の波動関数繰り込みの項は、実際の計算により 0 になることを確かめた。

次に $O(e^2p^2)$ の Lagrangian によるツリーレベルの寄与を考える。$O(e^2p^2)$ の Lagrangian には非常に多くの項が現れる一方で、クォーク質量を決定するためにの K 中間子質量の電荷及びクォーク質量を知るという目的には、全ての低エネルギー定数を書き下す必要は無く、どのようなクォーク質量と電荷の組み合わせが現れるのかを知るだけで良い。特に今回の数値計算では、シークォークの電荷が 0、軽いシークォークは縮退しているという状況で計算しており、この時、式 (3.7.29)から以下のように全ての可能な組み合わせが出現することがわかる。

$$\begin{aligned}\left(M^{e^2p^2}_{K,i}\right) &= e^2\, m_{iV}\left(x^{(K)}_3\left(q_{iV}+q_{sV}\right)^2+x^{(K)}_4\left(q_{iV}-q_{sV}\right)^2+x^{(K)}_5\left(q^2_{iV}-q^2_{sV}\right)\right)\\ &\quad +e^2\, m_{(S)}\left(x^{(K)}_6\left(q_{iV}+q_{sV}\right)^2+x^{(K)}_7\left(q_{iV}-q_{sV}\right)^2+x^{(K)}_8\left(q^2_{iV}-q^2_{sV}\right)\right).\end{aligned} \tag{3.7.40}$$

ここで、$x^{(K)}_i$ は、$O(e^2p^2)$ の低エネルギー定数の適当な組み合わせである。ここで、m_{iV} と $m_{(S)}$ をそれぞれ m_1,$m_4=m_5$ と記した。

3.8 SU(3) カイラル摂動論によるフィット関数

この小節では、電磁相互作用を含んだカイラル摂動論の式をまとめる。この節で挙げる式が実際に格子計算のデータをフィットするために用いた式である。今回のフィットでは通常のカイラル摂動論の式、有限体積効果を含んだ式を両方フィットすることにより有限体積効果の大きさを見積もるため、両方の式を提示する。

電磁相互作用を含んだ SU(3)PQ カイラル摂動論における擬スカラーメソンの式は、[116] の中で O(e^2p^2) までの精度で

$$\begin{aligned}M^2_{ij} &= \chi_{ij}+2ZF_0^2q^2_{ij}\\ &\quad+\frac{48L^r_6-24L^r_4}{F_0^2}\chi_{ij}\bar{\chi}+\frac{16L^r_8-8L^r_5}{F_0^2}\chi^2_{ij}\\ &\quad-12Y_1\overline{Q^2}\chi_{ij}+4Y_2\left(q^2_i\chi_i+q^2_j\chi_j\right)+4Y_3q^2_{ij}\chi_{ij}-4Y_4q_iq_j\chi_{ij}+12Y_5q^2_{ij}\overline{\chi}\\ &\quad+\frac{1}{3}\frac{\chi_{ij}}{16\pi^2F_0^2}\left(\sum_{\substack{m,n=\{\pi,\eta\}\\ m\neq n}}R^m_{nij}\chi_m\log\left(\frac{\chi_m}{\mu^2}\right)+\sum_{\substack{p,q=\{i,j\}\\ i\neq j}}R^p_{q\pi\eta}\chi_p\log\left(\frac{\chi_p}{\mu^2}\right)\right)\\ &\quad-2Z\sum_{x=4,5,6}\frac{1}{16\pi^2}\chi_{ix}\log\left(\frac{\chi_{ix}}{\mu^2}\right)q_{ix}q_{ij}-2Z\sum_{x=4,5,6}\frac{1}{16\pi^2}\chi_{jx}\log\left(\frac{\chi_{jx}}{\mu^2}\right)q_{jx}q_{ji}\\ &\quad-\frac{q^2_{ij}}{16\pi^2}\chi_{ij}\left\{3\,\log\left(\frac{\chi_{ij}}{\mu^2}\right)-4\right\}\\ &\quad+\delta_{m_{\rm res}}(q^2_i+q^2_j).\end{aligned} \tag{3.8.1}$$

と計算されている。この式は、バレンスクォークが縮退していない場合 ($m_i\neq m_j$) であり、i,j はバレンスクォークのインデクス、4,5,6 のインデックスはシークォークを表している。また、[116]

と同様に $\chi_i = 2B_0 m_i$,$\chi_{ij} = \frac{\chi_i+\chi_j}{2}$ はクォーク質量を m_i と書いた時の LO のメソン質量であり、q_{ij},$\overline{Q^2}$,$\overline{\chi}$,χ_π,χ_η 及び R^i_{jkl} は以下のように定義されている。

$$\begin{aligned}
q_{ij} &= q_i - q_j, \\
\overline{Q^2} &= \frac{q_4^2 + q_5^2 + q_6^2}{3}, \\
\overline{\chi} &= \frac{\chi_4 + \chi_5 + \chi_6}{3}, \\
\chi_\pi + \chi_\eta &= 2\overline{\chi}, \\
\chi_\pi \chi_\eta &= \frac{\chi_4\chi_5 + \chi_5\chi_6 + \chi_6\chi_4}{3}, \\
R^i_{jkl} &= \frac{(\chi_i - \chi_4)(\chi_i - \chi_5)(\chi_i - \chi_6)}{(\chi_i - \chi_k)(\chi_i - \chi_l)(\chi_i - \chi_m)}.
\end{aligned} \tag{3.8.2}$$

最後の $\delta_{m\mathrm{res}}$ を含む項は前節で説明した電磁相互作用による residual quark 質量をパラメトライズした量である。この量と前節で議論した C_2 との関係は、実際のフィット結果を用いて議論する。ここで、B_0、F_0 は QCD の LO の低エネルギー定数、Z は QED 効果による LO の低エネルギー定数、また、L_4^r、L_5^r、L_6^r、L_8^r は QCD 効果による NLO の低エネルギー定数であり、$Y_1 \sim Y_5$ の 5 つの定数は QED 効果による NLO の低エネルギー定数である。これらのうち、B_0、F_0、L_4^r、L_5^r、L_6^r、L_8^r の QCD に関する低エネルギー定数に対しては RBC/UKQCD により既に得られている jackknife sample を用いることになる。

今回のフィットで決める定数は Z 及び $Y's$ であり、そのために用いる格子データはメソン質量自身では無く、以下で定義されるメソンの電磁質量差が有用である。

$$\Delta M_{ij}^2 = M_{ij}^2 - M_{ij}^2\,|_{e=0} \tag{3.8.3}$$

ここで、$M_{ij}^2\,|_{e=0}$ は式 (3.8.1)においてすべての電荷を 0 においたものとして定義される。また、今回の格子計算では電磁相互作用はクエンチ近似で導入しているため、Y_1 の項は 0 になる。結果として、今回フィットを行う質量差の式に対するカイラル摂動論の式は $O(e^2p^2)$ で

$$\begin{aligned}
\Delta M_{ij}^2 =& 2ZF_0^2 q_{ij}^2 + 4Y_2\left(q_i^2\chi_i + q_j^2\chi_j\right) + 4Y_3 q_{ij}^2\chi_{ij} - 4Y_4 q_i q_j \chi_{ij} + 12 Y_5 q_{ij}^2 \overline{\chi} \\
&- 2Z \sum_{x=4,5,6} \frac{1}{16\pi^2}\chi_{ix}\log\left(\frac{\chi_{ix}}{\mu^2}\right) q_{ix} q_{ij} - 2Z \sum_{x=4,5,6} \frac{1}{16\pi^2}\chi_{jx}\log\left(\frac{\chi_{jx}}{\mu^2}\right) q_{jx} q_{ji} \\
&- \frac{q_{ij}^2}{16\pi^2}\chi_{ij}\left\{3\log\left(\frac{\chi_{ij}}{\mu^2}\right) - 4\right\} \\
&+ \delta_{m_{\mathrm{res}}}(q_i^2 + q_j^2).
\end{aligned} \tag{3.8.4}$$

と与えられる。

次に有限体積効果に関して考える。電磁質量差 ΔM^2 に関しては、QCD の有限体積効果は現れず、電磁相互作用に対する有限体積効果のみを考えればよい。電磁相互作用に対する有限体積効果は [104] の中で計算されており、その式は以下のように与えられる。

$$\begin{aligned}
\delta(\Delta M^2) &= \Delta M^2(L) - \Delta M^2(\infty) \\
&= -2Z\frac{1}{16\pi^2}\sum_{x=4,5,6}\left(q_{ij}q_{ix}\frac{\mathcal{M}(\sqrt{\chi_{ix}}L)}{L^2} + q_{ji}q_{jx}\frac{\mathcal{M}(\sqrt{\chi_{jx}}L)}{L^2}\right) \\
&\quad - 3\frac{q_{ij}^2}{4\pi}\frac{\kappa}{L^2} + \frac{q_{ij}^2}{(4\pi)^2}\left\{\frac{\mathcal{K}\left(\sqrt{\chi_{ij}}\,L\right)}{L^2} - 4\sqrt{\chi_{ij}}\,\frac{\mathcal{H}(\sqrt{\chi}_{ij}\,L)}{L}\right\}.
\end{aligned} \tag{3.8.5}$$

式中に現れる関数は [104] により、以下のように定義されている。

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M}\left(x\right) &= 4\pi\int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^2}\exp\left(-\frac{x^2}{4\pi}\lambda\right)\mathcal{T}\left(\lambda\right),\\
\mathcal{H}(x) &= \pi\int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^{\frac{3}{2}}}\mathrm{erf}\left(x\sqrt{\frac{\lambda}{4\pi}}\right)\mathcal{S}(\lambda),\\
\mathcal{K}(x) &= 4\pi\int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda}\frac{1}{\lambda}\left(1-e^{-\frac{x^2}{4\pi}\lambda}\right)\mathcal{S}(\lambda),\\
\kappa &= \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^2}\mathcal{S}(\lambda).
\end{aligned}
\tag{3.8.6}
$$

また、この中で使われる関数は

$$
\begin{aligned}
\mathcal{T}\left(\lambda\right) &= \left(\theta\left(0,\frac{i}{\lambda}\right)\right)-1,\\
\theta\left(v,\tau\right) &= \sum_{-\infty}^{\infty}\exp\left(\pi\tau i n^2+2\pi v i n\right),\\
\mathcal{S}(\lambda) &= -\left\{\left(\vartheta_3\left(0,i\frac{1}{\lambda}\right)\right)^3-1-\lambda^{\frac{3}{2}}\right\},\\
\mathrm{erf}(x) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x ds\, e^{-s^2}
\end{aligned}
\tag{3.8.7}
$$

の反応

3.9 SU(2) カイラル摂動論によるフィット関数

以上の小節により SU(3) のカイラル摂動論を示したが、近年の RBC/UKQCD による QCD 格子計算では、SU(3) のカイラル摂動論はクォーク質量をストレンジクォーク程度に置いた場合には収束性がよくないという結果が得られており、パイ中間子のみを擬 NG 粒子と見なした SU(2)+K 中間子のカイラル摂動論による解析を行っている [39]。今回のフィットでは、メソンの電磁相互作用による質量差についても同様に SU(3) のカイラル摂動論では収束性が悪いことを第 4.2 節において示す。この小節では、フィットで用いる電磁相互作用を含んだパイ中間子、K 中間子質量及びその有限体積効果の式をまとめる。なお、今回の目的はメソンの電磁質量差をフィットすることにより、メソンの質量差の電磁相互作用による大きさを把握し、アップクォークとダウンクォークの質量差を正確に出すことであり、$O(p^4)$ の項は相殺するので今回の K 中間子の式には含んでいない。

3.9.1 SU(2) パイ中間子

電磁相互作用を含んだ PQ カイラル摂動論におけるパイ中間子の質量公式は [104] で与えられており、その表式は

$$
\begin{aligned}
M_{ij}^2 &= \chi_{ij} + 2Z^{(2)} F^2 q_{ij}^2 \\
&+ \frac{32L_6^{(2)^r} - 16L_4^{(2)^r}}{F^2}\chi_{ij}\overline{\chi_2} + \frac{16L_8^{(2)^r} - 8L_5^{(2)^r}}{F^2}\chi_{ij}^2\overline{\chi_2} \\
&- 12x_0\,\overline{Q_2^2}\chi_{ij} + \delta_{m_{\rm res}}(q_i^2+q_j^2) \\
&+ 2x_3\,\left(q_i+q_j^2\right)\chi_{ij} + 2x_4\,q_{ij}^2\chi_{ij} + x_5\,\left(q_i^2-q_j^2\right)(\chi_i-\chi_j) + 2x_6\,q_{ij}^2\overline{\chi_2} \\
&+ \frac{1}{2}\,\frac{\chi_{ij}}{16\pi^2F^2}\left(R_{13}^{\pi}\,\chi_\pi\,\log\left(\frac{\chi_\pi}{\mu^2}\right) + R_{\pi 3}^{1}\,\chi_1\,\log\left(\frac{\chi_1}{\mu^2}\right) + R_{\pi 1}^{3}\,\chi_3\,\log\left(\frac{\chi_3}{\mu^2}\right)\right) \\
&- 2Z\sum_{x=4,5}\frac{1}{16\pi^2}\chi_{ix}\log\left(\frac{\chi_{ix}}{\mu^2}\right)q_{ix}q_{ij} - 2Z\sum_{x=4,5}\frac{1}{16\pi^2}\chi_{jx}\log\left(\frac{\chi_{jx}}{\mu^2}\right)q_{jx}q_{ji} \\
&- \frac{q_{ij}^2}{16\pi^2}\,\chi_{ij}\left\{3\,\log\left(\frac{\chi_{ij}}{\mu^2}\right) - 4\right\}.
\end{aligned}
\tag{3.9.1}
$$

である。ここで、F、B,$L_4^{(2)^r}$,$L_5^{(2)^r}$,$L_6^{(2)^r}$,$L_8^{(2)^r}$ は SU(3) の時と同様の形の項の係数として定義されている低エネルギー定数である。Z 及び x_i は今回のフィットから決定する。これらの低エネルギー定数は原理的には、ストレンジシークォークの質量、電荷に対する依存性を持っているが、今回の計算では 1 点のストレンジシークォークのみでの計算を行っており、その依存性は計算からは決定できない。この効果による誤差の評価は第 4 節において行う。

SU(3) の時と同様にフィットにはクエンチ近似で導入された電磁相互作用によるメソンの質量差式 (3.8.3)に対して行われ、対応するカイラル摂動論の表式は

$$
\begin{aligned}
\Delta M_{ij}^2 &= 2Z^{(2)}F^2 q_{ij}^2 + \delta_{m_{\rm res}}(q_i^2+q_j^2) \\
&+ 2x_3\,\left(q_i+q_j\right)^2\chi_{ij} + 2x_4\,q_{ij}^2\chi_{ij} + x_5\,\left(q_i^2-q_j^2\right)(\chi_i-\chi_j) + 2x_6\,q_{ij}^2\overline{\chi_2} \\
&- 2Z\sum_{x=4,5}\frac{1}{16\pi^2}\chi_{ix}\log\left(\frac{\chi_{ix}}{\mu^2}\right)q_{ix}q_{ij} - 2Z\sum_{x=4,5}\frac{1}{16\pi^2}\chi_{jx}\log\left(\frac{\chi_{jx}}{\mu^2}\right)q_{jx}q_{ji} \\
&- \frac{q_{ij}^2}{16\pi^2}\,\chi_{ij}\left\{3\,\log\left(\frac{\chi_{ij}}{\mu^2}\right) - 4\right\}.
\end{aligned}
\tag{3.9.2}
$$

ここで、有限体積補正の式は [104] により

$$
\begin{aligned}
\delta(\Delta M^2) &= \Delta M^2\,(L) - \Delta M^2(\infty) \\
&= -2Z\frac{1}{16\pi^2}\sum_{x=4,5}\left(q_{ij}q_{ix}\frac{\mathcal{M}(\sqrt{\chi_{ix}}L)}{L^2} + q_{ji}q_{jx}\frac{\mathcal{M}(\sqrt{\chi_{jx}}L)}{L^2}\right) \\
&- 3\frac{q_{ij}^2}{4\pi}\,\frac{\kappa}{L^2} + \frac{q_{ij}^2}{(4\pi)^2}\left\{\frac{\mathcal{K}\left(\sqrt{\chi_{ij}}\,L\right)}{L^2} - 4\sqrt{\chi_{ij}}\,\frac{\mathcal{H}(\sqrt{\chi}_{ij}\,L)}{L}\right\}.
\end{aligned}
\tag{3.9.3}
$$

と与えられている。

3.9.2 SU(2) K 中間子

SU(2)+重い K 中間子のカイラル摂動論 (HKChPT) は、バリオンに対するカイラル摂動論と同様の手法を用いて [53] により導入され、[39] により PQ の理論への拡張が行われた。電磁相互作用

を含んだ場合の K 中間子の質量への拡張は第 3.7 節において説明した。[39] の QCD における K 中間子の質量の公式に第 3.7 節に示した QED 補正の項のクエンチ近似の場合の項を加えることにより、電磁相互作用をクエンチ近似で導入した場合の K 中間子に対する質量公式は以下の式により与えられる。

$$
\begin{aligned}
M^2_{Kij} &= M_0^2 - 4B(A_3 m_i + A_4(m_4 + m_5)) \\
&+ \left(2\left(A_K^{(1,1)} + A_K^{(2,1)}\right) q_i^2 + A_K^{(s,1,1)} q_j^2 + 2A_K^{(s,2)} q_i q_j\right) \\
&- \frac{1}{(4\pi)^2 F^2}\left((A_K^{(1,1)} + 3A_K^{(2,1)}) q_i^2 + A_K^{(s,2)} q_i q_j\right) \sum_{x=4,5} \chi_{ix} \log \frac{\chi_{ix}}{\mu^2} \\
&+ m_1 \left(x_3^{(K)} (q_i + q_j)^2 + x_4^{(K)} (q_i - q_j)^2 + x_5^{(K)} (q_i^2 - q_j^2)\right) \\
&+ \frac{m_4 + m_5}{2} \left(x_6^{(K)} (q_i + q_j)^2 + x_7^{(K)} (q_i - q_j)^2 + x_8^{(K)} (q_i^2 - q_j^2)\right) \\
&+ \delta_{m_{\mathrm{res}}} (q_i^2 + q_j^2),
\end{aligned}
\tag{3.9.4}
$$

ここで、M、A_3、A_4、B は RBC/UKQCD により決定されている QCD の低エネルギー定数である。電磁相互作用による Residual quark mass $\delta_{m_{\mathrm{res}}}$ はパイ中間子に現れるものと同じであることを仮定している。

K 中間子に対する式 (3.8.3)で表される電磁相互作用による質量差の表式は

$$
\begin{aligned}
\Delta M^2_{Kij} &= \left(2\left(A_K^{(1,1)} + A_K^{(2,1)}\right) q_i^2 + A_K^{(s,1,1)} q_j^2 + 2A_K^{(s,2)} q_i q_j\right) \\
&- \frac{1}{(4\pi)^2 F^2}\left((A_K^{(1,1)} + 3A_K^{(2,1)}) q_i^2 + A_K^{(s,2)} q_i q_j\right) \sum_{x=4,5} \chi_{ix} \log \frac{\chi_{ix}}{\mu^2} \\
&+ m_1 \left(x_3^{(K)} (q_i + q_j)^2 + x_4^{(K)} (q_i - q_j)^2 + x_5^{(K)} (q_i^2 - q_j^2)\right) \\
&+ \frac{m_4 + m_5}{2} \left(x_6^{(K)} (q_i + q_j)^2 + x_7^{(K)} (q_i - q_j)^2 + x_8^{(K)} (q_i^2 - q_j^2)\right) \\
&+ \delta_{m_{\mathrm{res}}} (q_i^2 + q_j^2),
\end{aligned}
\tag{3.9.5}
$$

であり、また、この量に対する有限体積効果は

$$
\begin{aligned}
\delta\left(\Delta M^2_{Kij}\right) = &-\frac{1}{(4\pi)^2 F^2}\left((A_K^{(1,1)} + 3\,A_K^{(2,1)}) q_i^2 + A_K^{(s,2)} q_i q_j\right)\left(\sum_{x=4,5} \frac{\mathcal{M}(\sqrt{\chi_{ix}} L)}{L^2}\right) \\
&+ (q_i - q_j)^2 \left\{-3\,\frac{\kappa}{4\pi}\,\frac{1}{L^2} + \frac{1}{(4\pi)^2}\,\frac{\mathcal{K}(M_0 L)}{L^2} - 4\,\frac{1}{(4\pi)^2}\,\frac{M_0}{L}\,\mathcal{H}(M_0 L)\right\}
\end{aligned}
\tag{3.9.6}
$$

で表される。

以上により導入された K 中間子に対する低エネルギー定数は全て、シー及びバレンスのストレンジクォーク質量によっている。これらのストレンジクォーク質量依存性は、カイラル摂動論の観点からは決定できない。そこで計算に用いたストレンジクォーク質量が現実のストレンジクォークに充分近い場合には、以下のようにして K 中間子の質量をストレンジクォーク質量に対する線形

に近似できるということを利用する。

$$
\begin{aligned}
& M_K^2\left(m_i, q_i, m_j, q_j\right) \\
& = M_K^2\left(m_i, q_i, m_{\mathrm{str}}, q_j\right) + \left.\frac{\partial M_K^2\left(m_i, q_i, m_j, q_j\right)}{\partial m_j}\right|_{m_j=m_{\mathrm{str}}}\left(m_j - m_{\mathrm{str}}\right) + \cdots \\
& = \left(M_K^2\left(m_i, q_i, m_{\mathrm{str}}, q_j\right) - \left.\frac{\partial M_K^2\left(m_i, q_i, m_j, q_j\right)}{\partial m_j}\right|_{m_j=m_{\mathrm{str}}} m_{\mathrm{str}}\right) \\
& \qquad\qquad + \left.\frac{\partial M_K^2\left(m_i, q_i, m_j, q_j\right)}{\partial m_j}\right|_{m_j=m_{\mathrm{str}}} m_j + \cdots \\
& \equiv A + B\, m_j + \cdots
\end{aligned} \tag{3.9.7}
$$

