

2010 年度 学位論文

アノマラス $U(1)$ 理論における自発的な超対称性の
破れとモジュライの安定化

名古屋大学大学院理学研究科 素粒子宇宙物理学専攻
素粒子論研究室 (E 研)

西野 裕之

概要

最小超対称標準模型は、標準模型の問題点を解決するモデルとして注目され、盛んに研究されている。また、標準模型の3つのゲージ結合定数を1つに統一でき、大統一理論を示唆していることも超対称性を考える動機の1つである。特に、超対称大統一理論としてアノマラス $U(1)$ ゲージ対称性を課した E_6 大統一理論がある。この理論は大統一理論の問題であるヒッグス粒子の質量の2重項3重項分離の問題を自然に解くことができる理論である。また、この大統一理論は湯川行列の階層性のような様々な階層構造を説明できる魅力的な理論でもある。一方、超対称性は、現実の世界で破れていると考えられており、現象論を考える上で、超対称性の破れを理解することは重要である。

本研究は、この超対称性の破れについての研究である。特に大統一理論の問題を自然に解くアノマラス $U(1)$ 理論を用いた超対称性の破れについて研究した。先行研究で、アノマラス $U(1)$ 理論を使った超対称性の破れが研究されたが、その理論では $U(1)_R$ 対称性を理論に課しており、それが本質的になっていた。一方、大統一理論の問題を自然に解くアノマラス $U(1)$ 理論では $U(1)_R$ 対称性を課しておらず、両者は独立な理論であった。そこで、本研究では、 $U(1)_R$ 対称性を課さない一般的な相互作用を含むアノマラス $U(1)$ 理論を考え超対称性の破れの真空を探した。この研究により、このモデルには超対称な真空があるが、準安定真空も存在し、超対称性を自発的に破っていることが新たにわかった。 $U(1)_R$ 対称性を課したモデルのように最低エネルギーの真空で超対称性を破る必要は無く、 $U(1)_R$ 対称性の無い一般的な相互作用を含むモデルの準安定真空で超対称性を破ればよいのである。そして、この準安定真空は、湯川行列の階層性のような様々な階層構造を説明できる従来のアノマラス $U(1)$ 理論の特徴を保つ真空であることが新たにわかった。また、本研究により、そのような超対称性を破る準安定真空は、 $U(1)_R$ 対称性を課していないアノマラス $U(1)$ 大統一理論にアノマラス $U(1)$ チャージ正の場を1つ入れるだけで得られることが分かった。

さらに、本研究では、この超対称性の破れのモデルを使って新しいモジュライの安定化について研究した。モジュライとは、平坦な方向の場である。本研究のアノマラス $U(1)$ 理論を用いた超対称性の破れでも、ポテンシャルはモジュライに依存している。ゆえに、もしモジュライが安定化されていないならば、本研究のモデルで超対称性を破っても、モジュライの方向が安定でないため、そこは、超対称性を破る準安定な真空でなくなる。ゆえに、モジュライの方向に対して安定化を考えないといけない。我々の新しい安定化のシナリオでは、多くの先行研究で使われているモジュライに依存するスーパーポテンシャルを導入していない。すなわち、現象論の様々な問題点を解くアノマラス $U(1)$ 理論の重要なメカニズム (SUSY zero メカニズム) を壊さずにモジュライの安定化を実現できる新しいシ

ナリオである。また、今回研究した模型の発展として、超対称性粒子の現実的な質量をどのように生成するかを議論した。そこでは E_6 大統一理論の相互作用を使って高次のオペレータやループを計算して現実的なゲージノの質量、スカラーフェルミオンの質量を出すためには、どのようにすればよいかを研究した。

目次

第 1 章	introduction	6
第 2 章	超対称性理論	9
2.1	introduction	9
2.2	超対称代数	12
2.3	superfield	12
2.4	chiral superfield、スーパーポテンシャル、ケーラーポテンシャル	15
2.5	vector superfield	19
2.6	ゲージ不変な相互作用	21
2.7	超対称性の自発的対称性の破れ	24
第 3 章	MSSM	30
3.1	MSSM スーパーポテンシャルと R パリティ	30
3.2	ソフトな超対称性の破れのパラメータ	33
3.3	gravity mediation	35
3.4	gauge mediation	36
第 4 章	アノマラス $U(1)$ ゲージ対称性	40
4.1	introduction	40
4.2	真空期待値、SUSY zero メカニズム	42
第 5 章	アノマラス $U(1)$ 理論における自発的な超対称性の破れ	46
第 6 章	アノマラス $U(1)$ 理論における自発的な超対称性の破れの一般論	53
第 7 章	アノマラス $U(1)$ ゲージ対称性のある模型におけるモジュライの安定化	56
第 8 章	発展	61

第9章	まとめと議論	70
	謝辞	73
	参考文献	74

第 1 章

introduction

最小超対称標準模型 (MSSM) は、標準模型 (SM) を超える最も有力な模型の一つである [1]-[3]。MSSM の魅力的な点は、ヒッグス粒子の質量パラメータの微調整問題を解くことができ、標準模型にない暗黒物質の候補を与えることの出来る点である。また、標準模型の 3 つのゲージ結合定数があるスケールで統一でき、大統一理論 (GUT) を示唆していることも超対称性 (SUSY) を考える大きな動機の一つである [14]-[16]。一方、まだ実験で標準模型の超対称パートナーが見つかっていないことから私たちの宇宙では、超対称性が破れている。電弱スケールの物理、例えば $K^0\bar{K}^0$ 混合や $\mu \rightarrow e\gamma$ などの過程や超対称性なヒッグスの質量である μ 項がなぜ電弱スケール (超対称性の破れのスケール) にあるのかなど問題は超対称性の破れと深く関わっており、超対称性の破れの起源を理解することは非常に重要である [17]-[20]。

Fayet-Iliopoulos (FI) 項をもつ $U(1)$ ゲージ対称性 (アノマラス $U(1)$) [23] は、フェルミオンの世代間の質量階層性、すなわち湯川行列の階層性の説明によく用いられる理論である [24]-[32]。このゲージ理論は、対称性から許されるすべての相互作用を $O(1)$ 係数を用いて導入し、湯川行列の階層構造を説明できる理論である。また、アノマラス $U(1)$ ゲージ対称性は、大統一理論のゲージ群を破るさいに重要な役割を果たしている [30]-[37]。そして、このアノマラス $U(1)$ ゲージ対称性を使って、大統一理論の重大な問題点であるヒッグス粒子の質量の 2 重項-3 重項分離の問題を対称性で許されるすべての相互作用を $O(1)$ 係数を用いて含め、自然に解くことが出来る [30]-[32][38]。

一方、先行研究で、アノマラス $U(1)$ ゲージ対称性を使って超対称性を自発的に破ることが出来ることがわかった [41]。その模型では、対称性で許される一般的な相互作用を理論に含めて超対称性を自発的に破るためには、 $U(1)_R$ 対称性が本質的な役割をはたしていた。一方、理論に $U(1)_R$ 対称性がなければ、超対称な真空が必ず存在する。上記の湯川行列の階層性を説明する模型や 2 重項-3 重項分離の問題を解く大統一理論など現象論の模型 [30]-[32][38] は、 $U(1)_R$ 対称性を課していない。ゆえに、 $U(1)_R$ 対称性のない模

型で自発的な超対称性の破れを研究することはとても重要なことである。このことは、準安定真空を考えれば、 $U(1)_R$ 対称性のない模型でも、F ことが可能である [42]-[44]。しかし、準安定真空で超対称性を破る模型の多くは超対称性を破るために新たに超対称な強い相互作用 (SQCD) を導入し、超対称性の破れを実現していた。我々の目的は、こうした新しい対称性を導入することなく超対称性を自発的に破り、上記の現象論の良い特徴を壊さない真空を見つけることである。^{*1}。この論文で我々は、 $U(1)_R$ 対称性を課さないアノマラス $U(1)$ ゲージ相互作用で許されるすべての相互作用を $O(1)$ 係数を用いて導入した模型では、超対称性は準安定な真空で自発的に破れ、この準安定真空は上記のアノマラス $U(1)$ の現象論的な模型の良い性質を保った真空であることを指摘した。超対称性を破るために新たに SQCD を導入することなく、アノマラス $U(1)$ 理論をだけを使って、その準安定真空を見つけたことが今回の研究の新しいことである。 $U(1)_R$ 対称性を課した模型のように最低エネルギーの真空で超対称性を破る必要は無く、 $U(1)_R$ 対称性の無い一般的な相互作用を含む模型の準安定真空で超対称性を破ればよいのである。そして、大統一理論を破るスケールだけでなく、超対称性の破れのスケールもアノマラス $U(1)$ のチャージで決めることができることも新たにわかった。また、従来のアノマラス $U(1)$ ゲージ対称性を課した超対称大統一理論にたった 1 つ、アノマラス $U(1)$ チャージ正の場を導入するだけで、準安定真空で超対称性を破ることができ、その破れのスケールもまた導入した場のチャージの大きさによってコントロールすることが出来ることも新たにわかったことである。

理論的にも現象論的にも最も大きな問題点の一つは、モジュライの安定化の問題である [45]。モジュライはアノマラス $U(1)$ 理論の中で重要な場の一つである。例えば、アノマラス $U(1)$ ゲージ対称性を課した模型において、ゲージアノマリーはこのモジュライのシフトによってキャンセルできる。また、一般的に FI パラメータはモジュライの真空期待値によって決まる [53]-[56]。そして、すべての場の真空期待値はモジュライの場 (FI パラメータ) を通じて関係しており、モジュライの方向によって真空が安定かどうかなども考えなければならない。このようにアノマラス $U(1)$ ゲージ対称性を課して超対称性を破る模型でモジュライの安定化を同時に考えることは、極めて重要である。SQCD を使って超対称性をダイナミカルに破る様々なシナリオで、モジュライを安定化させる試みがある [46]-[52]。我々は、この論文で紹介する超対称性の破れのシナリオでモジュライを安定化できることを示す。そして、その模型では、モジュライに依存するスーパーポテンシャルなしで超対称性を自発的に破り、モジュライを安定化する新しいシナリオである。従来のもジュライの安定化の模型では、モジュライに依存するスーパーポテンシャル (非摂動

^{*1} もし、SQCD を導入し、非摂動効果などを導入すると、湯川の階層性を説明する模型や 2 重項-3 重項の分離の問題を解くメカニズム (SUSY zero メカニズム) [31][38][57] を壊してしまう。

効果)を導入することがモジュライの安定化の本質的な点であった。しかしながら、そのようなモジュライに依存するスーパーポテンシャルを導入すると、上記の現実的な現象論の模型の本質的なメカニズムである SUSY zero メカニズム [31][38][57] が壊れてしまうので、そのような効果のない模型でのモジュライの安定化を考える今回の新しい安定化の方法はとても重要である。

本論文は1章から4章までがレビューであり、5章から8章までが本論文の研究内容である。まず2章では超対称性理論、3章は MSSM、4章でアノマラス $U(1)$ ゲージ対称性の簡単なレビューを行う。5章では、本論文の研究の中心である、アノマラス $U(1)$ ゲージ対称性を使った模型での自発的な超対称性の破れの研究について書いている。まず、 $U(1)_R$ 対称性のある模型での超対称性の破れを考えた後、今回の研究の中心である $U(1)_R$ 対称性の無い模型での超対称性の破れを考える。この研究した模型から、超対称な真空の他に準安定な超対称性を破る真空が存在することが新たにわかった。そして、この真空は様々な現象論の問題点を解くアノマラス $U(1)$ ゲージ理論の特徴を保っていることも新たにわかった。6章では、5章で書いた $U(1)_R$ 対称性を課していないアノマラス $U(1)$ 理論の模型の一般的な場合を考えている。そして、この研究により、たった一つアノマラス $U(1)$ チャージ正の場を従来の模型に入れただけで超対称性を準安定真空で破り、現象論の多くの問題点を解くためのアノマラス $U(1)$ ゲージ理論の特徴を保っていることが分かった。7章では、5章で書いた $U(1)_R$ 対称性を課していないアノマラス $U(1)$ 理論の模型を使った新しいモジュライの安定化の研究について書いた。ただ安定化するのではなく、SUSY zero メカニズムを壊す SQCD、非摂動効果を導入せず、5章の研究内容で紹介した模型の枠組みでモジュライの安定化ができる新しいシナリオである。8章では、この模型の発展として簡単に伝播についての研究したことを書いている。ここでは、 E_6 GUT の相互作用項を利用した gravity mediation と gauge mediation を使って、現実的なスカラーフェルミオンの質量、ゲージノの質量を生成するにはどうすればよいかを議論している。最後の章で、まとめとこの研究の将来の課題について議論する。

第 2 章

超対称性理論

この章では超対称性理論についてレビューする。まず、超対称性理論を導入するモチベーションから紹介し、超対称性理論で導入される superfield やスーパーポテンシャルなどのレビューを順にやっていく。これらのレビューは、参考文献 [4][5] を参考にしている。

2.1 introduction

まず、このセクションで超対称性理論を導入するモチベーションの 1 つを紹介することにする。

標準模型 (SM) は、現在の加速器実験の到達できるエネルギーの実験結果と非常によく一致しており、成功を収めている。しかし、SM は次のような問題点を含んでいる。

- ・ヒッグス粒子の質量パラメータの微調整問題。
- ・クォークやレプトンの質量の階層性。
- ・ニュートリノの質量がない。
- ・暗黒物質の候補が無い。

等々。 (2.1)

これらの問題のうち、ここでは、ヒッグス粒子の質量パラメータの微調整問題について考えることにしよう。

SM のヒッグス場 H のポテンシャル V は次で与えられる。

$$V = m_H^2 |H|^2 + \lambda |H|^4 \quad (2.2)$$

ただし、 $m_H^2 < 0$ である。 $\frac{\partial V}{\partial |H|^2} = 0$ から、ヒッグス場の真空期待値は $\langle H \rangle = \sqrt{\frac{-m_H^2}{2\lambda}}$ となる。ここで $\langle H \rangle = 174 \text{ GeV}$ であるので、おおざっぱに $m_H^2 \sim O((100\text{GeV})^2)$ と期待される。

しかしながら、 m_H^2 は、図 2.1 の量子補正 δm_{H1}^2 を受ける。

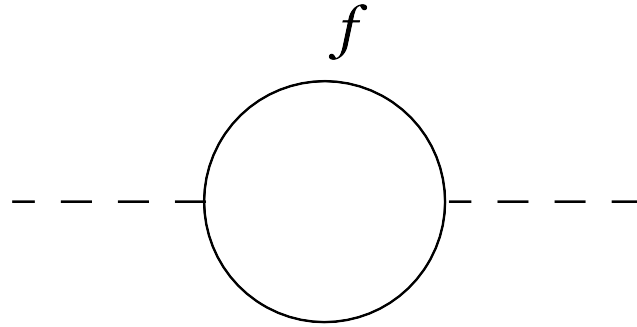


図 2.1 SM のラグランジアンに含まれる湯川相互作用、 $\mathcal{L} = -Y_f H \bar{f} f$ (f はフェルミオン) を通じて書ける 1 ループ ダイアグラム

$$-i\delta m_{H1}^2 = i \frac{|Y_f|^2}{16\pi^2} \left[\Lambda^2 - 3m_f^2 \ln \left(\frac{\Lambda^2 + m_f^2}{m_f^2} \right) + \dots \right] \quad (2.3)$$

$$(2.4)$$

ここで「 \dots 」は有限の項であり、ここでは省略した。また、 Λ は、理論のカットオフであり、SM から別の理論に移行するスケールである。そして、フェルミオン f は三世代全てのレプトンと 3 種類のカラーをもつ全てのクォークを表しているが、特に大きな寄与をもたらすのが湯川結合 $Y_t \sim 1$ のトップクォークの寄与である。もし、カットオフを重力の効果を見逃すことのできるスケール (プランクスケール $M_p \sim 10^{18}$) にとると、 $m_H^2 + \delta m_{H1}^2 \sim (100 \text{ GeV})^2$ のために、裸のパラメータ (bare parameter) m_H^2 を 10^{-28} パーセントの精度で微調整をする必要が出てきてしまう。これがパラメータの微調整問題である。

一方、ゲージ粒子やフェルミオンの場合は、ヒッグス粒子のような大きな微調整は必要ない。なぜなら、ゲージ粒子やフェルミオンは、それぞれゲージ対称性やカイラル対称性があり Λ よりずっと低いエネルギースケール (\sim 電弱スケール) までこれらの対称性が成り立ち、高いスケールで質量項を禁止できるから (質量)² の量子補正のなかに Λ^2 は含まれず大きな微調整は必要なくなる。(量子補正は $\ln \Lambda$ の形になる)

この階層性の問題を解決する方法はいくつか提案されており、その代表的な模型の 1 つに超対称性理論がある。この理論を考えるとこの問題点が解決できる理由は大雑把に言うところの通りである。ゲージ粒子とフェルミオンには、それぞれ対称性があることから (質量)² の量子補正に二次発散はないことを上で述べたが、ヒッグス粒子にも新しい対称性を導入すれば微調整問題は解決できるという考え方である。この新しい対称性が超対称性である。超対称性理論は、フェルミオンとボソンの間の対称性で両者が同じ質量をもつ。ヒッグス粒子と同じ質量をもつフェルミオンは、ヒッグシーノと呼ばれ、カイラル対

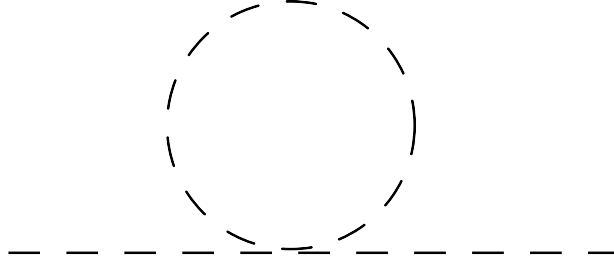


図 2.2 MSSM のラグランジアンに含まれる $\mathcal{L}_{scalar} = -\frac{\lambda}{2} |H|^2 (|S_{fL}|^2 + |S_{fR}|^2)$ を通して書けるダイアグラム。ここで S_f は SM のクォーク、レプトンの超対称性粒子であり、 λ は結合定数である。

称性から (質量)² の量子補正は二次発散を含まず log 発散しているので、ヒッグス粒子の (質量)² の量子補正も log 発散になり、大きな微調整も必要なくなる。

実際に、二次発散が出なくなる理由は計算でもチェックできる。超対称性を課した SM、特に、拡張を最小にした模型 (MSSM) では、図 2.2 のダイアグラムが新しく書け、ヒッグス粒子の (質量)² の量子補正が新しく生じることになる。

$$-i\delta m_{H2}^2 = -i\frac{\lambda}{16\pi^2} \left[\Lambda^2 - m_{fL}^2 \ln \left(\frac{\Lambda^2 + m_{fL}^2}{m_{fL}^2} \right) - m_{fR}^2 \ln \left(\frac{\Lambda^2 + m_{fR}^2}{m_{fR}^2} \right) + \dots \right] \quad (2.5)$$

ゆえに、 $\delta m_{H1}^2 + \delta m_{H2}^2$ から、ヒッグス粒子の (質量)² の量子補正は、

$$\delta m_H^2 = \frac{1}{16\pi^2} \left[3|Y_f|^2 m_f^2 \ln \left(\frac{\Lambda^2 + m_f^2}{m_f^2} \right) + \dots \right] \quad (2.6)$$

となる。ただし、MSSM では、 $\lambda = |Y_f|^2$ が成り立つのでこれを使った。このように、超対称性を課した SM では量子補正に二次発散が生じず、パラメータの微調整も必要なくなる。ダイアグラムで見れば、フェルミオンループとスカラーの間に統計性の違いからループ計算のときに符号が逆に出ることと、超対称性により相互作用の結合定数からくる係数の大きさが等しくなること ($\lambda = |Y_f|^2$) がこの二次発散がキャンセルした理由である。

このセクションではヒッグス粒子の質量パラメータの微調整問題の解決を紹介したが、他にも MSSM を考えるとうれしいことがいくつかある。その一つが暗黒物質の候補を MSSM は与えていることである。MSSM の章で紹介する R parity のおかげで SM の粒子に崩壊しない最も軽い粒子がこの模型では存在でき、宇宙論を考える上でも大きなモチベーションの一つになっている。また、SM の 3 つのゲージ結合定数が、繰り込み群を考えることで、あるスケール ($\sim 10^{16}$ GeV) で一致することが分かっている。これは、重力以外の相互作用や物質粒子を一つの粒子に統一する大統一理論を示唆しており、理論と

して非常に魅力的である。このように超対称性理論を考えると、非常に魅力的な点が多いことがわかる。

一方、現象論的に超対称性は破れていると考えられ、その破れの機構を考えることは非常に重要である。本論文ではこの破れの機構について研究している。そのために次のセクションから、本論文の中心となる研究成果をスムーズに議論するために、この超対称性の基礎についてレビューしていくことにする。

2.2 超対称代数

超対称性のレビューを始めるためにここでは、その基礎となる超対称代数についてまず復習してみる。超対称代数を復習するために Colman-Mandula の定理 [6] を紹介する。Colman-Mandula の定理は、「 S 行列と可換な generator は、次の3つに限る」と主張する。

$$\begin{aligned}
 &\cdot \text{並進の generator} \quad \cdots P_\mu \\
 &\cdot \text{ローレンツ generator} \quad \cdots M_{\mu\nu} \\
 &\cdot \text{内部対称性の generator} \quad \cdots B_A
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

しかしながら、この定理は反交換する generator を考慮していない。反交換するフェルミオンの generator Q_α ($\alpha = 1, 2$) を含めた Colman-Mandula の定理を拡張した Haag-Lopuszanski-Sohnius の定理 [7] によると $P_\mu, M_{\mu\nu}, B_A$ で閉じていた代数にさらに次の交換子、反交換子が新たに加わる。

$$\begin{aligned}
 \{Q_\alpha, Q_{\dot{\alpha}}^\dagger\} &= 2\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu P_\mu \\
 \{Q_\alpha, Q_\beta\} &= \{Q_{\dot{\alpha}}^\dagger, Q_{\dot{\beta}}^\dagger\} = 0 \\
 [P_\mu, Q_\alpha] &= [P_\mu, Q_{\dot{\alpha}}^\dagger] = 0
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

$Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}$ は、スピンを上げ下げする generator である。また、 $\theta_\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}$ のグラスマン座標 (半交換する座標) を導入すると、 $Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}$ は、その座標の並進の generator になる。それは次のセクションでレビューする。

2.3 superfield

このセクションでは、superfield と超対称性変換についてレビューしていく。superfield とは時空の座標 x^μ (μ はローレンツ変換の添え字) に加えて反交換する座標 $\theta_\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}$ (superspace) を引数にもつ場である。まず、この superfield を議論する前に超対称性 generator Q_α などの微分オペレータを考えていくことにする。なぜなら、この微分

operator を使って superfield の変換や、すぐ後の section で紹介する chiral superfield の定義を与えたいからである。

超対称性 generator は、パラメータ θ_α を使ってリー代数を考えることができ、対応する群の元を次のように定義する。^{*1 *2}

$$G(x^\mu, \theta, \bar{\theta}) = e^{i\{-x^\mu P_\mu + \theta Q + \bar{\theta} \bar{Q}\}} \quad (2.9)$$