ここで、m_{str} は現実のストレンジクォーク質量であり、また、$M_K\left(m_i, q_i, m_j, q_j\right)$ は、質量 m_i、電荷 q_i の軽いクォーク、質量 m_j、電荷 q_j を持つ反クォークから成る K 中間子の質量である。

4 結果

この節では、以上の格子理論及びカイラル摂動論のセットアップから求められるクォーク質量及びアイソスピンに関連する様々な物理量を提示する。最終的な結果は、全て $L = 24$ の配位から求めたものであり、$L = 16$ の配位は有限体積効果の符号と大きさを確かめるために用いる。

まず初めに、格子計算をフィットすることにより得られたカイラル摂動論の低エネルギー定数 (LEC) の値を提示する。次に得られた LEC を用いて計算されたクォーク質量及びその系統誤差に関して議論する。その後、得られたクォーク質量及び LEC から求められるメソンのアイソスピンの破れに関する諸量を計算する。最後に、求められたクォーク質量を用いて中性子-陽子間質量差を議論する。

なお、この節で現れる無次元量の質量は、格子間隔の逆数 $a^{-1} = 1.784(44)$ GeV でスケールした格子上における裸の質量である。

4.1 メソン質量差の計算

格子計算においては、電磁相互作用の寄与によるメソン質量差式 (3.8.3)を計算している。メソンの質量差を生成する際には各配位毎に [44, 130] と同様にして $\pm e$ トリックを用いた。$\pm e$ トリックは $e \to -e$ と電荷を変えても自己エネルギー (Self-Energy) は不変であることを利用し、ゲージ場 A_μ に対して $-A_\mu$ の配位上との相関関数の平均をとることにより $O(e)$ の誤差を取り除き、統計誤差の収束を早くするという方法である。実際に $\pm e$ 平均を用いた場合の統計誤差の大きさを示した図を、図 6に示した。図では、縦軸に $\pm e$ 平均を取る前と後の統計誤差の比を各クォーク質量、電荷でとったものを示した。つまり、この図では縦軸の値が大きくなるほど $\pm e$ 平均をとったときの統計誤差は小さくなることを表している。多くの質量、電荷に於いて、統計誤差の大きさは、単純に 2 回の計算を行った場合の $\sqrt{2}$ に比較してはるかに小さくなっている。

メソンの質量差は、時間方向に周期的境界条件を課した、ウォールソースとポイントシンクで得られた相関関数を次式で表される最低エネルギー状態の伝搬を仮定する関数をフィットすることにより得られる。

$$
C_{\mathrm{fit}}(t - t_{\mathrm{src}}) = A\left[\exp\left(-M(t - t_{\mathrm{src}} + N_t)\%N_t\right) + \exp\left(-M\left(N_t - (t + t_{\mathrm{src}})\right)\%N_t\right)\right] \tag{4.1.1}
$$

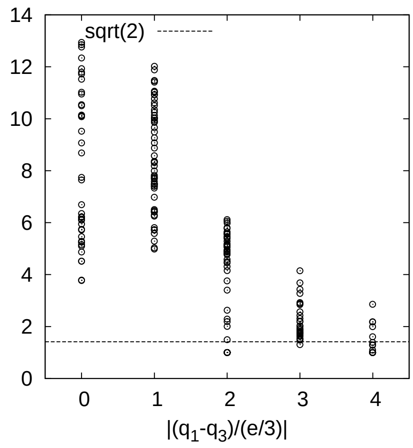


図 6: $\pm e$ 平均をとったときの統計誤差の大きさの変化。($\pm e$ 平均を取る前のメソン質量)/($\pm e$ 平均をとった後のメソン質量) を縦軸にプロットしている。図中の各点は様々なクォーク質量、電荷に対応している。電荷のうち、特に $|(q_i - q_j)/3|$ という組み合わせを横軸にとった。図の下の方にある点線は、単純に 2 回測定を行った場合の誤差 (2 乗和) である $\sqrt{2}$ に対応する線である。この線からと比較した場合の大きさが、$\pm e$ 平均の手法の良さを示すことになる。

ここで M は最低エネルギー状態の質量であり、また、演算子 % は剰余を表す。統計誤差を少なくするために、いくつかの配位に関しては、1 つの配位で 2ヶ所以上の相関関数の計算を行っている。フィット方法は相関関数のジャックナイフサンプルを用いた通常の χ^2 法である。既に行われている QCD のジャックナイフサンプルと合わせて誤差を評価するため、フィットでは非相関フィットを行った。また、実際にフィットを行う際には、相関関数がソースから考えて時間方向に対して中心の点で、対称になっていることを考慮して、得られたデータをその点を中心に折り畳むという操作を行い、$N_t/2$ より小さい t に関してフィットを行った。このフィットにより得られたメソンの有効質量を図にしたものが図 7である。図 7などの結果をもとに今回の計算では $9 \leq t \leq N_t/2$ のデータの平均値から得たメソンの質量を用いることとする。

最後に、電磁相互作用による residual quark 質量のメソン質量への寄与を考える。$\bar{d}d$ メソンに対して、電磁相互作用による質量差の計算を行い、その結果の外挿を行った図が図 8である。図のフィットでは、電気的に中性なメソンには NLO までのカイラル摂動論で log の項が現れず線形な関数で掛けることを利用して、線形フィットを行っている [46]。図 8からわかるように、電磁相互作用によるメソンの質量差はドメインウォール QCD のカイラル極限 $m_f = m_{\mathrm{res}}^{\mathrm{QCD}}$ においても明らかに 0 からずれている。このずれを、第 2.12 節による電磁相互作用による residual quark 質量 $2C_2q_d^2$ によるクォーク質量への影響と比較する。クォーク質量のメソン質量への影響は、カイラル摂動論の最低次数の項を用いて $2B_0C_2q_d^2$ 又は $2BC_2q_d^2$ であることが予想できる (B_0 又は B の違いはカイラル摂動論として SU(3) を用いるか SU(2) を用いるかの選び方による)。$2B_0C_2q_d^2$ の値をそれぞれの場合に関して計算した結果が図 8中の左側にある赤の点である。図からわかるように residual qaurk 質量から予想される値と実際にデータの外挿から得られた値は非常に良く一致している。このことから、メソンの質量に対して前節までに書いたフィット関数のようにカイラル摂動論に $\delta_{\mathrm{mres}}(q_i^2 + q_i^2)$ という形の項を登場させることで、電磁相互作用の residual quark 質量への影響を非常に良くパラメトライズすることが出来るということがわかる。

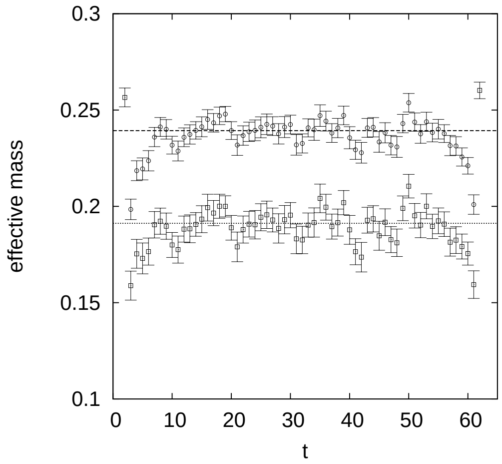
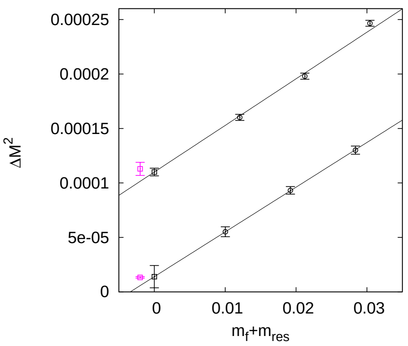


図 7: メソンの有効質量の時間変数依存性を描いた図。上側の点が $L = 24$、軽いシークォーク質量 $m_{\mathrm{sea}} = 0.005$、バレンスクォーク質量 $m_i = m_j = 0.01$、電荷 $q_i = 1/3$、$q_j = 0$ としたもの、下側の点が $L = 24$、軽いシークォーク質量 $m_{\mathrm{sea}} = 0.005$、バレンスクォーク質量 $m_i = m_j = 0.005$、電荷 $q_i = 1/3$、$q_j = -1/3$ としたものである。また、点線は点から得られたフィット結果を表している。



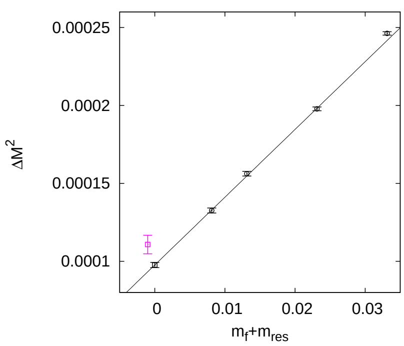


図 8: 空間方向の長さ $L = 16$ における $\bar{d}d$ メソンの ΔM^2(左図) 及び $L = 24$ における $\bar{d}d$ メソンの ΔM^2(右図)。左図では、上側の点が 5 次元方向の長さ $L_s = 16$ で計算された点であり、下側の点が $L_s = 32$ で計算された点である。カイラル極限 $m_f = -m_{\mathrm{res}}^{\mathrm{QCD}}$ おける値は $L_s = 16$ に対しては 0.01 $\sim$ 0.02、$L_s = 32$ に対しては 0.01 $\sim$ 0.03 の質量を使って求めた値である。左側に存在する赤点は $B_0 C_2(q_i^2 + q_j^2)$ により求められており、その誤差のほとんどは B_0 の誤差による。左図から、明らかに L_s が増えることにより、$m_{\mathrm{res}}^{\mathrm{EM}}$ への影響が少なくなることがわかる。また、左図と右図の比較により、体積による $m_{\mathrm{res}}^{\mathrm{EM}}$ の影響はほとんど存在しないことがわかる。

4.2 低エネルギー定数

クォーク質量の決定のためには、まず格子計算から得られたメソンの電磁質量差 ΔM^2 のデータをカイラル摂動論によりフィットし低エネルギー定数の値の決定を行う。ここで、QCD のみから決定できる低エネルギー定数は RBC/UKQCD により決められたジャックナイフサンプルを用いる。このジャックナイフサンプルの平均値及び誤差は表 12にまとめられている。

	SU(3) inf.v	SU(2) inf.v
$10^0 B_0$	2.15(11)	2.348(44)
$10^2 F_0$	3.43(19)	4.55(10)
$10^6(2L_6 - L_4)$	−2.6(29.6)	2.9(45.3)
$10^4(2L_8 - L_5)$	5.42(29)	4.36(31)
$10^5 L_4$	1.7(5.5)	2.48(89)
$10^4 L_5$	2.02(63)	5.49(47)
$10^3 m_{\mathrm{res}}$	3.131(27)	3.131(27)
a^{-1}(GeV)	1.784(44)	1.784(44)

表 12: 24^3 の格子に関して RBC/UKQCD により、QCD の低エネルギー定数の表。これらの値は、それぞれ、SU(3) 及び SU(2) の無限体積のカイラル摂動論を用いることにより決められた。この表の値は [39] の値と比べてより多くの配位を用いて計算されたものである。カイラル摂動論の繰り込みスケールは $\Lambda_\chi = 1$ GeV にとられている。1 行目の記号は SU(3) の低エネルギー定数の記法でかかれているが、3 行目の SU(2) の時にも対応する低エネルギー定数の値を書いている。表中で示す誤差は統計誤差のみである。

4.2.1 SU(3) カイラル摂動論における低エネルギー定数の決定

今回の格子計算では m_i 及び m_j に関して、0.03 までの値での格子計算を行った。このうち、m_i、m_j が 0.01 を越える点をカイラル摂動論のフィット範囲に入れると途端に χ^2 の大きさが大きくなった。そのため、今回は m_i、m_j 及び m_{sea} が全て $0.001 \sim 0.01$ のデータ点を用いてフィットを行った。これはメソン質量に換算しておよそ $250 \sim 420$ MeV 以下の点に対するフィットを行うことに対応する。この時電磁質量差のデータ点の個数は 52 個である。フィットにより得られた低エネルギー定数の値の表が表 13である。表 13では、無限体積及び有限体積の SU(3) カイラル摂動論 (それぞれ式 (3.8.4) 及び式 (3.8.5)) に対してフィットを行った結果得られた低エネルギー定数の値を示している。χ^2/dof の値は無限体積フィット、有限体積でのフィットでともにおよそ 2 程度である。2 種類のフィットにより得られた値で最も大きく異なっている量は、電磁相互作用の最低次の項の係数 Z の値である。無限体積フィットによる結果では、Z の大きさが 0 と無矛盾な結果が得られたのに対して、無限体積フィットでは Z の値が有意に 0 からずれ、中心値に関しては無限体積のフィットにより得られた値と比較して約 5 倍の大きさになっている。

次に SU(3) カイラル摂動論の摂動展開の収束性の問題に関して考える。摂動展開が成り立つためには、LO の項が、NLO の項に比較して大きい必要がある。LO の項 $\Delta M^2\big|_{\mathrm{LO}}$ 及び NLO の項

	inf.v.	f.v.
Z	$1.63(1.50) \times 10^{-1}$	$6.48(1.59) \times 10^{-1}$
Y_2	$1.63(10) \times 10^{-2}$	$1.47(9) \times 10^{-2}$
Y_3	$-1.20(7) \times 10^{-2}$	$-5.86(65) \times 10^{-3}$
Y_4	$1.34(17) \times 10^{-2}$	$1.03(17) \times 10^{-2}$
Y_5	$2.05(74) \times 10^{-3}$	$1.53(69) \times 10^{-3}$
δm_{res}	$5.36(10) \times 10^{-3}$	$5.36(10) \times 10^{-3}$
χ^2/dof	2.08(81)	1.88(81)

表 13: SU(3) カイラル摂動論の低エネルギー定数の値を示した表。カイラル摂動論のスケール $\Lambda_\chi = 1\mathrm{GeV}$ であり、フィットに用いたクォーク質量の範囲は $m_i, m_j \leq 0.01$ である。inf.v. の列は無限体積のカイラル摂動論式 (3.8.4)をフィット関数として得られた結果であり、f.v. の列は有限体積のカイラル摂動論式 (3.8.5)をフィット関数として得られた結果である。表中で示す誤差は統計誤差のみである。

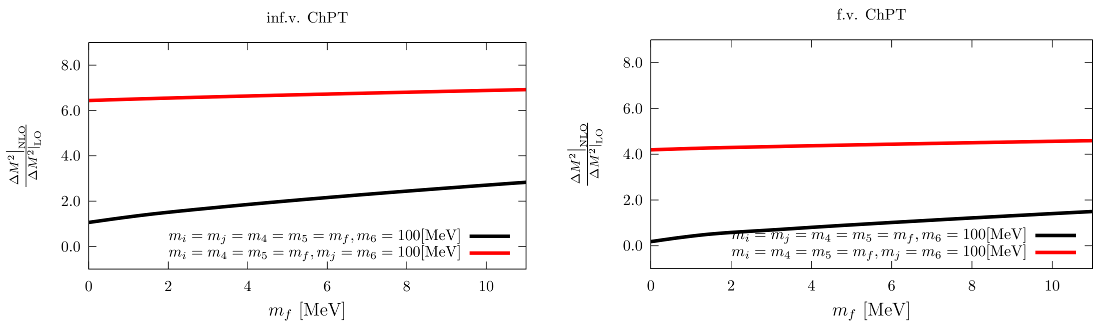


図 9: 24^3 の格子データをフィットすることにより得られた SU(3) のカイラル摂動論を用いて荷電パイ中間子 $(\bar{d}u)$ に対する電磁相互作用の LO と NLO の大きさの比 $\Delta M^2|_{\mathrm{NLO}}/\Delta M^2|_{\mathrm{LO}}$ のクォーク質量依存性を描いた図。$\Delta M^2|_{\mathrm{LO}}$ 及び $\Delta M^2|_{\mathrm{NLO}}$ は式 (4.2.1)により定義されている。左図は無限体積のカイラル摂動論を、右図は有限体積のカイラル摂動論を用いて描かれた。図中の黒線はパイ中間子を想定し、2 つのバレンスクォークと 2 つのシークォークを同じ質量として横軸にとり、もう 1 つのシークォークは 100MeV に固定している。赤線は K 中間子を想定し、1 つのバレンスクォークと 2 つのシークォークを同じ質量として横線にとり、片方のバレンスクォークともう 1 つのシークォークは 100MeV に固定している。摂動展開が成り立つためには m_f が現実的な m_u,m_d の質量領域 $1 \sim 10\mathrm{MeV}$ 辺りでパイ中間子、K 中間子ともに $\Delta M^2|_{\mathrm{NLO}}/\Delta M^2|_{\mathrm{LO}}$ が 1 を下回る必要がある。無限体積のカイラル摂動論でフィットした結果は、左図から u.d クォークが 0 近傍において、パイ中間子、K 中間子ともに比 $\Delta M^2|_{\mathrm{NLO}}/\Delta M^2|_{\mathrm{LO}}$ は 1 を上回っている。また右図からは、有限体積効果を導入することによりパイ中間子に関しては比 $\Delta M^2|_{\mathrm{NLO}}/\Delta M^2|_{\mathrm{LO}}$ は 1 を下回るが K 中間子に関しては 1 を上回っていることがわかる。

$\Delta M^2\big|_{\mathrm{NLO}}$ をそれぞれ

$$\begin{aligned}
\Delta M^2\big|_{\mathrm{LO}} &= 2ZF_0^2 q_{ij}^2, \\
\Delta M^2\big|_{\mathrm{NLO}} &= 4Y_2\left(q_i^2\chi_i + q_j^2\chi_j\right) + 4Y_3 q_{ij}^2\chi_{ij} - 4Y_4 q_i q_j \chi_{ij} + 12Y_5 q_{ij}^2\overline{\chi} \\
&\quad - 2Z\sum_{x=4,5,6}\frac{1}{16\pi^2}\chi_{ix}\log\left(\frac{\chi_{ix}}{\mu^2}\right)q_{ix}q_{ij} \\
&\quad - 2Z\sum_{x=4,5,6}\frac{1}{16\pi^2}\chi_{jx}\log\left(\frac{\chi_{jx}}{\mu^2}\right)q_{jx}q_{ji} \\
&\quad - \frac{q_{ij}^2}{16\pi^2}\chi_{ij}\left\{3\log\left(\frac{\chi_{ij}}{\mu^2}\right) - 4\right\}.
\end{aligned} \tag{4.2.1}$$

と定義する。ただし、無限体積のカイラル摂動論の $\Delta M^2\big|_{\mathrm{NLO}}$ にはこれに加えて式 (3.8.5)により定義される有限体積補正 $\delta(\Delta M^2)$ を含むこととする。この時、無限体積のカイラル摂動論に関して比 $\frac{\Delta M^2|_{\mathrm{LO}}}{\Delta M^2|_{\mathrm{NLO}}}$ を描いた図が図 9の左図、有限体積のカイラル摂動論に関してが図 9の右図である。ストレンジクォークの質量程度において、無限体積のカイラル摂動論、有限体積のカイラル摂動論はそれぞれ、NLO の大きさが LO の大きさの 9 倍、6 倍程度であり、SU(3) のカイラル摂動論の適用範囲の限界を越えていることがわかる。このため、SU(3) カイラル摂動論からは K 中間子を用いてストレンジクォーク質量を決定することは出来ない。この状況は RBC/UKQCD により行われた QCD のカイラル摂動論のの時と同じ現象である。この状況が SU(2) のカイラル摂動論でどう改善されるのかを次に見る。

4.2.2 SU(2) カイラル摂動論における低エネルギー定数の決定

SU(2) のカイラル摂動論では、第 3.7 節に見たように、K 中間子をもはや擬 NG ボソンと見なさず、パイ中間子と K 中間子の質量差をそれぞれ式 (3.9.2)及び式 (3.9.5)と別々の式で書き表す。今回の格子計算では、格子単位のクォーク質量で、0.01 以下の質量を持つクォークを軽いクォーク、0.02 以上の質量を持つクォークを重いクォークとみなす。この結果、パイ中間子は 2 つのバレンスクォーク $m_i, m_j \leq 0.01$ のデータ点が選ばれ、K 中間子は軽いバレンスクォーク質量 $m_i \leq 0.01$ と、重いバレンスクォーク質量 $m_j = 0.02, 0.03$ のデータ点が選ばれる。この時データ点の個数はパイ中間子は関しては 52 個、K 中間子に関しては各 m_j に対して 36 個である。フィットにより得られた低エネルギー定数の値は表 14及び表 15に示す。

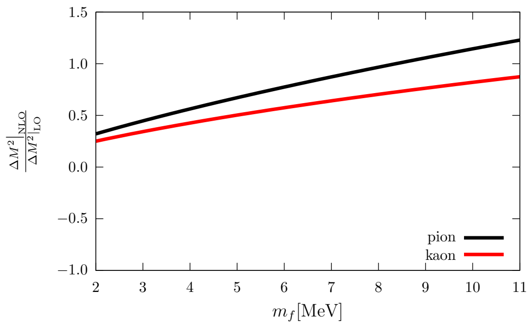
ここで、K 中間子のフィットに関して問題となった点と今回用いた処方について説明しておく。この研究の最初の計画では、SU(3) のカイラル摂動論による解析を 0.005 から 0.03 までのバレンスクォーク質量に対して行う計画であった。これらのクォーク質量に対しては、縮退していないクォーク質量も含めた全ての組み合わせに対してメソン相関関数の計算を行っていた。ところが、QCD での計算 [39] 及び今回の QED の計算からは、0.02 と 0.03 のクォーク質量は重すぎることにより SU(3) の解析には使用できず、物理的なストレンジクォークの質量での解析を行うために SU(2) のカイラル摂動論による解析を行う必要が生じた。そこで軽いクォークのデータを増やすために新たに 0.001 のバレンスクォーク質量による計算を行った、この計算は新しく独立に行われたため、縮退していないクォーク質量に対する計算は行わず、今回の K 中間子のフィットでは、クォーク質量に関して 2 つのバレンスクォーク質量、2 つのシークォーク質量という組み合わせしか用意することが出来なかった。このクォーク質量の組み合わせでは K 中間子の低エネルギー定数のパラメータ空間中に、χ^2 の値が一定の方向が存在しており、χ^2 の最小条件のみから 10 個の低

	inf.v.	f.v.
Z	$4.29(39)\times10^{-1}$	$7.70(46)\times10^{-1}$
x_3	$8.84(47)\times10^{-3}$	$8.84(46)\times10^{-3}$
x_4	$-3.62(\ 92)\times10^{-3}$	$5.88(99)\times10^{-3}$
x_5	$2.83(10)\times10^{-2}$	$2.60(10)\times10^{-2}$
x_6	$1.22(42)\times10^{-2}$	$6.75(4.25)\times10^{-3}$
δm_{res}	$5.36(10)\times10^{-3}$	$5.36(10)\times10^{-3}$
χ^2/dof	2.17(83)	1.96(83)