そして、ある関数 $f(y, \theta', \bar{\theta}')$ に G を次のように 2 回作用させてみる。Hausdorff の公式 $e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]+\dots}$ と超対称代数を使って、次のように書ける。

$$\begin{aligned} G(0, \xi, \bar{\xi}) G(x^\mu, \theta, \bar{\theta}) f(y, \theta', \bar{\theta}') &= e^{i\{\xi Q + \bar{\xi} \bar{Q}\}} e^{i\{-x^\mu P_\mu + \theta Q + \bar{\theta} \bar{Q}\}} f(y, \theta', \bar{\theta}') \\ &= e^{i\{-P_\mu(x^\mu + i\theta\sigma^\mu \bar{\xi} - i\xi\sigma^\mu \bar{\theta}), \theta + \xi, \bar{\theta} + \bar{\xi}\}} f(y, \theta', \bar{\theta}') \\ &= G(x^\mu + i\theta\sigma^\mu \bar{\xi} - i\xi\sigma^\mu \bar{\theta}, \theta + \xi, \bar{\theta} + \bar{\xi}) f(y, \theta', \bar{\theta}') \end{aligned} \quad (2.10)$$

この結果は、あるパラメータ空間の変換が次のようになることを示している。

$$g(0, \xi, \bar{\xi}) : f(x^\mu, \theta, \bar{\theta}) \longrightarrow f(x^\mu + i\theta\sigma^\mu \bar{\xi} - i\xi\sigma^\mu \bar{\theta}, \theta + \xi, \bar{\theta} + \bar{\xi}) \quad (2.11)$$

この変化 Δf は、

$$\begin{aligned} \Delta f(x, \theta, \bar{\theta}) &= f(x^\mu + i\theta\sigma^\mu \bar{\xi} - i\xi\sigma^\mu \bar{\theta}, \theta + \xi, \bar{\theta} + \bar{\xi}) - f(x, \theta, \bar{\theta}) \\ &= \xi^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial \theta^\alpha} - i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \partial_\mu \right) f(x, \theta, \bar{\theta}) + \bar{\xi}_{\dot{\alpha}} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}} - i\theta^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\beta}}^\mu \epsilon^{\dot{\beta}\dot{\alpha}} \partial_\mu \right) f(x, \theta, \bar{\theta}) \end{aligned} \quad (2.12)$$

となることから、generator $Q_\alpha, \bar{Q}^{\dot{\alpha}}$ の微分オペレータを $\mathcal{Q}_\alpha, \bar{\mathcal{Q}}^{\dot{\alpha}}$ と表すと上の結果から、次のことが分かった。

$$\xi^\alpha \mathcal{Q}_\alpha + \bar{\xi}_{\dot{\alpha}} \bar{\mathcal{Q}}^{\dot{\alpha}} = \xi^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial \theta^\alpha} - i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \partial_\mu \right) + \bar{\xi}_{\dot{\alpha}} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}} - i\theta^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\beta}}^\mu \epsilon^{\dot{\beta}\dot{\alpha}} \partial_\mu \right) \quad (2.13)$$

そして、元 $e^{i(\xi Q + \bar{\xi} \bar{Q})}$ は、微分オペレータで書くと $e^{(\xi \mathcal{Q} + \bar{\xi} \bar{\mathcal{Q}})}$ に対応している。この微分オペレータを使って再度 (2.11) を表そうと思えば、 $e^{(\xi \mathcal{Q} + \bar{\xi} \bar{\mathcal{Q}})} f(x^\mu, \theta, \bar{\theta}) = f(x^\mu + i\theta\sigma^\mu \bar{\xi} - i\xi\sigma^\mu \bar{\theta}, \theta + \xi, \bar{\theta} + \bar{\xi})$ となる。また、この微分オペレータは、(2.13) の表現を使って次の交換関係を満たすことが分かる。

$$\begin{aligned} \{\mathcal{Q}_\alpha, \bar{\mathcal{Q}}^{\dot{\alpha}}\} &= 2i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \partial_\mu \\ \{\mathcal{Q}_\alpha, \mathcal{Q}_\beta\} &= \{\bar{\mathcal{Q}}^{\dot{\alpha}}, \bar{\mathcal{Q}}^{\dot{\beta}}\} = 0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

^{*1} θ のエルミート共役を習慣上 $\bar{\theta}$ と書くので対応してここでは Q^\dagger を \bar{Q} と表すことにする。

^{*2} $(\theta Q)^\dagger = \bar{\theta} \bar{Q}$ なので、もちろん G は $\det G = 1, G^\dagger G = G G^\dagger = 1$ より unitary である。

次に (2.10) の作用の方向を逆にして、 Q とは異なる微分オペレータを導出する。その微分オペレータは、つぎのセクションでレビューする chiral superfield の条件に必要なので重要な微分オペレータである。 $G(x^\mu, \theta, \bar{\theta})$ が左側に作用する場合を考える。このような操作をすることで、新たな微分オペレータ $\mathcal{D}_\alpha, \bar{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}}$

$$\xi^\alpha \mathcal{D}_\alpha + \bar{\xi}_{\dot{\alpha}} \bar{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}} = \xi^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial \theta^\alpha} + i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \partial_\mu \right) + \bar{\xi}_{\dot{\alpha}} \left(-\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} - i\theta^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \partial_\mu \right) \quad (2.15)$$

を定義できる。この $\mathcal{D}_\alpha, \bar{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}}$ は super derivative と呼ばれている。この表現から、 $\mathcal{D}_\alpha, \bar{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}}$ は以下の反交換関係を満たすことが分かる。

$$\begin{aligned} \{\mathcal{D}_\alpha, \bar{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}}\} &= -2i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \partial_\mu \\ \{\mathcal{D}_\alpha, \mathcal{D}_\beta\} &= \{\bar{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}}, \bar{\mathcal{D}}_{\dot{\beta}}\} = 0 \end{aligned} \quad (2.16)$$

また、同様の計算で Q と \mathcal{D} は反交換することがいえる。

$$\{\mathcal{D}_\alpha, Q_\beta\} = \{\mathcal{D}_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = \{\bar{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}}, Q_\beta\} = \{\bar{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}}, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = 0 \quad (2.17)$$

今から superfield を導入しよう。このセクションの最初に述べたように superfield とは、普通の時空の座標に加えて反交換する座標 $\theta_\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}$ (superspace) の関数である。superfield $S(x, \theta, \bar{\theta})$ は $\theta_\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}$ でベキ展開できる。

$$\begin{aligned} S(x, \theta, \bar{\theta}) &= C(x) + \theta\kappa(x) + \bar{\theta}\bar{\chi}(x) + \theta\theta M(x) \\ &\quad + \bar{\theta}\bar{\theta}N(x) + \theta\sigma^\mu\bar{\theta}V_\mu(x) + \theta\theta\bar{\theta}\bar{\lambda} + \bar{\theta}\bar{\theta}\theta\psi(x) + \theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}D(x) \end{aligned} \quad (2.18)$$

また、この superfield の超対称性変換は以下のように定義される。

$$\begin{aligned} \delta_\xi S(x, \theta, \bar{\theta}) &= \delta_\xi C(x) + \theta\delta_\xi\kappa(x) + \bar{\theta}\delta_\xi\bar{\chi}(x) + \theta\theta\delta_\xi M(x) \\ &\quad + \bar{\theta}\bar{\theta}\delta_\xi N(x) + \theta\sigma^\mu\bar{\theta}\delta_\xi V_\mu(x) + \theta\theta\bar{\theta}\delta_\xi\bar{\lambda} + \bar{\theta}\bar{\theta}\theta\delta_\xi\psi(x) + \theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\delta_\xi D(x) \\ &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (\xi Q + \bar{\xi}\bar{Q}) S(x, \theta, \bar{\theta}) \end{aligned} \quad (2.19)$$

そして、上で定義された superfield の特徴として、二つの superfield S_1, S_2 の積や和もまた superfield という特徴がある。：

$$\begin{aligned} \delta_\xi (S_1 S_2) &= (\delta_\xi S_1) S_2 + S_1 (\delta_\xi S_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\xi Q + \bar{\xi}\bar{Q}) (S_1 S_2) \\ \delta_\xi (S_1 + S_2) &= \delta_\xi S_1 + \delta_\xi S_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\xi Q + \bar{\xi}\bar{Q}) (S_1 + S_2) \end{aligned} \quad (2.20)$$

superfield S の fcomponent field ($C(x), \kappa(x), \bar{\chi}(x), \dots$) の変換は、変換前と後の各 $\theta, \bar{\theta}$ のベキの係数を見ることによって得られる。ここでは、特に D の変換についてだけ、

すなわち、 $\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}$ を注目してみると、

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} (\xi Q + \bar{\xi} \bar{Q}) S(x, \theta, \bar{\theta}) &\ni \frac{1}{\sqrt{2}} (\xi Q + \bar{\xi} \bar{Q}) (\theta\theta\bar{\lambda} + \bar{\theta}\bar{\theta}\psi(x) + \theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}D(x)) \\ &\ni \partial_\mu \left(-i \frac{1}{\sqrt{2}} \xi \sigma^\mu \bar{\lambda} - i \frac{1}{\sqrt{2}} \psi \sigma^\mu \bar{\xi} \right) \theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta} \end{aligned} \quad (2.21)$$

となり、ゆえに D の変換は、以下ようになる。

$$\delta_\xi D(x) = \partial_\mu \left(-i \frac{1}{\sqrt{2}} \xi \sigma^\mu \bar{\lambda} - i \frac{1}{\sqrt{2}} \psi \sigma^\mu \bar{\xi} \right) \quad (2.22)$$

この全微分の形は後の超対称性不変な action を作る時などに重要になる。全微分が出てきた理由は、 Q に含まれる $\bar{\theta}\partial_\mu$ で各 component の θ の次数が上がり、一方 D は最高次なので Q に含まれる $\frac{\partial}{\partial\theta}$ によって $\theta^2\bar{\theta}^2$ の次数に落ちるような高次の項がないからである。後のセクションで拘束条件のある、いくつかの superfield にあうが、これら全て $\theta, \bar{\theta}$ の最高次数の component field の SUSY 変換は全微分になる。

しかしながら、ここで導入した S は一般的な superfield であり、可約であるが、superfield に拘束条件を与えることで既約になる。この拘束条件のある superfield は、例えば $DS = 0$ を満たす chiral superfield や $S^\dagger = S$ を満たす vector superfield がある。これら chiral super field、vectorsuperfield は、MSSM など現実的な模型をつくる時に必要な superfield であり、次のセクションで詳しく議論していく。

2.4 chiral superfield、スーパーポテンシャル、ケーラーポテンシャル

次の条件を満たす superfield Φ を chiral superfield という。

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}} \Phi = 0 \quad (2.23)$$

ここで、 $\bar{D}_{\dot{\alpha}} = \left(-\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} - i\theta^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \partial_\mu \right)$ である。

chiral superfield は、超対称性変換をしても chiral superfield である。なぜなら、無限小 parameter $\xi, \bar{\xi}$ とすると Q, \bar{Q} と $\bar{D}_{\dot{\alpha}}$ は反交換するので、 $[\xi Q + \bar{\xi} \bar{Q}, \bar{D}_{\dot{\alpha}}] = 0$ となることから (2.23) を満たす superfield Φ は超対称性変換しても chiral superfield である。

条件 (2.23) をみたく superfield を求めるため、 x^μ の代わりに $y^\mu = x^\mu + i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}$ 使う。なぜなら、 y^μ と θ_α は、

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}}(x^\mu + i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}) = 0, \quad \bar{D}_{\dot{\alpha}}\theta = 0 \quad (2.24)$$

を満たすことから Φ は、 y^μ と θ の関数なら必ず条件 (2.23) を満たすことができるからである。ゆえに Φ は次のように θ でベキ展開できる。

$$\Phi(y, \theta, \bar{\theta}) = \phi(y) + \sqrt{2}\theta\psi(y) + \theta\theta F(y)$$

$$\begin{aligned}
&= \phi(x) + i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu\phi(x) + \frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\partial_\mu\partial^\mu\phi(x) \\
&\quad + \sqrt{2}\theta\psi(x) + \frac{-i}{\sqrt{2}}\theta\theta\partial_\mu\psi(x)\sigma^\mu\bar{\theta} + \theta\theta F(x)
\end{aligned} \tag{2.25}$$

これは Φ の最も一般的な展開である。

また、superfield Φ^\dagger (Φ のエルミート共役) は以下の条件を満たす。

$$\mathcal{D}_\alpha\Phi^\dagger = 0 \tag{2.26}$$

明らかに、 $y^{\dagger\mu} = x^\mu - i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}$ と $\bar{\theta}$ は

$$\mathcal{D}_\alpha(x^\mu - i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}) = 0, \quad \mathcal{D}_\alpha\bar{\theta} = 0 \tag{2.27}$$

を満たすので、 Φ^\dagger は次のように一般的に展開できる。

$$\begin{aligned}
\Phi^\dagger(y, \theta, \bar{\theta}) &= \phi^*(y) + \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\psi}(y) + \bar{\theta}\bar{\theta}F^*(y) \\
&= \phi^*(x) - i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu\phi^*(x) + \frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\partial_\mu\partial^\mu\phi^*(x) \\
&\quad + \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\psi}(x) + \frac{-i}{\sqrt{2}}\bar{\theta}\bar{\theta}\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\psi}(x) + \bar{\theta}\bar{\theta}F^*(x)
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Φ の component field $\phi(y), \psi(y), \mathcal{F}(y)$ の変換則を導く。そのため微分オペレータ $\mathcal{Q}, \bar{\mathcal{Q}}$ を $(y, \theta, \bar{\theta})$ で書き直した $\mathcal{Q}_\alpha = \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}$, $\bar{\mathcal{Q}}^{\dot{\alpha}} = \left(\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} - 2i\theta^\alpha\sigma_{\alpha\dot{\beta}}^\mu\epsilon^{\dot{\beta}\dot{\alpha}}\frac{\partial}{\partial y^\mu}\right)$ を使って Φ の変換は以下のように書ける。

$$\delta_\xi\Phi = \xi^\alpha\psi_\alpha(y) + \sqrt{2}\theta^\alpha\left(\xi_\alpha F(y) + i(\sigma^\mu\bar{\xi})_\alpha\frac{\partial}{\partial y^\mu}\phi(y)\right) + \theta\theta i(\bar{\xi}\bar{\sigma}^\mu)^\alpha\frac{\partial}{\partial y^\mu}\psi_\alpha(y)$$

これより、 Φ の component field の変換が分かる。

$$\begin{aligned}
\delta_\xi\phi(y) &= \xi\psi(y) \\
\delta_\xi\psi_\alpha(y) &= \xi_\alpha F(y) + i(\sigma^\mu\bar{\xi})_\alpha\frac{\partial}{\partial y^\mu}\phi(y) \\
\delta_\xi F(y) &= i(\bar{\xi}\bar{\sigma}^\mu)^\alpha\frac{\partial}{\partial y^\mu}\psi_\alpha(y)
\end{aligned} \tag{2.29}$$

前回のセクションでは、superfield を $\theta, \bar{\theta}$ で展開したときに最も次数の高い項の component field の超対称性変換は、全微分になることを述べた。chiral superfield の場合、F 項がそれにあたり、ゆえに (2.29) のように全微分になっている。つまり、chiral superfield の場合、F 項をつかってラグランジアンをかけば action は超対称性不変にできることを意味している。

chiral superfield の積や和もまた chiral superfield である。 $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$ をそれぞれ

chiral superfield とすると、

$$\begin{aligned}\bar{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}}(\Phi_1\Phi_2\cdots\Phi_n) &= (\bar{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}}(\Phi_1)\Phi_2\cdots\Phi_n) + (\Phi_1\bar{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}}(\Phi_2)\cdots\Phi_n) + \cdots + (\Phi_1\Phi_2\cdots\bar{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}}(\Phi_n)) \\ &= 0\end{aligned}\tag{2.30}$$

$$\begin{aligned}\bar{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}}(\Phi_1 + \Phi_2) &= \bar{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}}(\Phi_1) + \bar{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}}(\Phi_2) \\ &= 0\end{aligned}\tag{2.31}$$

となるからである。

chiral superfield Φ のみを引数にもつ関数を導入する。この関数をスーパーポテンシャルといい $W(\Phi)$ で表す。一方、 Φ と Φ^\dagger を引数にもつ関数も存在し、この関数をケーラーポテンシャルという。このケーラーポテンシャルを $K(\Phi, \Phi^\dagger)$ で表す。このケーラーポテンシャルは Φ と Φ^\dagger の積なので一般に chiral superfield ではないことに注意せよ。これから、スーパーポテンシャル W とケーラーポテンシャル K を用いて超対称性不変な action を構成していく。 W は Φ のみの関数なので F 項が最高次の component になる。つまりスーパーポテンシャルは F 項だけを取りだせば超対称性不変な action を構成することができる。一方 K は Φ と Φ^\dagger の積を含んでいるので $\theta, \bar{\theta}$ で展開でき、 $\theta^2\bar{\theta}^2$ が最高次になる。ゆえに、ケーラーポテンシャルの場合は D 項を取りだせば超対称性不変な action を構成することができる。

W の F 項、 K の D 項をそれぞれ $W|_{\theta^2}$ 、 $K|_{\theta^2\bar{\theta}^2}$ と表す。すると超対称性不変な action は以下ようになる。

$$S = \left(\int d^4x W(\Phi)|_{\theta^2} + h.c. \right) + \int d^4x K(\Phi, \Phi^\dagger)|_{\theta^2\bar{\theta}^2}\tag{2.32}$$

繰り込み可能性を課したとき W と K がどのように展開できるかを調べるために、これから次元を考えてみよう。まず、chiral superfield $\Phi = \phi + \sqrt{2}\theta\psi + \theta^2 F$ の最初の component ϕ がスカラー場の場合、 $\dim[\phi] = 1$ なので $\dim[\Phi] = 1$ となる^{*3}。次に $\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\} = 2\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu P_\mu$ 、 $\dim[P_\mu] = 1$ から $\dim[Q_\alpha] = \dim[\bar{Q}_{\dot{\alpha}}] = \frac{1}{2}$ となることや、微分オペレータ Q の表現を思い出すことによってグラスマン数 $\theta, \bar{\theta}$ の次元は $-\frac{1}{2}$ となることかわかる。また、グラスマン数の積分^{*4}を使ってスーパーポテンシャルの F 項は

$$W(\Phi)|_{\theta^2} = \int d^2\theta W(\Phi)\tag{2.33}$$

^{*3} あとの section で紹介するように chiral superfield の最初の component が次元 $\frac{3}{2}$ の場合 (gaugino) がある。この superfield は spinor superfield という

^{*4} グラスマンの積分は、 $\int d\theta = 0$ 、 $\int d\theta\theta = 1$ であり $d^2\theta \equiv -\frac{1}{4}\epsilon_{\alpha\beta}d\theta^\alpha d\theta^\beta$ 、 $d^2\bar{\theta} \equiv -\frac{1}{4}\epsilon_{\alpha\beta}d\bar{\theta}^\alpha d\bar{\theta}^\beta$ 、 $d^4\theta \equiv d^2\theta d^2\bar{\theta}$ と定義すると $\int d^2\theta \theta^2 = -\frac{1}{4}\int d\theta^\alpha d\theta^\beta \epsilon_{\alpha\beta} \epsilon_{\tau\sigma} \theta^\tau \theta^\sigma = 1$ となる。

と表せ、同様にケーラーポテンシャルの \mathcal{D} 項も

$$K(\Phi, \Phi^\dagger)|_{\theta^2\bar{\theta}^2} = \int d^2\theta d^2\bar{\theta} K(\Phi, \Phi^\dagger) \quad (2.34)$$

と、表せるので超対称性不変な action は以下のように書き直せる。

$$S = \left(\int d^4x \int d^2\theta W(\Phi) + h.c. \right) + \int d^4x \int d^2\theta d^2\bar{\theta} K(\Phi, \Phi^\dagger) \quad (2.35)$$

ゆえに、 $d\theta = \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}}$ に気をつけて (2.35) から次元を考えると、スーパーポテンシャル $W(\Phi)$ の次元は 3 であり、ケーラーポテンシャル $K(\Phi, \Phi^\dagger)$ の次元は 2 であることがわかる。よって、繰り込み可能性を課すときは、 $W(\Phi)$ は Φ の高々 3 次の関数であり、 $K(\Phi, \Phi^\dagger)$ は Φ, Φ^\dagger の高々 2 次の関数であることがわかる。

$$\begin{aligned} W(\Phi_1, \Phi_2, \dots) &= a + \lambda_i \Phi_i + \frac{1}{2} m_{ij} \Phi_i \Phi_j + \frac{1}{3} g_{ijk} \Phi_i \Phi_j \Phi_k \\ K(\Phi_1^\dagger, \Phi_1, \Phi_2^\dagger, \Phi_2, \dots) &= \Phi_i^\dagger \Phi_i \end{aligned} \quad (2.36)$$

ただし、添え字の i, j, k は chiral superfield の種類をラベルしており、定数 m_{ij}, g_{ijk} は添え字に対して対称である。 a は定数である。

ここで、 $U(1)_R$ 対称性について議論しておく^{*5}。 $U(1)_R$ 対称性とは、超対称代数を不変に保つ対称性で、 Q は $U(1)_R$ チャージ -1 、 \bar{Q} は 1 、 θ は 1 、 $\bar{\theta}$ は -1 、を割り当てる対称性である。この変換の下で action を不変に保とうとすれば、(2.35) から分かるようにスーパーポテンシャルも $U(1)_R$ チャージ 2 をもつことになる。この $U(1)_R$ 対称性は超対称性を破る議論のときによく使われる対称性であり、重要である。

超対称性不変な action の構成を議論したので、次は具体的に component field ϕ, ψ, F でラグランジアンを書き下してみる。(2.36), (2.32) から超対称性のラグランジアンは次のようになる。

$$\mathcal{L} = \phi_i^* \partial^2 \phi_i + i \partial_\mu \bar{\psi}_i \bar{\sigma}^\mu \psi_i + \left(-\frac{1}{2} m_{ij} \psi_i \psi_j - g_{ijk} \psi_i \psi_j \phi_k + h.c. \right) - V(\phi, \phi^*) \quad (2.37)$$

ただし、補助場 F 項の運動方程式

$$F_i = - \left(\frac{\partial W(\phi)}{\partial \phi_i} \right)^*, \quad F_i^* = - \left(\frac{\partial W(\phi)}{\partial \phi_i} \right) \quad (2.38)$$

を使った。また、 $V(\phi, \phi^*)$ は、

$$V(\phi, \phi^*) = F_i^* F_i = \left| \frac{\partial W}{\partial \phi_i} \right|^2 \quad (2.39)$$

で定義されるスカラーポテンシャルである。ここで potential は $V(\phi, \phi^*) \geq 0$ であることに注意しよう。

^{*5} 後にでる R-parity とは異なるので注意せよ。

2.5 vector superfield

次の条件を満たす superfield を vector superfield という。

$$V = V^\dagger \quad (2.40)$$

この条件を満たす V を $\theta, \bar{\theta}$ でベキ展開すると以下ようになる。

$$\begin{aligned} V(x, \theta, \bar{\theta}) = & C(x) + i\theta\chi(x) - i\bar{\theta}\bar{\chi}(x) + \frac{i}{2}\theta\theta[M(x) + iN(x)] \\ & - \frac{i}{2}\bar{\theta}\bar{\theta}[M(x) - iN(x)] - \theta\sigma^\mu\bar{\theta}v_\mu(x) + i\theta\theta\bar{\theta}\left[\bar{\lambda}(x) + \frac{i}{2}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\chi(x)\right] \\ & - i\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\left[\lambda(x) + \frac{i}{2}\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\chi}(x)\right] + \frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\left[D(x) + \frac{1}{2}\partial^2C(x)\right] \end{aligned} \quad (2.41)$$

ここで、(2.40) の条件を満たすためには、 V の component field C, M, N, D, v_μ がすべて実でなければならない。また、 $\theta\theta\bar{\theta}, \theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}$ の component に χ, C が入っている理由は、すぐ後のゲージ変換で D と λ をゲージ不変にするためである。

一方、chiral superfield Φ とそのエルミート共役の場 Φ^\dagger の和 $\Phi + \Phi^\dagger$ もまた、vector superfield である。

$$\begin{aligned} \Phi + \Phi^\dagger = & \phi + \phi^* + \sqrt{2}(\theta\psi + \bar{\theta}\bar{\psi}) + \theta\theta F + \bar{\theta}\bar{\theta}F^* + i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu(\phi - \phi^*) \\ & + \frac{i}{\sqrt{2}}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi + \frac{i}{\sqrt{2}}\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\psi} + \frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\partial^2(\phi + \phi^*) \end{aligned} \quad (2.42)$$

ここで、 $\theta\sigma^\mu\bar{\theta}$ の component field が $i\partial_\mu(\phi - \phi^*)$ になったことに注目すると、もし V の component field v_μ を gauge field とみなすならば、 V の gauge 変換を

$$V \rightarrow V + \Phi + \Phi^\dagger \quad (2.43)$$

とかけば良いことに気づく^{*6}。そして、component field のゲージ変換は以下のようになることがわかる。

$$\begin{aligned} C & \rightarrow C + \phi + \phi^* \\ \chi & \rightarrow \chi - i\sqrt{2}\psi \\ M + iN & \rightarrow M + iN - 2iF \\ v_\mu & \rightarrow v_\mu - i\partial_\mu(\phi - \phi^*) \\ \lambda & \rightarrow \lambda \\ D & \rightarrow D \end{aligned} \quad (2.44)$$

^{*6} 実際にこのように gauge 変換を行えばケーラー potential を gauge 不変にできることを次の section でみる。

ここで、 λ と D はゲージ不変になった。ゲージ変換 (2.44) から、 $\text{Re}\phi, \psi, \bar{\psi}, F$ の自由度で $C, \chi, \bar{\chi}, M, N$ を 0 にするゲージをとることが可能であることが分かる。このゲージを Wess-Zumino ゲージという。ただし、この場合でも $\text{Im}\phi = -(\phi - \phi^*) \equiv \alpha$ の自由度で $v_\mu \rightarrow v_\mu + \partial_\mu \alpha$ とゲージ変換する自由度は残る。^{*7}

これから、ゲージ不変な field strength をつくることを考える。そのために、次のようなゲージ不変な chiral superfield を考える。

$$W_\alpha = -\frac{1}{4}\bar{D}\bar{D}D_\alpha V, \quad \bar{W}_{\dot{\alpha}} = -\frac{1}{4}DD\bar{D}_{\dot{\alpha}}V \quad (2.46)$$

この field strength は次のような性質を持っている。

・ゲージ不変性

$$\begin{aligned} W_\alpha &= -\frac{1}{4}\bar{D}\bar{D}D_\alpha V \rightarrow W'_\alpha = -\frac{1}{4}\bar{D}\bar{D}D_\alpha(V + \Phi + \Phi^\dagger) \\ &= -\frac{1}{4}\bar{D}\bar{D}D_\alpha V = W_\alpha \end{aligned} \quad (2.47)$$

・カイラリティ

$$\begin{aligned} \bar{D}_{\dot{\beta}}W_\alpha &= \bar{D}_{\dot{\beta}}\left(-\frac{1}{4}\bar{D}\bar{D}D_\alpha V\right) = 0 \\ D_\beta\bar{W}_{\dot{\alpha}} &= D_\beta\left(-\frac{1}{4}DD\bar{D}_{\dot{\alpha}}V\right) = 0 \end{aligned} \quad (2.48)$$

また、 W_α は、ゲージ不変なのでゲージを固定しても superfield のままである。従って、Wess-Zumino ゲージをとって W_α の component を計算できる。(2.46) の計算を簡単にするため変数 $(x, \theta, \bar{\theta})$ の代わりに、前セクションで導入した座標 $(y, \theta, \bar{\theta})$ を使う。よって、この座標を使うことによりゲージ不変な chiral superfield $W_\alpha, \bar{W}_{\dot{\alpha}}$ は以下のように component で書き下せる。

$$\begin{aligned} W_\alpha &= -\frac{1}{4}\bar{D}\bar{D}D_\alpha V \\ &= -i\lambda_\alpha(y) + \left(\delta_\alpha^\beta D(y) - \frac{i}{2}(\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu)_\alpha^\beta(\partial_\mu v_\nu(y) - \partial_\nu v_\mu(y))\right)\theta_\beta + \theta\theta\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu\partial_\mu\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}(y) \\ \bar{W}_{\dot{\alpha}} &= -\frac{1}{4}DD\bar{D}_{\dot{\alpha}}V \end{aligned}$$

^{*7} このゲージで V は次のように簡単になる。

$$\begin{aligned} V(x, \theta, \bar{\theta}) &= -\theta\sigma^\mu\bar{\theta}v_\mu(x) + i\theta\theta\bar{\theta}\bar{\lambda}(x) - i\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\lambda(x) + \frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}D(x) \\ V^2(x, \theta, \bar{\theta}) &= -\frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}v^\mu v_\mu \\ V^3(x, \theta, \bar{\theta}) &= 0 \end{aligned} \quad (2.45)$$

$$= i\bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}(y^{\dagger}) + \left(\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} D(y^{\dagger}) + \frac{i}{2} \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\gamma}} (\bar{\sigma}^{\mu}\sigma^{\nu})_{\dot{\beta}}^{\dot{\gamma}} (\partial_{\mu}v_{\nu}(y^{\dagger}) - \partial_{\nu}v_{\mu}(y^{\dagger})) \right) \bar{\theta}_{\dot{\beta}} - \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \bar{\theta}\bar{\theta} \bar{\sigma}^{\mu\dot{\beta}\dot{\alpha}} \partial_{\mu}\lambda_{\alpha}(y^{\dagger}) \quad (2.49)$$

これより、 W_{α} はゲージ不変な field D , λ_{α} , $\partial_{\mu}v_{\nu} - \partial_{\nu}v_{\mu} \equiv v_{\mu\nu}$ から構成されていることが分かる。そして W_{α} はゲージを固定しても superfield であることから、超対称性変換は D , λ_{α} , $v_{\mu\nu}$ のなかで閉じている。この D , λ_{α} , $v_{\mu\nu}$ の超対称性変換は以下のようになる。

$$\begin{aligned} \delta_{\xi}\lambda_{\alpha} &= i\xi_{\alpha}D + (\sigma^{\mu\nu}\xi)_{\alpha}v_{\mu\nu} \\ \delta_{\xi}v_{\mu\nu} &= i [(\xi\sigma^{\nu}\partial_{\mu}\bar{\lambda} + \bar{\xi}\bar{\sigma}^{\nu}\partial_{\mu}\lambda) - (\xi\sigma^{\mu}\partial_{\nu}\bar{\lambda} + \bar{\xi}\bar{\sigma}^{\mu}\partial_{\nu}\lambda)] \\ \delta_{\xi}D &= \bar{\xi}\bar{\sigma}^{\mu}\partial_{\mu}\lambda - \xi\sigma^{\mu}\partial_{\mu}\bar{\lambda} \end{aligned} \quad (2.50)$$

W_{α} の展開 (2.49) は一般的な展開である。そして、 W_{α} は chiral superfield なので $W^{\alpha}W_{\alpha}$ の θ^2 の component をラグランジアンに入れることができる。

$$W^{\alpha}W_{\alpha}|_{\theta^2} = -2i\lambda\sigma^{\mu}\partial_{\mu}\bar{\lambda} - \frac{1}{2}v^{\mu\nu}v_{\mu\nu} + D^2 + \frac{i}{4}\epsilon_{\mu\nu\rho\tau}v^{\mu\nu}v^{\rho\tau} \quad (2.51)$$

ゆえに超対称、ゲージ不変なラグランジアンは以下のようになる。

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{4}(W^{\alpha}W_{\alpha}|_{\theta^2} + \bar{W}^{\alpha}\bar{W}_{\alpha}|_{\bar{\theta}^2}) \\ &= -i\lambda\sigma^{\mu}\partial_{\mu}\bar{\lambda} - \frac{1}{4}v^{\mu\nu}v_{\mu\nu} + \frac{1}{2}D^2 \end{aligned} \quad (2.52)$$

このセクションでは vector superfield をレビューして、ゲージ変換を議論した。そしてゲージ不変な chiral superfield から超対称性理論の field strength を書き下し、超対称、ゲージ不変なラグランジアンを書き下した。次のセクションは、 $U(1)$ のゲージ理論や非可換なゲージ理論についてより具体的なラグランジアンの構成をレビューする。

2.6 ゲージ不変な相互作用

このセクションでは、ゲージ原理に基づく相互作用を議論する。まず最初に $U(1)$ のゲージ理論の場合を考え、次に非可換な場合のゲージ理論を議論していく。

chiral superfield Φ_l の global $U(1)$ 変換を

$$\Phi_l \rightarrow \Phi'_l = e^{-it_l\lambda}\Phi_l \quad (2.53)$$

と、定義する。ここで、 t_l と λ は実の定数であり、 t_l は Φ_l のチャージ、 λ は global $U(1)$ 変換のパラメータである。 λ は定数なので chiral superfield の条件： $\mathcal{D}_{\alpha}\lambda = \bar{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}}\lambda = 0$ を

自明に満たす。ゆえにゲージ変換した Φ' も chiral superfield である。定数 λ に対し、この global $U(1)$ 変換の下で不変なラグランジアンは以下ようになる。

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{L}_K + \mathcal{L}_W \\ \mathcal{L}_K &= \Phi_l^\dagger \Phi_l \Big|_{\theta^2}, \quad \mathcal{L}_W = \left[\frac{1}{2} m_{ij} \Phi_i \Phi_j + \frac{1}{3} g_{ijk} \Phi_i \Phi_j \Phi_k \right] \Big|_{\theta^2} + h.c. \end{aligned} \quad (2.54)$$

ただし、 $t_i + t_j \neq 0$ ならば $m_{ij} = 0$ を、 $t_i + t_j + t_k \neq 0$ ならば $g_{ijk} = 0$ を要求する。

次に、この global $U(1)$ 変換を local $U(1)$ 変換に拡張する。local なゲージ変換を次のように定義する。

$$\begin{aligned} \Phi_l &\rightarrow \Phi'_l = e^{-it_l \Lambda(x, \theta, \bar{\theta})} \Phi_l & \bar{D}_{\dot{\alpha}} \Lambda(x, \theta, \bar{\theta}) &= 0 \\ \Phi_l^\dagger &\rightarrow \Phi_l'^\dagger = e^{it_l \Lambda^\dagger(x, \theta, \bar{\theta})} \Phi_l^\dagger & D_\alpha \Lambda(x, \theta, \bar{\theta}) &= 0 \end{aligned} \quad (2.55)$$

上式のように変換が定義されると、変換のパラメータが chiral superfield ならば、変換後の superfield も chiral superfield という性質を local な場合にも保つことができる。しかし、この変換の下では \mathcal{L}_W の方は global と同じ要求でゲージ不変になるが、 \mathcal{L}_K の方は、 $\Phi_l'^\dagger \Phi'_l = \Phi_l^\dagger \Phi_l e^{it_l (\Lambda^\dagger - \Lambda)}$ となりゲージ不変に保たれない。この $\Phi_l'^\dagger \Phi'_l$ を不変にするためには

$$V \rightarrow V' = V + i(\Lambda - \Lambda^\dagger) \quad (2.56)$$

と、 $U(1)$ ゲージ変換する vector superfield V を導入し、 $\Phi_l'^\dagger e^{t_l V} \Phi_l$ と組むことによって gauge 不変にすることができる。この変換 (2.56) は前セクションの (2.43) と同じである。ゆえに超対称、 $U(1)$ ゲージ不変なラグランジアンは以下ようになる。

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{4} (W^\alpha W_\alpha \Big|_{\theta^2} + \bar{W}^{\dot{\alpha}} \bar{W}_{\dot{\alpha}} \Big|_{\bar{\theta}^2}) + \Phi_l'^\dagger e^{t_l V} \Phi_l \Big|_{\theta^2 \bar{\theta}^2} \\ &\quad + \left\{ \left(\frac{1}{2} m_{ij} \Phi_i \Phi_j + \frac{1}{3} g_{ijk} \Phi_i \Phi_j \Phi_k \right) \Big|_{\theta^2} + h.c. \right\} \end{aligned} \quad (2.57)$$

ここで、 $\Phi_l'^\dagger e^{t_l V} \Phi_l$ は一見、繰り込み不可能に見えるが、Wess Zumino ゲージをとると $V^3 = 0$ となるので $e^{t_l V}$ のベキ級数は二次で止まり、繰り込み可能なラグランジアンになる。ラグランジアンを component field で書き下すと次のように書ける。

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -i\lambda \sigma^\mu \partial_\mu \bar{\lambda} - \frac{1}{4} v^{\mu\nu} v_{\mu\nu} + \frac{1}{2} D^2 + \phi_l^* \partial^2 \phi_l + i\partial_\mu \bar{\psi}_l \bar{\sigma}^\mu \psi_l + F_l^* F_l \\ &\quad + t_l v^\mu \left\{ \frac{1}{2} \bar{\psi}_l \bar{\sigma}_\mu \psi_l + \frac{i}{2} \phi_l^* \partial_\mu \phi_l - \frac{i}{2} \partial_\mu \phi_l^* \phi_l \right\} - \frac{i}{\sqrt{2}} t_l \left(\phi_l \bar{\lambda} \bar{\psi}_l - \phi_l^* \lambda \psi_l + \frac{1}{2} t_l D \phi_l^* \phi_l \right) \\ &\quad - \frac{1}{4} t_l^2 v_\mu v^\mu \phi_l^* \phi_l + \left\{ m_{ij} \left(\phi_i F_j - \frac{1}{2} \psi_i \psi_j \right) + g_{ijk} (\phi_i \phi_j F_k - \psi_i \psi_j \phi_k) + h.c. \right\} \end{aligned} \quad (2.58)$$

次に、ここまで議論してきた $U(1)$ ゲージ理論を非可換 (non-Abelian) ゲージ理論の場合に拡張する。この場合 Φ のゲージ変換は次のようになる。

$$\Phi'_i = (e^{-i\Lambda})_{ij} \Phi_j, \quad \Phi_i'^\dagger = \Phi_j^\dagger (e^{i\Lambda^\dagger})_{ji} \quad (2.59)$$

ここで Λ_{ij} は、エルミート generator T_{ij}^a によって $\Lambda_{ij} = T_{ij}^a \Lambda_a$ と書かれる。この Λ_a は chiral superfield である。一方、 e^V の non-Abelian ゲージ変換を以下のように定義する。

$$e^V \longrightarrow e^{V'} = e^{-i\Lambda^\dagger} e^V e^{i\Lambda} \quad (2.60)$$

ここで、 Λ, V はそれぞれ $\Lambda_{ij} = T_{ij}^a \Lambda_a$, $V_{ij} = T_{ij}^a V_a$ であり、 Λ_a は chiral superfield、 V_a は vector superfield である。(2.60) から V の変換は

$$V \longrightarrow V' = V + i(\Lambda - \Lambda^\dagger) + \dots \quad (2.61)$$

となることが分かる。 $U(1)$ のときと同様に Wess-Zumino gauge をとると、 $V^3 = 0$ となるので繰り込み可能なラグランジアンを e^V を使ってつくることができる。

次にゲージ場の運動項 (Kinetic term) について考える。non-Abelian の場合、field strength W_α は次のようにかける。

$$W_\alpha = -\frac{1}{4} \bar{D} \bar{D} e^V D_\alpha e^V \quad (2.62)$$

この field strength は次のような性質をもっている。

・カイラリティ

$$\bar{D}_\alpha W_\alpha = \bar{D}_\alpha \left(-\frac{1}{4} \bar{D} \bar{D} e^V D_\alpha e^V \right) \quad (2.63)$$

$$= 0 \quad (2.64)$$

・ゲージ変換

$$W_\alpha \longrightarrow W'_\alpha = e^{-i\Lambda} W_\alpha e^{i\Lambda} \quad (2.65)$$

よってゲージ不変な運動項は次のようになる。

$$\mathcal{L} = \frac{1}{16kg^2} \text{tr} (W^\alpha W_\alpha |_{\theta^2} + \bar{W}^{\dot{\alpha}} \bar{W}_{\dot{\alpha}} |_{\bar{\theta}^2}) \quad (2.66)$$

ゆえに、例として次のような non-Abelian ゲージ不変なラグランジアンが書ける。

$$\mathcal{L} = \frac{1}{16kg^2} \text{tr} (W^\alpha W_\alpha |_{\theta^2} + \bar{W}^{\dot{\alpha}} \bar{W}_{\dot{\alpha}} |_{\bar{\theta}^2}) + \Phi^\dagger e^V \Phi |_{\theta^2 \bar{\theta}^2} \quad (2.67)$$

ここで $V \rightarrow 2gV$ と再定義して Wess-Zumino ゲージをとり、component したラグランジアンは次のように書けることがわかる。

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4} v_{\mu\nu}^a v_{\mu\nu}^a - \bar{\lambda}^a \bar{\sigma}^\mu \mathcal{D}_\mu \lambda^a + \frac{1}{2} D^a D^a - \mathcal{D}_\mu \phi^\dagger \mathcal{D}^\mu \phi - i\bar{\psi} \bar{\sigma}^\mu \mathcal{D}_\mu \psi \\ & + F^\dagger F + i\sqrt{2}g(\phi^\dagger T^a \psi \lambda^a - \bar{\lambda}^a T^a \phi \bar{\psi}) + gD^a \phi^\dagger T^a \phi \end{aligned} \quad (2.68)$$

ここで、 $D_\mu = (\partial_\mu + igv_\mu^a T^a)$ 、 $v_{\mu\nu}^a = \partial_\mu v_\nu^a - \partial_\nu v_\mu^a - gt^{abc}v_\mu^b v_\nu^c$ である。また、これより、ゲージ対称性を課した理論のスカラーポテンシャルは、

$$V(\phi, \phi^*) = F_i^* F_i + \frac{1}{2} D^a D^a = \left| \frac{\partial W}{\partial \phi_i} \right|^2 + \frac{1}{2} (g\phi^\dagger T^a \phi)^2 \quad (2.69)$$

となることもわかる。ここで、補助場 D^a の運動方程式から $D^a = -g\phi^\dagger T^a \phi$ となることを使った。

以上、このセクションにて、超対称性の場合 (superfield)、超対称性変換、超対称性の関数 (スーパーポテンシャル、ケーラーポテンシャル) とラグランジアン構成のレビューを終える。

2.7 超対称性の自発的対称性の破れ

このセクションでは、超対称性の自発的な破れについてレビューする。まず、最初に超対称性は現象論的に破れていることを簡単に説明しよう。超対称性理論は、「SMの粒子とその超対称性パートナーの質量は等しい」ことを予言する。この予言に関することは現象論的に重要なので、これを簡単に説明しよう。これを説明するために、ボソンの状態 $|\Omega, m\rangle$ を用意する。この状態はボソンの質量固有状態であるとする。一方、このボソンの超対称性パートナーは、このボソンの状態に超対称性 generator Q_α^\dagger を作用させた $Q_\alpha^\dagger |\Omega, m\rangle$ である。これらの状態に質量オペレータ $P^2 = M^2$ を作用させてみよう。すると、

$$P^2 |\Omega, m\rangle = m^2 |\Omega, m\rangle \quad (2.70)$$

$$P^2 (Q_\alpha^\dagger |\Omega, m\rangle) = m^2 (Q_\alpha^\dagger |\Omega, m\rangle) \quad (2.71)$$

となる。ここで m^2 は質量の固有値である。また、交換関係 $[P_\mu, Q_\alpha] = [P_\mu, Q_\alpha^\dagger] = 0$ を使った。これからわかるように、超対称性理論は、SMの粒子とその超対称性パートナーの質量は等しくなっていることを予言している。しかしながら、現実の世界は、例えば電子の超対称性パートナーであるスカラー電子は発見されておらず、何らかのメカニズムでスカラー電子の質量は電子の質量よりも重くなっていると考えられている。このように、我々の世界では、超対称性理論が予言する「SMの粒子とその超対称性パートナーの質量は等しい」ことは成り立っていないと考えられている。そして超対称性の破れについて考えることは現実的な現象論のモデルを構成する上でとても重要になってくる。このセクションでは、このような現実的な超対称性パートナーの質量までは考えずに、最初のステップである超対称性を自発的に破る条件とそれを実現するモデルをレビューする。

まず、最初に超対称性がどのような条件で自発的に破れるのかを議論していこう。超対

称性の自発的な破れをみるためには超対称性の反交換関係 $\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\} = 2\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu P_\mu$ からハミルトニアンが以下のように書けることに注目すればよい。

$$H = \frac{1}{4} (\bar{Q}_1 Q_1 + Q_1 \bar{Q}_1 + \bar{Q}_2 Q_2 + Q_2 \bar{Q}_2) \quad (2.72)$$

ここで、このハミルトニアンに、ある状態 $|\Psi\rangle$ で真空期待値をとる。また、 $\langle\Psi| \bar{Q}_i Q_i |\Psi\rangle = \|\bar{Q}_i |\Psi\rangle\|^2 \geq 0$ であるので、

$$\langle\Psi| H |\Psi\rangle \geq 0 \quad (2.73)$$

である。一方、真空は最もエネルギーの低い状態であり、その真空が超対称性変換の下で不変ならば、超対称性は自発的に破れておらずエネルギーの真空期待値はゼロである。つまり、真空を $|0\rangle$ とすると、超対称性が自発的に破れていないということは、 δ_ξ を超対称性変換とすると、 $\delta_\xi |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi Q + \bar{\xi} \bar{Q}) |0\rangle = 0$ 、すなわち $Q_\alpha |0\rangle = \bar{Q}_{\dot{\alpha}} |0\rangle = 0$ を意味するので (2.73) から、 $\langle 0| H |0\rangle = 0$ ということである。これはエネルギーの最小値が 0 より大きい場合は超対称性は自発的に破れていて、0 の場合は超対称性は自発的に破れていないことを示している。そしてこの条件は、ポテンシャル V を使って、

$$\begin{aligned} \langle 0| V |0\rangle = 0 \dots \text{超対称性は破れていない。} \\ \langle 0| V |0\rangle > 0 \dots \text{超対称性は自発的に破れている。} \end{aligned} \quad (2.74)$$