表 14: 24^3 の格子データから得られた SU(2) カイラル摂動論の低エネルギー定数。inf.v の列は無限体積のカイラル摂動論、f.v の列は有限体積補正を加えたカイラル摂動論を用いたフィットから得られたものである。カイラル摂動論の繰り込みスケールは $\Lambda_\chi = 1\mathrm{GeV}$ にとっている。表中で示す誤差は統計誤差のみである。

	inf.v		f.v	
m_s^{val}	0.02	0.03	0.02	0.03
10^2M^2	4.804(88)	6.89(10)	-	-
10^1A_3	$-2.199(44)$	$-2.198(45)$	-	-
10^2A_4	$-1.89(45)$	$-2.15(52)$	-	-
$10^3A_K^{(1,1)}$	$-9.1(1.1)$	$-8.9(1.3)$	$-6.4(1.0)$	$-5.8(1.2)$
$10^3A_K^{(2,1)}$	8.29(86)	8.15(99)	7.16(81)	6.92(93)
$10^2A_K^{(s,1,1)}$	0.958(26)	1.254(30)	1.241(26)	1.577(31)
$10^3A_K^{(s,2)}$	$-4.22(20)$	$-4.68(22)$	$-6.74(20)$	$-7.56(23)$
$10^2x_3^{(K)}$	1.41(32)	1.93(39)	2.34(35)	3.00(42)
$10^2x_4^{(K)}$	4.60(36)	5.06(47)	3.52(38)	3.83(49)
$10^1x_5^{(K)}$	0.376(42)	0.366(51)	0.361(41)	0.350(50)
$10^2x_6^{(K)}$	$-0.83(94)$	$-0.99(1.01)$	$-0.086(9.59)$	$-0.14(1.02)$
$10^2x_7^{(K)}$	$-0.11(1.82)$	$-0.27(2.00)$	$-0.81(1.82)$	$-1.0(2.0)$
$10^2x_8^{(K)}$	$-8.28(47)$	$-8.65(78)$	$-8.23(47)$	$-8.60(78)$
χ^2/dof	0.4578(52)	0.2869(40)	0.4578(52)	0.2869(40)

表 15: 24^3 の格子データをフィットすることにより得られた QCD 及び QED の低エネルギー定数の図。K 中間子のデータは軽いバレンスクォークを $m_i \leq 0.01$ ととり、重いバレンスクォークを $m_j \geq 0.02$ ととっている。また、2 つの軽いシークォークに関しては $m_{\mathrm{sea}} \leq 0.01$ ととっており、重いシークォークは 0.04 に固定されている。K 中間子の QCD 低エネルギー定数は RBC/UKQCD により [39] の中で計算された値である。K 中間子のフィットでは [131] にある SVD 法を用いて計算された。表中で示した誤差は統計誤差のみである。



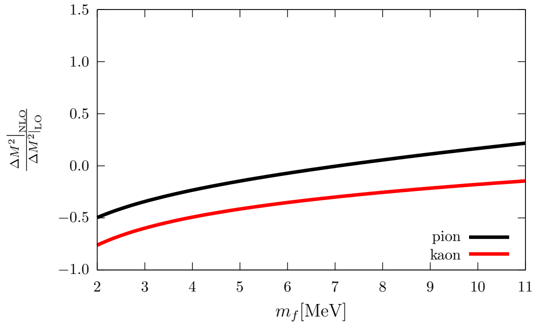


図 10: SU(2) カイラル摂動論を用いて $\bar{d}u$ における電磁相互作用の LO と NLO の大きさの比 $\Delta M^2\big|_{\rm NLO}/\Delta M^2\big|_{\rm LO}$ のクォーク質量依存性を描いた図。左図は無限体積の SU(2) カイラル摂動論を、右図は有限体積の SU(2) カイラル摂動論を用いて描かれた。この図を描くときには、重いクォーク質量は全て 100MeV に固定しており、軽いクォーク質量のみ横軸として動かしている。このグラフから、SU(2) のカイラル摂動論では NLO の範囲では摂動展開の収束性が改善されていることがわかる。

エネルギー定数を全て固定することは出来なかった。この困難を回避する方法をして今回の研究では 2 つの方法を考えた ; 1 つの方法としては [131] にあるような SVD 法と呼ばれる方法を用いることである。また、もう 1 つの方法としては ($m_l/m_f \ll 1$ という仮定は破ることになるが) フィットに用いるクォーク質量の個数を増やすという方法である。後者の方法で、実際に 10 個の低エネルギー定数を固定するには、軽いシークォーク質量の範囲は 0.01 以下とそのままにしたままで、軽いバレンスクォークに 0.02 の点を含めるだけでよい。以上の 2 つの方法で得られるクォーク質量は統計誤差の範囲内で一致している。ここから得られる中心値の差は新たな系統誤差と考える。

次に表 14と表 13を比較すると SU(2) のカイラル摂動論を用いた場合には LO の項の大きさ Z の値が大きくなっている。このため、SU(2) のカイラル摂動論では、SU(3) のカイラル摂動論と較べ、収束性が良くなっていることが期待される。実際に LO と NLO の大きさの比をグラフにしたものが図 10である。このグラフから SU(3) のカイラル摂動論を用いた場合に較べ、摂動展開の収束性が改善されているのが見てとれる。今回の解析では SU(2) のカイラル摂動論から得られるクォーク質量を最も信頼できる値と考え、最終的な値の中心値として扱うこととする。

4.3 クォーク質量の決定

以上の解析により、カイラル摂動論の係数が決定されたので、メソンの質量を入力とすることでクォーク質量を得ることができる。今回、3 つのクォーク質量を得るために入力として用いたメソンの質量は以下の 3 つである。

$$M_{\pi^\pm} = 139.57018 \pm 0.00035[\mathrm{MeV}],$$
$$M_{K^0} = 497.614 \pm 0.024[\mathrm{MeV}],$$
$$M_{K^\pm} = 493.667 \pm 0.016[\mathrm{MeV}].$$

ここで、これらの値の誤差は、格子計算の統計誤差及びその他の系統誤差に較べ非常に小さいため、以下の解析では中心値のみを使うこととする。格子間隔 $a^{-1} = 1.784(44)$ 及び $\overline{MS}$ とのマッチング定数 $Z_m = 1.546\ (2)\ (43)\ [39]$ を用いてクォーク質量を計算した結果を表にまとめたもの

が表 16である。ここでマッチング定数は QCD のものをそのまま使っており、$O(\alpha_{\rm em})$ の補正考慮していない。このマッチングの因子は、クォーク質量の比においては相殺する。

	SU(3)		SU(2)	
	inf.v	f.v	inf.v.	f.v.
m_u [MeV]	2.606(89)	2.318(91)	2.54(10)	2.24(10)
m_d [MeV]	4.50(16)	4.60(16)	4.53(15)	4.65(15)
m_s [MeV]	89.1(3.6)	89.1(3.6)	97.7(2.9)	97.6(2.9)
$m_d - m_u$ [MeV]	1.900(99)	2.28(11)	1.993(67)	2.411(65)
m_{ud} [MeV]	3.55(12)	3.46(12)	3.54(12)	3.44(12)
m_u/m_d [MeV]	0.578(11)	0.503(12)	0.5608(87)	0.4818(96)
m_s/m_{ud}[MeV]	25.07(36)	25.73(36)	27.58(27)	28.31(29)

表 16: 24^3 の QCD+QED の格子計算により決められた u、d 及び s クォーク質量の表。値は $\overline{MS}$ の繰り込み点 2GeV で与えられている。最上位段の SU(2) 及び SU(3) は、SU(2) のカイラル摂動論及び SU(3) のカイラル摂動論により計算されたことを意味しており、2 行目の inf.v 及び f.v はそれぞれ無限体積、有限体積のカイラル摂動論から計算されたことを意味している。表中で示した誤差は統計誤差のみである。

ここで、表に示した誤差は格子計算のモンテカルロ法による統計誤差をジャックナイフ法を用いて評価した誤差のみである。系統誤差に関しては、以下の複数の小節第 4.3.1 節-第 4.3.5 節 を使って説明していく。系統誤差として、カイラル摂動論を用いた外挿、有限体積効果、有限格子サイズ、QED のクエンチによる効果を考えていく。

4.3.1 カイラル展開による系統誤差

カイラル摂動論による外挿の誤差を評価する方法として、格子計算により得られたデータに対するクォーク質量のフィット範囲を考える。QCD のフィットでは SU(3) 及び SU(2) のカイラル摂動論に対してクォーク質量が $0.01 \leq m_f$ を満たす場合に意味のあるフィット結果を出すということが示された [39]。ところが、今回の電磁質量差では QCD のみからの寄与の多くは LO で相殺するため、QCD の場合とは異なったフィット範囲をとれる可能性がある。特に、今回は相関を考慮しないフィットを行っているため、χ^2/dof の値自体への意味は薄れ、その値は相対的な意味のみを持つことになる。今回のフィットでは、フィット範囲を $0.01 \leq m_f$ から広くとることにより、SU(3) 及び SU(2) カイラル摂動論においてともに χ^2/dof の値が 2 倍以上に大きくなる。そこで、今回のフィットでは $m_f \leq 0.01$ の範囲から得られたものを中心値とし、$m_f \leq 0.02$ のフィット範囲で得られたものとの差をカイラル摂動論による系統誤差の 1 つとする。$m_f \leq 0.01$ の範囲はパイ中間子の質量に換算しておよそ $250 \sim 420$MeV に相当している。NLO の大きさは有限体積効果を入れた SU(2) カイラル摂動論では、クォークの物理的な質量領域においては LO に比較し小さくなっている。

以上に現れた誤差を全てまとめ、カイラル摂動論による外挿の系統誤差とする。まとめた値は表 17に示した。

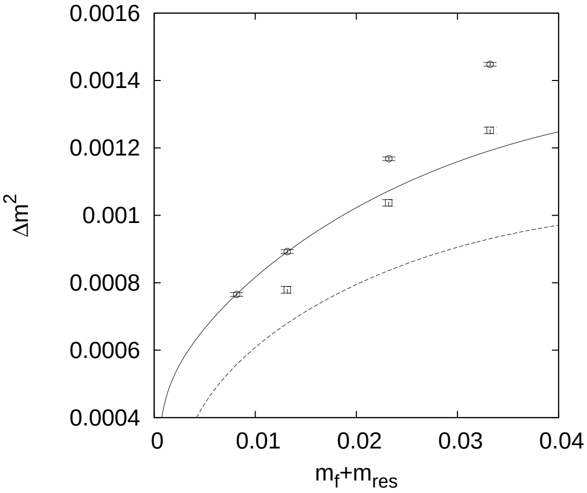


図 11: 格子計算により得られた有限体積効果の図。データは電荷 $q_i = \frac{2}{3}e$ と $q_j = -\frac{1}{3}e$ から成るメソンである。円の点、四角の点はそれぞれ 24^3 及び 16^3 の格子計算により得られた点である。実線は有限体積のカイラル摂動論により 24^3 のデータのフィットを行った線であり、点線はフィットにより得られた低エネルギー定数から 16^3 のデータを予言したものである。クォーク質量は全て、$m_i = m_j = m_{\rm sea}$ に関して描かれている。

4.3.2 有限体積による系統誤差

電磁相互作用に対する有限体積の影響は、電磁相互作用が長距離力であることから大きいことが予想される。有限体積効果を示す図として、図 11に $L^3 = 16^3$ 及び 24^3 で計算された荷電パイ中間子 $(\bar{d}u)$ に対する電磁質量差 ΔM^2 のデータを描いた。この図から、16^3 と 24^3 の電磁相互作用の大きさの差は $15 \sim 20\%$ であることが分かる。

今回の低エネルギー定数のフィットでは、有限体積効果を考慮したカイラル摂動論と無限体積のカイラル摂動論によるフィットの間で大きな違いが見られた。特に LO の寄与 Z が 2 倍程度に大きくなるなどの影響があった。有限体積のカイラル摂動論の正当性を示すために、24^3 のデータからフィットして求められた低エネルギー定数を基に、カイラル摂動論から 16^3 のデータを予言することを考えてみる。図 11中の実線が 24^3 をフィットして得られた線、下側の点線がそれを基にカイラル摂動論から予言した線である。図 11から、有限体積効果の符号はカイラル摂動論からの予言と格子計算で同じであるが、その大きさは大きく異なることがわかる。しかしながら、幸いなことに、有限体積効果を考慮したカイラル摂動論と無限体積のカイラル摂動論では、Z やその他の低エネルギー定数は変化するが、最終的なクォーク質量の値にはそれほど大きな影響は無い。その大きさはアップクォークにして 14%、ダウンクォークにして 3% であり、ストレンジクォークでは現在の精度では変化は見られない。以上の値を変化をクォーク質量に対する電磁相互作用の有限体積効果による系統誤差として採用し、表 17に載せた。

もう一つの有限体積効果の原因としては QCD に由来する有限体積効果がある。QCD に由来する有限体積効果の大きさは RBC/UKQCD により、1% またはそれ以下の大きさであることが見積もられている [39]。この寄与による影響は電磁相互作用の有限体積効果による影響に較べはるかに小さく、そこで今回の系統誤差の評価では無視することができる。

4.3.3 有限格子間隔による系統誤差

今回の計算においては、1 つの格子間隔を用いた計算しか行っておらず、格子間隔による誤差を系統的に見積もることは本質的には不可能である。一方で、Symanzik の有効作用 [75] によれば、ドメインウォールフェルミオンでは、格子間隔による誤差は a^2 という非常に小さいオーダーで現れることが予想される。また、これまで RBC/UKQCD により行われてきた計算からも、格子間隔 a によるドメインウォール QCD における誤差 $O(a^2 m_{\mathrm{res}})$ は、小さいという多くの証拠があり [39]、さらにメソン質量差ではこの誤差は最低次では相殺することが予想される。質量差で、誤差が相殺しなかったとしても、電磁相互作用により、QCD のみの場合と比べて誤差が大きくなる要因は特に考えられない。以前に行われた 24^3 の QCD による初歩的な計算においては、有限格子間隔による誤差はおよそ 4% 程度であると見積もられている [39]。そののちに行われた、より格子間隔の狭い格子を用いた計算では、この見積りはほぼ正しい (やや大きく見積りすぎな) ことが確認されている [16,51]。今回のクォーク質量の決定においては、メソン質量は物理的なインプットであり、そこに有限格子間隔による誤差は入りえないが、その代わり低エネルギー定数に対する有限格子スケーリングを通じてクォーク質量に関して有限格子間隔による誤差が入ることになる。今回の計算では、クォーク質量に対する誤差を最も保守的な値として 4%を割り当てることとする。この誤差は、次に行われる、より格子間隔の狭い計算を用い系統的な連続極限をとることで消去することが可能な量である。また、ここで割り当てた誤差は、[39] により与えられる格子間隔のスケール決定の際に生じる $2 \sim 3\%$ の誤差も含んでいる。

4.3.4 QED クエンチによる系統誤差

今回の格子計算では、QED に関してはシークォークが電荷を持たないという近似のもとで行うクエンチ近似を用いてきた。この近似によるメソンの質量への影響は、カイラル摂動論によれば $O(\alpha_{\mathrm{em}} m_{\mathrm{sea}})$ である [116]。結果として、パイ中間子に関しては、1 つの低エネルギー定数 (式 (3.9.1)の x_0) を決めることが出来ず、また、K 中間子においてはいくつかの低エネルギー定数を決めることが出来ないためクォーク質量の計算の際にこれらの定数を 0 においている。その一方で、シークォーク電荷に依存する log を含む項は、(上記の決定できない低エネルギー定数に依存しない限り) クォーク質量の計算の中に導入している。

低エネルギー定数は、log の項と共にスケールするので、同じ程度のオーダーであると考えることが出来る。実際に、log の項を落とすことによるクォーク質量への影響を見ることで、シークォークの電荷に依存する低エネルギー定数からの影響のおおよそを見積ってみたところ、その影響はほとんど見られない。また、今回の計算からは決められない低エネルギー定数 x_0 を典型的な低エネルギー定数の大きさ $-0.01 \leq x_0 \leq 0.01$ の範囲で変化させた影響を見た結果としても、クォーク質量の変化はほとんど見られなかった。以上の誤差を全て考慮することにより、QED クエンチの系統誤差を 2%と見積もることとした。

以上におけるクエンチの効果による誤差の見積りは、おおよそのものであり、今回の解析のみからは本質的に誤差の大きさを見積もることは出来ない。電磁相互作用におけるクエンチによる誤差を取り除く方法として re-weighting と呼ばれる方法が研究されてきている [102,132–134]。re-weighting では、観測量にフェルミオン行列式の比を掛け合わせることによって、シークォークに対する効果を導入する (図 3の右図の寄与)。この方法では、行列式の直接的な計算は非常に時間がかかるが、その計算は確率的な評価を行うことで、現実的に計算可能な計算時間収めることも可能である。実際に最近の 2+1 ドメインウォールフェルミオンでは、ストレンジクォーク質量に関して、

re-weighting を行うことにより、非常に有益な結果をもたらしている [16, 38, 51]。

4.3.5　ストレンジシークォーク質量による系統誤差

以上に挙げられた系統誤差以外に、ストレンジシークォーク質量に由来する系統誤差が存在する。物理的なクォーク質量が格子間隔の逆数を単位として、およそ 0.035 であるのに対して、今回の格子計算ではシーストレンジクォークの質量が 0.04 に固定されており、この量による影響を評価する必要がある。これは [39] によりなされており、この量による影響の大きさははストレンジクォーク質量に対して 2%程度、アップ及びダウンクォーク質量に対して 0.7%程度である。アップ、ダウンクォークに対する誤差は非常に小さいため他の系統誤差に比して無視することができる。

4.3.6　クォーク質量

クォーク質量の計算に関しては、最も信頼できる値として有限体積の SU(2) カイラル摂動論により求められたクォーク質量を中心値として扱うこととする。

格子計算による統計誤差は、ジャックナイフ法を用いて評価している。QCD の低エネルギー定数は、RBC/UKQCD のにより計算された配位を用い、また、フィットはスーパージャックナイフ法 [135] を用い、QED の低エネルギー定数は格子計算による統計誤差を反映している。RI/SMOM$_{\gamma_\mu}$ により非摂動的に決められたクォーク質量のマッチング定数 [96, 136–138] は

$$Z_m^{\overline{\mathrm{MS}}}(\mu = 2\mathrm{GeV}) = 1.546(2)(43) \tag{4.3.1}$$

で表される。ここで、2 番目の括弧内の誤差は有限格子間隔誤差 $O(\mu a)$ を含む系統誤差であり、これは今後の研究により、連続極限をとることで無くすことが可能である。また、ここで電磁相互作用による Z_m への $O(\alpha)$ の誤差は含まれていない。以上の議論から、クォーク質量の中心値及びその誤差として最終的に

$$m_u = 2.24 \pm 0.10 \pm 0.34\,\mathrm{MeV}, \tag{4.3.2}$$
$$m_d = 4.65 \pm 0.15 \pm 0.32\,\mathrm{MeV}, \tag{4.3.3}$$
$$m_s = 97.6 \pm 2.9 \pm 5.5\,\mathrm{MeV}, \tag{4.3.4}$$
$$m_d - m_u = 2.411 \pm 0.065 \pm 0.476\,\mathrm{MeV}, \tag{4.3.5}$$
$$m_{ud} = 3.44 \pm 0.12 \pm 0.22\,\mathrm{MeV}, \tag{4.3.6}$$
$$m_u/m_d = 0.4818 \pm 0.0096 \pm 0.0860, \tag{4.3.7}$$
$$m_s/m_{ud} = 28.31 \pm 0.29 \pm 1.77, \tag{4.3.8}$$

という結果が得られた。ここで 1 つ目の誤差が統計誤差であり、2 つ目の誤差は表 17中にあげた誤差の 2 乗和をとった系統誤差である。

4.4　メソン質量差と関連する物理量

カイラル極限における電磁相互作用によるメソン質量差 ΔM_{LO} を表 18にまとめた。これは、最低次の電磁質量差の係数 Z に比例する量である。カイラル摂動論と現象論のみを用いた解析により [116] で得られている値は 3.65 MeV である。これに対して、今回 SU(3) の無限体積摂動論で得

	val(stat. err)	fit	fv	a	qQED	m_s	Z
m_u	2.24(10)	+4.02	+13.50	4	2	-	2.8
m_d	4.65(15)	+3.55	−2.48	4	2	-	2.8
m_s	97.6(2.9)	+0.23	+0.07	4	2	2	2.8
$m_d - m_u$	2.411(65)	+7.77	−17.35	4	2	-	2.8
m_{ud}	3.44(12)	+2.75	+2.71	4	2	-	2.8
m_u/m_d	0.4818(96)	+5.45	+16.40	4	-	-	-
m_s/m_{ud}	28.31(29)	+2.91	−2.56	4	2	2	-

表 17: クォーク質量の中心値、統計誤差、系統誤差の表。左から、中心値 (統計誤差)、フィットによる誤差、有限体積誤差、格子間隔による誤差、クエンチ QED の効果、m_s を固定していることによる誤差、繰り込み定数による誤差を表している。クォーク質量の単位は MeV であり、系統誤差の単位は%である。中心値は有限体積中の SU(2) カイラル摂動論により計算された結果である。クォーク質量のマッチング定数からくる誤差は QCD の結果と QED による 1%誤差の 2 乗和をとったもので計算されている。