と書くことができる。また、この条件と (2.69) から、超対称性が自発的に破れたかどうかの判断基準は次のように書ける。

$$\begin{aligned} V = 0 \iff F_i = D = 0 \text{ のとき超対称性は破れてない。} \\ V \neq 0 \iff F_i \neq 0 \text{ and/or } D \neq 0 \text{ のとき超対称性は破れている。} \end{aligned} \quad (2.75)$$

この条件は次の議論からも無矛盾である。場の超対称性変換 (2.29) (2.50) に注目してみる。上の前半の議論と同様に、これらの場の変化の真空期待値が、もしゼロでないときは超対称性は自発的に破れている。フェルミオンの真空期待値はゼロになること、そして真空の並進不変性により場の微分の真空期待値がゼロになることを考えると、自明に場の変化の真空期待値がゼロにならないのは、 $\delta_\xi \psi = \xi F$ 、 $\delta_\xi \lambda = i\xi D$ の二つの場の変換の期待値である。ゆえに、もし F 項と D 項が同時にゼロにできれば超対称性は自発的に破れていないし、どちらかがゼロ以外の値をもてば超対称性は自発的に破れる。ゆえに、この議論とポテンシャル (2.69) を考えると、(2.75) と (2.74) の結論が得られることがわかる。これから、超対称性が自発的に破れたかどうかの判断基準 (2.75) を使って、具体的に超対称性を自発的に破るモデルをレビューしていこう。

(1) O'Raifeartaigh 模型 (超対称性を F 項で破る模型)

O’Raifeartaigh は、超対称性を自発的に破る模型として次のようなスーパーポテンシャルを発見した [22]。

$$W = \lambda\Phi_0 + m\Phi_1\Phi_2 + g\Phi_0\Phi_1\Phi_1 \quad (2.76)$$

このスーパーポテンシャルは $U(1)_R$ 対称性を Φ_0, Φ_1, Φ_2 それぞれに $2, 0, 2$ と課し、また、 Z_2 パリティを $\Phi_i (i = 1, 2)$ に $-$ 、 Φ_3 に $+$ とアサインすることによって得ることができる。実際に、このスーパーポテンシャルの F 項を計算すると、

$$\begin{aligned} F_0^* &= -\frac{\partial W(\phi)}{\partial \phi_0} = -(\lambda + g\phi_1\phi_1) \\ F_1^* &= -\frac{\partial W(\phi)}{\partial \phi_1} = -(m\phi_2 + 2g\phi_0\phi_1) \\ F_2^* &= -\frac{\partial W(\phi)}{\partial \phi_2} = -m\phi_1 \end{aligned} \quad (2.77)$$

となり、 F_0^* と F_2^* が同時に 0 にできないことがわかる。ゆえにこの模型は超対称性を F 項で自発的に破っていることがわかる。ここで、 ϕ_0, ϕ_1, ϕ_2 は、それぞれ Φ_0, Φ_1, Φ_2 のスカラー component である。この模型を一般化してもう少し考えてみよう。chiral superfield $X_n (n = 1, 2, \dots, m)$ と $Y_i (1, 2, \dots, k)$ の模型を考える。ここで $U(1)_R$ 対称性を次のように課す。この対称性の下で許されるスーパーポテンシャル W は、

	W	X_n	Y_i
$U(1)_R$	2	0	2

表 2.1 chiral superfield $X_n (n = 1, 2, \dots, m)$ と $Y_i (1, 2, \dots, k)$ の $U(1)_R$ 対称性のチャージアサインメント

$$W(X_n, Y_i) = \sum_i Y_i f_i(X_n) \quad (2.78)$$

である。ここで f_i は X_n の関数で Y_i の数だけこの関数があるとする。このスーパーポテンシャルのポイントは Y_i の tadpole をもつことである。これは、最初の O’Raifeartaigh 模型のスーパーポテンシャル (2.76) でも tadpole がポイントであった。この tadpole のおかげで超対称性を自発的に破ることのできる模型になる。実際に F 項を求めてみる。

$$\begin{aligned} F_{x_n}^* &= -\frac{\partial W(x_n, y_i)}{\partial x_n} = -\sum_i y_i \frac{\partial f_i(x_n)}{\partial x_n} \\ F_{y_i}^* &= -\frac{\partial W(x_n, y_i)}{\partial y_i} = -f_i(x_n) \end{aligned} \quad (2.79)$$

ここで x_n, y_i は、それぞれ X_n, Y_i のスカラー component である。 $F_{x_n}^*$ は $y_i = 0$ で自明にゼロにできる。また、 $F_{y_i}^* = 0$ という条件 (Y_i の tadpole からくる条件) すなわち $f_i(x_n) = 0$ は、 X_n の数が Y_i の数と同じ、または多いとき ($m \geq k$) 満たすことができ超対称性は自発的に破れないが、 X_n の数が Y_i の数より少ないとき ($m < k$) は、条件の数が変数の数より多くなって (過剰決定系) $F_{y_i}^* = 0$ という条件は満たせなくなり、超対称性を自発的に破ることができる。

(2) Fayet-Iliopoulos D 項 で超対称性を自発的に破る模型

Fayet と Iliopoulos は $U(1)$ ゲージ不変なラグランジアンに vector superfield の D term を加えても action は超対称性、ゲージ不変だが、このとき自発的に超対称性、時にゲージ対称性も一緒に自発的に破ることを発見した [23]。今からこの模型を説明するためにまず最初に Fayet-Iliopoulos D 項についてレビューしておく。(2.44) にあるように $U(1)$ ゲージ変換の場合、D 項はこの変換の下で不変である。また、D 項を使うことによって action を超対称性変換の下で不変にできる。ゆえに、次のような D 項

$$\mathcal{L}_{FI} = \xi^2 D \quad (2.80)$$

をラグランジアンに入れてもよいことがわかる。このような項を Fayet-Iliopoulos D 項 (FI 項) という。この項は今から紹介する超対称性の自発的な破れのメカニズムを与える重要な役割を演じる。それを議論するために $U(1)$ ゲージ変換する chiral superfield Φ_1, Φ_2 を考える。

	W	Φ_1	Φ_2
$U(1)$	0	e	$-e$
$U(1)_R$	2	2	0

表 2.2 chiral superfield Φ_1 と Φ_2 の $U(1)$ ゲージ対称性と $U(1)_R$ 対称性のチャージアサイメント

この模型のスーパーポテンシャル W ^{*8} は

$$W(\Phi_1, \Phi_2) = m\Phi_1\Phi_2 \quad (2.81)$$

^{*8} GUT など高いスケールの理論を考えるときは、繰り込み可能性を課す必要は無い。ゆえに、一般的には高次のオペレータがこのスーパーポテンシャルに現れるが、この $U(1)_R$ 対称性を課すことによってそのような高次のオペレータを禁止している。(もし禁止しなければ、超対称な真空が存在する。)

である。ここで m は Φ_1, Φ_2 の質量パラメータである。この模型の F 項と D 項を求めてみると次のようになる。

$$F_1^* = -\frac{\partial W(\phi)}{\partial \phi_1} = -m\phi_2 \quad (2.82)$$

$$F_2^* = -\frac{\partial W(\phi)}{\partial \phi_2} = -m\phi_1 \quad (2.83)$$

$$D = -(\xi^2 + e\phi_1^*\phi_1 - e\phi_2^*\phi_2) \quad (2.84)$$

ここで ϕ_1, ϕ_2 は、それぞれ Φ_1, Φ_2 のスカラー component である。 ξ^2 がゼロでないならば、明らかに F 項と D 項を同時にゼロを満たす解は存在しないことがわかる。ゆえに超対称性を自発的に破っていることがわかる。また、ポテンシャルは、F 項と D 項からわかるように、

$$V = m^2 (|\phi_1|^2 + |\phi_2|^2) + \frac{1}{2} (\xi^2 + e\phi_1^*\phi_1 - e\phi_2^*\phi_2)^2 \quad (2.85)$$

である。また、 $\xi^2 > m^2/2e^2$ 、または $\xi^2 < -m^2/2e^2$ の場合(どちらの場合かは ξ^2 が正か負かで決まる)には、ポテンシャル(2.85)は、 $\phi_1 = 0$ かつ $|\phi_2|^2 = (2e^2\xi^2 - m^2)/2e^4$ 、または $\phi_2 = 0$ かつ $|\phi_1|^2 = (-2e^2\xi^2 - m^2)/2e^4$ のどちらかで最小値をとる。すなわち、この場合は超対称性と共 $U(1)$ ゲージ対称性も自発的に破れる。次に $-m^2/2e^2 \leq \xi^2 \leq m^2/2e^2$ の場合は、ポテンシャルは $\phi_1 = \phi_2 = 0$ で最小値をとり、超対称性を自発的に破るが、 $U(1)$ ゲージ対称性は自発的に破れないことがわかる。

このレビューで議論したように超対称性を破るためには F 項と D 項をすべて、または、どちらかにゼロ以外の値の真空期待値をもたせることができればよいことがわかった。一般的に $U(1)_R$ 対称性の無い模型では、最も低いエネルギーの真空で (F 項 (D 項) に真空期待値をもたせて) 超対称性を破ることは難しい。なぜなら、一般的には、場の自由度の数と F 項、D 項をゼロにする条件の数は等しくなるからである。ゲージ対称性の無い模型は、F 項の数と場の数が同じなので、一般的に、すべての F 項をゼロにできる解が存在する。しかし、O'Raifeartaigh 模型でレビューしたように $U(1)_R$ 対称性を課すことによってスーパーポテンシャルの相互作用の形を制限し、すべての F 項をゼロにすることができない状況を作ることができる。また、ゲージ対称性のある模型でも、F 項に加えて D 項が加わるが、スーパーポテンシャルのゲージ対称性不変性条件 $\delta W = 0$ が加わり、一つの F 項は独立ではなくなるので、 $U(1)_R$ 対称性を課さない模型では F 項、D 項をゼロの条件の数と場の数が同じになり、F 項と D 項をすべてゼロにできる解が存在する。しかし、このセクションで紹介した Fayet-Iliopoulos D 項で超対称性を破る模型のように $U(1)_R$ 対称性を課し、FI パラメータ ξ^2 を導入することで、すべての F 項、D 項をゼロ

にできない状況を作ることができる^{*9}。このように、 $U(1)_R$ 対称性を理論に課すことで F 項 (D 項) に真空期待値をもたせることを実現することができる。このように超対称性を破るモデルでは $U(1)_R$ 対称性はとても重要な対称性であることがわかる。

^{*9} Fayet-Iliopoulos D 項で超対称性を破るモデルで紹介した真空では ϕ_1, ϕ_2 の内、必ず真空期待値がゼロになる場が存在するのでスーパーポテンシャルのゲージ対称性不変性条件 $\delta W = 0$ は自明に満たされるようになる。ゆえに、F 項がすべて独立になり、条件の数が増えて超対称性が破れる。

第 3 章

MSSM

この章では、最小超対称標準模型 (MSSM) についてレビューする。この模型では、先のセクションで紹介したようにヒッグス粒子の質量パラメータの微調整問題を解決する有力な模型の 1 つである。この章では、この模型のスーパーポテンシャルから超対称性の破れの伝播、パラメータなどのレビューを行う。参考文献は、[3][5] を使う。

3.1 MSSM スーパーポテンシャルと R パリティ

超対称性 (SUSY) を持つ標準模型 (SM) 特に、拡張を最小限にした模型を最小超対称標準模型 (minimal supersymmetric standard model (MSSM)) という。この MSSM に登場する場は SM の場に超対称性パートナーを加えた模型であり、それぞれの場の量子数とゲージ群は表 3.1, 3.2 の通りである。ここで、 U_R^c, D_R^c, E_R^c はそれぞれ U_R, D_R, E_R の荷電共役である。このように SM を超対称に拡張した場合、表 3.1 から分かるようにヒッグス場の chiral superfield は 2 つ用意しなければならない。これには 2 つの理由がある。

1 つ目の理由は、スーパーポテンシャルの正則性である。SM の場合、ダウクォークに質量を与えるヒッグス場を H とすると、アップクォークには ϵH^* を結合させて質量を与えていたが、超対称性だとスーパーポテンシャルの中に H^* などの複素共役な場を入れることができない。ゆえに独立なヒッグス場を 2 つ用意する必要があるのである。もう 1 つの理由はアノマリーに関係する。SM ではアノマリーが偶然キャンセルしていたが、この模型を超対称に拡張すると新たなフェルミオンとしてヒッグス場の超対称性パートナーであるヒッグシーノが存在するようになる。すると、このヒッグシーノから生じるアノマリーをキャンセルさせることがこのままでは困難になってしまう。よって、ハイパーチャージの逆のもう 1 つのヒッグス場を導入し、アノマリーをキャンセルさせる必要があるのである。

表 3.1, 3.2 の場のコンテンツで、繰り込み可能で $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ 不変な

chiral superfield	spin $\frac{1}{2}$	spin0	$SU(3)_C$	$SU(2)_L$	$U(1)_Y$	B	L
Q	$Q = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}$	$\tilde{Q} = \begin{pmatrix} \tilde{u}_L \\ \tilde{d}_L \end{pmatrix}$	3	2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	0
U_R^c	u_R^c	\tilde{u}_R^c	$\bar{\mathbf{3}}$	1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0
D_R^c	d_R^c	\tilde{d}_R^c	$\bar{\mathbf{3}}$	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0
L	$L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix}$	$\tilde{L} = \begin{pmatrix} \tilde{\nu}_L \\ \tilde{e}_L \end{pmatrix}$	1	2	$-\frac{1}{2}$	0	1
E_R^c	e_R^c	\tilde{e}_R^c	1	1	1	0	-1
H_u	$\tilde{H}_u = \begin{pmatrix} \tilde{H}_u^+ \\ \tilde{H}_u^0 \end{pmatrix}$	$H_u = \begin{pmatrix} H_u^+ \\ H_u^0 \end{pmatrix}$	1	2	$\frac{1}{2}$	0	0
H_d	$\tilde{H}_d = \begin{pmatrix} \tilde{H}_d^- \\ \tilde{H}_d^0 \end{pmatrix}$	$H_d = \begin{pmatrix} H_d^- \\ H_d^0 \end{pmatrix}$	1	2	$-\frac{1}{2}$	0	0

表 3.1 MSSM の場と SM のゲージ群の量子数のアサインメント

vecter superfield	spin $\frac{1}{2}$	spin0	$SU(3)_C$	$SU(2)_L$	$U(1)_Y$	B	L
\mathcal{G}	\tilde{g}	g_μ	8	1	0	0	0
\mathcal{W}	\tilde{W}	W_μ	1	3	0	0	0
\mathcal{B}	\tilde{B}	B_μ	1	1	0	0	0

表 3.2 MSSM のゲージ場と SM のゲージ群の量子数のアサインメント

スーパーポテンシャル W は以下のようにかける。

$$\begin{aligned}
W &= W_{MSSM} + W_{\Delta L=1} + W_{\Delta B=1} \\
W_{MSSM} &= (Y_U)_{ij} U_{Ri}^c Q_j H_u - (Y_D)_{ij} D_{Ri}^c Q_j H_d \\
&\quad + (Y_N)_{ij} N_{Ri}^c L_j H_u - (Y_E)_{ij} E_{Ri}^c L_j H_d + \mu H_u H_d \\
W_{\Delta L=1} &= \lambda_{ijk} L_i L_j E_R^c + \lambda'^{ijk} Q_i L_j D_k^c + \mu'_i L_i H_u \\
W_{\Delta B=1} &= \lambda''^{ijk} U_{Ri}^c D_{Rj}^c D_{Rk}^c
\end{aligned} \tag{3.1}$$

ここで、 i, j, k は世代の足である。そして、 $SU(2)_L$ の足は反対称テンソル $\epsilon_{\alpha\beta} = i\sigma^2$ で singlet になるように縮約されている。

SM では、tree level でバリオン数、レプトン数を破る相互作用項は存在しないが、MSSM だと (3.1) から分かるように tree level でバリオン数、レプトン数を破っていることがわかる。このような相互作用項があると、図 3.1 のような陽子崩壊過程が tree level でかけてしまう。この陽子崩壊の崩壊率 Γ を次のように大雑把に評価してみよう。まず

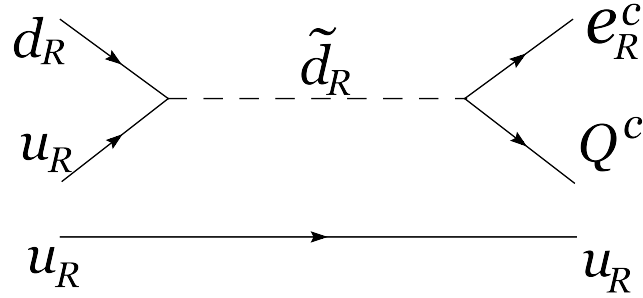


図 3.1 スーパーポテンシャル (3.1) の $W_{\Delta L=1}$ と $W_{\Delta B=1}$ から書ける陽子崩壊過程。

Γ は振幅の絶対値の 2 乗 $|\frac{\lambda'\lambda''}{m_{d_R}^2}|^2$ に比例する。そして崩壊率を計算したときの位相空間積分からくる因子 $\frac{1}{8\pi}$ に気をつけ、最後に陽子の質量で次元をあわせれば、大雑把に崩壊率を評価することができる。

$$\Gamma \sim \frac{1}{8\pi} \left| \frac{\lambda'\lambda''}{m_{d_R}^2} \right|^2 m_{\text{proton}}^5 \quad (3.2)$$

ここで、 m_{d_R} はダウン-タイプ 巣クォーク (\tilde{d}_R, \tilde{s}_R) の質量である。よって陽子の lifetime τ は、

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{1}{\Gamma} \sim \frac{8\pi}{|\lambda'\lambda''|^2} \left(\frac{m_{d_R}}{m_{\text{proton}}} \right)^4 \frac{1}{m_{\text{proton}}} \\ &= \frac{1}{|\lambda'\lambda''|^2} \cdot 2 \times 10^{-11} \text{ [s]} \end{aligned} \quad (3.3)$$

と評価できる。ただし、 $m_{\text{proton}} \sim 1\text{GeV}$ 、 $m_{d_R} = 10^3\text{GeV}$ とした*¹。しかしながら、現在の実験バウンド $\tau > 10^{32}\text{year} \sim 3 \times 10^{39}\text{s}$ を満たそうとすれば、 $|\lambda'\lambda''| < 10^{-25}$ が必要である。これは本来、 $O(1)$ で導入するはずの結合定数が極端に小さいことを意味し、この結果はとても不自然に感じられる。

このようなパラメータの不自然な小ささを避けるため、離散的な新たな対称性を導入し、 $W_{\Delta L=1}$ と $W_{\Delta B=1}$ を禁止する。この新たな対称性を R-parity といい、以下のように定義される。

$$P_R = (-1)^{3(B-L)+2s} \quad (3.4)$$

ここで、 s はスピンの大きさ、 B, L はそれぞれバリオン数とレプトン数である。この R-parity を導入することで、陽子崩壊を引き起こす相互作用、 $W_{\Delta L=1}$ と $W_{\Delta B=1}$ を禁止することができる。この R-parity が vertex で保存すると、以下のような現

*¹ $1\text{GeV} \sim 10^{24} \text{ [s}^{-1}\text{]}$ を使った。

象論的に重大な結果が得られる。

- 1, 加速器実験において、超対称性パートナー（超対称性粒子）は必ず偶数個で生成される。
- 2, 最も軽い超対称性粒子 (LSP) は安定である。もし LSP が中性ならば、これは暗黒物質の候補になりうる。
- 3, LSP 以外の全ての超対称性粒子は必ず奇数個の超対称性粒子に崩壊する。 (3.5)

最後に、 W_{MSSM} にあるヒッグスの超対称な質量項 $\mu H_u H_d$ (μ 項) について議論する。この係数 μ は MSSM の超対称な actin に存在する唯一の質量次元をもったパラメータである。しかしながら、この項があるのは、まだ階層性の問題が解けていないことを意味する。すなわち、なぜ μ は理論のカットオフ $\sim 10^{16}$ GeV、または 10^{18} GeV の大きさではないのかということである。この問題は階層性の問題、または μ 問題と呼ばれる。一方、 $U(1)$ ペッチャイ・クイン対称性 [8] と呼ばれる対称性があり、この対称性を導入すると、 μ 項が禁止できることが知られている。しかしながら、この μ 項は現象論的な理由で必要とされる。その理由の 1 つは、 μ はヒッグシーノの質量パラメータなので電弱スケールに欲しいという理由である*2。そこで、この自然な大きさの μ 項を導く理論が必要である。その自然な大きさの μ 項を導くことのできる理論として、この後レビューする重力を媒介として超対称性の破れを伝える理論がある。この理論では適切な大きさの μ 項が生成できることが知られている。

3.2 ソフトな超対称性の破れのパラメータ

超対称性理論は、前章でレビューしたように SM の粒子とその超対称性パートナーの質量は等しいことを予言する。しかし、現在、そのような粒子は未だ発見されていない。すなわち、これは SM の粒子とその超対称性パートナーの質量が等しくないことを意味し、我々の世界は超対称性が破れていることになる。そこで超対称性を破るメカニズムが必要になる。前章の最後のセクションで、超対称性の自発的な破れのモデルをレビューした。このセクションでは、どのようにラグランジアンに超対称性の破れの項、パラメータが現れれば良いかを考えていきたい。すなわち、本来なら超対称性が自発的に破れて、その破れを伝播するメカニズムを考えるべきだが、このセクションではそのプロセスを省略し、超対称性を破る項、パラメータをもつラグランジアンについて、まずレビューしていく。この伝播メカニズムは後のセクションでレビューする。

ラグランジアンに超対称性を破る項を考えると、理論と実験の両方から制限を受けることが考えられる。その重要な制限の 1 つは naturalness からくる。もともと、SM を超対称に拡張する狙いの 1 つは、ヒッグス粒子の量子補正の含まれる 2 次発散をキャンセル