られた ΔM_{LO} は、非常に小さい。有限体積効果を導入することで ΔM_{LO} の値は大きくなるが、それでも 3.65 MeV に比較するとはるかに小さな値である。SU(2) のカイラル摂動論へと移行することで、値は大きくなり、SU(2) のカイラル摂動論から求められた値は 3.38(23) MeV となる。これは [116] の値と標準偏差の 2 倍の精度で一致している。また、今回の計算から、物理的なパイ中間子の質量差 $m_{\pi^+} - m_{\pi^0} = 4.5936(5)$MeV への NLO の寄与は SU(2) の有限体積理論では、およそ 25%程度であることがわかる。

	SU(3)		SU(2)	
	inf.v.	f.v.	inf.v.	f.v.
ΔM_{LO}	0.40(37)	1.68(39)	1.88(18)	3.38(23)

表 18: カイラル極限における電磁相互作用によるメソン質量差の表。各値は格子データをフィットしたカイラル摂動論により得られた LO の低エネルギー定数による電磁質量差を計算している。ここで、SU(3) のカイラル極限はアップ、ダウンクォークと同時にストレンジクォークに対しても 0 質量をとることに対応するが、一方で、SU(2) におけるカイラル極限はストレンジクォーク質量はそのままで、アップ、ダウンクォークのみを 0 質量に置くことに対応している。表中で示した誤差は統計誤差のみである。

フレーバー対角なメソンの質量は、

- 格子数値計算を良い精度で行うことは困難であり (disconnected diagram)
- PQ カイラル摂動論でも質量の定義ができない

という 2 つの理由から今回の計算からだけでは、中性パイ中間子の質量を計算することが出来ない。したがって物理的な質量におけるパイ中間子の質量差そのものを計算することは出来ない。そこで今回は、非対角メソンの式である式 (3.9.1)に関して、質量を $m_i = m_j = m_{ud}$、電荷を $q_i = q_j = q_u$ とおいたものと、質量は同じで電荷を $q_i = q_j = q_d$ と置いたものの平均を中性パイ中間子の近似と

して採用することとする；

$$\overline{M^2} \equiv \frac{1}{2}\left(M^2\left(m_{ud}, q_u, m_{ud}, q_u\right) + M^2\left(m_{ud}, q_d, m_{ud}, q_d\right)\right). \tag{4.4.1}$$

この定義では、中性パイ中間子を disconnected なグラフを除いたものとして定義している。SU(3) のカイラル摂動論 [46] によれば、ここで考慮に入れていない項は、全てパイ中間子の質量に比例している。このため、他の K 中間子の質量に依存する項に較べるとはるかに小さいことが予想出来る。この定義に m_u, m_d の値を代入することにより求められたパイ中間子の質量差の値は 4.50(23) MeV である。この値は、物理的なパイ中間子の質量差 4.5936(5)[MeV] とほぼ一致している。

また、K 中間子の質量差 ΔM_K^2 を電磁相互作用の効果による $\Delta^{(\mathrm{EM})} M_K^2$ と、$m_u \neq m_d$ の効果による $\Delta^{(m_u - m_d)} M_K^2$ とに

$$\begin{aligned}
\Delta M_K^2 &= M_K^2(m_u, q_u, m_s, q_s) - M_K^2(m_d, q_d, m_s, q_s) \\
&= \Delta^{(EM)} M_K^2 + \Delta^{(m_u - m_d)} M_K^2 + O\left((q_u - q_d)^2 (m_u - m_d)\right), \\
\Delta^{(EM)} M_K^2 &= M_K^2(m_{ud}, q_u, m_s, q_s) - M_K^2(m_{ud}, q_d, m_s, q_s), \\
\Delta^{(m_u - m_d)} M_K^2 &= M_K^2(m_u, 0, m_s, 0) - M_K^2(m_d, 0, m_s, 0).
\end{aligned} \tag{4.4.2}$$

のように分割したとき、K 中間子の全質量差 $\Delta M_K^2 = 3902.7\,\mathrm{MeV}^2$ の内、148(2) %が QCD による効果 $\Delta^{(m_u - m_d)} M_K^2$ であり、-47(2) %が電磁相互作用による効果 $\Delta^{(EM)} M_K^2$ によるものとなっていることがわかった。

カイラル極限に於いて、パイ中間子と K 中間子の電磁質量差の大きさは等しくなる (Dashen の定理 [139])。一方カイラル極限以外では、この関係式は破れ、電磁質量差の大きさはクォーク質量に依存する形で変化する。この Dashen の定理の破れを [18] に倣って、パイ中間子と、K 中間子の質量差の比から以下の量でパラメトライズする;

$$\Delta E = \frac{M_K^2\left(m_i, q_i, m_j, q_j\right) - M_K^2\left(m_i, q_j, m_j, q_j\right))}{M^2\left(m_i, q_i, m_i, q_j\right) - M^2\left(m_i, q_j, m_i, q_j\right))} - 1. \tag{4.4.3}$$

ここで m_i は軽いクォーク質量であり、m_j は重い (ストレンジ) クォーク質量である。また、この式の中では中性パイ中間子として式 (4.4.1)の代わりに $M^2\left(m_i, q_j, m_j, q_j\right)$ を用いるが、値としてどちらを用いても得られる ΔE の値にほとんど違いは無い。ΔE は、SU(3) のカイラル極限 $(m_u = m_d = m_s = 0)$ では、分母、分子ともに等しい量時に 0 となるように定義している。現実的なクォーク質量では、ストレンジクォーク質量の大きさのため、ΔE は大きく 0 からずれる可能性がある。

図 12中の点が格子計算から得られたメソン質量のデータから得られた ΔE の値 (ただし電磁相互作用による residual クォーク質量 $\delta_{m_{\mathrm{res}}}\left(q_i^2 + q_j^2\right)$ をそれぞれのメソン質量から引いたもの) である。図 12の左図中の曲線は、SU(3) の無限体積のカイラル摂動論によるフィット結果を示している。得られた値を無限体積、物理的なストレンジクォークへと外挿した線が、上部の青線である。ここで青線の幅は、統計誤差のみを示している。ここで、無限体積では、電磁相互作用に対してクエンチ近似を行った式を用いている。この組み合わせでは、ΔE の組み合わせでは、シークォークに依存する点エネルギー定数は全て落ち、また、残る log の項の影響も非常に小さいためクエンチ近似の影響はほとんどない。

図 12の右図は。左図と同様に SU(2) の有限体積理論を用いてフィットを行った線と、それを無限体積へと外挿した線を描いた。SU(2) のフィットでは、図中の点は、フィット範囲に含まれており、良く一致している。無限体積極限をとった ΔE の値は 0.628(59) であり、これは [116] におい

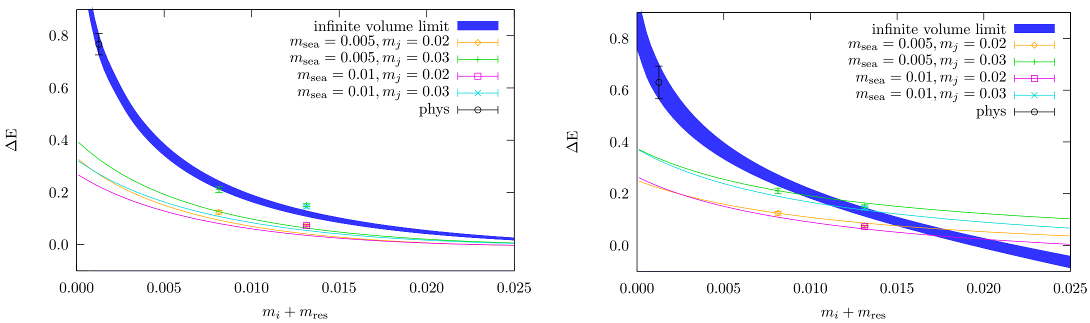


図 12: 式 (4.4.3)によって定義される ΔE を描いた図。データからは電磁相互作用の residual クォーク質量 $\delta_{m_{\rm res}}$ は取り除かれている。図中の細い線はフィットを行った関数を表す線である。左図は SU(3)、右図は SU(2) のカイラル摂動論を用いたものである。それぞれの線はシークォーク質量 $m_{\rm sea}$ 及び重いバレンスクォーク質量 m_j を固定して、軽いクォーク質量を動かして引いた曲線である。青線は無限体積、物理的な質量に外挿して得られた曲線であり、その幅は統計誤差を意味する。

て、現象論及び SU(3) カイラル摂動論を用いて得られる値 0.74 と比較し、大きな差は見られない。無限体積極限を取る際に、ΔE の値が大きく変化することから、格子計算から有限体積補正を小さく計算するためにはより大きな体積が必要となることがわかる。

QCD のみを用いた格子計算に備えて、電磁相互作用を除いた、pure QCD のメソンの質量を知っておくことは有用である。今回の SU(2) カイラル摂動論のフィットにより、$m_u = m_d = m_{ud}$ として得られた pure QCD におけるメソンの質量は

$$\begin{aligned} m_\pi^{\rm QCD} &= 134.98(23)\ {\rm MeV}, \\ m_K^{\rm QCD} &= 494.521(58)\ {\rm MeV}. \end{aligned} \tag{4.4.4}$$

となる。ここで、統計誤差が非常に小さく抑えられるのは、クォーク質量の決定のために物理的なパイ中間子と K 中間子の質量を入力として用いていることに由来する。

最後に今回の計算で得られたクォーク質量式 (4.3.2)-(4.3.6) を用いて、[140] により定義される κ の逆数 Q^2 を計算する;

$$Q^2_{\rm quark\ mass} \equiv \frac{m_s^2 - m_{ud}^2}{m_d^2 - m_u^2} \tag{4.4.5}$$

これは SU(3) のカイラル摂動論では NNLO までの精度で以下の量と一致する量である [45];

$$\begin{aligned} Q^2_{\rm meson} &\equiv \frac{M_K^2 - M_\pi^2}{M_{K^0}^2 - M_{K^\pm}^2} \frac{M_K^2}{M_\pi^2} \\ &= \frac{M_K^2\left(m_{ud}, 0, m_s, 0\right) - M^2\left(m_{ud}, 0, m_{ud}, 0\right)}{M_K^2\left(m_d, 0, m_s, 0\right) - M_K^2\left(m_u, 0, m_s, 0\right)} \frac{M_K^2\left(m_{ud}, 0, m_s, 0\right)}{M^2\left(m_{ud}, 0, m_{ud}, 0\right)} \end{aligned} \tag{4.4.6}$$

SU(3) のカイラル摂動論から計算した値は

$$\begin{aligned} Q_{\rm quark\ mass} &= 22.3(1), \\ Q_{\rm meson} &= 22.3(1). \end{aligned} \tag{4.4.7}$$

であり、また、SU(2) のカイラル摂動論から計算した値は

$$\kappa_{\text{quark mass}} = 23.8(2),$$
$$\kappa_{\text{meson}} = 22.9(2). \tag{4.4.8}$$

となった。SU(3) の値はお互いに非常によく一致しているが、SU(2) の場合は多少の差がある。これらの値は [141] の中で、$\eta \to \pi^0\pi^+\pi-$ から決定された $Q = 22.3(8)$、[37] により格子計算から計算された値 $Q_{\text{quark mass}} = 21.7(1.1)$ と良い一致を見ることが出来る。

4.5 中性子-陽子質量差

我々の宇宙では、中性子が陽子に較べわずかに重いという性質を持っている。この性質は次の 2 つの原因からなっている。一つの要素は、u クォークと d クォークの質量の差で、この大きさの差は、湯川相互作用の結合定数の値とヒッグス粒子の期待値により決定される値である。陽子が uud, 中性子が udd のバレンスクォークによりなるため、この要素による影響では、中性子の方が重いことになる。もう一つは陽子と中性子が異なる電荷を持つことに由来するものである。格子計算では、これらの効果を足し合わせることにより、格子計算から p-n の質量差を計算することが可能となる。

クォーク質量の非縮退による陽子、中性子質量への影響は、QCD のみのゲージ配位から得られる。核子の物理量は、小さいクォーク質量及び外線の運動量の外線の運動量に対する摂動展開であるバリオンカイラル摂動論 (HBChPT) を用いて系統的に現すことが出来る [122]。HBChPT は、2-flavor の Partially Quenching の場合に拡張されており [142]、質量公式は

$$m_p = M_0 + \frac{1}{3}(5\alpha + 2\beta)m_u + \frac{1}{3}(\alpha + 4\beta)m_d + \frac{1}{2}\sigma(m_j + m_l) \tag{4.5.1}$$
$$m_n = M_0 + \frac{1}{3}(\alpha + 4\beta)m_u + \frac{1}{3}(5\alpha + 2\beta)m_d + \frac{1}{2}\sigma(m_j + m_l) \tag{4.5.2}$$

と与えられている。ここで、$M_0, \alpha, \beta, \sigma$ は低エネルギー定数であり、m_u,m_d はバレンスクォークの質量を、m_j,m_l はシークォークの質量を表している。この時、pure QCD における p-n の質量差は

$$(m_p - m_n)_{(m_d - m_u)} = -\frac{1}{3}(4\alpha - 2\beta)(m_d - m_u). \tag{4.5.3}$$

と計算される。ここで、NLO までの核子の質量公式 (式 (4.5.1)及び式 (4.5.2)) には、シークォーク質量は $m_j + m_l$ という和の形でのみ現れ $m_i - m_j$ という項の形は NNLO で始めて現れる。このことにより、今回行った縮退したシークォーク質量を用いた数値計算が正当化される。

電磁相互作用による p-n 質量差を縮退したクォーク質量の QCD+QED のゲージ配位から求めることを考える。電磁質量差を、クォーク質量及び電荷に関する最低次までの展開を行い、定数 A_0, A_1 を用いて以下のようにパラメトライズする。

$$(m_p - m_n)_{\text{QED}} = \alpha_{\text{em}}(A_0 + A_1 m_{ud}) \tag{4.5.4}$$

ここで、$m_{ud} = (m_d + m_d)/2$ であり、$O\left(\alpha_{\text{em}}\left(m_u - m_d\right)\right)$ の項は無視をした。α_{em} 依存性の形は、$\alpha_{\text{em}} \to 0$ で電磁質量差が 0 になることから予測される。

以上で定義される、pure QCD の低エネルギー定数 $M_0, \alpha, \beta, \sigma$ 及び QED 効果を表す低エネルギー定数 A_0, A_1 は格子計算で得られたデータをフィットすることにより得ることが出来る。

まず初めに、核子の質量を 2 点相関関数から導くことを考える。時間方向に反周期的境界条件を課した中性子の相関関数は以下の表式で表される [143]。

$$
\begin{aligned}
G(t) = (1+\gamma_4)A_{B^+}e^{-M_{B^+}t} - (1-\gamma_4)A_{B^+}e^{-M_{B^+}(N_t-t)} \\
+ (1+\gamma_4)A_{B^-}e^{-M_{B^-}(N_t-t)} - (1-\gamma_4)A_{B^-}e^{-M_{B^-}t},
\end{aligned}
\tag{4.5.5}
$$

ここで、B_+ は、正のパリティーを持つ核子の状態、B_- は、負のパリティーを持つ核子の励起状態を表している。また、N_t は、時間方向の格子の大きさである。励起状態は基底状態に比べてはるかに質量が思いため、その寄与は無視することにする。核子の項と反核子の項は、$G(t)$ に対して射影演算子 $1 \pm \gamma_4$ を掛け、トレースをとることによりそれぞれ取り出すことが出来る。そこで、統計をよくするために、反核子に対して $t \to N_t - t$ という置き換えを行ったのちに、反核子と核子の平均をとることにする。また、擬スカラーメソンの時と同様に QED を導入した場合には $\pm e$ トリックを用いる [44, 130]。この時、核子の質量は点源の相関関数を以下の 1 粒子状態を用いてフィットすることにより得ることが出来る。

$$
G(t) = Ae^{-Mt},
\tag{4.5.6}
$$

ここで、M は基底状態の質量であり、A は核子の状態と、核子の interpolating 場の重なりを表す定数である。

今回の計算では、初めは核子の相関関数はメソンの質量差に使われたウォールソース伝搬関数と同じものから計算された。ところが、24^3 の格子サイズで計算されたゲージ配位のアンサンブルではこの値は、なかなかプラトーに達せず、p-n の質量差に対して良いシグナルを得ることが出来なかった。そこで、16^3 の大きさのボックスソースに変化させることにより、はるかによいプラトーとシグナルを得ることが出来た。一方でこの方法は非常に多くの時間がかかるためユニタリポイント (バレンスクォークとシークォークの質量が同じ点) での数値計算を行ったのみである。このため、QCD に関しては、$L^3 = 16^3$ 及び 24^3 の両方の体積において、核子の質量はウォールソースの相関関数から得られたものであり、$L^3 = 24^3$ の QCD+QED の配位に対してはボックスソースの相関関数から得られたものである。その他の相関関数に対する情報は、表 19にまとめた。図 13に、シークォーク質量が 0.005 の場合のプラトーの様子を示した。

lat	$m_{\rm sea}$	$m_{\rm val}$	Trajectories	Δ	N_{meas}	t_{src}
24^3	0.005	0.005	900-8000	20	355	0
24^3	0.01	0.01	1460-8540	40	534	0,16,32
24^3	0.02	0.02	1800-3560	20	534	0,8,16,24,32,48
24^3	0.03	0.03	1260-3020	20	534	0,8,16,24,32,48

表 19: 24^3 の大きさの格子において、ボックスソースの核子に用いた配位の表。QCD の配位は RBC/UKQCD により求められている [39, 144]。表中の Δ は、分子動力学の際の測定の間隔を表し、また、Iwasaki ゲージ相互作用の結合定数は $\beta = 2.13$ にとっている。

核子の質量は、表 20及び表 21にまとめた。ここで、質量は、相関フィットから求めており、また誤差は、通常のジャックナイフ方により決定している。QED の効果を含んだユニタリ質量から得られた表 20の結果は QCD の場合の結果 [39] と $m_l = 0.005$ を除いて良く一致している。

最初に電磁相互作用による質量差を考える。クォーク質量差 0 の場合における陽子と中性子の電磁相互作用による質量差を図 14に示した。アイソスピン対称性により、電磁相互作用が無く、か

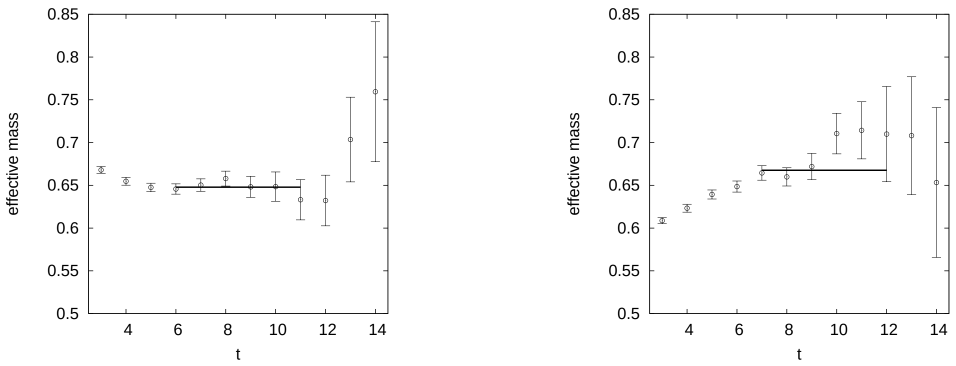


図 13: 陽子の有効質量の時間変数依存性を示した図。格子の体積は $L^3 = 24^3$ であり、シークォークの質量は $m_l = 0.005$ である。左図は、クォーク質量がユニタリポイントに対してボックスソースを用いた時の図であり、右図は、非縮退している場合に対してウォールソースを用いた時の図である。

lattice size	m_f	m_p	χ^2/dof	m_n	χ^2/dof
16^3	0.010	0.7125(57)	0.70(85)	0.7122(57)	0.70(85)
16^3	0.020	0.7986(40)	1.8(1.3)	0.7982(40)	1.8(1.3)
16^3	0.030	0.8747(36)	2.2(1.5)	0.8742(36)	2.2(1.5)
24^3	0.005	0.6477(53)	0.85(94)	0.6474(53)	0.85(94)
24^3	0.010	0.7121(31)	0.20(46)	0.7118(32)	0.21(46)
24^3	0.020	0.8065(25)	0.82(92)	0.8060(25)	0.84(93)
24^3	0.030	0.8871(23)	0.53(72)	0.8865(23)	0.53(72)

表 20: QCD+QED の配位から得られた陽子及び中性子の質量差を示した表。クォーク質量は、ユニタリポイント (バレンスクォーク質量とシークォーク質量の値の大きさが等しい点) をとっている。p,n の質量は、$L = 16^3, 24^3$ の両方に対して、ボックスソース、点源の相関関数から得られる質量である。フィット範囲は $L = 16$ の場合には 5∼ 10 であり、$L = 24$ の場合には 6 ∼ 11 である。χ^2/dof は、共変フィットにより得られた。表中で示した誤差は統計誤差のみである。

つ $m_u = m_d$ の場合には、陽子の質量と中性子の質量は等しくなる。図 14から電磁相互作用による影響は今回計算したクォーク質量の範囲内では、正になることがわかる。また、陽子の質量は中性子の質量に比較して重くなり、クォーク質量を大きくしていくにつれて、質量差は大きくなる傾向にあることが読み取れる。また、この質量差は、24^3 の体積に比べて、16^3 の時の方が大きくなる。物理的なクォーク質量への外挿は前節までに求めた軽いクォーク質量の平均値 m_{ud} を用いて行った。この結果、p-n 質量差 $(m_p - m_n)_{\mathrm{QED}}$ はおよそ 0.4 MeV(表 22の右行) と見積もられる. 図 14の $L = 24$ の格子の大きさの結果では、クォーク質量が小さいときには、電磁質量差の振る舞いが変化し、ほぼ平坦になっていることがわかる。物も軽い 2 つのクォークのデータのみを用いて外挿した場合には、p-n 質量差は $(m_p - m_n)_{\mathrm{QED}} = 0.63(23)$ MeV となる。以上の 2 つの結果の差は、カイラル外挿の誤差を見積もるために用いることにする。