*2 他にも、 μ が電弱スケールに無いと電弱対称性の破れを自然に起こせないなどの理由がある。

させ、パラメータの微調整が大きくなるのを防ぐことであった。超対称性を破ることきもこの2次発散が再び復活しないように破らなければ、超対称性を導入した意味がなくなってしまう。2次発散を出さないように超対称性を破るには、質量次元のパラメータをもつ相互作用項で超対称性を破るようにすればよい(ソフトな破れ)。ヒッグス粒子の質量への量子補正は、1ループダイアグラムからくるが、運動量積分の際に運動量の奇数次は落ちるので、発散は2次か \log の形に限られる。したがって次元解析から、質量次元のパラメータをもつ相互作用項をラグランジアンに入れて超対称性を破れば、2次発散は復活できないことがわかる。以上の議論より、超対称性は、質量次元をもつパラメータで explicit に破らねばならない。一般的に、ラグランジアンに次のような $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ 不変な超対称性をソフトに破る項が加わることになる。

$$\begin{aligned}
-\mathcal{L}_{soft} = & (m_Q^2)_{ij} \tilde{Q}_i^\dagger \tilde{Q}_j + (m_u^2)_{ij} \tilde{u}_{Ri}^\dagger \tilde{u}_{Rj} + (m_d^2)_{ij} \tilde{d}_{Ri}^\dagger \tilde{d}_{Rj} \\
& + (m_L^2)_{ij} \tilde{L}_i^\dagger \tilde{L}_j + (m_\nu^2)_{ij} \tilde{\nu}_{Ri}^\dagger \tilde{\nu}_{Rj} + (m_e^2)_{ij} \tilde{e}_{Ri}^\dagger \tilde{e}_{Rj} \\
& + m_{H_u}^2 H_u^* H_u + m_{H_d}^2 H_d^* H_d + (B\mu H_u H_d + h.c.) \\
& + \left((A_u)_{ij} \tilde{u}_{Ri}^\dagger \tilde{Q}_j H_u - (A_d)_{ij} \tilde{d}_{Ri}^\dagger \tilde{Q}_j H_d \right. \\
& \left. + (A_\nu)_{ij} \tilde{\nu}_{Ri}^\dagger \tilde{L}_j H_u - (A_e)_{ij} \tilde{e}_{Ri}^\dagger \tilde{L}_j H_d \right) + h.c. \\
& + \frac{1}{2} \left(M_3 \tilde{g}^a \tilde{g}^a + M_2 \tilde{W}^a \tilde{W}^a + M_1 \tilde{B} \tilde{B} \right) + h.c. \tag{3.6}
\end{aligned}$$

ここで、 $(m_{\tilde{f}})$ は超対称性粒子(スカラーフェルミオン)の質量パラメータ、 A_f の項は A 項(質量次元を持つ)、 $B\mu$ はヒッグス場の質量の混合パラメータ(mixing parameter)であり、 $B\mu$ 項と呼ばれる。 M_3, M_2, M_1 は、それぞれ $SU(3)_C, SU(2)_L, U(1)_Y$ のゲージノの質量パラメータである。

この超対称性をソフトに破るラグランジアンはいくつかの不満足な点を含んでいる。まず、パラメータの数が100以上あり、理論的に不満足である。また、このラグランジアンの質量項や A 項の非対角要素から Flavor Changing Neutral Current (FCNC) が大きく生じることも現象論的に問題である[9][10]。ここで、 $(m_{\tilde{f}}), M_3, M_2, M_1$ を電弱スケールにして、この FCNC を抑えるパラメータの形が知られている。それは、スカラーフェルミオンの質量行列を $(m_{\tilde{f}}^2)_{ij} = m_{SU_{SY}}^2 \delta_{ij}$ とすることである。こうすることで、フェルミオンの湯川行列を対角化した後、スカラーフェルミオンの質量行列も対角的になり、FCNC を出すような非対角要素がでないようにできる。また、A 項も、湯川行列に比例していれば、これも対角化でき、非対角要素が出ない。ゆえに FCNC を防ぐことができる。また、スカラーフェルミオンの質量行列が湯川行列を含み、例えば YY^\dagger に比例していれば、FCNC を出さないようにすることも知られている。スカラーフェルミオンの質量行列を単位行列に比例する形、A 項を湯川行列に比例する形は、超対称性の破れの伝播、特に gauge mediation を使うと実現できることが知られている。このような伝播メ

カニズムは後のセクションでレビューする。

3.3 gravity mediation

前の章では、超対称性の自発的な破れの模型を紹介し、前セクションでは、どのようなラグランジアンで超対称性を破っているかをレビューした。このセクションでは、この中間の過程である超対称性の破れの伝播についてレビューする。特にここでは、gravity mediation についてレビューする [11]。gravity mediation のシナリオは、超対称性の破れを重力相互作用を通して伝えるシナリオである。すなわち、この伝播を通じて MSSM の超対称性を破っているラグランジアンの各項を生成するシナリオである。具体的には、超対称性を自発的に破る場 (F 項に真空期待値をもつ場) と MSSM または GUT などの相互作用項と直接カップルする非繰り込み可能な相互作用を通じてスカラーフェルミオンなどの超対称性の破れのパラメータを生成する伝播である。このようなシナリオを考えるために、次のような非繰り込み可能なスーパーポテンシャルを考えてみる。

$$W_{NR} = -\frac{1}{M_p} S [aW^\alpha W_\alpha + c^{ijk} \Phi_i \Phi_j \Phi_k] + c.c. \quad (3.7)$$

ここで、 S は SM singlet な superfield、 Φ_i はクォーク、レプトン、ヒッグスなどの superfield、 W^α は field strength、 a, c^{ijk} は定数である。また、 i, j, k は場の種類をラベルする添え字であり、 M_p はプランクスケール $\sim 10^{18} \text{GeV}$ である。一方、非繰り込み可能なケーラーポテンシャルは次の項を含んでいる。

$$K_{NR} = -\frac{k_i^j}{M_p^2} S^\dagger S \Phi^{i\dagger} \Phi_j \quad (3.8)$$

ここで k_i^j は定数である。超対称性は自発的に破れ、 S の補助場 F 項の真空期待値は 0 でないと仮定する。すると、(3.7), (3.8) から次のラグランジアンが得られる。

$$\mathcal{L}_{NR} = -\frac{1}{M_p} \langle F \rangle [a\tilde{\lambda}^\alpha \tilde{\lambda}_\alpha + c^{ijk} \phi_i \phi_j \phi_k] + c.c. - \frac{k_i^j}{M_p^2} |\langle F \rangle|^2 \phi^{i*} \phi_j \quad (3.9)$$

ここで、 ϕ_i は、 Φ_i のスカラー component である。この gravity mediation では、 $\sqrt{\langle F \rangle} \sim 10^{10}$ or 10^{11}GeV と仮定する。すると、スカラー場の超対称性を破る質量は、 $m_{soft} \sim \frac{\langle F \rangle}{M_p} \sim 100 \text{GeV}$ になり、ゲージノの質量もおおよそ同じオーダーの質量になることがわかる。そして、(3.9) は、A 項も含んでいることから、 \mathcal{L}_{soft} の各項を与えていることが分かる。

まとめるとゲージノの質量 $m_{1/2}$ 、スカラーの質量 m_0 、A 項は次のようになって

いる。

$$m_{1/2} = a \frac{\langle F \rangle}{M_p}, \quad (m_0^2)_i^j = k_i^j \frac{|\langle F \rangle|^2}{M_p^2}, \quad A^{ijk} = c^{ijk} \frac{\langle F \rangle}{M_p} \quad (3.10)$$

一方、 μ は (3.8) のような非繰り込み可能なケーラーポテンシャル

$$K_{NR2} = -\frac{k}{M_p} S^\dagger H_u H_d \quad (3.11)$$

から生成できる。ただし、 k は定数。すなわち

$$\int d^4x d^4\theta K_{NR2} = \frac{k}{M_p} \langle F^\dagger \rangle \int d^4x d^2\theta H_u H_d \quad (3.12)$$

となり、 $\sqrt{\langle F^\dagger \rangle} \sim 10^{10}$ or 10^{11} GeV なので、自然な大きな μ が生成できる。一方、 $B\mu$ 項は、ケーラーポテンシャル $K_{NR3}|_{\theta^4} = -k' S^\dagger S H_u H_d / M_p^2|_{\theta^4}$ から生成でき、その大きさは $B\mu \sim \mu^2$ になることがわかる。

(3.10) から、一般に各世代のスカラーフェルミオンの質量は等しくなく、A 項も湯川行列に比例した形ではない。つまり、前セクションでコメントしたように FCNC が大きく生じるといった問題がある。このように gravity mediation では、 μ 問題が解ける一方、FCNC が大きく出る問題があることが知られている。

3.4 gauge mediation

このセクションは、超対称性の破れをゲージ相互作用を媒介して伝播するシナリオ、gauge mediation を紹介する [12][13]。gauge mediation の基本的なアイデアは、超対称性の破れを伝える場として新たにメッセンジャーを導入することである。このメッセンジャーは chiral superfield で、超対称性を破る場と直接カップルしている場である。メッセンジャーは $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ ゲージ場、ゲージノとの相互作用を通して MSSM の場 (スカラーフェルミオン、ヒッグス、ヒッグシーノ) とカップルする。一般的に、MSSM と超対称性を破る場との間に重力的なコミュニケーションは存在するが、このセクションでは、簡単のため、相対的に gauge mediation の効果に比べて重力の効果は大きくないと仮定する。

$SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ の下で変換するメッセンジャー q, \bar{q}, l, \bar{l} を導入する。ここで反表現の場も導入している。理由は、メッセンジャーに質量項をもたせるためと、アノマリーのキャンセルのためである。次にメッセンジャーのスーパーポテンシャルを考える。ここでも SM ゲージ singlet で超対称性を破る場 (F 項の真空期待値を持つ場) S を導入し、メッセンジャーがこの場と直接カップルするスーパーポテンシャルを仮定す

	$SU(3)_C$	$SU(2)_L$	$U(1)_Y$
q	3	1	-1/3
\bar{q}	$\bar{3}$	1	1/3
l	1	2	1/2
\bar{l}	1	2	-1/2

表 3.3 メッセンジャーのそれぞれの量子数。

る*3。

$$W_{mess} = y_2 S l \bar{l} + y_3 S q \bar{q} \quad (3.13)$$

まず、このスーパーポテンシャルから、メッセンジャーの質量を評価してみる。メッセンジャーフェルミオンの質量項は、

$$\mathcal{L} = -y_2 \langle S \rangle \psi_l \psi_{\bar{l}} - y_3 \langle S \rangle \psi_q \psi_{\bar{q}} + c.c. \quad (3.14)$$

となることが分かる。また、メッセンジャースカラーの質量も、スカラーポテンシャルを求めることでわかる。

$$V = |y_2 \langle S \rangle|^2 (|\tilde{l}|^2 + |\bar{\tilde{l}}|^2) + |y_3 \langle S \rangle|^2 (|\tilde{q}|^2 + |\bar{\tilde{q}}|^2) - (y_2 \langle F_S \rangle \tilde{l} \bar{\tilde{l}} + y_3 \langle F_S \rangle \tilde{q} \bar{\tilde{q}} + c.c.) \quad (3.15)$$

ここで、1行目はスーパーポテンシャルに含められている質量項であり、2行目は超対称性の破れの効果から来る質量である。これらの質量を $(\tilde{l}, \bar{\tilde{l}})$ の基底の質量行列と $(\tilde{q}, \bar{\tilde{q}})$ の基底の質量行列にわけてそれぞれを対角化する。これにより $(\tilde{l}, \bar{\tilde{l}})$ 、 $(\tilde{q}, \bar{\tilde{q}})$ それぞれの質量固有値が、 $m_{\text{scalar}}^2 = |y_2 \langle S \rangle|^2 \pm |y_2 \langle F_S \rangle|$ 、 $m_{\text{scalar}}^2 = |y_3 \langle S \rangle|^2 \pm |y_3 \langle F_S \rangle|$ となることがわかる。これらメッセンジャーのスカラーとフェルミオンの質量を求めたので MSSM ゲージノとスカラーフェルミオンの質量を計算できる。これら MSSM のゲージノとスカラーフェルミオンの質量は超対称性の破れ、すなわち F 項をひろった radiative correction を通して得る。具体的には、図 3.2 のダイアグラムを通して生成される。このダイアグラムのループの部分にメッセンジャー q, \bar{q} がまわるとグリーンノやビーノに質量を与え、メッセンジャー l, \bar{l} がまわるとウィーノやビーノに質量を与える。具体的に、1ループを計算するとゲージノの質量が次のようになることが分かる。

$$M_a = \frac{\alpha_a \langle F_S \rangle}{4\pi \langle S \rangle} \quad (a = 1, 2, 3) \quad (3.16)$$

*3 ここでは文献 [3] にしたがってメッセンジャーの質量項 $m\bar{q}q, m\bar{l}l$ は考えないことにする

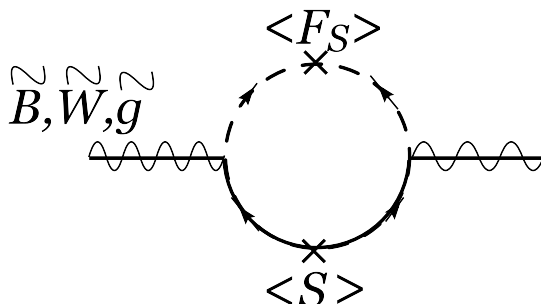


図 3.2 MSSM ゲージノの質量を生成するダイアグラム。 (q, \bar{q}) 、 (l, \bar{l}) がまわるループダイアグラム。

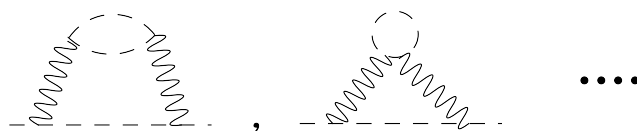


図 3.3 MSSM のスカラーフェルミオンの質量を生成するダイアグラム。メッセンジャーがまわる 1 ループダイアグラムとゲージ場、ゲージノなどが寄与するダイアグラムの 2 ループから成る。 \dots は、他にも、上のダイアグラムのゲージ場の部分がゲージノになり、メッセンジャーのループの部分が図 3.2 になるものなど他にもダイアグラムがあることを示している。詳しくはレビューしてある文献 [3] を見よ。

ここで、 $a = 1, 2, 3$ はそれぞれ $U(1)_Y, SU(2)_L, SU(3)_C$ を示している。 gravity mediation と大きく違うところは、質量がプランクスケール M_p で suppress されておらず、メッセンジャーの質量で suppress されていることである。つまり、もし $M_p \gg \langle S \rangle$ ならば、 gravity mediation で得られた質量よりも gauge mediation で得られ質量の方が大きくなるのがわかる。

一方、MSSM のスカラーフェルミオンの質量は 1 ループからは得られず、次のような 2 ループのダイアグラムから生成される。このダイアグラムを計算することによって次のように MSSM のスカラー場の質量が得られる。

$$m^2 = \left(\frac{\langle F_S \rangle}{\langle S \rangle} \right)^2 \left[\left(\frac{\alpha_3}{4\pi} \right)^2 C_3 + \left(\frac{\alpha_2}{4\pi} \right)^2 C_2 + \left(\frac{\alpha_1}{4\pi} \right)^2 C_1 \right] \quad (3.17)$$

ここで C_a は二次のカシミアオペレータであり、 $C_3 = 4/3$ 、 $C_2 = 3/4$ 、 $C_1 = Y^2 \cdot 3/5$ (Y はハイパーチャージ) である。このスカラーフェルミオンの質量の形から明らかなように質量行列は対角的であり、世代でチャージが等しいので 3 世代すべて等しい質量をもつことがわかる。つまり、スカラーフェルミオンの質量項を通じて FCNC は生じないことがわかる。これは gauge mediation の最大の長所である。

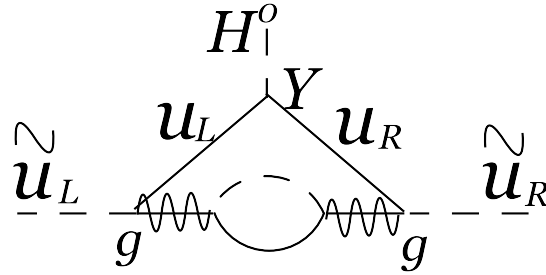


図 3.4 MSSM のスーパーポテンシャルの湯川項と図 3.2 から A 項がかかる。この A 項は湯川行列に比例していることが分かる。

次に A 項は $W_{MSSM} \ni Y_u u_R^c Q H_u$ とゲージノの質量を生成したダイアグラムを組み合わせて得られる。このダイアグラムからもわかるように A 項は湯川行列に比例している。つまり、gauge mediation では A 項からも FCNC は生じないのである。このように gauge mediation は、FCNC の生じない魅力的な mediation である。

gauge mediation の問題として、 μ 項が自然なスケール（電弱スケール）に生成できない、または $B\mu/\mu$ が大きすぎるという問題がある。singlet S はメッセンジャーにカップルしたのでヒッグス場とカップルしても良いので、次のようなスーパーポテンシャルも考えられる。

$$W = kSH_u H_d \quad (3.18)$$

ここで、 k は 1 よりも小さい定数である。これから、B 項 ($= B\mu/\mu$) を評価してみると

$$B = \frac{B\mu}{\mu} \sim \frac{\langle F_S \rangle}{\langle S \rangle} \sim \frac{4\pi}{\alpha_S} m_{\tilde{g}} \quad (3.19)$$

となる。ここで、(3.16) の $a = 3$ を最後に使った。これから $\frac{4\pi}{\alpha_S} \times (\text{ゲージノ質量})$ となり B 項がかなり大きいことをがわかる。 $B\mu$ はヒッグス場の mixing 項なので、 μ^2 または (ヒッグス場の質量)² より $B\mu$ が大きすぎると SM の真空が安定しない*4。一方で、 μ はヒッグシーノの質量なので電弱スケール $\sim O(100)\text{GeV}$ にほしい。このように gauge mediation では FCNC が生成されず魅力的であるが、 $B\mu/\mu$ が大きすぎるという問題がある。

*4 その詳しいことは文献 [3] にレビューしている。

第 4 章

アノマラス $U(1)$ ゲージ対称性

4.1 introduction

この章では、このアノマラス $U(1)$ ゲージ理論の基礎をレビューしていく。MSSM では、繰り込み群により SM の 3 つのゲージ結合定数が $\sim 10^{16}\text{GeV}$ で一致し、大統一理論 (GUT) を示唆している [14]-[16]。しかしながら、陽子崩壊の問題や二重項-三重項の分離の問題があり、現実的な GUT を構成することは困難であった。そこで、これらの問題を解決するために様々な模型やメカニズムが提唱されたのだが、対称性で許される項を手で落としたりと不自然な模型になっていた。最近の研究で、アノマラス $U(1)$ ゲージ対称性を課した GUT [30]-[32][38] が詳しく研究されている。この理論では、対称性で許される一般的な相互作用項をすべて $O(1)$ 係数で含む理論でありながら、湯川の階層性や二重項-三重項の分離の問題などを自然に解決できることがわかってきた。

アノマラス $U(1)$ ゲージ対称性は、超弦理論の低エネルギー有効理論に現れ、見かけ上アノマリーのある対称性である。実際はアノマリーはキャンセルできる。アノマラス $U(1)$ ゲージ理論に登場する場は、カイラル超場 (chiral superfield) Z_i 、ゲージ超場 (gauge(vector) superfield) V_A 、モジュライ (またはディラトン) D などである。(以下、特に説明のない限り、カイラル超場を単に場と、ゲージ超場をゲージ場ということにする。) 特に、このモジュライ D は、ラグランジアン

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} \int d^2\theta [k_A DW_A^\alpha W_{A\alpha} + k_a DW_a^\alpha W_{a\alpha}] + h.c. \quad (4.1)$$

を通して現れる。ここで、 W_A^α 、 W_a^α は、アノマラス $U(1)$ ゲージ対称性のゲージ場 V_A からなる field strength と理論のその他のゲージ群 (例えば GUT のゲージ群) G_a のゲ-

ジ場からなる field strength である^{*1}。そして k_A 、 k_a はそれぞれアノマラス $U(1)$ ゲージ対称性、群 G_a の Kac-Moody level (定数) である。このモジュライが真空期待値を持つことで $k_a \langle D \rangle = 1/g_a^2$ とゲージ群 G_a のゲージ結合定数を定義することができる。場 Z_i 、ゲージ場 V_A のアノマラス $U(1)$ 変換は次のようになる。

$$Z_i \rightarrow e^{-\frac{i}{2}\Lambda_A} Z_i \quad (4.2)$$

$$V_A \rightarrow V_A + \frac{i}{2}(\Lambda_A - \Lambda_A^\dagger), \quad (4.3)$$

$$(4.4)$$

ここで、 Λ_A はゲージパラメータ (chiral superfield gauge parameter) である。これらの場の変換の下でモジュライ D は次のようにアノマラス $U(1)$ 変換する。

$$D \rightarrow D + \frac{i}{2}\delta_{GS}\Lambda_A, \quad (4.5)$$

δ_{GS} は無次元パラメータである。モジュライが (4.5) のようにゲージ変換することで、アノマリーをキャンセルすることができる。また、スーパーポテンシャルの正則性 (holomorphic) からこのモジュライのゲージ変換を考えると、スーパーポテンシャルにモジュライを入れることはできないことがわかる^{*2}。しかしながら、ケーラーポテンシャルは、スーパーポテンシャルのような正則性が無いのでモジュライの関数であってもよい。実際に上記のアノマラス $U(1)$ 変換を考えると、ケーラーポテンシャル $K_D = K_D(D + D^\dagger - \delta_{GS}V_A)$ はアノマラス $U(1)$ ゲージ不変であることがわかる。このケーラーポテンシャルを $D + D^\dagger$ のまわりでテイラー展開することで FI 項が導出される。

$$\int d^4\theta K_D(D + D^\dagger - \delta_{GS}V_A) = -\left(\frac{\delta_{GS}K'_D}{2}\right) D_A + \dots \equiv \xi^2 D_A + \dots, \quad (4.6)$$

ここで D_A はアノマラス $U(1)$ ゲージ理論の D 項、 ξ^2 は FI パラメータ、 $K'_D = \partial K_D / \partial D$ である。湯川行列の階層性などを説明するために FI パラメータ $\xi^2 > 0$ を要求する。 δ_{GS}

^{*1} W_A^α 、 W_a^α は次のように定義される。

$$W_{A\alpha} = \frac{-1}{4}\bar{D}\bar{D}D_\alpha V_A, \quad W_{a\alpha} = \frac{-1}{4}\bar{D}\bar{D}D_\alpha V_a.$$

ここで V_a はゲージ群 G_a のゲージ場であり、超微分 D 、 \bar{D} は

$$D = \frac{\partial}{\partial\theta} + i\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu, \quad \bar{D} = -\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}} + i\theta\sigma^\mu\partial_\mu$$

で定義される。 θ 、 $\bar{\theta}$ はグラスマン座標である。

^{*2} 現象論の様々な問題点を解くアノマラス $U(1)$ ゲージ対称性を課した現象論のモデルでは、 $e^{D/\delta_{GS}Z}$ と $\frac{Z_i Z_k}{Z_j}$ という形の項は無いと仮定する。このような項があっても、スーパーポテンシャル W は、 $W \supset e^{D/\delta_{GS}Z}$ もアノマラス $U(1)$ ゲージ不変に組むことができる。また、この項とは別に $\frac{Z_i Z_k}{Z_j}$ という項も対称性で許されれば書くことができる。しかし、このような項があると現象論の様々な問題点を解くことのできる重要なメカニズム、SUSY zero メカニズムを壊してしまうので、これらの項は無いと仮定する。

は $\text{tr}Q_A$ に比例し*³、現象論の多くの模型は $\text{tr}Q_A > 0$ なので、これは $K'_D < 0$ を要求することとなるが、このことは弦理論からくるモジュライの tree レベルのケーラーポテンシャル $K_D = -\ln(D + D^\dagger - \delta_{GS}V_A)$ と無矛盾である。