擬スカラーメソンの場合と同様に、光子は閉じ込められていないため、電磁相互作用による効果に対する有限体積効果は大きいことが予想される。この誤差がどれだけのものかを見積もるため

lattice size	m_{sea}	m_u	m_d	m_p	χ^2/dof	m_n	χ^2/dof
16^3	0.010	0.010	0.020	0.7416(49)	0.59(78)	0.7562(43)	0.83(92)
16^3	0.010	0.010	0.030	0.7684(45)	0.77(88)	0.7981(36)	1.3(1.1)
16^3	0.010	0.020	0.030	0.8086(36)	1.7(1.2)	0.8238(33)	2.0(1.4)
16^3	0.020	0.010	0.020	0.7553(51)	0.88(95)	0.7698(46)	1.5(1.2)
16^3	0.020	0.010	0.030	0.7825(46)	1.0(1.0)	0.8120(40)	2.4(1.5)
16^3	0.020	0.020	0.030	0.8230(38)	2.2(1.4)	0.8380(36)	2.9(1.7)
16^3	0.030	0.010	0.020	0.7721(60)	1.6(1.2)	0.7839(51)	1.3(1.1)
16^3	0.030	0.010	0.030	0.7988(55)	1.6(1.3)	0.8241(42)	1.2(1.1)
16^3	0.030	0.020	0.030	0.8361(41)	1.7(1.3)	0.8496(38)	1.7(1.3)
24^3	0.005	0.005	0.010	0.6676(85)	1.3(1.1)	0.6747(73)	1.0(1.0)
24^3	0.005	0.005	0.020	0.6992(68)	1.5(1.2)	0.7225(51)	1.0(1.0)
24^3	0.005	0.005	0.030	0.7279(59)	1.5(1.2)	0.7680(41)	1.2(1.1)
24^3	0.005	0.010	0.020	0.7225(51)	1.6(1.2)	0.7383(44)	1.4(1.2)
24^3	0.005	0.010	0.030	0.7502(44)	1.7(1.3)	0.7824(37)	1.7(1.3)
24^3	0.005	0.020	0.030	0.7928(33)	2.4(1.5)	0.8090(32)	2.5(1.6)
24^3	0.010	0.010	0.020	0.7304(77)	0.70(96)	0.7461(61)	0.9(1.1)
24^3	0.010	0.010	0.030	0.7575(71)	0.63(94)	0.7895(48)	1.3(1.2)
24^3	0.010	0.020	0.030	0.7980(46)	1.0(1.2)	0.8146(40)	1.8(1.5)

表 21: QCD の配位から求められた陽子及び中性子の質量の表。非縮退したクォーク質量から求められている。p,n の質量は、$L = 16^3, 24^3$ の両方に対して、ウォールソース、点源の相関関数から得られる質量である。フィット範囲は $L = 16$ の場合には 5∼ 10 であり、$L = 24$ の場合には $7 \sim 12$ である。χ^2/dof は、共変フィットにより得られた。表中で示した誤差は統計誤差のみである。

lattice size	$10^2 A_0$	A_1	χ^2/dof	$(m_p - m_n)_{\mathrm{QED}}$ (MeV)
16^3	2.42(95)	1.26(38)	0.002(96)	0.33(11)
24^3	2.72(55)	1.80(22)	0.7(1.2)	0.383(68)

表 22: 電磁相互作用による p-n 質量差の表。低エネルギー定数は、ユニタリポイントにおける核子の質量のデータにより得られた。$(m_p - m_n)_{\mathrm{QED}}$ は、前節で求められた物理的なクォーク質量 m_{ud} により与えられている。

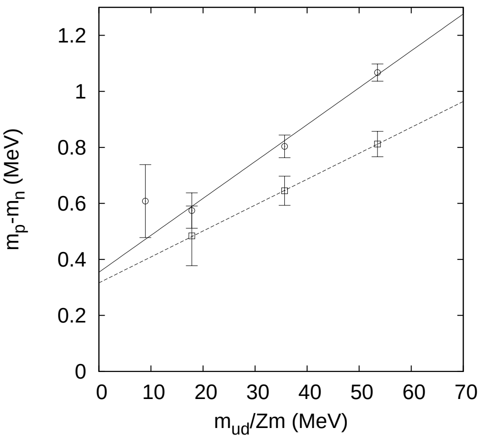


図 14: ユニタリポイントのクォーク質量を用いた電磁相互作用による p-n 質量差を示した表。円の点は $L = 24$ の格子、四角の点は、$L = 16$ の格子から得られた値を表す。実線 (点線) は、$L = 24(L = 16)$ の格子サイズに対する線形フィットの結果を表す。

に、Cottingham 公式を用いる [145, 146]；

$$\delta m_{ele} = 2\pi\alpha m \frac{1}{L^3}\sum_{q\neq 0}\frac{G_E(q)^2}{|q|}\cdot\left[\frac{2}{q^2+4m^2}+\frac{1}{2m^2}\left(\sqrt{1+\frac{4m^2}{q^2}}-1\right)\right], \tag{4.5.7}$$

$$\delta m_{mag} = -\frac{\pi\alpha}{2m^3}\frac{1}{L^3}\sum_{q\neq 0}|q|G_M(q)^2\cdot\left(\sqrt{1+\frac{4m^2}{q^2}}-1-\frac{1}{2}\frac{1}{1+q^2/4m^2}\right), \tag{4.5.8}$$

ここで、$\delta m_{ele}(\delta m_{mag})$ は、核子の質量に対する電気 (磁気) 的な寄与の大きさである。以上の公式で、電磁形状因子に関しては、双極子形 $G^p_E(Q^2) = G^p_M(Q^2)/\mu_p = G^n_M(Q^2)/\mu_n = G_D(Q^2)$, を用いて、物理的な質量で評価する。ここで、$\mu_p(\mu_n)$ は、陽子 (中性子) の磁気能率であり、$G_D(Q^2) = 1/(1+Q^2/\Lambda^2)^2, \Lambda^2 = 0.71\mathrm{GeV}^2$ である。$G^n_E(Q^2)$ に関しては、Galster のパラメトリゼーション $G^n_E(Q^2) = AQ^2/(4m^2+BQ^2)\cdot G_D(Q^2), A = 1.70, B = 3.30$ を用いる [147]。この時、 $L = 16$ の大きさの格子に対して $(m_p - m_n)^{(\mathrm{Cott.})}_{\mathrm{QED}} = 0.04$ MeV が得られ、また、$L = 24$ の大きさの格子に対して $(m_p - m_n)^{(\mathrm{Cott.})}_{\mathrm{QED}} = 0.16$ MeV が得られる。無限体積極限ではでは、この定理は、$(m_p - m_n)^{(\mathrm{Cott.})}_{\mathrm{QED}} = 0.77$ MeV という値を出すので、$L = 16(24)$ はそれぞれ、質量差の大きさを 0.73 MeV(0.61 MeV) だけ過小評価していることになる。格子計算の結果においても、大きな体積になるにつれて $(m_p - m_n)_{\mathrm{QED}}$ が大きくなるという傾向は、格子計算の結果と定性的に一致している。

次に u の質量と d の質量が異なることによる陽子と中性子の質量差への影響を考える。この効果により、実験の結果を再現するには、QCD の効果により、電磁相互作用と逆の効果が出ることにより、陽子と中性子の質量差が逆転するはずである。図 15は u と d の質量差による陽子と中性子の質量差を QCD のみの配位から得た値を示した図である。低エネルギー定数及び物理的なクォーク質量における陽子-中性子の質量差の値を表 23にまとめた。図 15により、PQHBChPT で予言されるように、陽子-中性子質量差が $m_d - m_u$ に比例する様子を確認することが出来る。このデータから、フィットにより傾きを導き、前節で求められた物理的なクォーク質量差を代入することで、QCD の効果による物理的な陽子-中性子質量差 $(m_p - m_n)_{(m_d - m_u)}$ を見積もることが出来る。得

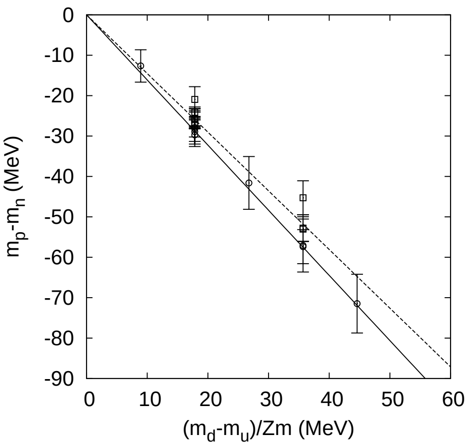


図 15: $e=0$ における $m_u - m_d$ による陽子-中性子質量差を示した図。円は $L=24$ の、四角の点は $L=16$ の大きさの格子計算により得られたデータを表している。実線は $L=24$ のデータを、破線は $L=16$ のデータを線形フィットを行うことにより得られた直線である。

られた値は、[148] で求められた値と良く一致している。

$m_p - m_n$ は式 (4.5.1)に見られるように、非常に単純なクォーク質量依存性を持っている [148]。核子の質量自体に対しては、カイラル摂動論は NLO でいくつかの非解析的な項の存在を予言しており、慎重な外挿が現在の計算の重要な要素となる。今回の計算では、データ点は非常に少なく、クォーク質量も比較的重いため、そのような外挿は考えないことにする。

lattice size	$-\frac{1}{3}(4\alpha - 2\beta)$	χ^2/dof	$(m_p - m_n)_{(m_d - m_u)}$ (MeV)
16^3	$-1.452(45)$	1.1(1.2)	$-2.265(70)$
24^3	$-1.612(92)$	0.06(24)	$-2.51(14)$

表 23: 非縮退した質量のクォークを用いて計算された陽子-中性子の質量差。値は QCD のみのゲージ配位を用いて計算されている。$(m_p - m_n)_{(m_d - m_u)}$ は物理的な $(m_d - m_u)$ で計算された値である。

電磁相互作用からの寄与と、$u.d$ の質量が非縮退である寄与を合わせることにより、物理的な陽子-中性子質量差を見積もることが出来る。得られた値は $L=16$ 及び $L=24$ の大きさの格子からそれぞれ $m_p - m_n = -1.93(12)$ 及び $-2.13(16)$ MeV である。これらの値は現実に観測される中性子-陽子質量差 -1.293321 (4) MeV に比較し小さいが、中性子-陽子の差が核子の質量 $\sim 1GeV$ に比べて 0.1% 程度の小さい量を数値的方法で議論していることを考慮すると、非常によく一致していると見ることが出来る。ここに示した誤差の値は、統計誤差のみであるが、この値は QCD に対して同じ配位を用いる $\pm e$ トリックを用いたことにより、その統計誤差を非常に小さく抑えることが出来、その結果としてよいシグナルを今回の計算では得ることが出来た。

電磁相互作用のカイラル外挿の系統誤差を、全てのデータ点を用いて外挿した場合と、最も軽い 2 点を用いて外挿した場合の差により見積もると、その大きさは 0.3 MeV 程度である。電磁相互作用の有限体積効果は、数値計算を行ったクォーク質量では大きいが、図 14に見たようにカイラル外挿を行うと、その値は小さくなる。$L=16$ のデータと $L=24$ のデータから有限体積効果の大きさを見積もると、全てのデータを使って外挿した場合にはおよそ 0.05 MeV、$L=24$ の最も

lattice size	$m_p - m_n$(MeV)	fit error (MeV)	finite vol. error (MeV)
16^3	$-1.93(12)$	-	-
24^3	$-2.13(16)$	0.58	0.39

表 24: 陽子-中性子質量差を格子理論を用いた数値計算により見積もった値及びその誤差の表。系統誤差の内訳は本文中に示した。

軽いクォーク質量を用いて外挿した場合にはおよそ 0.3 MeV である。Cottingham の公式から得られる有限体積効果が非常に大きかったことを考慮すると、これらの値のうちで、より保守的な値 0.3 MeV を有限体積効果による誤差の大きさと考えることにする。QCD に対する有限体積効果は図 15から見てとれるように非常に小さいため、$L = 16$ と $L = 24$ の値の差 0.25 MeV を有限体積補正の不定性の大きさとしてとる。QCD による質量差は、クォーク質量に非常に大きく依存している。クォーク質量の誤差がおよそ 20%であることから、この範囲内でクォーク質量を動かすことで系統誤差をつけることにすると、その大きさはおよそ 0.5 MeV である。これらの誤差の 2 乗和をとることにより、陽子-中性子の質量差 $m_p - m_n = -2.13(16)(70)$ MeV が得られる。以上の結果及び誤差は表 24にまとめた。以上の結果を改善するには、より小さいクォーク質量、連続極限をとるための異なった格子サイズでの計算、有限体積効果による誤差を小さくするためのより大きな体積による計算が必要となる。

5 まとめ・結論

本論文では、次世代格子 QCD による精密な数値計算を見据えて、QCD+QED の格子理論を用いた第一原理からの数値計算を用いて、低エネルギーハドロンの電磁相互作用の効果による質量差及びクォーク質量の精密決定の研究を行った。

本研究におけるゲージ配位は、RBC/UKQCD により生成された QCD の配位に、クエンチ近似の電磁相互作用を加えたものを用いた。本研究では電磁質量差は非常に良い統計精度により決定することが出来た。これは、ひとつには QCD による揺らぎの大部分が質量差の計算ではほとんど相殺したためである。さらに、$O(e)$ のノイズによる寄与を配位毎に相殺するために $\pm e$ トリック [44, 130] を用いることにより、(質量自体の誤差が数パーセント程度であるにも関わらず) 擬スカラーメソンの質量差に対する統計誤差は、1 パーセント以下に抑えることが出来た。電磁相互作用は本研究により定式化した有限体積中の電磁相互作用 (第 2.10 節) を用いて生成した。

また、ドメインウォールフェルミオンにおいて、5 次元方向が有限な大きさなことに由来するカイラル対称性の破れ、余分なクォーク質量 (residual quark mass) への電磁相互作用の影響を詳細に調べた。この余分なクォーク質量は、低エネルギーの物理量に有意に影響を与えるため、この量を詳細に調べることにより初めて、精密なクォーク質量を決定することが出来た。

また、電磁相互作用を含んだ NLO のカイラル摂動論を用いてフィットを行うことにより、電磁相互作用に由来する低エネルギー定数を決定した。本研究においては、長距離力である電磁相互作用を仮想的に有限の箱の中に閉じ込めたことに由来する有限体積効果を、カイラル摂動論から系統的に議論する手法を導出した (第 3.6 節)。また、電磁相互作用を含んだ $\mathrm{SU}(3)_L \times \mathrm{SU}(3)_R$ の収束性の問題から、K 中間子を電磁相互作用を含んだ $\mathrm{SU}(2)_L \times \mathrm{SU}(2)_R$ に導入する新しいカイラル摂動論の構成を第 3.7 節において提示した。カイラル摂動論によるフィットは通常の $\mathrm{SU}(3)_L \times \mathrm{SU}(3)_R$ 及び $\mathrm{SU}(2)_L \times \mathrm{SU}(2)_R$ に K 中間子を含んだものの両方に対して行った。特に後者はストレンジクォークに対する電磁相互作用を系統的に扱うために本研究において定式化した理論である。[16, 17, 39, 51, 52, 121]。今回

の計算では、カイラル摂動論のフィットとの矛盾は見ることが出来なかった一方で、カイラル摂動論に典型的な log の振る舞いもデータから見ることは出来なかった。電磁相互作用の低エネルギー定数は、有限体積効果により大きく変化した。これは、電磁相互作用が長距離力であり、有限体積効果の寄与が大きいという直感と良く一致する。最終的な値は、有限体積効果を含んだカイラル摂動論を用いたフィットにより与えた。今回の格子計算により得られた低エネルギー定数は [116] により与えられる現象論的な低エネルギー定数と矛盾しているように見える。しかし、[116] に与えられる低エネルギー定数は ad-hoc に与えているものも多く直接の比較を行うことは出来ない。また、$SU(3)$ のカイラル摂動論の収束性の問題、有限体積効果の問題などが重なりあい、このような違いを生み出している可能性も考えられる。

軽いクォーク質量 m_u,m_d,m_s の値も今回の計算により決定した。この研究は、電磁相互作用の効果を 2+1 flavor の格子理論に取り入れることにより、精密にクォーク質量を決定した初めての研究である。3 つのクォーク質量の決定に際して、インプットとして用いた物理量は、$\pi^\pm$,K^0,$K^\pm$ の質量である。クォーク質量の中心値としては、K 中間子を含んだ $SU(2)_L \times SU(2)_R$ カイラル摂動論により得られた値を採用した。これは、$SU(3)_L \times SU(3)_R$ カイラル摂動論において、ストレンジクォーク質量が理論の適用範囲外であることが本研究により示されたためである。得られたクォーク質量の値は式 (4.3.2)-(4.3.6) に、統計誤差及び系統誤差とともに示した。また、クォーク質量差や、クォーク質量の比は、式 (4.3.5)-(4.3.8) に与えた。ここで得られたクォーク質量の値は、[39] に与えられる QCD のみから計算される値と、(電磁相互作用の効果を除けば) 良く一致している。これは、QCD の低エネルギー定数が、[39] と同様の方法により、同じ配位 (及びそこから新しく加えた配位) を解析することで QCD の低エネルギー定数を決定しているためである。Strong CP の解に関連しては、今回の計算で得られたアップクォークの質量は、0 から有意に ($\sim 6-7$ 標準偏差) ずれており、アップクォークの質量が 0 となる Strong CP 問題の解はないという結論を導いた。

パイ中間子の質量差に対する電磁相互作用の最低次からの寄与 (Dashen 項) は、$(m_{\pi^\pm} - m_{\pi^0})_{\rm QED} = 3.38(23)$ MeV と与えられた。これは、今回の計算では最も信頼のおける有限体積中の $SU(2)$ カイラル摂動論により得られた値である。ここで示した誤差は統計誤差のみである。この結果は、[149,150] に見られるカイラル極限における $m^2_{\pi^\pm}$ の値と無矛盾な値を与える一方で、SU(3) のカイラル摂動論と現象論を合わせて得られた結果 [116] や、2-flavor の格子 QCD 計算により得られた結果 [44] と比較してわずかに小さな値となっている。今回の結果では、NLO の寄与が、パイ中間子の質量差のおよそ 25%をしめていることを示している。また、式 (4.4.1)に示した近似した π^0 の質量を用いて行った計算では、LO と NLO を合わせた結果は、$m_{\pi^+} - m_{\pi^0} = 4.50(23)$MeV である。近似した π^0 の質量ではいくつかの NLO の項を含めずに計算している。この近似は SU(3) のカイラル摂動論から、他の項に比べて小さいと考えられており、実際に現象論的にこの効果による π^0 に対する NLO の補正は 0.17(3)MeV [45] や 0.32(20)MeV [151] が得られている。同様にして、K 中間子の質量差の内訳は $(m_{K^\pm} - m_{K^0})_{\rm QED} = 1.87(10)$ MeV が電磁相互作用による寄与、$-5.840(96)$ MeV が $m_u \neq m_d$ による寄与であることが計算された。

本論文の最後に 2+1 flavor の QCD+QED の格子計算から得られた陽子-中性子質量差の値を示した。今回得られた値は、実際に確認される値より多少大きいが、陽子-中性子質量差が陽子や中性子の質量自体と比べてはるかに小さいことを考慮するとこの値は非常に興味深い値である。今回の計算では、電磁相互作用による質量差は $m_p - m_n = 0.383(68)$ MeV であり、$m_u \neq m_d$ による質量差は $m_p - m_n = -2.51(14)$ MeV である。ここで示した結果は、$L = 24$ の大きさの格子計算により求めた結果であり、誤差は統計誤差のみを示した。また、カイラル外挿、有限体関効果などによる系統誤差も見積もった。この結果得られた陽子-中性子質量差は $m_p - m_n = -2.13(16)(70)$ MeV である。ここで、最初の誤差は統計誤差、次の誤差は系統誤差である。中心値は $L = 24$ の

格子計算の結果である。今回の研究は、電磁相互作用の寄与のみを考えたとき、陽子が中性子より重いことを示した初めての研究である。

今回の計算では、QED の配位に関してはクエンチ近似で導入している。この場合には光子はバレンスクォークのみと相互作用し、シークォークとは相互作用しない近似になっている図 3。この近似は、re-weighting と呼ばれる手法を用いて取り除くことが可能である [102, 103]。同様に、連続極限をとるために、最近 RBC/UKQCD で行われている、より細かい格子の配位 [16, 51] を用いて、本論文と同様の解析を行うことも必要である。また、RBC/UKQCD による新しい Iwasaki ゲージ作用による配位 [152] を用いることにより、より小さなクォーク質量での計算を行うことも可能である。

本研究で行われた手法を追従する形で、既にいくつかの電磁相互作用を含んだ格子計算の研究が行われ始めており [47, 153]、また、神戸における次世代スパコンを用いた大規模格子計算においても今回の研究と同様に電磁相互作用を含んだ計算が予定されている。

謝辞

本論文は筆者が名古屋大学大学院理学研究科素粒子宇宙物理学専攻博士後期課程に在籍中の研究成果をまとめたものである。本論文の執筆にあたり、修士学生の頃から、丁寧に辛抱強くご指導をいただいた早川雅司先生に深謝の意を表する。また、共に本論文中の多くの計算を行った Ran Zhou 氏をはじめとし、Thomas Blum 氏、土井琢身氏、出渕卓氏, 山田憲和氏の共同研究者の方々に感謝の意を表する。また、研究を遂行していく上で大変お世話になった EHQ 研のスタッフの皆様、卒業された先輩の方々並びに学生の方々に感謝の意を表する。

本研究の一部は日本学術振興会科学研究費 (特別研究員 No.227180) によった。

A データ解析

A.1 ジャックナイフ法による誤差の評価

この節では誤差を見積もる方法の一つであるジャックナイフ法を簡単に紹介する。

A.1.1 用語の定義

この節では以下で用いられる用語の簡単な定義を行う。

- x の k 次のモーメント
  x を確率分布 p_x にしたがう乱数としたとき
  $$E(x^k) = \sum_x x^k p_x \tag{A.1.1}$$
  を x の k 次のモーメントと呼ぶ。例えば、x の 1 次のモーメントは平均値、2 次のモーメントは分散である。

- 標本の個々を加減乗除し 1 つの量を形成するときこの量を統計量と呼ぶ。例えば、$x_1, x_2, \cdots x_n$ を同一の確率分布にしたがう標本としたとき平均値 $\hat{x}$ や分散 σ_x^2 などは統計量である。

- 統計量から母集団の特性値を推定するときその量を推定量 (estimator) と呼ぶ。例えば、統計量として平均値 $\hat{x}$ により、母集団平均 μ を推定しようとすれば $\hat{x}$ は μ の推定量である。

- 実際に推定しようとする量とは異なる量を平均値として持つ量を偏り (bias) と呼ぶ。偏りは推定量の期待値と母集団の特性値の真の値 (母数)θ との差として
  $$B(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}) - \theta \tag{A.1.2}$$
  と定義される。例えば、$x_1, x_2, \cdots x_n$ を平均値 (母平均)μ, 母分散 σ の同じ確率分布にしたがう標本について考えてみる。まず、標本平均については
  $$\hat{x} = \sum_i \frac{x_i}{n} \tag{A.1.3}$$
  で定義される。この量に関しては偏りは無い。標本分散を
  $$\hat{\sigma} = \frac{1}{n} \sum_i (x_i - \hat{x})^2 \tag{A.1.4}$$

と考えると $\hat{\sigma}$ は母分散 σ の推定量としては偏りがある。なぜなら、

$$
\begin{aligned}
E(\hat{\sigma}^2) &= E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \hat{x})^2\right) \\
&= E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left\{(x_i-\mu) - (\hat{x}-\mu)\right\}^2\right) \\
&= E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left\{(x_i-\mu)^2 - 2\underbrace{(x_i-\mu)(\hat{x}-\mu)}_{E(x_i-\mu)=\mu-\mu=0} - (\hat{x}-\mu)^2\right\}\right) \\
&= E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left\{(x_i-\mu)^2 - (\hat{x}-\mu)^2\right\}\right) \\
&= E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 - \frac{1}{n^2}\left(\sum_{j=1}^{n}x_j - \mu\right)^2\right) \\
&= E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 - \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n}(x_j-\mu)^2 - \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{i\neq j}^{n}(x_i-\mu)(x_j-\mu)\right) \\
&= E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 - \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n}(x_j-\mu)^2\right) \\
&= \frac{n-1}{n}\sigma^2 \neq \sigma^2
\end{aligned}
\tag{A.1.5}
$$

であるからである。この場合、母分散の推定量としての分散としては

$$
\sigma = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\hat{x} - x_i)^2 \tag{A.1.6}
$$

を用いる必要がある。

- 推定量の平均二乗誤差 は、θ をある母数、$\hat{\theta}$ をその推定量としたとき

$$
MSE(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta} - \theta)^2 \tag{A.1.7}
$$

として定義される。平均二乗誤差は次のようにして母分散と偏りの二乗の和に分解することが可能である;

$$
\begin{aligned}
MSE(\hat{\theta}) &= E(\hat{\theta} - \theta)^2 \\
&= E(\hat{\theta}^2) - 2E(\hat{\theta})\theta + \theta^2 \\
&= E(\hat{\theta}^2) - \left(E(\hat{\theta})\right)^2 + \left(E(\hat{\theta})\right)^2 - 2E(\hat{\theta})\theta + \theta^2 \\
&= E\left(\hat{\theta} - E(\hat{\theta})\right) + \left(E(\hat{\theta}) - \theta\right)^2 \\
&= Var(\hat{\theta}) + B(\hat{\theta})^2
\end{aligned}
\tag{A.1.8}
$$

ここで $Var(\hat{\theta})$ は $\hat{\theta}$ の分散を表す (推定量の分散)。よって誤差を正しく評価するためには分散と、偏りを調査することが必要であることがわかる。ジャックナイフ法の概念の基礎は分散を大きく変化させずに偏りを小さくするような操作を行うことである。

A.1.2　ジャックナイフ法

この節ではジャックナイフ法の簡単なまとめを行う。まず、標本 $x_1, x_2, \cdots x_n$ のうち、i 番目の標本を除いた物から得られる母数 θ に対する推定量を $\hat{\theta}_{(i)}$ と書く。ここで、$\hat{\theta}_{(i)}$ は、先ほどの n 個の標本から得られる推定量 $\hat{\theta}$ とほとんど同じ値をとると予想される。$\hat{\theta}$ の平均値を

$$\hat{\theta}_{(\cdot)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \hat{\theta}_{(i)}}{n} \tag{A.1.9}$$

と書く。この時、ジャックナイフ法における偏り推定量は次のように定義される;

$$B\hat{i}as = (n-1)(\hat{\theta}_{(\cdot)} - \hat{\theta}) \tag{A.1.10}$$

このジャックナイフ法での偏り推定量の正当性を示すには、この偏りで修正されたジャックナイフサンプル $\tilde{\theta} = \hat{\theta} - (n-1) \cdot (\hat{\theta}_{(\cdot)} - \hat{\theta}) = n\hat{\theta} - (n-1)\hat{\theta}_{(\cdot)}$ が $\hat{\theta}$ の偏りに対して充分小さくなっていることを確かめれば良い。$\hat{\theta}$ の期待値を、一般的に次のように展開する。

$$E(\hat{\theta}) = \theta + \underbrace{\frac{a_1}{n} + \frac{a_2}{n^2} + \cdots}_{bios} \tag{A.1.11}$$

ここで a_1、a_2 は適当な展開係数である。この式をジャックナイフ サンプルに適用すれば、ジャックナイフ サンプルは n-1 個からの推定量であることから

$$E(\hat{\theta}) = \theta + \frac{a_1}{n-1} + \frac{a_2}{(n-2)^2} + \cdots \tag{A.1.12}$$

が成り立つ。以上から偏りが修正されたジャックナイフ サンプル $\tilde{\theta}$ に対して

$$\begin{aligned} E(\tilde{\theta}) &= n \cdot \left(\theta + \frac{a_1}{n} + \frac{a_2}{n^2} + \cdots\right) - (n-1) \cdot \left(\theta + \frac{a_1}{n-1} + \frac{a_2}{n-1} + \cdots\right) \\ &= \theta + \frac{a_2}{n(n-1)} + \cdots \end{aligned} \tag{A.1.13}$$

となり、元々の偏りが $O\left(\frac{1}{n}\right)$ だったとしても修正されたジャックナイフ　サンプルに対しては偏りは $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ と充分小さくなることがわかった。

次に、ジャックナイフ分散推定量ジャックナイフ サンプル $\hat{\theta}$ を用いて

$$V\hat{a}r = \frac{n-1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\hat{\theta}_{(i)} - \hat{\theta}_{(\cdot)}\right)^2 \tag{A.1.14}$$

と定義する。この量は修正されたジャックナイフ推定量 $\tilde{\theta}$ を用れば

$$V\hat{a}r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{(\tilde{\theta}_i - \tilde{\theta})^2}{n-1} \tag{A.1.15}$$

とかける。分散は、欲しい統計量 θ が x_J の平均値の場合、ジャックナイフ法の MSE が中心極限

定理から示唆される母平均の分散 $\frac{\sigma}{n}$ と等しい：

$$\begin{aligned}
\frac{n-1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\hat{\theta}_{(i)}-\hat{\theta})^2 &= \frac{n-1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j\neq i}^{n}\frac{x_j}{n-1}-\hat{x}\right)^2 \\
&= \frac{n-1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{n\hat{x}-x_i}{n-1}-\hat{x}\right)^2 \\
&= \frac{n-1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\hat{x}-x_i}{n-1}\right)^2 \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{(\hat{x}-x_i)^2}{n-1} \\
&= \frac{\sigma^2}{n}
\end{aligned} \tag{A.1.16}$$

この様に単純な分散については中心極限定理と同じ結果が得られることが分かるが複雑な関数に関して一般的にジャックナイフ法が使える証明はない (というより使えない量が存在している)。それぞれの統計量の関数系に対し、ジャックナイフ法が使えるかどうかの判定が必要である。

結論として、合わせてジャックナイフ法で計算された MSE は、

$$\begin{aligned}
M\hat{S}E &= V\hat{a}r + B\hat{i}as^2 \\
&= (n-1)\cdot(\hat{\theta}_{(\cdot)}-\hat{\theta})^2 + \frac{n-1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\hat{\theta}_{(i)}-\hat{\theta}_{(\cdot)})^2 \\
&= \frac{n-1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\hat{\theta}_{(i)}-\hat{\theta})^2
\end{aligned} \tag{A.1.17}$$

と計算される。

ジャックナイフ法の優れている点はある統計の一つの標本値からその統計の Var や MSE を求めることが出きることである。通常の方法では、$\hat{\theta}$ の Var を求めるためには、多数の標本の集団を持ってきて、それぞれの集団から $\hat{\theta}$ の推定量を計算するため、多くの標本が必要となる。通常、多くの標本を得るのは非常に手間がかかるためジャックナイフ方は有益である。

A.1.3 ジャックナイフサンプルの例

この節では実際に格子理論で得られる物理量を考慮に入れつつジャックナイフ誤差の例を考えてみる。

格子理論では演算子 O の期待値 $< O >$ は経路積分表示での積分を和の極限に置き換えることに統計的な平均値としてえる。

$$\begin{aligned}
< O > &= \int dU \det D(U) e^{-S(U)} O(U) \\
&\to \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}O(U_i)
\end{aligned} \tag{A.1.18}$$

ここで $\det D(U)$ は分配関数の fermon 部分を積分したもの、S(U) は作用のゲージ場部分である。この期待値はゲージ場の列 $\{U_1, U_2\cdots U_n\}$ は確率 $P(U)=\det D(U)e^{-S}$ に従って生成しその平均値

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}O(U_i) \sim \int dU P(U) O(U) \tag{A.1.19}$$

を取ることにより統計的な平均値へと焼き直される。この方法により得られる物理量たちの統計誤差について考えていく。以下、簡単のため $O(U_i) \equiv O_i$ と書く。
●例 1：格子計算から直接得られる演算子
格子計算から直接得られる物理量 O を考える。例えば n 点関数などがこの例である。演算子 O に対するジャックナイフ サンプルは次のように書ける。

$$\hat{O}_{(i)} = \frac{1}{n-1}\sum_{i \neq k} O_i \tag{A.1.20}$$

このジャックナイフサンプルを用いればジャックナイフ平均 $< O >$ と誤差 $\delta < O >$ は

$$\begin{aligned} < O > &= \frac{1}{n}\sum_i \hat{O}_{(i)} \\ \delta < O > &= \sqrt{\frac{n-1}{n}\sum_i (\hat{O}_{(i)} - < O >)^2} \end{aligned} \tag{A.1.21}$$

の様にして計算される。
●例 2；演算子の関数として得られる二次的な量
格子計算で直接得られる量ではなく、その関数として二次的にえられる量 Q を考える。例えば、パイオンの質量、崩壊定数などはこれにあたる。二次的な量は row data$\hat{O}_i$ 自体の関数ではなく、格子計算から計算される量の平均値 $< O >$ の関数であるということを考慮するとジャックナイフ サンプルは次のようにかかれる。

$$\hat{Q}_{(i)} = Q(\hat{O}_{(i)}) \tag{A.1.22}$$

平均値と誤差は同様にして

$$\begin{aligned} < Q > &= \frac{1}{n}\sum_i \hat{Q}_{(i)} \\ \delta < Q > &= \sqrt{\frac{n-1}{n}\sum_i (\hat{Q}_{(i)} - < Q >)^2} \end{aligned} \tag{A.1.23}$$

●例 3：誤差の誤差
例えば自己相関時間 (auto correlation time) の誤差を求めるときなどにジャックナイフ誤差の誤差が必要になる場合がある。まず格子から直接得られるデータの単純な平均値のジャックナイフ誤差の誤差を考える。
　これは jackcknife 誤差のジャックナイフ サンプル (一つの要素を抜いてジャックナイフ誤差を求める) を作ることにより得られる;

$$\begin{aligned} \sigma_i^2 &= \frac{n-2}{n-1}\sum_{k \neq i}\left(\hat{O}_{(k)}^{(i)} - < O >^{(i)}\right)^2 \\ &= \frac{1}{n-1}\sum_{k \neq i}\frac{(\hat{x} - x_i)^2}{n-2} \end{aligned} \tag{A.1.24}$$

ここで、$\hat{O}_{(k)}^{(i)}$、$< O >^{(i)}$ はそれぞれ i 番目の要素を除いて作られたジャックナイフサンプル、ジャッ

クナイフ平均であり、次のように定義される。

$$\begin{aligned}\hat{O}_{(k)}^{(i)} &= \frac{1}{n-2}\sum_{j\neq k, j\neq i} x_i \\ < O >^{(i)} &= \frac{1}{n-1}\sum_{k\neq i} O_{(k)}^{(i)}\end{aligned} \tag{A.1.25}$$

このジャックナイフサンプルを用いてジャックナイフ誤差の誤差は次の様に与えられる。

$$\text{err of err} = \sqrt{\frac{n-1}{n}\sum_{i}^{n}(\sigma_i - \sigma)^2} \tag{A.1.26}$$

二次的な物理量に対する誤差の誤差もまったく同様にして i 番目のジャックナイフサンプル

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{n-2}{n-1}\sum_{k\neq i}\left(Q_{(k)}^{(i)} - < Q >^{(i)}\right)}, \tag{A.1.27}$$

where

$$\begin{aligned}Q_{(k)}^{(i)} &= Q\left(O_{(k)}^{(i)}\right) \\ < Q >^{(i)} &= \sum_{k\neq i} Q_{(k)}^{(i)}\end{aligned} \tag{A.1.28}$$

を用いて誤差の誤差は

$$\text{err of err} = \sqrt{\frac{n-1}{n}\sum_{i}^{n}(\sigma_i - \sigma)^2} \tag{A.1.29}$$

と与えられる。

A.2 カイ二乗法

この節ではカイ二乗法の簡単な事実に関して証明なしに述べる。

あるデータが与えられたときにそのデータが乗ると予想される理論を仮定し、その理論を用いてデータをフィットすることでパラメーターを固定することを考える。このフィットの正当性を議論する際、フィットの度合いを計る関数を評価関数と呼ぶ。カイ二乗はこの関数の一種である。通常、評価関数は 0 に近いほどそのフィットが良いように作られている。評価関数が最小になるように調節して得られたパラメータを最適パラメータと呼ぶ。最適パラメータを得た際に、値自身の他にそのパラメータの誤差、また、フィットの当てはまりのよさを知る必要がある。以下、この点について議論を行っていく。

N 個のデータ点 $(x_i, y_i)(i = 1, 2, \cdots, N)$ を M 個のパラメータ $a_j(j = 1, 2, \cdots, M)$ を持つ理論でフィットすることを考えていく。

フィットすることにより得られた (固定された) パラメータを自然の真のパラメータとみなしたときに、実験で得られた元のデータ点が得られる確率を尤度 (ゆうど) という。この尤度を最大にする推定が最大尤度推定である。

データ点が x_i に対応する y_i の値がモデルの "真の値"$y(x)$ のまわりでそれぞれの x_i に対応した分散 σ_i のガウス分布の測定誤差を持つと仮定する。この時、"真の理論" において実験で得られたデータ点が現れる確率は

$$P = \prod_{i=1}^{N}\left\{\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{y_i - y(x_i)}{\sigma_i}\right)^2\right)\right\} \tag{A.2.1}$$

となる。この確率が尤度である。この関数を最大にするようにパラメータを選びたい。そのためには log をとって

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{y_i - y(x_i)}{\sigma_i} \right)^2 \tag{A.2.2}$$

を最小にすれば良い。この式がカイの定義である。

このカイ二乗であるが通常はデータ点の個数からフィットパラメータの個数を引いた自由度 $N-M$ で割ったものを指標として用いることが多い (reduced χ^2)。

$$\chi^2/\mathrm{dof} = \frac{\chi^2}{N-M} \tag{A.2.3}$$

これはカイ二乗の値自身は自由度 $N-M$ カイ二乗分布にしたがっており、またその母平均は自由度に等しいための規格化である。

B　Basics of Super Unitary Group

この節では、超行列に関する簡単な説明を行う。以下のように部分行列に分解される行列を考える。

$$M = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \overbrace{\quad}^{p} & \overbrace{\quad}^{q} \end{array} \\ \begin{array}{c} p\{ \\ q\{ \end{array} & \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \end{array}. \tag{B.1}$$

ここで、p, q は行及び列の大きさを表している。A 及び D が通常の交換する数を要素として持つ行列、B 及び C が反交換する数を要素として持つ行列とするとき、この行列 U を超行列と呼ぶ。この時、超ユニタリー行列は以下を満たす行列として定義される。

$$U^\dagger U = 1. \tag{B.2}$$

ここで、反交換する数の積に関する複素共役は η_1, η_2 を反交換する数とするとき

$$(\eta_1 \eta_2)^* = \eta_2^* \eta_1^* \tag{B.3}$$

と定義される。超行列に対し、超トレースは

$$\mathrm{str} U \equiv \mathrm{tr}\, A - \mathrm{tr}\, D. \tag{B.4}$$

と定義される。この定義の時、超トレースは通常のトレースと同様の回転則を満たす。例えば

$$U_1 = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \overbrace{\quad}^{p} & \overbrace{\quad}^{q} \end{array} \\ \begin{array}{c} p\{ \\ q\{ \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}, U_2 = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \overbrace{\quad}^{p} & \overbrace{\quad}^{q} \end{array} \\ \begin{array}{c} p\{ \\ q\{ \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ C & 0 \end{pmatrix} \end{array}. \tag{B.5}$$

を考えると、U_1U_2 の積の超トレースは

$$\begin{aligned}
\mathrm{str}(U_1U_2) &= \mathrm{str}\begin{pmatrix} BC & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{tr}_{N_V+N}(BC) \\
&= \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} B_{ij}C_{ji} = -\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} C_{ji}B_{ij} \\
&= -\,\mathrm{tr}_q(CB) \\
&= \mathrm{str}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & CB \end{pmatrix} \\
&= \mathrm{str}(U_2U_1).
\end{aligned} \tag{B.6}$$

となる。ここで tr_q は $q \times q$ 行列に対する通常のトレースである。他の部分行列に対しても同様の計算を行うことにより、超トレースの回転則を示すことができる。超トレースを用いて、超行列式を

$$\mathrm{sdet}U \equiv \exp\left(\mathrm{str}(\ln U)\right). \tag{B.7}$$

と定義することができる。この時、超行列式の性質として、

$$\mathrm{sdet}\left(U_1U_2\right) = \mathrm{sdet}U_1 \cdot \mathrm{sdet}U_2 \tag{B.8}$$

という性質が導かれる。また、超行列式は、部分行列 A, B, C, D を用いて

$$\begin{aligned}
\mathrm{sdet}U &= \det A / \det\left(D - CA^{-1}B\right) \\
&= \det\left(A - BD^{-1}C\right) / \det\left(D\right).
\end{aligned} \tag{B.9}$$

と表すことができる。超特殊ユニタリ群は、超ユニタリ行列のうちで、以下の関係式を満たすものとして定義される。

$$\mathrm{sdet}\,U = 1. \tag{B.10}$$

C　Cayley-Hamilton の定理

カイラル摂動論において独立な項を得るために、Cayley-Hamilton の定理と呼ばれる行列間に成り立つ関係式をしばしば使うことになる。この節では、簡単に Cayley-Hamilton の定理を紹介し、カイラル摂動論に便利な形に書き直していく。特に、正方行列の列の長さ $N = 2.3$ における例を提示する。

Cayley-Hamilton の定理は、$\mathbf{1}$ を単位行列としたとき、$n \times n$ 正方行列 A に対して t に関する多項式 $p_n\left(t\right)$ を

$$p_n(t) = \det\left(t\mathbf{1} - A\right), \tag{C.1}$$

としたとき、

$$p_n(A) = \mathbf{0}, \tag{C.2}$$

が成り立つというものである。ここで、$\mathbf{0}$ はゼロ行列を表す。

この定理の証明は以下のように行われる。$n \times n$ 行列 A の固有多項式 $t\mathbf{1} - A$ の余因子行列を Δ と書いたとき、余因子行列の定義から

$$\left(t\mathbf{1} - A\right)\Delta = \Delta\left(t\mathbf{1} - A\right) = \det\left(t\mathbf{1} - A\right)\mathbf{1}. \tag{C.3}$$

が成り立つ。今、式 (C.3)の右辺は t の n 次であるため、左辺に関しても同様に n 次になるためには、Δ は t に関して $n-1$ 次である必要がある。そこで Δ を t を用いて以下のように展開する；

$$\Delta = \left(t^{n-1}B_{n-1} + t^{n-2}B_{n-2} + \cdots + t^0 B_0\right) \tag{C.4}$$

ここで、$B_i\,(i=1,\cdots,n-1)$ は A と同じ行、列の大きさを持つ行列である。式 (C.3)の左辺と中辺を各 t の次数で較べることにより、全ての B_i が A と交換することがわかる。この時、多項式 $p_n\,(t)$ において、$t=A$ と置いた時にも $(A\mathbf{1}-A)\sum_{i=0}^{n-1} A^i B_i$ と因数分解できる。この量は 0 であるので、$p_n\,(t) = \mathbf{0}$ が言える。

$n\times n$ 行列 A の多項式を $p_n(A) = A^n + c_{n-1}A^{n-1} + \cdots c_1 A + A_0$ と置いたときの、係数 c_i は以下のようにして決められる。

$$\begin{aligned} p_n(t) &= \det\left(t\mathbf{1} - A\right) \\ &= t^n \exp\left(\mathrm{tr}\left(\log\left(\mathbf{1} - \frac{A}{t}\right)\right)\right) \\ &= t^n \exp\left(-\,\mathrm{tr}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{\left(\frac{A}{t}\right)^m}{m}\right)\right) \end{aligned} \tag{C.5}$$

ここで $p_n(t)$ がオーダー n であることから、指数は t^{-n} までの展開とする。例えば、$n=3$ の場合には、

$$\begin{aligned} p_3(t) = t^3 &\left(1 - \mathrm{tr}\left(\frac{A}{t} + \frac{1}{2}\left(\frac{A}{t}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{A}{t}\right)^3\right)\right. \\ &\left. \left. + \frac{1}{2!}\left(\mathrm{tr}\left(\frac{A}{t}\right) + \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left(\left(\frac{A}{t}\right)^2\right)\right)^2\right|_3 - \frac{1}{3!}\left(\mathrm{tr}\left(\frac{A}{t}\right)\right)^3\right) \\ = t^3 &- \mathrm{tr}(A)t^2 + \frac{1}{2}\left(\mathrm{tr}(A)^2 - \mathrm{tr}\left(A^2\right)t\right. \\ &- \frac{1}{6}\left(\mathrm{tr}\,(A)^3 - 3\,\mathrm{tr}(A^2)\,\mathrm{tr}(A) + 2\,\mathrm{tr}(A^3)\right), \end{aligned} \tag{C.6}$$