4.2 真空期待値、SUSY zero メカニズム

今から、アノマラス $U(1)$ ゲージ理論の特徴である場の真空期待値がアノマラス $U(1)$ チャージで決まること、SUSY zero メカニズムについてレビューする。理論の最も重要な仮定は、対称性で許される項は繰り込み不可能な項まですべて $O(1)$ 係数を使って導入することである。一般的に、このように対称性で許される項をすべて導入すると無限個の相互作用項のあるポテンシャルを計算しなければならず、GUT の問題点を解く上で非常に困難になる。実際に、GUT の問題点である 2 重項-3 重項分離の問題を解くときも、今までの多くの理論は、対称性で許される相互作用項であるのに都合の悪い項を手で落としたり、場の真空期待値を手で置くなどという非常に不自然な理論であった [21]。一方、SUSY zero メカニズムはこのような問題点を解決できる。アノマラス $U(1)$ チャージをコントロールすることで無限個の項の中から物理に効く、または真空の決定に効く項 (有限個の項) のみを取り扱えるからである*⁴[30]-[32][38]。

まず、場の真空期待値がアノマラス $U(1)$ チャージで決まることを議論するために次のような場を導入して考えていく。簡単のため Z_i^+ 、 Z_j^- は、SM や GUT のゲージ群の

$$\begin{array}{c|cc} & Z_i^+ & Z_j^- \\ \hline U(1)_A & z_i^+ > 0 & z_j^- < 0 \end{array}$$

表 4.1 場 Z_i^+ と Z_j^- のアノマラス $U(1)$ チャージアサインメント。ここで、($i = 1, \dots, n_+$, $j = 1, \dots, n_-$) である。

下で singlet として考える。ここで、小文字はチャージを表している。(以後、小文字はチャージを表すことにする。) これらの場の真空期待値を決めるためには、F-flatness 条件と D-flatness 条件を解けばよい。

$$\frac{\partial W}{\partial Z_i^+} = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial Z_j^-} = 0 \quad (i = 1, \dots, n_+, j = 1, \dots, n_-)$$

*³ 参考文献 [32] によると、アノマリーキャンセルの条件から、 δ_{GS} は次のような関係式がある。 $2\pi^2\delta_{GS} = \frac{1}{24}\text{tr}Q_A$ 。

*⁴ 先に書いたように、 $e^{D/\delta_{GS}}Z$ と $\frac{Z_i Z_k}{Z_j}$ という形の項は無いと仮定する。もし、このような項があると多項式にしたときに無限個の項が出てきて、SUSY zero メカニズムの良い点である有限個の相互作用項をコントロールするという点が失われてしまうので (SUSY zero メカニズムを壊してしまうので、) これらの形の相互作用は無いと仮定する。

$$D_A = \left(\xi^2 + \sum_i z_i^+ |Z_i^+|^2 + \sum_j z_j^- |Z_j^-|^2 \right) = 0 \quad (4.7)$$

特に興味深いのは、アノマラス $U(1)$ チャージ正の場は真空期待値を持たず、チャージ負の場は真空期待値を要求するような真空である。すなわち、 $\langle Z_i^+ \rangle = 0$ 、 $\langle Z_j^- \rangle \neq 0$ となる真空である。このような真空が実現できるかをこれから議論していく。まず、 $\langle Z_i^+ \rangle = 0$ を仮定する。このように仮定してすべての F-flatness 条件と D-flatness 条件を解き、矛盾なく他の場の真空期待値が求められることを見ればよい。この仮定の下で、アノマラス $U(1)$ チャージ負の場の F 項は、スーパーポテンシャルをチャージ負の場で微分しているのでアノマラス $U(1)$ ゲージ対称性から必ずチャージ正の場に比例することがわかる。ゆえに仮定から^{*5}チャージ負の場の F 項は自明にゼロになる。

$$\frac{\partial W}{\partial Z_j^-} = 0 \quad (4.8)$$

よって残った条件は n_+ 個の F-flatness 条件と 1 つの D-flatness 条件である。これを残る n_- 個の場 Z_j^- で解くことにより真空期待値を得ることができる。すなわち flat な方向なしに真空期待値が決まるときは $n_+ = n_- - 1$ である。今からこの場合を考えて具体的に真空期待値を決めていく。 n_- 個のアノマラス $U(1)$ チャージ負の場 Z_j^- のうち、最も大きい (0 に近い) チャージを持つ場を Θ で表す。また、この様な場は、Froggatt-Nielson 場といい、アノマラス $U(1)$ チャージを $\theta = -1$ と normalize する。そして、この場 Θ はアノマラス $U(1)$ チャージを持つ場の中で最も大きい真空期待値を持つと仮定する。D-flatness 条件 (4.7) を満たすためには、 Θ^2 の真空期待値と FI パラメータ $\xi^2 (> 0)$ (4.6) がキャンセルすればよい。すなわち、

$$D_A \cong \left(\xi^2 - |\Theta|^2 \right) \sim 0 \rightarrow \langle \Theta \rangle \equiv \lambda \sim \xi \quad (4.9)$$

となる。一方、その他の場の真空期待値は F-flatness 条件からきまる。スーパーポテンシャル W は、

$$\begin{aligned} W &= \Theta^{z_i^+} Z_i^+ + \Theta^{z_i^+ + z_j^-} Z_i^+ Z_j^- + \Theta^{z_i^+ + z_j^- + z_k^-} Z_i^+ Z_j^- Z_k^- + \dots \\ &= \Theta^{z_i^+} Z_i^+ \left(1 + \Theta^{z_j^-} Z_j^- + \Theta^{z_j^- + z_k^-} Z_j^- Z_k^- + \dots \right) \end{aligned} \quad (4.10)$$

とかけるので、

$$\frac{\partial W}{\partial Z_i^+} = \lambda^{z_i^+} \left(1 + \lambda^{z_j^-} Z_j^- + \lambda^{z_j^- + z_k^-} Z_j^- Z_k^- + \dots \right) = 0 \quad (4.11)$$

^{*5} また、この仮定の下では、スーパーポテンシャルのゲージ不変性の条件 $\delta W = \frac{\partial W}{\partial Z_i^+} \delta Z_i^+ + \frac{\partial W}{\partial Z_j^-} \delta Z_j^- = 0$ もまた自明に満たすことがわかる。

となる。ただし、(4.10)の「 \dots 」は、 $(\Theta^{z_j^-} Z_j^-)$ の3次以上の項を表している。ここで、 $(\Theta^{z_i^+} Z_i^+)$ を2次以上もつ項は仮定により真空期待値の決定には効かないので無視した。(4.11)により、これらすべてをたしてゼロになればよい。この条件を満たすには、 $\lambda^{z_j^-} Z_j^- \sim O(1)$ ならよいので Z_j^- の真空期待値は

$$\langle Z_j^- \rangle \sim \lambda^{-z_j^-} \quad (4.12)$$

と決まる。このように $n_+ = n_- - 1$ の場合、仮定 $\langle Z_i^+ \rangle = 0$ を使って、そして矛盾することなく F-flatness 条件と D-flatness 条件を解くことができ、真空期待値を決めることができることがわかる。

$$\begin{cases} \langle Z_i^+ \rangle = 0 & (z_i^+ > 0) \\ \langle Z_j^- \rangle \cong \lambda^{-z_j^-} & (z_j^- < 0) \end{cases} \quad (4.13)$$

この真空期待値の決定の議論は、ゲージ群 G_a の表現を持つ場(ここでは C と書く)すなわち singlet でない場にも拡張できる。 $Z^- = \bar{C}C$ と組めば singlet になるので、上の議論から、 $\langle \bar{C}C \rangle = \lambda^{-(\bar{c}+c)}$ となる。さらにゲージ群 G_a の D-flatness 条件を使うことで、 $\langle C \rangle = \langle \bar{C} \rangle = \lambda^{-\frac{1}{2}(\bar{c}+c)}$ になることがわかる。ここで注意したいのが、singlet でない場の真空期待値の場合、 $\langle C \rangle = \lambda^{-c}$, $\langle \bar{C} \rangle = \lambda^{-\bar{c}}$ にならないという点である。

ここで、現象論の模型においてこの真空を使ったときのコメントをしていきたい。まず、湯川行列の階層性について考えてみよう。クォークとレプトンの湯川相互作用は、これらの場とヒッグス場のアノマラス $U(1)$ チャージを使って書くことができる [24]-[32]。例えば、SM ゲージ singlet の場 Θ を使って次のようなスーパーポテンシャルを書くことができる。

$$\begin{aligned} W_{\text{Yukawa}} &= \left(\frac{\Theta}{\Lambda}\right)^{q_i+u_j+h_u} Q_i U_j^c H_u + \left(\frac{\Theta}{\Lambda}\right)^{q_i+d_j+h_d} Q_i D_j^c H_d + \dots \\ &\rightarrow \lambda^{q_i+u_j+h_u} Q_i U_j^c H_u + \lambda^{q_i+d_j+h_d} Q_i D_j^c H_d + \dots \end{aligned} \quad (4.14)$$

H_u, H_d はそれぞれアップタイプ ヒッグス、ダウタイプ ヒッグスを表し、 Q_i, U_j^c, D_j^c はそれぞれ $SU(2)_L$ ダブレットクォークと $SU(2)_L$ singlet のアップクォーク、ダウンクォークを表している。また Λ は理論のカットオフである。「 \dots 」は、レプトンの湯川相互作用を省略している。このように、湯川行列は、 $\lambda \ll 1$ とすると、それぞれの場のアノマラス $U(1)$ チャージを上手く選ぶことで湯川行列の階層性を説明することができる。また、これらの湯川行列を対角化する Cabibbo-Kobayashi-Maskawa (CKM) 行列 V_{CKM} [39][40] もまた、アノマラス $U(1)$ チャージを使って書き表すことができることがわかる [24]-[26],[31][32]。

次のスーパーポテンシャルの相互作用項、

$$Z_1^- Z_2^- \cdots Z_k^-, \quad (4.15)$$

$z_1^- + z_2^- + \cdots + z_k^- < 0$ を考えてみる。まず結論を述べると、この相互作用項は禁止される。なぜなら、アノマラス $U(1)$ ゲージ不変性から、このような項を書こうと思うと、必ずアノマラス $U(1)$ チャージの和が 0 になるようにチャージが正の場を掛けないといけないからである。チャージ正の場は真空期待値がゼロなのでこのような相互作用項はスーパーポテンシャルに現れてこない。言い換えれば、アノマラス $U(1)$ チャージの和が負である相互作用は禁止される。また、チャージ負の場の複素共役を掛けることでこのような項が生き残る可能性があるかもしれないが、スーパーポテンシャルの正則性 (holomorphy) からチャージ負の場の複素共役を掛けることはできない。このように、このような相互作用を禁止するメカニズムはスーパーポテンシャルの正則性が重要な働きをしている。このようなメカニズムでアノマラス $U(1)$ チャージの和が負である相互作用は禁止するメカニズムを SUSY zero メカニズム、または正則性 (holomorphy) の重要性から holomorphic zero メカニズムと呼ばれる。この SUSY zero メカニズムは、スーパーポテンシャルの一般的な相互作用項をチャージによってコントロールすることができることをいっている。すなわち、SUSY zero メカニズムは、対称性で許される一般的な相互作用項の数を有限個にでき、超対称性の模型や GUT などの理論の現象論的な問題点を解決する上で非常に重要になってくる [30][31][32][38]。本研究でも、この SUSY zero メカニズムを使って自発的な超対称性の破れの模型を構築していくことにする。

理論のカットオフ Λ についてコメントしておく。文献 [30][31][32][38] のアノマラス $U(1)$ GUT では、SM のゲージ結合定数の自然な一致は、カットオフ $\Lambda \simeq 10^{16} \text{GeV}$ で実現できた。また、文献 [30][31][32][38] 以外にも GUT の問題点を解くことのできるアノマラス $U(1)$ ゲージ対称性を課した GUT の模型 [62][63] があり、その模型では、カットオフはプランクスケール $M_p \simeq 10^{18} \text{GeV}$ にとっている。このように理論のカットオフは、考えている模型によって大きさが違う。そこで本論文では、カットオフ Λ はフリーパラメータとして自由度を残したまま議論を進めていくことにする。

重要な点を 1 つコメントしておく。それは、これら湯川相互作用を自然に出し、GUT の理論の問題点を解決するアノマラス $U(1)$ GUT [30][31][32][38] では、 $U(1)_R$ 対称性を課していないことである。もしこの理論に $U(1)_R$ 対称性を課せば、様々な高次のオペレータが禁止されてしまい、この理論は GUT の問題点など解くことができなくなってしまう。しかし、一方で、超対称性理論の章の「超対称性の自発的な破れ」でレビューしたように、超対称性を自発的に破るためには $U(1)_R$ 対称性が本質的な役割を果たしている。これは、両者の理論の矛盾である。本論文ではこの矛盾点を解決している。それは、次の章で議論していく。

第5章

アノマラス $U(1)$ 理論における自発的な超対称性の破れ

この章では、本論文の研究の1つであるアノマラス $U(1)$ 理論を用いた自発的な超対称性の破れの研究について書いている。アノマラス $U(1)$ 理論はいくつかの特徴を持ち、標準模型や大統一理論の問題点を解決する理論として注目されている。このいくつかの特徴とは、この理論には自然に FI パラメータが存在することと、そしてもう1つのアノマラス $U(1)$ 理論の最大の特徴は前セクションで紹介した様に真空期待値がアノマラス $U(1)$ チャージで決まることである (SUSY zero メカニズム)。この性質から、湯川行列の階層性が出せ、大統一理論の大きな問題点である 2 重項-3 重項分離の問題も自然に解くことができる [30][31][32][38]。

これらの特徴を持つアノマラス $U(1)$ のモデルは、 $U(1)_R$ 対称性を課していない。また、真空は超対称な真空で議論していた。一方、アノマラス $U(1)$ ゲージ対称性を使って超対称性を破ることもできる [41]。この超対称性を破るモデルは対称性で許されたすべての相互作用を含んでおり、 $U(1)_R$ 対称性が本質的な役割を果たしている。標準模型や大統一理論の問題点を解く上記のアノマラス $U(1)$ 理論のモデル [30][31][32][38] は、この $U(1)_R$ 対称性を課していない。もし、このモデルに $U(1)_R$ 対称性を課せば、標準模型や大統一理論の問題点を解くことは困難になるだろう。そこで、 $U(1)_R$ 対称性の課されていないモデルで超対称性の破れの真空を探すことは大変意味がある。また、ただ超対称性を破るのではなく、アノマラス $U(1)$ 理論最大の特徴である場の真空期待値がアノマラス $U(1)$ チャージで決まる特徴を保ちつつ超対称性を破る真空を見つけることを考えていく。

このセクションでは、アノマラス $U(1)$ ゲージ対称性を課したモデルにおける超対称性の破れを考えていく。 $U(1)_R$ 対称性のない、アノマラス $U(1)$ ゲージ対称性を課したモデルでは、準安定な真空が存在し、そこでは超対称性が自発的に破れていて、また場の真空期待値がアノマラス $U(1)$ チャージで決まる特徴を保っていることをがわかるだろう。

$U(1)_R$ 対称性の課されていない模型での超対称性の破れを考える前に、 $U(1)_R$ 対称性とアノマラス $U(1)_A$ ゲージ対称性を課した模型での超対称性の破れを考えてみる。簡単のために、二つの場、 S と Θ の模型を考えよう。ここで、 S 、 Θ は、それぞれアノマラス $U(1)$ チャージ $s > 0$ 、 $\theta = -1$ を持つ場である（本論分では小文字はチャージを示す）。 $U(1)_R$ チャージのアサイメントを含め、チャージアサイメントをまとめて以下の表に書いている。

	W	S	Θ
$U(1)_A$	0	$s > 0$	-1
$U(1)_R$	2	2	0

表 5.1 スーパーポテンシャル W 、 S と Θ のチャージアサイメント

この模型での一般的なスーパーポテンシャル W は次のようになる。

$$W = S\Theta^s \quad (5.1)$$

ここで、係数を無視し、カットオフ $\Lambda = 1$ にとった。この模型の補助場 F 項と D 項は、次のようになる。

$$\begin{aligned} F_S^* &= -\frac{\partial W}{\partial S} = -\Theta^s, \\ F_\Theta^* &= -\frac{\partial W}{\partial \Theta} = -sS\Theta^{s-1}, \\ D_A &= -g(\xi^2 - |\Theta|^2 + s|S|^2), \end{aligned} \quad (5.2)$$

ここで、 g はアノマラス $U(1)$ ゲージ対称性の結合定数、 ξ^2 は FI パラメータであり、 $\xi^2 > 0$ である。D 項をゼロにするためには Θ が真空期待値をもたなければ実現できず、一方で Θ が真空期待値をもつと S の F 項 (F_S) がゼロにできなくなる。このように F 項と D 項を同時にゼロにすることは不可能であり、超対称性は自発的に破れる。場 S 、 Θ と補助場 F 項、 D 項の真空期待値はポテンシャル、

$$\begin{aligned} V &= |F_S|^2 + |F_\Theta|^2 + \frac{1}{2}D_A^2 \\ &= |\Theta^s|^2 + |sS\Theta^{s-1}|^2 + \frac{g^2}{2}(\xi^2 - |\Theta|^2 + s|S|^2)^2 \end{aligned} \quad (5.3)$$

の最小条件で求めることが出来る。

$$\langle S \rangle = 0, \quad \langle \Theta \rangle = \lambda \quad (5.4)$$

$$\langle F_S \rangle \sim \lambda^s, \quad \langle F_\Theta \rangle = 0, \quad \langle D_A \rangle \sim \frac{s}{g}\lambda^{2s-2}, \quad (5.5)$$

ここで、 $\xi \ll 1$ である。 $\lambda \equiv \langle \Theta \rangle / \Lambda \sim \xi / \Lambda$ であり、一般性を失うことなく、 Θ の真空期待値はアノマラス $U(1)$ のゲージ対称性により実にとることができる。これらの場の真空期待値は、従来のアノマラス $U(1)$ ゲージ対称性を課した現象論の模型の特徴である場の真空期待値がアノマラス $U(1)$ チャージで決まるを再現している。また、典型的な超対称性の破れのスケールは $\lambda^s \Lambda$ であり*¹、具体的には、 $s \sim 24$ 、 $\lambda \sim 0.22$ 、 $\Lambda = 2 \times 10^{18}$ GeV にとると、 $\lambda^s \Lambda \sim 300$ GeV にとることができる。

次に $U(1)_R$ 対称性の課されていない模型では、どうなるかを考えていく。場のアノマラス $U(1)$ チャージのアサイメントをまとめて以下の表に書く。

	S	Θ
$U(1)_A$	$s > 0$	-1

表 5.2 場 S と Θ のチャージアサイメント

この模型での一般的なスーパーポテンシャルは次のようになる。

$$W(S\Theta^s) = \sum_{n=1} a_n (S\Theta^s)^n, \quad (5.6)$$

ここで、 a_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) は $O(1)$ 係数である。 $x = S\Theta^s$ と定義する。すると、スーパーポテンシャル $W(x)$ は、 x の多項式になる。このような多項式では、超対称性を保つ真空が存在する。実際に F 項と D 項を見ると次のようになる。

$$F_S^* = -\frac{\partial W}{\partial S} = -\frac{\partial W}{\partial x} \Theta^s \quad (5.7)$$

$$F_\Theta^* = -\frac{\partial W}{\partial \Theta} = -\frac{\partial W}{\partial x} s\Theta^{s-1} S \quad (5.8)$$

$$D_A = -g(\xi^2 - |\Theta|^2 + s|S|^2). \quad (5.9)$$

二つの F 項 (F_S と F_Θ) ゼロの条件は、 $x = S\Theta^s$ の真空期待値を $\partial W / \partial x = 0$ にとると実現でき、また、 Θ の真空期待値を選ぶ自由度が残っているので、それを使うと D 項もゼロにすることができる。一般には、 Θ 、 S の真空期待値が $O(1)$ でこれが実現される。ゆえに、F 項と D 項すべてをゼロにすることができるので $S \sim O(1)$ 、 $\Theta \sim O(1)$ のこの領域では超対称性は破れない。しかし、場 $S, \Theta \ll 1$ の領域では、この議論は成り立たない。 $\xi \ll 1$ であり、場の真空期待値が $\langle \Theta \rangle \sim \xi$ と $\langle S \rangle \sim 0$ では、準安定な超対称性を破る真空が存在する。そして、このような真空期待値の大きさは、多くの様々な現象論の問

*¹ ここでは、伝播を考えていないが、参考までに $\lambda^s \Lambda$ が超対称性を破るスケールであることをみてる。重力伝播シナリオでは、ケーラーポテンシャルから次のような項が一般には現れる。 $K = S^\dagger S Q^\dagger Q$ 。ここで Q は MSSM の場だとする。このケーラーポテンシャルに $\theta^2 \bar{\theta}^2$ (θ はグラスマン座標) を S と S^\dagger にとると、スカラー場の質量が $\sim \lambda^s \Lambda$ と分かる。ゆえに、 $\lambda^s \Lambda$ は超対称性の破れのスケールになる。

題点を解くのに重要になる。場 $S, \Theta \ll 1$ の領域で超対称性を破る準安定な真空が存在する理由は、 $x = S\Theta^s \ll 1$ からスーパーポテンシャル W の高次の項を無視、すなわち $W \sim S\Theta^s$ と近似することができ、近似的に $U(1)_R$ 対称性のある超対称性を自発的に破る模型になるからである。 $\partial W/\partial x$ を使って説明すると、 $\partial W/\partial x = a_1 + 2a_2x + O(x^2)$ であり、 $x = S\Theta^s \ll 1$ から、 $O(1)$ 係数 a_1 を高次の項でキャンセルできず $\partial W/\partial x \neq 0$ となるから、 $U(1)_R$ 対称性を課した模型と同じように F_S 項と D 項を同時にゼロにすることはできないので超対称性を破る。ゆえに、 $U(1)_R$ 対称性のない模型では、超対称な真空の他に超対称性を自発的に破っている準安定な真空が存在する。

場と補助場の真空期待値^{*2} $\langle S \rangle = S_r e^{i\phi_s}$, $\langle \Theta \rangle = \Theta$, $\langle F_S \rangle$, $\langle F_\Theta \rangle$, $\langle D_A \rangle$ と準安定真空の安定性を見るには、以下のポテンシャルを解析すればよい。

$$\begin{aligned} V &= |F_S|^2 + |F_\Theta|^2 + \frac{1}{2}D_A^2 \\ &= \left| \frac{\partial W}{\partial x} \right|^2 (\Theta^{2s} + s^2 S_r^2 \Theta^{2(s-1)}) + \frac{g^2}{2} (\xi^2 - \Theta^2 + s S_r^2)^2, \end{aligned} \quad (5.10)$$