と書ける。ここで、第 2 式の $|_3$ は t^{-3} までを拾うことを意味する。同様の計算を行えば $n=2$ の場合の多項式

$$p_2\,(t) = t^2 - \mathrm{tr}(A)t + \frac{1}{2}\left(\mathrm{tr}(A)^2 - \mathrm{tr}(A^2)\right) \tag{C.7}$$

が得られる。$p_2(A) = 0$,$p_3(A) = 0$ としたものが、それぞれ、2 次、3 次の正方行列に対する Cayley-Hamilton の定理である。

以上の等式を、カイラル摂動論に適用するのに、より便利な形に書き直す。$n=2$ の場合、2 行

2 列の行列 A,B に対して、$p_2\left(A+B\right)$ は

$$
\begin{aligned}
p_2\left(A+B\right) &= A^2 + \{A,B\} + B^2 - \operatorname{tr}\left(A+B\right)\left(A+B\right) \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(\operatorname{tr}\left(A+B\right)^2 - \operatorname{tr}\left(\left(A+B\right)^2\right)\right) \\
&= \underbrace{A^2 - \operatorname{tr}(A)A + \frac{1}{2}\left(\operatorname{tr}\left(A\right) - \operatorname{tr}\left(A^2\right)\right)}_{=p_2(A)=0} \\
&\quad + \underbrace{B^2 - \operatorname{tr}(B)B + \frac{1}{2}\left(\operatorname{tr}\left(B\right) - \operatorname{tr}\left(B^2\right)\right)}_{=p_2(B)=0} \\
&\quad + \{A,B\} - A\operatorname{tr}(B) - B\operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(B) - \operatorname{tr}(AB)
\end{aligned}
\tag{C.8}
$$

と計算される。ここから、カイラル摂動論に便利な式

$$
\{A,B\} = A\operatorname{tr}(B) + B\operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(AB)\mathbf{1} - \operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(B)\mathbf{1} \tag{C.9}
$$

が得られる。特に $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(B) = 0$ の時には、

$$
\{A,B\} = \operatorname{tr}(AB) \tag{C.10}
$$

と書くことができる。

$N=3$ の場合も同様に $p_3\left(A+B+C\right)$ を計算することにより

$$
\begin{aligned}
&ABC + ACB + BAC + BCA + CAB + CBA \\
&- AB\operatorname{tr}\left(C\right) - AC\operatorname{tr}\left(B\right) - BA\operatorname{tr}\left(C\right) - BC\operatorname{tr}\left(A\right) - CA\operatorname{tr}\left(B\right) - CB\operatorname{tr}\left(A\right) \\
&- A\operatorname{tr}\left(BC\right) - B\operatorname{tr}\left(AC\right) - C\operatorname{tr}\left(AB\right) - \operatorname{tr}\left(ABC\right) - \operatorname{tr}\left(ACB\right) \\
&+ A\operatorname{tr}\left(B\right)\operatorname{tr}\left(C\right) + B\operatorname{tr}\left(A\right)\operatorname{tr}\left(C\right) + C\operatorname{tr}\left(A\right)\operatorname{tr}\left(B\right) \\
&+ \operatorname{tr}\left(A\right)\operatorname{tr}\left(BC\right) + \operatorname{tr}\left(B\right)\operatorname{tr}\left(AC\right) + \operatorname{tr}\left(C\right)\operatorname{tr}\left(AB\right) \\
&- \operatorname{tr}\left(A\right)\operatorname{tr}\left(B\right)\operatorname{tr}\left(C\right) = 0
\end{aligned}
\tag{C.11}
$$

が得られる。

超行列の場合の Cayley-Hamilton の定理は例えば [154] により与えられている。ここでは結果のみを示すと、超行列 M が、ボソン的な部分正方行列 A,D とフェルミオン的な部分行列 B,C を用いて

$$
M = \begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cc} \overbrace{}^{p} & \overbrace{}^{q} \end{array} \\
\begin{array}{c} p\{ \\ q\{ \end{array} & \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}
\end{array} . \tag{C.12}
$$

と書く。ここで、a,B,C,D はそれぞれ行 $\times$ 列が $p\times p, p\times q, q\times p, q\times q$ の行列である。固有多項式を

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{p+q} b_j^{(p,q)} M^{p+q-j} &= 0, \\
b_0^{p,q} &= 1.
\end{aligned}
\tag{C.13}
$$

と書くことが出来ることを仮定する。ここで、係数 $b_j^{(p,q)}$ は、超行列 M のべき乗 M^j の超トレース

$$S_j = \mathrm{str}\left(M^j\right), \tag{C.14}$$

を用いて書かれる。$b_j^{(p,q)}$ は、以下で説明する生成関数により決められる。

$$\begin{aligned} F^{(p,q)}(t) &= \sum_{j=0}^{\infty} b_j^{(p,q)} t^j, \\ b_j^{(p,q)} &= \frac{1}{j!}\left(\frac{\partial^j}{\partial t^j} F^{(p,q)}(t)\right)\bigg|_{t=0} \end{aligned} \tag{C.15}$$

通常の行列 $q=0$ の時には生成関数は

$$F^{(p,0)}(t) = G(t) \equiv \exp\left(-\sum_{t=1}^{\infty} \frac{S_i t^i}{i}\right), \tag{C.16}$$

と書ける。これに対して、$q>0$ の時の生成関数は

$$F^{(p,q)}(t) \equiv \left(1 - \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k t^k\right)^2 G(t), \tag{C.17}$$

と書かれる。ここで μ_k は、$b_j^{(p+q,0)} = b_j$ と書いたとき、

$$\mathcal{B}\begin{pmatrix}\mu_1\\ \mu_2\\ \vdots\\ \mu_q\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{p+1}\\ b_{p+2}\\ \vdots\\ b_{p+q}\end{pmatrix}, \qquad ,\mathcal{B} \equiv \begin{pmatrix} b_p & b_{p-1} & \cdots & b_{p-q+1}\\ b_{p+1} & b_p & \cdots & b_{p-q+2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ b_{p+q-1} & b_{p+1-2} & \cdots & b_p \end{pmatrix} \tag{C.18}$$

を解くことにより得られる量である。

例として、$(p,q)=(1,1)$ の場合を考える。この時、式 (C.18)から $\mu_1 = \frac{b_2^{(2,0)}}{b_1^{(2,0)}}$ と計算される。式 (C.16)を微分することにより、$b_2^{(2,0)}$ 及び $b_1^{2,0}$ を得る；

$$\begin{aligned} b_1^{(2,0)} &= \frac{\partial}{\partial t}\left(G(t)\right)\bigg|_{t=0} \\ &= -S_1. \\ b_2^{(2,0)} &= \frac{1}{2!}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(G(t)\right)\bigg|_{t=0} \\ &= \frac{S_1^2 - S_2}{2}. \end{aligned} \tag{C.19}$$

ここから、$\mu_1 = -\frac{S_1^2 - S_2}{2S_1}$ であり、生成関数 $F^{(1,1)}(t)$ は

$$F^{(1,1)}(t) = \left(1 + \frac{S_1^2 - S_2}{2S_1} t\right)^2 G(t). \tag{C.20}$$

と書かれる。これを微分することにより、$b_1^{(1,1)}$ 及び $b_2^{(1,1)}$ を求めると、

$$
\begin{aligned}
b_1^{(1,1)} &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\left(1+\frac{S_1^2-S_2}{2S_1}t\right)^2 G(t)\right)\Bigg|_{t=0} \\
&= 2\frac{S_1^2-S_2}{2S_1} + \frac{\partial}{\partial t}\left(G(t)\right)\Bigg|_{t=0} \\
&= -\frac{S_2}{S_1}. \\
b_2^{(1,1)} &= \frac{1}{2!}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\left(1+\frac{S_1^2-S_2}{2S_1}t\right)^2 G(t)\right)\Bigg|_{t=0} \\
&= \left(\frac{S_1^2-S_2}{2S_1}\right)^2 + 2\left(\frac{S_1^2-S_2}{2S_1}\right)\frac{\partial}{\partial t}\left(G(t)\right)\Bigg|_{t=0} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(G(t)\right)\Bigg|_{t=0} \\
&= \frac{-S_1^4+S_2^2}{4S_1^2}
\end{aligned}
\tag{C.21}
$$

これらを式 (C.13)に代入することにより、$(p,q)=(1,1)$ の時の Cayley-Hamilton の定理を

$$
S_1^2M^2 - S_1S_2M + \frac{1}{4}\left(-S_1+S_2^2\right)\mathbf{1} = 0 \tag{C.22}
$$

と書くことができる。

D　陽子-中性子質量差による初期宇宙元素合成への影響

本研究では、格子計算により、陽子-中性子質量差のおよそ 20%が電磁相互作用によるものであることを示した。この節では、陽子-中性子質量差が変化することによるによる初期宇宙の元素合成への影響を簡単に見ていく。

クォークが原子核内にトラップされた後、陽子と中性子は以下のような弱い相互作用により熱平衡状態にある。

$$
p+e^- \leftrightarrow n+\nu_e \tag{D.1}
$$

この反応は、時間が経過し弱い相互作用のスケールに対して密度が薄くなることにより、熱平衡状態から外れることになる。この時の温度は、弱い相互作用と、宇宙の膨張速度から $kT \sim 0.74\mathrm{MeV}$ と求められている。熱平衡から外れるときの陽子と中性子の個数の比は、ボルツマン分布により以下のように求めることができる。

$$
\frac{N_n}{N_p} = \exp\left(-\left(m_n-m_p\right)/kT\right), \tag{D.2}
$$

この関数により表される N_n/N_p の陽子-中性子質量差依存性を図 16に描いた。実験値を入れたときの値は $N_n/N_p \sim 6$、実験値から 1.3 倍の陽子-中性子質量差ではおよそ $N_n/N_p \sim 10$、実験値から 70%程度ではおよそ $N_n/N_p \sim 3.5$ である。このように陽子-中性子の個数の比は陽子-中性子質量差がわずかに異なることで大きく変化する。

このようにして生成された中性子は、その大部分が以下の過程によりヘリウムに変化する。

$$
\begin{aligned}
&n+p \to d+\gamma, \\
d+d \to {}^3H+p, \qquad & d+d \to {}^3He+n, \\
{}^3H+d \to {}^4He+n, \qquad & {}^3He+d \to {}^4He+n
\end{aligned}
\tag{D.3}
$$

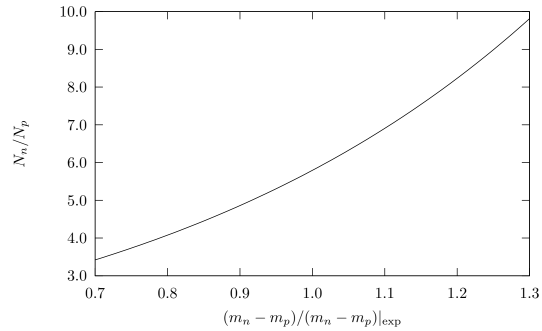


図 16:　宇宙初期に固定される陽子-中性子の比をボルツマン分布により計算した図。横軸は、実験値に比較した、$m_n - m_p$ の値を示している。この図から、陽子-中性子の質量差に対してその比は大きく変化することがわかる。

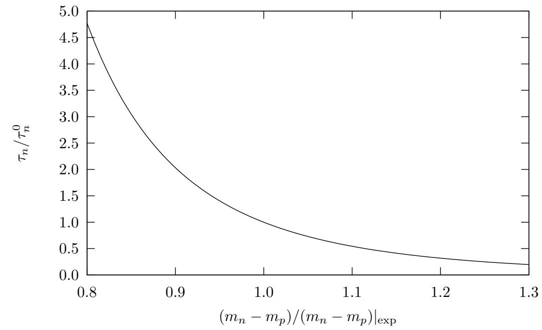


図 17:　中性子の崩壊時間を陽子-中性子の質量差の関数として描いた図。縦軸は、現実の実験値における崩壊時間と、陽子-中性子の質量差を変化させた場合の崩壊時間の比を示した。横軸は、実験値に比較した、$m_n - m_p$ の値を示している。

これにより求められるヘリウムと水素 (以上の過程に使われなかった陽子) の個数の比は、現実の観測結果に比較的よく合致している。

以上の過程の他に、弱い相互作用による β 崩壊によっても中性子と陽子の比は変化する可能性がある。実験とよく合う式 (D.3)の関係式を壊さないためには、この過程による崩壊は、ヘリウムが生成される過程と比較して十分に緩やかに起こる必要がある。β 崩壊の崩壊時間は、

$$\frac{1}{\tau_n} = \frac{1}{4\pi^3}\left(\frac{g_W}{2M_W}\right)^4 m_e^5 \left(\frac{1}{15}\left(2a^4 - 9a^2 - 8\right)\sqrt{a^2-1} + a\ln\left(a + \sqrt{a^2-1}\right)\right) \tag{D.4}$$

と計算される。ここで

$$a = \frac{m_n - m_p}{m_e} \tag{D.5}$$

と定義されている。

この関数を用いて、$m_n - m_p$ を変化させた時の崩壊時間を図 17に示した。現実の中性子の崩壊時間が 890 秒程度であることを考えると、$m_n - m_p$ が 30%程変化することにより、中性子の崩壊時間は、ヘリウムが生成完了する時間 200 秒と同程度の大きさになり、元素合成に大きく影響を与える可能性があることがわかる。

参考文献

[1] S. Weinberg, "A Model of Leptons," *Phys. Rev. Lett.* **19** (1967) 1264–1266.

[2] P. W. Higgs, "Broken symmetries, massless particles and gauge fields," *Phys. Lett.* **12** (1964) 132–133.

[3] D. J. Gross and F. Wilczek, "ULTRAVIOLET BEHAVIOR OF NON-ABELIAN GAUGE THEORIES," *Phys. Rev. Lett.* **30** (1973) 1343–1346.

[4] H. D. Politzer, "RELIABLE PERTURBATIVE RESULTS FOR STRONG INTERACTIONS?," *Phys. Rev. Lett.* **30** (1973) 1346–1349.

[5] K. G. Wilson, "CONFINEMENT OF QUARKS," *Phys. Rev.* **D10** (1974) 2445–2459.

[6] **Particle Data Group** Collaboration, K. Nakamura, "Review of particle physics," *J. Phys.* **G37** (2010) 075021.

[7] Y. Aoki *et al.*, "The kaon B-parameter from quenched domain-wall QCD," *Phys. Rev.* **D73** (2006) 094507, `arXiv:hep-lat/0508011`.

[8] **RBC** Collaboration, D. J. Antonio *et al.*, "Neutral kaon mixing from 2+1 flavor domain wall QCD," *Phys. Rev. Lett.* **100** (2008) 032001, `arXiv:hep-ph/0702042`.

[9] **JLQCD** Collaboration, N. Yamada *et al.*, "B_K with dynamical overlap fermions," *PoS* **LAT2007** (2007) 379, `arXiv:0710.0462 [hep-lat]`.

[10] Y. Aoki *et al.*, "Lattice QCD with two dynamical flavors of domain wall fermions," *Phys. Rev.* **D72** (2005) 114505, `arXiv:hep-lat/0411006`.

[11] C. Aubin, J. Laiho, and R. S. Van de Water, "The kaon B-parameter in mixed action chiral perturbation theory," *Phys. Rev.* **D75** (2007) 034502, `arXiv:hep-lat/0609009`.

[12] C. Aubin, J. Laiho, and R. S. Van de Water, "The kaon B^- parameter from unquenched mixed action lattice QCD," *PoS* **LAT2007** (2007) 375, `arXiv:0710.1121 [hep-lat]`.

[13] B. Yoon *et al.*, "B_K with improved staggered fermions: analysis using SU(2) staggered chiral perturbation theory," *PoS* **LAT2010** (2010) 319, `arXiv:1010.4778 [hep-lat]`.

[14] T. Bae *et al.*, "B_K using HYP-smeared staggered fermions in $N_f = 2+1$ unquenched QCD," `arXiv:1008.5179 [hep-lat]`.

[15] C. Aubin, J. Laiho, and R. S. Van de Water, "The neutral kaon mixing parameter B_K from unquenched mixed-action lattice QCD," *Phys. Rev.* **D81** (2010) 014507, `arXiv:0905.3947 [hep-lat]`.

[16] **RBC** Collaboration, R. Mawhinney, "NLO and NNLO chiral fits for 2+1 flavor DWF ensembles," *PoS* **LAT2009** (2009) 081, `arXiv:0910.3194 [hep-lat]`.

[17] **PACS-CS** Collaboration, S. Aoki *et al.*, "2+1 Flavor Lattice QCD toward the Physical Point," *Phys. Rev.* **D79** (2009) 034503, `arXiv:0807.1661 [hep-lat]`.

[18] **MILC** Collaboration, C. Aubin *et al.*, “Light pseudoscalar decay constants, quark masses, and low energy constants from three-flavor lattice QCD,” *Phys. Rev.* **D70** (2004) 114501, `arXiv:hep-lat/0407028`.

[19] A. Ramos and f. t. B.-M.-W. collaboration, “FK/Fpi in full QCD,” *PoS* **LAT2009** (2009) 259, `arXiv:1002.1665 [hep-lat]`.

[20] S. Durr *et al.*, “The ratio FK/Fpi in QCD,” *Phys. Rev.* **D81** (2010) 054507, `arXiv:1001.4692 [hep-lat]`.

[21] **The MILC** Collaboration, A. Bazavov *et al.*, “Results from the MILC collaboration’s SU(3) chiral perturbation theory analysis,” *PoS* **LAT2009** (2009) 079, `arXiv:0910.3618 [hep-lat]`.

[22] A. Bazavov *et al.*, “Full nonperturbative QCD simulations with 2+1 flavors of improved staggered quarks,” *Rev. Mod. Phys.* **82** (2010) 1349–1417, `arXiv:0903.3598 [hep-lat]`.

[23] **TWQCD** Collaboration, J. Noaki *et al.*, “Chiral properties of light mesons with $N_f = 2 + 1$ overlap fermions,” *PoS* **LAT2009** (2009) 096, `arXiv:0910.5532 [hep-lat]`.

[24] **HPQCD** Collaboration, E. Follana, C. T. H. Davies, G. P. Lepage, and J. Shigemitsu, “High Precision determination of the pi, K, D and D_s decay constants from lattice QCD,” *Phys. Rev. Lett.* **100** (2008) 062002, `arXiv:0706.1726 [hep-lat]`.

[25] S. R. Beane, P. F. Bedaque, K. Orginos, and M. J. Savage, “f_K/f_π in Full QCD with Domain Wall Valence Quarks,” *Phys. Rev.* **D75** (2007) 094501, `arXiv:hep-lat/0606023`.

[26] **ETM** Collaboration, B. Blossier *et al.*, “Pseudoscalar decay constants of kaon and D-mesons from Nf=2 twisted mass Lattice QCD,” *JHEP* **07** (2009) 043, `arXiv:0904.0954 [hep-lat]`.

[27] **European Twisted Mass** Collaboration, B. Blossier *et al.*, “Light quark masses and pseudoscalar decay constants from Nf=2 Lattice QCD with twisted mass fermions,” *JHEP* **04** (2008) 020, `arXiv:0709.4574 [hep-lat]`.

[28] D. Becirevic *et al.*, “The K –¿ pi vector form factor at zero momentum transfer on the lattice,” *Nucl. Phys.* **B705** (2005) 339–362, `arXiv:hep-ph/0403217`.

[29] P. A. Boyle *et al.*, “Kl3 semileptonic form factor from 2+1 flavour lattice QCD,” *Phys. Rev. Lett.* **100** (2008) 141601, `arXiv:0710.5136 [hep-lat]`.

[30] **ETM** Collaboration, V. Lubicz, F. Mescia, S. Simula, C. Tarantino, and f. t. E. Collaboration, “K -¿ pion Semileptonic Form Factors from Two-Flavor Lattice QCD,” *Phys. Rev.* **D80** (2009) 111502, `arXiv:0906.4728 [hep-lat]`.

[31] **The QCDSF** Collaboration, D. Brommel *et al.*, “Kaon semileptonic decay form factors from $N_f = 2$ non- perturbatively O(a)-improved Wilson fermions,” *PoS* **LAT2007** (2007) 364, `arXiv:0710.2100 [hep-lat]`.

[32] C. Dawson, T. Izubuchi, T. Kaneko, S. Sasaki, and A. Soni, "Vector form factor in K_{l3} semileptonic decay with two flavors of dynamical domain-wall quarks," *Phys. Rev.* **D74** (2006) 114502, `arXiv:hep-ph/0607162`.

[33] **JLQCD** Collaboration, N. Tsutsui *et al.*, "Kaon semileptonic decay form factors in two-flavor QCD," *PoS* **LAT2005** (2006) 357, `arXiv:hep-lat/0510068`.

[34] **CP-PACS** Collaboration, N. Tsutsui *et al.*, "Lattice QCD calculation of the proton decay matrix element in the continuum limit," *Phys. Rev.* **D70** (2004) 111501, `arXiv:hep-lat/0402026`.

[35] Y. Aoki, C. Dawson, J. Noaki, and A. Soni, "Proton decay matrix elements with domain-wall fermions," *Phys. Rev.* **D75** (2007) 014507, `arXiv:hep-lat/0607002`.

[36] **RBC-UKQCD** Collaboration, Y. Aoki *et al.*, "Proton lifetime bounds from chirally symmetric lattice QCD," *Phys. Rev.* **D78** (2008) 054505, `arXiv:0806.1031 [hep-lat]`.

[37] **MILC** Collaboration, A. Bazavov *et al.*, "MILC results for light pseudoscalars," *PoS* **CD09** (2009) 007, `arXiv:0910.2966 [hep-ph]`.

[38] **PACS-CS** Collaboration, S. Aoki *et al.*, "Physical Point Simulation in 2+1 Flavor Lattice QCD," *Phys. Rev.* **D81** (2010) 074503, `arXiv:0911.2561 [hep-lat]`.

[39] **RBC-UKQCD** Collaboration, C. Allton *et al.*, "Physical Results from 2+1 Flavor Domain Wall QCD and SU(2) Chiral Perturbation Theory," *Phys. Rev.* **D78** (2008) 114509, `arXiv:0804.0473 [hep-lat]`.

[40] E. E. Scholz, "Light Hadron Masses and Decay Constants," *PoS* **LAT2009** (2009) 005, `arXiv:0911.2191 [hep-lat]`.

[41] D. R. Nelson, G. T. Fleming, and G. W. Kilcup, "Is strong CP invariance due to a massless up quark?," *Phys. Rev. Lett.* **90** (2003) 021601, `arXiv:hep-lat/0112029`.

[42] A. G. Cohen, D. B. Kaplan, and A. E. Nelson, "Testing m(u) = 0 on the lattice," *JHEP* **11** (1999) 027, `arXiv:hep-lat/9909091`.

[43] J. Gasser and H. Leutwyler, "Chiral Perturbation Theory to One Loop," *Ann. Phys.* **158** (1984) 142.

[44] T. Blum, T. Doi, M. Hayakawa, T. Izubuchi, and N. Yamada, "Determination of light quark masses from the electromagnetic splitting of pseudoscalar meson masses computed with two flavors of domain wall fermions," *Phys. Rev.* **D76** (2007) 114508, `arXiv:0708.0484 [hep-lat]`.

[45] J. Gasser and H. Leutwyler, "Chiral Perturbation Theory: Expansions in the Mass of the Strange Quark," *Nucl. Phys.* **B250** (1985) 465.

[46] R. Urech, "Virtual photons in chiral perturbation theory," *Nucl. Phys.* **B433** (1995) 234–254, `arXiv:hep-ph/9405341`.

[47] C. Bernard and E. D. Freeland, "Electromagnetic Corrections in Staggered Chiral Perturbation Theory," `arXiv:1011.3994 [hep-lat]`.

[48] C. J. Hogan, "Nuclear astrophysics of worlds in the string landscape," *Phys. Rev.* **D74** (2006) 123514, `arXiv:astro-ph/0602104`.

[49] V. Agrawal, S. M. Barr, J. F. Donoghue, and D. Seckel, "The anthropic principle and the mass scale of the standard model," *Phys. Rev.* **D57** (1998) 5480–5492, `arXiv:hep-ph/9707380`.

[50] V. Agrawal, S. M. Barr, J. F. Donoghue, and D. Seckel, "Anthropic considerations in multiple-domain theories and the scale of electroweak symmetry breaking," *Phys. Rev. Lett.* **80** (1998) 1822–1825, `arXiv:hep-ph/9801253`.

[51] **RBC** Collaboration, C. Kelly, P. A. Boyle, and C. T. Sachrajda, "Continuum results for light hadrons from 2+1 flavor DWF ensembles," *PoS* **LAT2009** (2009) 087, `arXiv:0911.1309 [hep-lat]`.

[52] **PACS-CS** Collaboration, D. Kadoh *et al.*, "SU(2) and SU(3) chiral perturbation theory analyses on meson and baryon masses in 2+1 flavor lattice QCD," *PoS* **LATTICE2008** (2008) 092, `arXiv:0810.0351 [hep-lat]`.

[53] A. Roessl, "Pion kaon scattering near the threshold in chiral SU(2) perturbation theory," *Nucl. Phys.* **B555** (1999) 507–539, `arXiv:hep-ph/9904230`.

[54] K. Osterwalder and R. Schrader, "AXIOMS FOR EUCLIDEAN GREEN'S FUNCTIONS," *Commun. Math. Phys.* **31** (1973) 83–112.

[55] K. Osterwalder and R. Schrader, "Axioms for Euclidean Green's Functions. 2," *Commun. Math. Phys.* **42** (1975) 281.

[56] Y. M. Zinovev, "Equivalence of the Euclidean and Wightman field theories," *Commun. Math. Phys.* **174** (1995) 1–28, `arXiv:hep-th/9408009`.

[57] M. Luscher, "Chiral gauge theories revisited," `arXiv:hep-th/0102028`.

[58] M. Creutz, "Positivity and topology in lattice gauge theory," *Phys. Rev.* **D70** (2004) 091501, `arXiv:hep-lat/0409017`.

[59] J. E. Mandula, "Symmetries of Ginsparg-Wilson Chiral Fermions," *Phys. Rev.* **D80** (2009) 085023, `arXiv:0901.0572 [hep-lat]`.

[60] K. Osterwalder and E. Seiler, "Gauge Field Theories on the Lattice," *Ann. Phys.* **110** (1978) 440.

[61] M. Luscher, "Construction of a Selfadjoint, Strictly Positive Transfer Matrix for Euclidean Lattice Gauge Theories," *Commun. Math. Phys.* **54** (1977) 283.

[62] P. Menotti and A. Pelissetto, "OSTERWALDER-SCHRADER POSITIVITY FOR THE WILSON ACTION," *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **4** (1988) 644.

[63] Y. Kikukawa and K. Usui, “Reflection Positivity of Free Overlap Fermions,” `arXiv:1005.3751 [hep-lat]`.

[64] H. Kawai, R. Nakayama, and K. Seo, “Comparison of the Lattice Lambda Parameter with the Continuum Lambda Parameter in Massless QCD,” *Nucl. Phys.* **B189** (1981) 40.

[65] M. Creutz, “ON INVARIANT INTEGRATION OVER SU(N),” *J. Math. Phys.* **19** (1978) 2043.

[66] K. G. Wilson and J. B. Kogut, “The Renormalization group and the epsilon expansion,” *Phys. Rept.* **12** (1974) 75–200.

[67] Y. Iwasaki, “RENORMALIZATION GROUP ANALYSIS OF LATTICE THEORIES AND IMPROVED LATTICE ACTION. 2. FOUR-DIMENSIONAL NONABELIAN SU(N) GAUGE MODEL,”. UTHEP-118.

[68] Y. Iwasaki and T. Yoshie, “RENORMALIZATION GROUP IMPROVED ACTION FOR SU(3) LATTICE GAUGE THEORY AND THE STRING TENSION,” *Phys. Lett.* **B143** (1984) 449.

[69] Y. Iwasaki, “Renormalization Group Analysis of Lattice Theories and Improved Lattice Action: Two-Dimensional Nonlinear O(N) Sigma Model,” *Nucl. Phys.* **B258** (1985) 141–156.

[70] T. Takaishi, “Heavy quark potential and effective actions on blocked configurations,” *Phys. Rev.* **D54** (1996) 1050–1053.

[71] **QCD-TARO** Collaboration, P. de Forcrand *et al.*, “Renormalization group flow of SU(3) lattice gauge theory: Numerical studies in a two coupling space,” *Nucl. Phys.* **B577** (2000) 263–278, `arXiv:hep-lat/9911033`.

[72] **RBC and UKQCD** Collaboration, D. J. Antonio *et al.*, “First results from 2+1-flavor domain wall QCD: Mass spectrum, topology change and chiral symmetry with L(s) = 8,” *Phys. Rev.* **D75** (2007) 114501, `arXiv:hep-lat/0612005`.

[73] H. B. Nielsen and M. Ninomiya, “Absence of Neutrinos on a Lattice. 1. Proof by Homotopy Theory,” *Nucl. Phys.* **B185** (1981) 20.

[74] A. Zichichi, *New Phenomena in Subnuclear Physics*. Springer, 1 ed., 10, 1977. `http://amazon.com/o/ASIN/0306381826/`.

[75] K. Symanzik, “Continuum Limit and Improved Action in Lattice Theories. 1. Principles and phi**4 Theory,” *Nucl. Phys.* **B226** (1983) 187.

[76] D. B. Kaplan, “A Method for simulating chiral fermions on the lattice,” *Phys. Lett.* **B288** (1992) 342–347, `arXiv:hep-lat/9206013`.

[77] Y. Shamir, “Chiral fermions from lattice boundaries,” *Nucl. Phys.* **B406** (1993) 90–106, `arXiv:hep-lat/9303005`.

[78] V. Furman and Y. Shamir, “Axial symmetries in lattice QCD with Kaplan fermions,” *Nucl. Phys.* **B439** (1995) 54–78, arXiv:hep-lat/9405004.

[79] R. Narayanan and H. Neuberger, “Infinitely many regulator fields for chiral fermions,” *Phys. Lett.* **B302** (1993) 62–69, arXiv:hep-lat/9212019.

[80] K. Symanzik, “Continuum Limit and Improved Action in Lattice Theories. 2. O(N) Nonlinear Sigma Model in Perturbation Theory,” *Nucl. Phys.* **B226** (1983) 205.

[81] R. Narayanan and H. Neuberger, “A Construction of lattice chiral gauge theories,” *Nucl. Phys.* **B443** (1995) 305–385, arXiv:hep-th/9411108.

[82] P. H. Ginsparg and K. G. Wilson, “A Remnant of Chiral Symmetry on the Lattice,” *Phys. Rev.* **D25** (1982) 2649.

[83] M. Luscher, “Exact chiral symmetry on the lattice and the Ginsparg- Wilson relation,” *Phys. Lett.* **B428** (1998) 342–345, arXiv:hep-lat/9802011.

[84] R. C. Brower, H. Neff, and K. Orginos, “Moebius fermions,” *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **153** (2006) 191–198, arXiv:hep-lat/0511031.

[85] A. Borici, “Truncated overlap fermions,” *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **83** (2000) 771–773, arXiv:hep-lat/9909057.

[86] T.-W. Chiu, “Optimal domain-wall fermions,” *Phys. Rev. Lett.* **90** (2003) 071601, arXiv:hep-lat/0209153.

[87] A. D. Kennedy, “Fast evaluation of Zolotarev coefficients,” arXiv:hep-lat/0402038.

[88] M. Gell-Mann, “The Symmetry group of vector and axial vector currents,” *Physics* **1** (1964) 63–75.

[89] S. L. Adler and R. F. Dashen, “Current algebras and applications to particle physics (frontiers in physics: A lecture note & reprint series),”. http://amazon.com/o/ASIN/B003V4E8TQ/.

[90] C. Michael, “The QCD spectrum,” *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **42** (1995) 147–161, arXiv:hep-lat/9412032.

[91] C. T. H. Davies *et al.*, “Further precise determinations of alpha(s) from lattice QCD,” *Phys. Rev.* **D56** (1997) 2755–2765, arXiv:hep-lat/9703010.

[92] G. Martinelli, C. Pittori, C. T. Sachrajda, M. Testa, and A. Vladikas, “A General method for nonperturbative renormalization of lattice operators,” *Nucl. Phys.* **B445** (1995) 81–108, arXiv:hep-lat/9411010.

[93] M. Luscher, R. Narayanan, P. Weisz, and U. Wolff, “The Schrodinger functional: A Renormalizable probe for nonAbelian gauge theories,” *Nucl. Phys.* **B384** (1992) 168–228, arXiv:hep-lat/9207009.

[94] S. Sint, "On the Schrodinger functional in QCD," *Nucl. Phys.* **B421** (1994) 135–158, `arXiv:hep-lat/9312079`.

[95] S. Sint, "One loop renormalization of the QCD Schrodinger functional," *Nucl. Phys.* **B451** (1995) 416–444, `arXiv:hep-lat/9504005`.

[96] C. Sturm *et al.*, "Renormalization of quark bilinear operators in a momentum-subtraction scheme with a nonexceptional subtraction point," *Phys. Rev.* **D80** (2009) 014501, `arXiv:0901.2599 [hep-ph]`.

[97] D. Toussaint and C. T. H. Davies, "The Omega- and the strange quark mass," *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **140** (2005) 234–236, `arXiv:hep-lat/0409129`.

[98] B. C. Tiburzi and A. Walker-Loud, "Decuplet baryon masses in partially quenched chiral perturbation theory," *Nucl. Phys.* **A748** (2005) 513–536, `arXiv:hep-lat/0407030`.

[99] S. R. Sharpe and N. Shoresh, "Physical results from unphysical simulations," *Phys. Rev.* **D62** (2000) 094503, `arXiv:hep-lat/0006017`.

[100] A. Morel, "CHIRAL LOGARITHMS IN QUENCHED QCD," *J. Phys. (France)* **48** (1987) 1111–1119.

[101] A. Duncan, E. Eichten, and H. Thacker, "Electromagnetic Splittings and Light Quark Masses in Lattice QCD," *Phys. Rev. Lett.* **76** (1996) 3894–3897, `arXiv:hep-lat/9602005`.

[102] A. Duncan, E. Eichten, and R. Sedgewick, "Computing electromagnetic effects in fully unquenched QCD," *Phys. Rev.* **D71** (2005) 094509, `arXiv:hep-lat/0405014`.

[103] C. Jung, "Status of dynamical ensemble generation," `arXiv:1001.0941 [hep-lat]`.

[104] S. Uno and M. Hayakawa, "QED in finite volume and finite size scaling effect on electromagnetic properties of hadrons," *Prog. Theor. Phys.* **120** (2008) 413–441, `arXiv:0804.2044 [hep-ph]`.

[105] M. Golterman, "Applications of chiral perturbation theory to lattice QCD," `arXiv:0912.4042 [hep-lat]`.

[106] C. Vafa and E. Witten, "Parity Conservation in QCD," *Phys. Rev. Lett.* **53** (1984) 535.

[107] H. Leutwyler, "On the foundations of chiral perturbation theory," *Ann. Phys.* **235** (1994) 165–203, `arXiv:hep-ph/9311274`.

[108] S. Weinberg, "Phenomenological Lagrangians," *Physica* **A96** (1979) 327.

[109] Y. Nambu, "Axial vector current conservation in weak interactions," *Phys. Rev. Lett.* **4** (1960) 380–382.

[110] J. Goldstone, "Field Theories with Superconductor Solutions," *Nuovo Cim.* **19** (1961) 154–164.

[111] J. Goldstone, A. Salam, and S. Weinberg, "Broken Symmetries," *Phys. Rev.* **127** (1962) 965–970.

[112] H. Georgi, "Weak interactions and modern particle theory (dover books on physics),". `http://amazon.com/o/ASIN/0486469042/`.

[113] H. Georgi, "On-shell effective field theory," *Nucl. Phys.* **B361** (1991) 339–350.

[114] C. Grosse-Knetter, "Effective Lagrangians with higher derivatives and equations of motion," *Phys. Rev.* **D49** (1994) 6709–6719, `arXiv:hep-ph/9306321`.

[115] S. R. Sharpe and N. Shoresh, "Partially quenched chiral perturbation theory without Φ_0," *Phys. Rev.* **D64** (2001) 114510, `arXiv:hep-lat/0108003`.

[116] J. Bijnens and N. Danielsson, "Electromagnetic Corrections in Partially Quenched Chiral Perturbation Theory," *Phys. Rev.* **D75** (2007) 014505, `arXiv:hep-lat/0610127`.

[117] J. Gasser and H. Leutwyler, "Light Quarks at Low Temperatures," *Phys. Lett.* **B184** (1987) 83.

[118] J. Gasser and H. Leutwyler, "Thermodynamics of Chiral Symmetry," *Phys. Lett.* **B188** (1987) 477.

[119] J. Gasser and H. Leutwyler, "Spontaneously Broken Symmetries: Effective Lagrangians at Finite Volume," *Nucl. Phys.* **B307** (1988) 763.

[120] J. S. Schwinger, "On gauge invariance and vacuum polarization," *Phys. Rev.* **82** (1951) 664–679.

[121] J. F. Donoghue, "When Effective Field Theories Fail," *PoS* **EFT09** (2009) 001, `arXiv:0909.0021 [hep-ph]`.

[122] E. E. Jenkins and A. V. Manohar, "Baryon chiral perturbation theory using a heavy fermion Lagrangian," *Phys. Lett.* **B255** (1991) 558–562.

[123] V. Bernard, N. Kaiser, J. Kambor, and U. G. Meissner, "Chiral structure of the nucleon," *Nucl. Phys.* **B388** (1992) 315–345.

[124] S. R. Coleman, J. Wess, and B. Zumino, "Structure of phenomenological Lagrangians. 1," *Phys. Rev.* **177** (1969) 2239–2247.

[125] C. G. Callan, Jr., S. R. Coleman, J. Wess, and B. Zumino, "Structure of phenomenological Lagrangians. 2," *Phys. Rev.* **177** (1969) 2247–2250.

[126] D. B. Kaplan, "Five lectures on effective field theory," `arXiv:nucl-th/0510023`.

[127] J. Gasser, M. E. Sainio, and A. Svarc, "Nucleons with Chiral Loops," *Nucl. Phys.* **B307** (1988) 779.

[128] S. M. Ouellette, "SU(3) chiral symmetry in non-relativistic field theory," `arXiv:hep-ph/0101055`.

[129] M. Frink, B. Kubis, and U.-G. Meissner, "Analysis of the pion kaon sigma-term and related topics," *Eur. Phys. J.* **C25** (2002) 259–276, arXiv:hep-ph/0203193.

[130] T. Doi, T. Blum, M. Hayakawa, T. Izubuchi, and N. Yamada, "The isospin breaking effect on baryons with N(f) = 2 domain wall fermions," *PoS* **LAT2006** (2006) 174, arXiv:hep-lat/0610095.

[131] W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, and W. T. Vetterling, *Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing.* Cambridge University Press, 2 ed., 10, 1992. http://amazon.com/o/ASIN/0521431085/.

[132] A. Hasenfratz, R. Hoffmann, and S. Schaefer, "Reweighting towards the chiral limit," *Phys. Rev.* **D78** (2008) 014515, arXiv:0805.2369 [hep-lat].

[133] T. Ishikawa, Y. Aoki, and T. Izubuchi, "Improving chiral property of domain-wall fermions by reweighting method," *PoS* **LAT2009** (2009) 035, arXiv:1003.2182 [hep-lat].

[134] M. Luscher and F. Palombi, "Fluctuations and reweighting of the quark determinant on large lattices," *PoS* **LATTICE2008** (2008) 049, arXiv:0810.0946 [hep-lat].

[135] **CP-PACS** Collaboration, A. Ali Khan *et al.*, "Light Hadron Spectroscopy with Two Flavors of Dynamical Quarks on the Lattice," *Phys. Rev.* **D65** (2002) 054505, arXiv:hep-lat/0105015.

[136] M. Gorbahn and S. Jager, "Precise MS-bar light-quark masses from lattice QCD in the RI/SMOM scheme," arXiv:1004.3997 [hep-ph].

[137] Y. Aoki, "Non-perturbative renormalization in lattice QCD," *PoS* **LAT2009** (2009) 012, arXiv:1005.2339 [hep-lat].

[138] L. G. Almeida and C. Sturm, "Two-loop matching factors for light quark masses and three-loop mass anomalous dimensions in the RI/SMOM schemes," *Phys. Rev.* **D82** (2010) 054017, arXiv:1004.4613 [hep-ph].

[139] R. F. Dashen, "Chiral SU(3) x SU(3) as a symmetry of the strong interactions," *Phys. Rev.* **183** (1969) 1245–1260.

[140] J. Gasser and H. Leutwyler, "$\eta \to 3\pi$ to One Loop," *Nucl. Phys.* **B250** (1985) 539.

[141] G. Colangelo, S. Lanz, and E. Passemar, "A New Dispersive Analysis of $\eta \to 3\pi$," *PoS* **CD09** (2009) 047, arXiv:0910.0765 [hep-ph].

[142] S. R. Beane and M. J. Savage, "Nucleons in two-flavor partially-quenched chiral perturbation theory," *Nucl. Phys.* **A709** (2002) 319–344, arXiv:hep-lat/0203003.

[143] S. Sasaki, T. Blum, and S. Ohta, "A lattice study of the nucleon excited states with domain wall fermions," *Phys. Rev.* **D65** (2002) 074503, arXiv:hep-lat/0102010.

[144] **RBC and UKQCD** Collaboration, C. Allton *et al.*, “2+1 flavor domain wall QCD on a $(2 \text{ fm})^3$ lattice: light meson spectroscopy with $L_s = 16$,” *Phys. Rev.* **D76** (2007) 014504, arXiv:hep-lat/0701013.

[145] W. N. Cottingham, “The neutron proton mass difference and electron scattering experiments,” *Annals Phys.* **25** (1963) 424–432.

[146] A. Duncan, E. Eichten, and H. Thacker, “Electromagnetic structure of light baryons in lattice QCD,” *Phys. Lett.* **B409** (1997) 387–392, arXiv:hep-lat/9607032.

[147] J. J. Kelly, “Simple parametrization of nucleon form factors,” *Phys. Rev.* **C70** (2004) 068202.

[148] S. R. Beane, K. Orginos, and M. J. Savage, “Strong-isospin violation in the neutron proton mass difference from fully-dynamical lattice QCD and PQQCD,” *Nucl. Phys.* **B768** (2007) 38–50, arXiv:hep-lat/0605014.

[149] **JLQCD** Collaboration, E. Shintani *et al.*, “S-parameter and pseudo-Nambu-Goldstone boson mass from lattice QCD,” *Phys. Rev. Lett.* **101** (2008) 242001, arXiv:0806.4222 [hep-lat].

[150] **RBC** Collaboration, P. A. Boyle, L. Del Debbio, J. Wennekers, and J. M. Zanotti, “The S Parameter in QCD from Domain Wall Fermions,” *Phys. Rev.* **D81** (2010) 014504, arXiv:0909.4931 [hep-lat].

[151] G. Amoros, J. Bijnens, and P. Talavera, “QCD isospin breaking in meson masses, decay constants and quark mass ratios,” *Nucl. Phys.* **B602** (2001) 87–108, arXiv:hep-ph/0101127.

[152] D. Renfrew, T. Blum, N. Christ, R. Mawhinney, and P. Vranas, “Controlling Residual Chiral Symmetry Breaking in Domain Wall Fermion Simulations,” *PoS* **LATTICE2008** (2008) 048, arXiv:0902.2587 [hep-lat].

[153] A. Portelli *et al.*, “Electromagnetic corrections to light hadron masses,” arXiv:1011.4189 [hep-lat].

[154] S. Bonanos and K. Kamimura, “On the Cayley-Hamilton Theorem for Supermatrices,” arXiv:1003.2667 [math-ph].