ここで、 $\frac{\partial W}{\partial x} = \sum_{n=1} a_n n (S_r e^{i\phi_s} \Theta^s)^{n-1}$ であり、ポテンシャルの位相依存性は、この $\partial W/\partial x$ からしか来ない。従来の超対称な模型での真空（真空期待値） $\langle S \rangle = 0$ と $\langle \Theta \rangle = \lambda \sim \xi \ll 1$ から、超対称性の破れの影響で小さくずれた真空を見つけたい。これらを計算する上で、 S と Θ の値の小ささから、スーパーポテンシャルの多項式 $W = a_1(S\Theta^s) + a_2(S\Theta^s)^2$ まで ($U(1)_R$ 対称性を導入させない最低次数の項まで) 考えて計算すれば十分である。ポテンシャルの最小条件 (stationary conditions)、

$$\frac{\partial V}{\partial \Theta} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial S_r} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial \phi_s} = 0 \quad (5.11)$$

を計算することによって、それぞれの場と補助場の真空期待値を得ることが出来る。

$$\langle D_A \rangle \sim \frac{s|a_1|^2}{g} \Theta^{2s-2} \sim \frac{s}{g} \lambda^{2s-2}, \quad (5.12)$$

$$S_r \sim -\frac{\Theta^{s+2}}{2s^2|a_1|^2} (a_2 a_1^* e^{i\phi_s} + h.c.) \sim \frac{1}{s^2} \lambda^{s+2}, \quad (5.13)$$

$$a_1^* a_2 e^{i\phi_s} - a_1 a_2^* e^{-i\phi_s} = 0. \quad (5.14)$$

ここで、場 Θ の超対称な模型の真空期待値からのズレを $\delta\Theta = \Theta - \xi$ を定義すると、式 (5.12) から、ズレは $\delta\Theta \sim -\frac{s|a_1|^2}{2g} \xi^{2s-3}$ である。ゆえにズレは、 $\delta\Theta/\xi \ll 1$ とかなり小さいことがわかり、これはズレを小さいと考えて計算してきたことと無矛盾である。このとき、補助場の真空期待値は、 $-F_S^* \sim a_1 \lambda^s$, $-F_\Theta^* \sim \frac{\lambda^{2s+1} A}{s a_1^*}$ と決まる。ただし

^{*2} この理論にはアノマラス $U(1)$ ゲージ対称性があるので、 Θ の真空期待値を実にできる

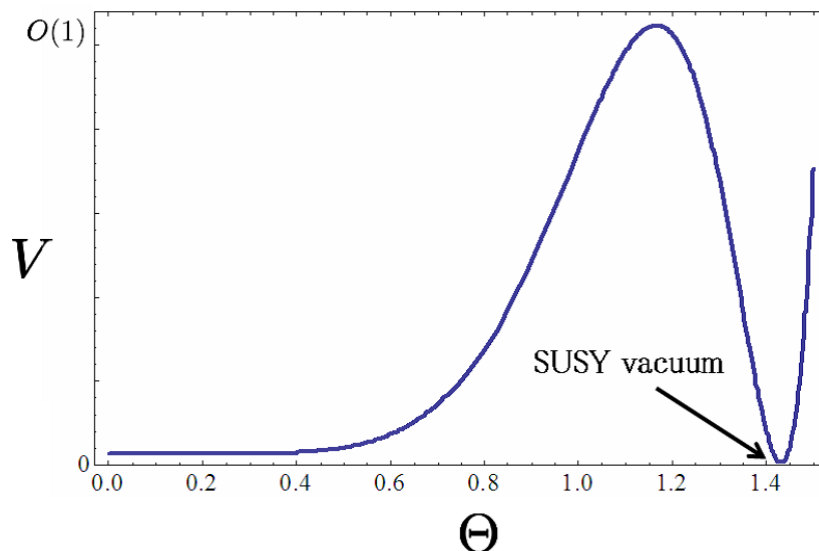


図 5.1 Θ のポテンシャル。ここで $s = 4, \xi = 0.2$ のポテンシャルを書いている。

$A \equiv -a_1 a_2^* e^{-i\phi_s} = -a_1^* a_2 e^{i\phi_s}$ である。もし、 a_1 と a_2 が実かつ同じ符号をもったとすると、(5.14) から、 $\sin \phi_s = 0$ すなわち $\cos \phi_s = \pm 1$ となることがわかる。この $O(1)$ 係数の下、ポテンシャルを場 Θ 、 S_r 、 ϕ_s それぞれで二階微分して固有値を調べることで（固有値が正ならポテンシャルは安定）、準安定真空の安定性の条件が $\cos \phi_s = -1$ であることがわかる。また、一般的な $O(1)$ 係数の場合の安定性の条件は $a_1^* a_2 e^{i\phi_s} = -|a_1 a_2|$ である。ゆえに、 a_1 と a_2 が実かつ同じ符号をもったとき、ポテンシャルの最小条件と安定性の条件から $\cos \phi_s = -1$ であり、 ϕ_s の値は、 $\phi_s = (2n + 1)\pi$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) であることがわかる。

これまでに考えた 2 つの模型、 $U(1)_R$ 対称性を課した模型と課していない模型の大きな違いは、アノマラス $U(1)$ チャージ正の場 S の真空期待値の値である。このことは、 Θ の補助場 F_Θ は S に比例することから、 F_Θ の真空期待値の違いにも関係している。 $U(1)_R$ 対称性を課した模型では、 S の真空期待値はゼロになり、一方、 $U(1)_R$ 対称性を課していない模型では、 S の真空期待値はゼロではない値をもっている。この S の真空期待値の大きさは、典型的な超対称性の破れのスケール $F_S/\Lambda \sim \lambda^s$ より小さくなる。これらの理由は次のように説明できる。 $U(1)_R$ 対称性を課していない模型において、スーパーポテンシャル W は、 $S^2 \Theta^{2s}$ のような高次のオペレーターを含んでいる。この項は、 F_S が真空期待値をもった後で、tadpole $\langle F_S \rangle \lambda^{2s} S$ を導く^{*3}。この tadpole こそ S が真空期

^{*3} 場 S の tadpole 項はポテンシャルの $|F_S|^2$ 項からくる。 $V \supset |F_S|^2 = F_S \left| \frac{\partial W}{\partial x} \right| \Theta^s \supset \langle F_S \rangle \lambda^{2s} S$ 。

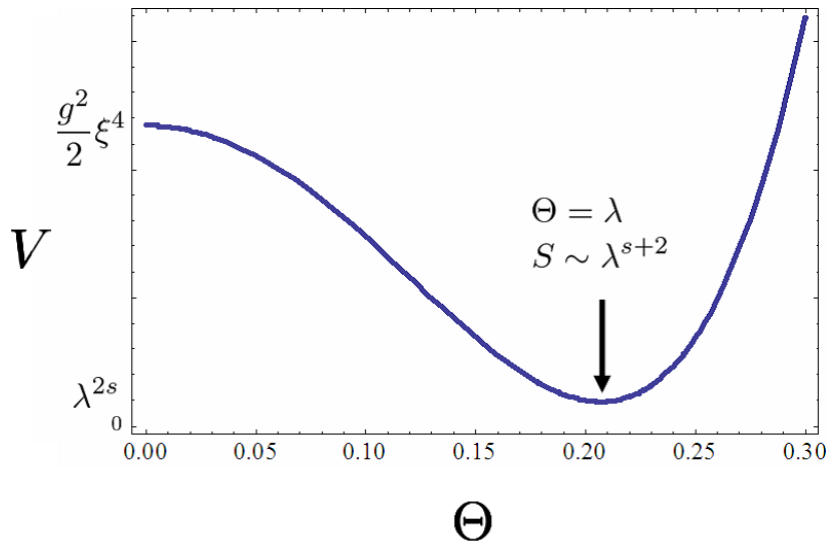


図 5.2 図 5.1 の原点付近のポテンシャルの拡大図

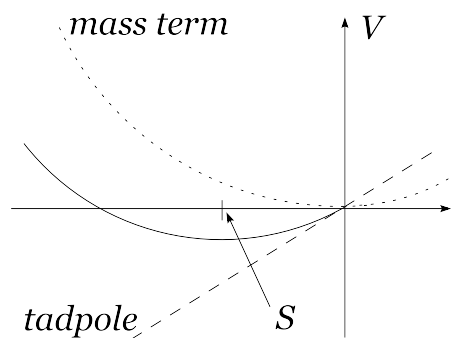


図 5.3 場 S のポテンシャル。 S の質量項だけでなく S の tadpole があるために真空期待値はゼロからずれる。

待値をもつ本質的な理由である。すなわち、

$$\langle S \rangle \sim \frac{S \text{ の tadpole の係数}}{S \text{ の質量}^2} \quad (5.15)$$

から決まる。図 5.3 は、この様子を図で書いたものである。具体的に質量項は $|\frac{\partial W}{\partial \Theta}|^2 \propto \lambda^{2s-2}|S|^2$ で与えられるので、 S の真空期待値は、(5.15) から、 $\langle S \rangle \sim \lambda^{s+2}$ となる。もし $\lambda^s \Lambda$ が電弱スケールにあり、カットオフ Λ が電弱スケールよりも十分大きいならば、真空期待値 $\langle S \rangle$ は、カットオフ Λ と $\langle \Theta \rangle = \lambda$ よりも十分小さいことがわかる。その結果として、これらの場の真空期待値の値は現象論の様々な問題点を解く重要な真空期待値の関係を満足することがわかる。(すなわち SUSY zero メカニズムが保たれている。)

図 5.1 は、この模型のポテンシャルの形を描いたものである。ポテンシャルは、

$\Theta \sim 1$ を超える辺りから急激に増加していくことがわかる。これは、ポテンシャル $V \supset |F_S|^2 \sim \Theta^{2s}$ がその原因となっている。また、 $\Theta < \lambda$ の領域では、D 項、特に D 項に含まれている FI 項があるおかげで、原点でも、図 5.2 のようにポテンシャルが持ち上がっている。ただし、図 5.2 は原点まわりのポテンシャル拡大図を描いたものである。

この章の最後に、参考文献 [58] に従って、 $s = 24$ 、 $\lambda = 0.22$ を使って準安定真空の lifetime を評価する。準安定真空の lifetime τ は近似的に次のように与えられる。

$$\tau \propto e^P, \quad (5.16)$$

ここで、 P は無次元のパラメータであり、次のように与えられる。

$$P = \frac{(\sqrt{V_h} \Delta)^4}{\epsilon'^3}. \quad (5.17)$$

Δ は、準安定真空から超対称な真空までの距離である。そして、 V_h は準安定真空と超対称な真空の間にあるポテンシャルの山の高さを表し、 ϵ' は準安定真空のポテンシャルの高さを表している。我々の模型の場合、 $\Delta \sim O(\Lambda)$ 、 $V_h \sim O(\Lambda^4)$ 、 $\epsilon' \sim O(\lambda^{2s} \Lambda^4) \sim O(M_{SUSY}^2 \Lambda^2)$ である。ここで、 M_{SUSY} は超対称性の破れのスケールである。ゆえに、 P は次のように評価できる。

$$P \sim \frac{\Lambda^{12}}{M_{SUSY}^6 \Lambda^6} \sim \frac{\Lambda^6}{M_{SUSY}^6}. \quad (5.18)$$

よって、 $M_{SUSY} = \lambda^s \Lambda \sim 100 \text{ GeV}$ 、 $\Lambda = 10^{18} \text{ GeV}$ から $P \sim 10^{96}$ の値を得る。それゆえ、この準安定真空の lifetime は私たちの宇宙の年齢よりも十分長いことがわかる。

第 6 章

アノマラス $U(1)$ 理論における自発的な超対称性の破れの一般論

この章では、前の章で議論した超対称性の破れのモデルを一般的な場合に拡張する。そのために、アノマラス $U(1)$ チャージ正の場 $S_i (i = 1, 2, \dots, n_+)$ とチャージ負の場 $Z_j (j = 1, \dots, n_- - 1)$ と Θ を以下の表 6.1 にあるように導入する。複素数で数え

	S_i	Z_j	Θ
$U(1)_A$	$s_i > 0$	$z_j < -1$	-1

表 6.1 場 S_i, Z_j と Θ のアノマラス $U(1)$ チャージアサインメント。ここで、 $(i = 1 \sim n_+, j = 1 \sim (n_- - 1))$ である。

て $n_+ + n_-$ 個の F-flatness 条件 ($F = 0$) のうちの一つの条件は独立ではない。なぜならアノマラス $U(1)$ ゲージ対称性があるのでスーパーポテンシャルのゲージ不変性 $\delta_{gauge} W = (\partial W / \partial \phi_i) \delta_i \phi = 0$ があるからである。また、アノマラス $U(1)$ ゲージ対称性の D-flatness 条件 ($D_A = 0$) もある。一般的に、 $n_+ + n_-$ 個の複素場の真空期待値は、アノマラス $U(1)$ ゲージ対称性の南部-ゴールドストーン モードに対応する 1 つの実場を除いて、これらの条件の下で決まる。もし、一般的なスーパーポテンシャル $W(S, Z, \Theta)$ を導入すると、上の条件をすべて満たせる真空が存在する。すなわち一般的に係数が $O(1)$ 係数で場の真空期待値がすべて $O(1)$ の超対称な真空が存在する。しかしながら、参考文献 [31][38] で議論されているように、 $n_+ \leq n_- - 1$ のとき、アノマラス $U(1)$ チャージ正の場 S_i の真空期待値がゼロ、チャージ負の場 Z_j 、 Θ の真空期待値が $O(\xi)$ より大きくない値 (ゼロでない値) を持つ、もう一つの超対称な真空が存在する。アノマラス $U(1)$ チャージが正の場 S_i の真空期待値ゼロのとき、アノマラス $U(1)$ チャージが負の場 Z_j 、 Θ の F-flatness 条件は、自明に満たされる。なぜなら $\partial W / \partial Z_j$ は、必ずチャージが正の

場に比例するからである。ゆえに、このとき n_+ 個の F-flatness 条件とアノマラス $U(1)$ ゲージ対称性の D-flatness 条件、

$$\frac{\partial W}{\partial S_i} = 0, \quad D_A = g(\xi^2 - |\Theta|^2 + \sum_j z_j |Z_j|^2) = 0, \quad (6.1)$$

において Z_j 、 Θ の真空期待値を決めることになる。もし、 $n_+ \leq n_- - 1$ ならば、これらの flatness 条件を一般に満たすことができ、それゆえに超対称な真空が存在する（この論文では、この真空“小さな真空”と呼ぶことにする。）D-flatness 条件から、場の真空期待値の大きさは ξ ($\xi \ll 1$) よりも大きくできない。特に、 $n_+ = n_- - 1$ のときは、すべての場の真空期待値は、次のようにアノマラス $U(1)$ チャージによって決まる。

$$\langle S_i \rangle = 0, \quad \langle Z_j \rangle \sim \lambda^{-z_j}. \quad (6.2)$$

また、一般的なスーパーポテンシャルは、 $W(\tilde{S}_i, \tilde{Z}_j)$ と書き直すことが出来る。ここで $\tilde{S}_i = S_i \Theta^{s_i}$ 、 $\tilde{Z}_j = Z_j \Theta^{z_j}$ である。 S_i の F-flatness 条件、

$$\frac{\partial W}{\partial S_i} = \Theta^{s_i} \frac{\partial W}{\partial \tilde{S}_i} = 0 \quad (6.3)$$

は、 $\langle \tilde{Z}_j \rangle = O(1)$ の解を持つ。なぜなら、 $W(\tilde{S}_i, \tilde{Z}_j)$ は、 $O(1)$ 係数を一般に含んでいるからである。そして、 $\langle \tilde{Z}_j \rangle = O(1)$ は、 $\langle Z_j \rangle \sim \lambda^{-z_j}$ を意味することがわかる。このような真空期待値の決まり方は、現象論の様々な問題点を解く上で非常に重要であり、アノマラス $U(1)$ ゲージ対称性を課した現象論の模型の多くは、この場合を考えている。

では、 $n_+ > n_- - 1$ の場合は何が起きるだろうか？このとき、F-flatness 条件が増えるので、真空期待値を決める場の数よりも F-flatness 条件と D-flatness 条件の数の方が多く、flatness を満たす解が存在しない。ゆえに、“小さな真空”は、参考文献 [31][32][38] で議論したような超対称な真空ではなくなる。この場合、前の章で議論したように、“小さな真空”は、準安定真空になる。特に、 $n_+ = n_-$ では何が起ころのかを見ていこう。この時、F-flatness または D-flatness 条件のうちの一つは、満たすことができなくなる。もしアノマラス $U(1)$ チャージ s_{n_+} がすべてのチャージの中でもっとも大きいとすると、すべての場の F-flatness 条件のうち、アノマラス $U(1)$ チャージ s_{n_+} の F-flatness 条件が満たされない。なぜなら、チャージ s_{n_+} を持つ場意外の F 項をキャンセルさせたほうがポテンシャルがより低くなり安定になるからである。（チャージ s_{n_+} を持つ場以外の F-flatness と D-flatness は満足できる。）ゆえに、式 (6.3) において $|F_{S_i}| \sim \lambda^{s_i}$ と与えられることから、真空のエネルギーの大きさは、 $V \sim |F_{S_{n_+}}|^2 \sim \lambda^{2s_{n_+}}$ であり、もし最も大きいチャージが $s_{n_+} \gg 1$ ならば真空のエネルギーをとっても小さくできる。そして、この特徴は、なぜ、超対称性の破れのスケールとプランクスケールの間大きな階層性が存在するかについて新たな説明を与えている。また、場のすべての真空期待値が $O(1)$ である超対称な真

空と準安定真空である“小さな真空”との間にあるポテンシャルエネルギーは、 $\lambda^{2s_{n_+}}$ よりも大きくなる。この理由は、真空期待値が ξ よりも大きくなったとき、D-flatness 条件は、アノマラス $U(1)$ チャージ正の場合 S_i が真空期待値を持たないと満たすことが出来なくなり、結果、チャージ負の場合の F 項 (F_Θ , F_{Z_j}) もポテンシャルエネルギーに寄与するようになり、一般的にポテンシャルエネルギーは $\lambda^{2s_{n_+}}$ よりも大きくなるからである。今までの現象論の様々な問題点を解決してきたモデルは $n_+ = n_- - 1$ を考えていたが、たった一つアノマラス $U(1)$ チャージ正の場合をこの現象論のモデルに入れることによって、“小さな真空”は準安定真空になり、超対称性を自発的に破るモデルを得ることができる。

第7章

アノマラス $U(1)$ ゲージ対称性のある模型におけるモジュライの安定化

この章では、前章の $U(1)_R$ 対称性を課していないアノマラス $U(1)$ 理論を用いた超対称性の破れの模型を利用したモジュライの安定化の研究について書いている。モジュライはアノマラス $U(1)$ ゲージ理論に含まれる重要な場である。一方、モジュライはポテンシャルの平坦な方向の場であり、真空期待値は決まっていない。ゆえに、一般的な問題として、モジュライの安定化の問題が存在する。前の章では FI パラメータ ξ は定数を仮定していた。しかしながら、超重力理論や超弦理論では FI パラメータはダイナミカルに決められる。モジュライが安定化されたと仮定すると、 ξ は、モジュライ（またはディラトン） D の真空期待値に依存するようになる [53]-[56]。FI パラメータを定数にするためにもモジュライを安定化させなければならないし、また、アノマラス $U(1)$ ゲージ対称性を課した模型の場の真空期待値は FI パラメータに依存、すなわちモジュライに依存するので、前章で議論した準安定真空の安定性はモジュライの安定化まで考えないといけなことがわかる。モジュライの安定化を考えることは非常に重要である。また、モジュライ安定化を考える上で、従来のモジュライの安定化の模型のように超対称な強い相互作用 (SQCD) すなわちモジュライに依存するスーパーポテンシャル (非摂動効果によるモジュライのスーパーポテンシャル) を導入しない、新しいシナリオをこの章では提案する。もし、SQCD を導入してしまうと、SUSY zero メカニズムが壊れ、従来の様々な現象論の問題点を解決していたアノマラス $U(1)$ の模型の特徴が失われてしまうので、SQCD に頼らない安定化の方法は極めて重要であり、この章で議論していくだろう。

モジュライ D の安定化を考える上で、我々は FI パラメータ $\xi = \xi(D)$ を通したモジュライに依存するポテンシャルを使ってモジュライの安定化を考えていく。このモジュライ

に依存するポテンシャルは、前の章から、

$$V \sim |F_S|^2 \sim \xi^{2s}. \quad (7.1)$$

であり、(4.6)にあるように、 ξ^2 は、モジュライのケーラーポテンシャル K_D に依存する。 ξ^2 は、モジュライに依存するので(7.1)を使って安定化できるか考えてみる。

まず、 ξ^2 は、モジュライのケーラーポテンシャル K_D に依存するので、モジュライの変化により K_D を変化させてポテンシャルが安定できるかどうかを調べてみる。(ここで、tree level の弦理論の計算により K_D は、 $K_D = -\ln(D + D^\dagger - \delta_{GS}V_A)$ とよく書かれる。)しかしながら、一般的にモジュライのケーラーポテンシャル K_D の変化によりモジュライは安定化できない。その理由は簡単である。 $\xi^{2s}(D)$ は、モジュライ D に対して単調減少関数になるからである。実際に、

$$\frac{\partial \xi^{2s}}{\partial D} = (\xi^{2s})' = sK_D''(K_D')^{s-1} \left(-\frac{\delta_{GS}}{2}\right)^s < 0, \quad (7.2)$$

となる。ここで、 K_D'' は、モジュライの運動項 (kinetic term) の係数なので、正でなければならない。また、前章のアノマラス $U(1)$ ゲージ対称性のレビューで議論したように(式(4.6)の下文にあるように)、 $\delta_{GS} > 0$ 、 $K_D' < 0$ である。ゆえに、この結果からモジュライのケーラーポテンシャル K_D の変化によってモジュライを安定化させることは困難であることがわかった。

次に、カノニカルな形から S のケーラーポテンシャルの変化を考える。モジュライのスカラーポテンシャルは、

$$V \sim \left(\frac{\partial^2 K_S}{\partial S \partial S^\dagger}\right)^{-1} \left|\frac{\partial W}{\partial S}\right|^2 \sim \left(\frac{\partial^2 K_S}{\partial S \partial S^\dagger}\right)^{-1} \xi^{2s}(D), \quad (7.3)$$

から得ることができ、もし、 $\frac{\partial^2 K_S}{\partial S \partial S^\dagger}$ が $\langle D \rangle = D_0$ で1よりも小さいならば、図7.1のようにモジュライを安定化できる。

そのようなポテンシャルでの安定化を理解するために、次のような場 S の一般的なケーラーポテンシャル K_S を考える。

$$K_S = S^\dagger S f(D + D^\dagger - \delta_{GS}V_A). \quad (7.4)$$

ここで、 $f(x)$ は x の関数であり、もし関数 $f(x)$ が、

$$f(x) = c(x - x_0)^2 + \epsilon, \quad (7.5)$$

で与えられるとき関数 $\frac{\partial^2 K_S}{\partial S \partial S^\dagger}$ は $x = x_0$ で1よりも十分小さくなる。ただし、ここで $c \sim O(1)$ 、 $0 < \epsilon \ll 1$ である。モジュライのポテンシャル(7.3)は、ケーラーポテンシ

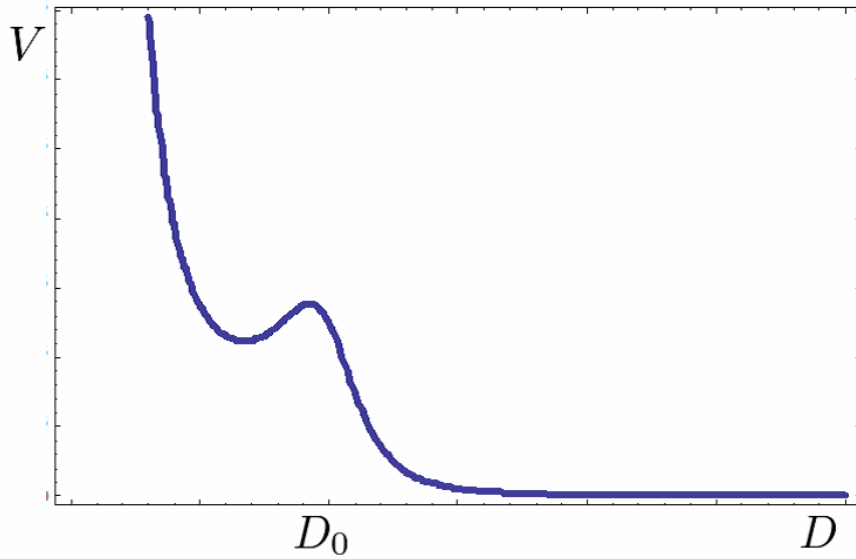


図 7.1 モジュライのポテンシャル。

ル (7.4) を使って次のように書きなおせる。

$$\begin{aligned}
 V &\sim \left(\frac{\partial^2 K_S}{\partial S \partial S^\dagger} \right)^{-1} \left| \frac{\partial W}{\partial S} \right|^2 \\
 &\sim \frac{\xi^{2s}(x)}{(c(x-x_0)^2 + \epsilon)} \\
 &\sim \frac{1}{(c(x-x_0)^2 + \epsilon)} \left(\frac{\delta_{GS}}{2x} \right)^s.
 \end{aligned} \tag{7.6}$$

ただし、最後の行では (4.6) と $K_D(x) \sim -\ln x$ を使って書きなおした。もし、次の条件*1、

$$\epsilon < \frac{c}{s(s+2)} x_0^2 \tag{7.7}$$

が満たされているとき、図 7.1 に描かれているように、モジュライのポテンシャルは $x = x_-$ で局所的な最小値 (local minimum)、 $x = x_+$ で局所的な最大値 (local maximum) をもつ。ここで、 x_+, x_- は次のように定義される。

$$\begin{aligned}
 x_\pm &\equiv \left(\frac{s+1}{s+2} \right) x_0 \left\{ 1 \pm \sqrt{1-\gamma} \right\}, \\
 \gamma &\equiv \frac{s(s+2)}{(s+1)^2} \left(1 + \frac{\epsilon}{cx_0^2} \right).
 \end{aligned} \tag{7.8}$$

*1 この条件はモジュライのポテンシャルが極大値と極小値をもつ、すなわち $\frac{\partial V}{\partial x} = 0$ が解を 2 つを持つため条件を判別式から求めている。

これから、 $F_S \sim -\frac{\frac{\partial W}{\partial S}}{\frac{\partial^2 K_S}{\partial S \partial S^\dagger}}$ と D_A (アノマラス $U(1)$ の D 項) のスケールについて考えてみよう。 $x = x_-$ の準安定真空では、 $\frac{\partial^2 K_S(x)}{\partial S \partial S^\dagger}$ は、次のようになる。

$$\left. \frac{\partial^2 K_S(x)}{\partial S \partial S^\dagger} \right|_{(x=x_-)} = \frac{cx_0^2}{(s+2)^2} \left(2 - \frac{s(s+2)\epsilon}{cx_0^2} + 2\sqrt{1 - \frac{s(s+2)\epsilon}{cx_0^2}} \right) \quad (7.9)$$

$$\sim \begin{cases} \frac{4}{(s+2)^2} cx_0^2, & (\epsilon \ll \frac{cx_0^2}{s(s+2)}) \\ \frac{1}{(s+2)^2} cx_0^2, & (\epsilon \sim \frac{cx_0^2}{s(s+2)}) \end{cases} \quad (7.10)$$

すなわち、 $s \gg 1$ 、 $c \sim 1$ に対して $\frac{\partial^2 K_S}{\partial S \partial S^\dagger} \sim \frac{x_0^2}{s^2} \ll 1$ となるので、 $F_S \sim s^2 \lambda^s / x_0^2$ と書ける。その時、ポテンシャルは、

$$V \sim \frac{\partial^2 K_S}{\partial S \partial S^\dagger} |F_S|^2 + \frac{1}{2} D_A^2, \quad (7.11)$$

と書けることから、 D_A の大きさは次のようになることがわかる。

$$D_A \sim \frac{s^3}{x_0^2} \lambda^{2s-2}. \quad (7.12)$$

前章で計算した時は、 $D_A \sim s \lambda^{2s-2} \Lambda^2$ であり、そしてそれは、 $|F_S|^2 / \Lambda^2 \sim \lambda^{2s} \Lambda^2$ よりもかなり大きかった*2。すなわち $D_A / (|F_S|^2 / \Lambda^2) \sim s \lambda^{-2} > 1$ であった。。しかし、FI 項がダイナミカルに決められた今回のシナリオでは、 $D_A / (|F_S|^2 / \Lambda^2)$ は小さくなる。

パラメータの具体的な値を調べてみよう。 $F_S \sim O(100 \text{ GeV})$ を得るためには、 $\lambda = 0.2$ 、 $\Lambda = 10^{18} \text{ GeV}$ 、 $c = 1$ 、 $x_0 = 1$ に対して $s = 28$ の値を必要とする。その時、条件 (7.7) を満足させるためには、パラメータ ϵ を 10^{-3} よりも小さくする必要がある。そのとき、 $D_A / (|F_S|^2 / \Lambda^2) \sim O(1)$ になる。そしてこのことは、この超対称性の破れのメカニズムを現実的な超対称性を破る模型に適用する中で重要になるかもしれない。

この準安定真空の lifetime を (5.16)、(5.17) を使って評価してみる。そのためにパラメータをそれぞれ $V_h = V(x_+) - V(x_-)$ 、 $\epsilon' = V(x_-)$ 、 $\Delta = x_+ - x_-$ と書き評価する。条件 (7.7) を満足するように具体的にパラメータを $s = 28$ 、 $c = 1$ 、 $\epsilon = 10^{-3}$ 、 $x_0 = 1$ にとる。この時、 P は、次のようになる。

$$P > \frac{(\sqrt{V_h} \Delta)^4}{(\epsilon')^3} \sim 10^{31}. \quad (7.13)$$

よって、準安定真空の lifetime は宇宙の年齢よりも大きくなり、安定である。

ここで留意すべきは、我々は超対称性を破るために、また、モジュライを安定化させる

*2 ここで Λ はカットオフであり、スケールを比べるためにあえて書いた。特に断らないときは $\Lambda = 1$ としている。

ために別の相互作用、SQCD を使っていないことである。我々のこのシナリオでは、超対称性の破れのスケールは FI パラメータの小ささと場 S の大きなアノマラス $U(1)$ チャージによって得られる。(そのスケールをプランクスケールよりも小さくできる。) それゆえ、この新しい自発的に超対称性を破るシナリオは、エコノミカルである。この点が今回のシナリオと先行研究 [46]-[52] との間のとて大きな違いの 1 つである。

第 8 章

発展

本論文の本題であるアノマラス $U(1)$ 理論における超対称性の破れとモジュライの安定化の議論は終えたので、この章では、その発展の話として、伝播について簡単に紹介したい。特に、現象論の様々な問題点が解く E_6 GUT を考えた超対称性の伝播を考えたい^{*1}。特に、伝播は gravity mediation と gauge mediation を考える。そして、超対称性粒子の現実的な質量をどのように出すかを考えていく。

まず、gravity mediation を考える。また、超対称性の重力の伝播を考えるので、超重力理論のポテンシャル [3] を使って計算していく。超重力理論のポテンシャルは、

$$V = e^{K/M_p^2} \left[\left((K^{-1})^j_i \left(W^i + \frac{W K^i}{M_p^2} \right) \left(W_j^* + \frac{W K_j}{M_p^2} \right) \right) - \frac{3|W|^2}{M_p^2} \right] + \frac{g^2}{2} (K^i \varphi_i \phi_i) \quad (8.1)$$

である。ここで、 ϕ_i はスカラー場、 φ_i はその場のチャージを表す。 W はスーパーポテンシャル、 K はケーラーポテンシャルであり、 $W^i(\phi) = \frac{\partial W}{\partial \phi_i}$ 、 $K_i^j(\phi, \phi^*) = \frac{\partial^2 K}{\partial \phi_j \partial \phi^{i*}}$ と定義している。また、 g はゲージ結合定数、 M_p はプランクスケールである。ここで、宇宙項の小ささを説明するためにスーパーポテンシャルに定数項 ω_0 を導入し、超対称性を破っている場の F 項の最も大きな項 (F_S) とキャンセルさせる。すなわち $(\partial^2 K / \partial S \partial S^\dagger)^{-1} \left| \frac{\partial W}{\partial S} \right|^2 \sim 3 \frac{|\omega_0|^2}{M_p^2}$ となる。また、gravitino 質量 $m_{3/2}$ は、 $m_{3/2}^2 = F^{*j} F_i K_j^i / 3M_p^2$ と定義される [3] ことから、

$$m_{3/2}^2 \sim \frac{1}{3M_p^2} \left(\frac{\partial^2 K}{\partial S \partial S^\dagger} \right)^{-1} \left| \frac{\partial W}{\partial S} \right|^2 \sim \frac{|\omega_0|^2}{M_p^4} \quad (8.2)$$

となる。ただし、一般的な F 項 $F_i = (K^{-1})^j_i W_j^*$ を使った。より具体的なポテンシャルを解析するために模型を使って計算していく。この発展では、5 章で扱った、 $U(1)_R$ 対称

^{*1} 「アノマラス $U(1)$ ゲージ対称性」の章の最後にコメントしたように GUT のカットオフを本論文ではフリーパラメータとして議論していくことにする。

性の無い、アノマラス $U(1)$ ゲージ対称性を課した模型を使う。ただし、場を増やした模型をこの発展では考えてみる。場を増やしたとき、その場と F 項の真空期待値がどのようになるかを調べたいからである。

$$\begin{array}{c|cccc} & S & \bar{S} & Z & \Theta \\ \hline U(1)_A & s & \bar{s} & z & -1 \end{array}$$

表 8.1 場 $S, \bar{S} > 0$ 、 Z と Θ のアノマラス $U(1)$ チャージアサイメント。ここで、 $s > \bar{s}$ 、 $z < -1$ である。

スーパーポテンシャルは

$$W = \Theta^s S f_s(\Theta^z Z) + \Theta^{\bar{s}} \bar{S} f_{\bar{s}}(\Theta^z Z) + O(S^2, \bar{S}^2, S\bar{S}) \quad (8.3)$$

である。ここで $f_i(\Theta^z Z) = 1 + (\Theta^z Z) + \cdots + (\Theta^z Z)^{l_i}$ 、 $l_i = \frac{-i}{z}$ 、 $(i = s, \bar{s})$ と定義される関数である。ただし $O(1)$ 係数を無視した。このスーパーポテンシャルは、前章の一般論で議論した $n_+ = 2, n_- = 2$ 、すなわち $n_+ > n_- - 1$ の場合であり、その章で議論したようにこの模型では、超対称性を自発的に破ることができる。このスーパーポテンシャルを超重力理論のポテンシャル (8.1) に代入して、

$$\begin{aligned} V \cong & f^{-1}(x) \left| \Theta^s f_s(\Theta^z Z) \right|^2 + \left| \Theta^{\bar{s}} \bar{S} f_{\bar{s}}(\Theta^z Z) \right|^2 + \left| \Theta^s S \frac{\partial f_s(\Theta^z Z)}{\partial Z} + \Theta^{\bar{s}} \bar{S} \frac{\partial f_{\bar{s}}(\Theta^z Z)}{\partial Z} \right|^2 \\ & + \left| \Theta^{s-1} S \left(s f_s(\Theta^z Z) + \Theta \frac{\partial f_s(\Theta^z Z)}{\partial \Theta} \right) + \Theta^{\bar{s}-1} \bar{S} \left(\bar{s} f_{\bar{s}}(\Theta^z Z) + \Theta \frac{\partial f_{\bar{s}}(\Theta^z Z)}{\partial \Theta} \right) \right|^2 \\ & + m_{3/2} (s \Theta^s S f_s(\Theta^z Z) + \bar{s} \Theta^{\bar{s}} \bar{S} f_{\bar{s}}(\Theta^z Z)) + c.c. \\ & + \frac{g^2}{2} (\xi^2 - |\Theta|^2 + z|Z|^2 + s|S|^2 + \bar{s}|\bar{S}|^2)^2 - 3m_{3/2}^2 M_p^2 \end{aligned} \quad (8.4)$$

を得る。ただし、ポテンシャル (8.1) の $O(1/M_p^4)$ 、スーパーポテンシャルの $O(S^2, \bar{S}^2, S\bar{S})$ は無視した。上式の 1 行目と 2 行目はそれぞれの場の |F 項|² であり、3 行目は今回新しく出た S, \bar{S} の tadpole 項である。また、最後の行はアノマラス $U(1)$ の D 項と定数である。 $f(x)$ はモジュライの安定化で使った関数で、 $f^{-1}(x) \sim s^2$ である。このポテンシャルからそれぞれの場の真空期待値の大きさと F 項、D 項の大きさをラフに評価したい。ポテンシャルの最小条件、

$$\frac{\partial V}{\partial \Theta} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial Z} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial S} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial \bar{S}} = 0 \quad (8.5)$$

から次のようになる。

$$\langle D_A \rangle \sim \frac{s}{g} f^{-1}(x) \lambda^{2s-2} \sim \frac{3s}{g} \lambda^{-2} \left(\frac{M_p}{\Lambda} \right)^2 m_{3/2}^2, \quad (8.6)$$

$$\langle F_{\bar{s}} \rangle \sim f^{-1}(x) \left(\frac{s}{\bar{s}} \right) \lambda^{2s-\bar{s}} \Lambda^2, \quad (8.7)$$

$$\langle F_{\theta} \rangle \sim m_{3/2} \lambda \Lambda, \quad \langle F_z \rangle \sim m_{3/2} z \lambda^{-z} \Lambda \quad (8.8)$$

ここで、 Λ は理論のカットオフである。 $\langle \Theta \rangle = \lambda$ であり、(8.7) から $\langle Z \rangle \sim \lambda^{-z}$ である。また、(8.8) から、 S, \bar{S} の真空期待値の大きさが

$$\langle S \rangle \sim m_{3/2} \left(\frac{1}{s} \lambda^{-s+2} + \frac{z^2}{s} \lambda^{-s-2z} \right) \quad (8.9)$$

$$\langle \bar{S} \rangle \sim m_{3/2} \left(\frac{1}{\bar{s}} \lambda^{-\bar{s}+2} + \frac{z^2}{\bar{s}} \lambda^{-\bar{s}-2z} \right) \quad (8.10)$$

とわかる。このように (8.4) の新たな S の tadpole によって S の真空期待値を前章で計算したものよりも大きくなった^{*2*3*4}。これらの真空期待値から gravity mediation でスカラフェルミオン、ゲージノ質量をラフに評価してみたい。 27_{Ψ_i} ($i = 1, 2, 3$)、 W^α をそれぞれ E_6 の 27 表現の MSSM の物質場を含む場、 E_6 の field strength とする。まず、高次のケーラーポテンシャル

$$K = c_{ij} \frac{S^\dagger S}{\Lambda^2} \cdot 27_{\Psi_i}^\dagger 27_{\Psi_j} \quad (8.11)$$

^{*2} ここで求めたものは $S = S_r e^{i\phi}$, $\bar{S} = \bar{S}_r e^{i\bar{\phi}}$ と書いたときの真空期待値の大きさ S_r, \bar{S}_r である。ポテンシャル (8.4) の場合、この位相 $\phi, \bar{\phi}$ について、新しい tadpole の他に $|F_z|^2, |F_\theta|^2$ のクロスターム $S\bar{S}^*$ から来る位相があるので、一般的にポテンシャルを微分して解き、解の形を具体的に書くことは解析的に難しい。そこで、ここでは、 $\phi, \bar{\phi}$ の位相が等しいと仮定してその大きさを求める。このような仮定をおくと、クロスタームから位相は出ないので新しい tadpole のみを ϕ または $\bar{\phi}$ で微分することによって位相を決めることができる。 $f_s(\Theta^z Z) \sim f_{\bar{s}}(\Theta^z Z) \sim O(1)$ 、 b_1, b_2 を $O(1)$ 係数とすると、 $V \supset m_{3/2} (b_1 s \Theta^s S_r e^{i\phi} + b_2 \bar{s} \Theta^{\bar{s}} \bar{S}_r e^{i\bar{\phi}}) + c.c.$ であり、 $\partial V / \partial \phi = 0$, $\partial V / \partial \bar{\phi} = 0$ から、 $m_{3/2} b_1 e^{i\phi} - m_{3/2}^* b_1^* e^{-i\phi} = 0$, $m_{3/2} b_2 e^{i\bar{\phi}} - m_{3/2}^* b_2^* e^{-i\bar{\phi}} = 0$ になる。もし $m_{3/2}, b_1, b_2$ をそれぞれ実で正とするならば、 $\cos \phi = \pm 1, \cos \bar{\phi} = \pm 1$ と求まる。また、安定化の条件は $(m_{3/2} b_1) e^{i\phi} = -|m_{3/2} b_1|$, $(m_{3/2} b_2) e^{i\bar{\phi}} = -|m_{3/2} b_2|$ であり、 $m_{3/2}, b_1, b_2$ をそれぞれ実で正とするならば、 $\cos \phi = -1, \cos \bar{\phi} = -1$ と決まる。

^{*3} S の真空期待値は大きくなったが、SUSY zero メカニズムは保たれている。例えば、ヒッグス場 $78_A, 78'_{A'}$ のスーパーポテンシャルは、 $W = \lambda^{a'+a} 78'_{A'} 78_A + \lambda^{s+a'+a} S 78'_{A'} 78_A$ と書ける。ここで S の真空期待値を入れることで $W \sim \lambda^{a'+a} 78'_{A'} 78_A + \lambda^{a'+a+2\frac{1}{s}} m_{3/2} 78'_{A'} 78_A$ となる。この $m_{3/2}$ は後で見ると 100 GeV 以下なので GUT スケールに比べ十分小さい。このように S と GUT の相互作用がカップルするとき、必ず λ^s の因子も掛けられ、上の 2 項目は 1 項目に比べ十分小さく SUSY zero は保たれるのである。ゆえに、従来のアノマラス $U(1)$ GUT のヒッグス場 (27 表現の場も含む) の GUT スケールの真空期待値の決定に、このような S がカップルしている相互作用は無視してよく、従来の計算のままの真空期待値が成り立つことがわかる。

^{*4} アノマラス $U(1)$ チャージ正の場の真空期待値が大きくなったので、チャージ負の F 項の真空期待値も大きくなった。後の gauge mediation でわかるように、ゲージノの質量はチャージ負の F 項の真空期待値に比例する。前章で求めたチャージ負の F 項の真空期待値を使ったゲージノの質量よりも、超重力理論のポテンシャルを考えたときのゲージノの質量の方が大きく生成できる。

(c_{ij} は $O(1)$ 係数) を考え、 θ^4 をこのケーラーポテンシャルの $S^\dagger S$ にとることによってスカラーフェルミオンの質量

$$(m^2)_{ij} = c_{ij} \left| \frac{F_s}{\Lambda} \right|^2 \sim 3c_{ij} \left(\frac{M_p}{\Lambda} \right)^2 s^2 m_{3/2}^2 \quad (8.12)$$

を得る。ここで $i = 1, 2, 3$ は世代の添え字であり、一般にこの質量項は非対角成分があるので FCNC を大きく起こす。しかし、 E_6 の性質 (E-Twisting メカニズム) [29][31] と GUT に水平対称性を導入すること [30][61] でこの問題は解決できる。

この点について議論するために E_6 について簡単に紹介する。 E_6 は、基本表現が 27 であり、次のように $E_6 \rightarrow SO(10) \rightarrow SU(5)$ に既約分解される。

$$27 = 16_1[10_1 + \bar{5}_{-3} + 1_5] + 10_{-2}[5_{-2} + \bar{5}'_2] + 1_4 \quad (8.13)$$

ここで、上の各表現の小文字は破った $U(1)$ のチャージを表している。 E_6 GUT + 水平対称性のモデルでは、27 表現の物質場を 3 世代導入する。これを 27_{Ψ_i} ($i = 1, 2, 3$) と表す。このモデルで、ゲージ対称性を $E_6 \rightarrow SU(5)$ まで破ると 6 つの $\bar{5}_{\Psi}$ 表現の場が出てくる。一方、10 表現の場は 3 つである。この 6 つの $\bar{5}_{\Psi}$ 表現の場の湯川行列を見ることによって、この内の 3 つの $\bar{5}_{\Psi}$ 表現: $\bar{5}'_{\Psi_2}$, $\bar{5}_{\Psi_3}$, $\bar{5}'_{\Psi_3}$ が GUT スケールの重い質量をもって低エネルギーでは見えず、 $\bar{5}_{\Psi_1}$, $\bar{5}'_{\Psi_1}$, $\bar{5}_{\Psi_2}$ が質量ゼロモードとして MSSM の 3 つの世代の物質場を含んでいることがわかる。この余分な数の $\bar{5}_{\Psi}$ があることによって、低エネルギーでは 3 つの質量ゼロのモードだけ現れるので、GUT の統一された湯川行列から様々な SM の湯川行列を再現できる。これを E-Twisting メカニズムという [29][31]。

このように、 E_6 GUT の性質があるおかげで、低エネルギーの物理に注目するときはこの $\bar{5}_{\Psi_1}$, $\bar{5}'_{\Psi_1}$, $\bar{5}_{\Psi_2}$ について考えればよい。このような性質を知った上で、再びスカラーフェルミオンの質量について考えてみよう。また、水平対称性を課してその質量について考えてみる。ここでは、そのゲージ群として $SU(2)_H$ を選ぶ。そして、 27_{Ψ_i} の場では、最初の 2 世代を基本表現、第 3 世代を singlet にする。ゆえにケーラーポテンシャル (8.11) は、

$$K = c \frac{S^\dagger S}{\Lambda^2} \cdot 27_{\Psi_a}^\dagger 27_{\Psi_a} + c_3 \frac{S^\dagger S}{\Lambda^2} \cdot 27_{\Psi_3}^\dagger 27_{\Psi_3} \quad (8.14)$$

となり、ラグランジアンは、

$$\mathcal{L} \supset c \left| \frac{F_s}{\Lambda} \right|^2 27_{\Psi_a}^* 27_{\Psi_a} + c_3 \left| \frac{F_s}{\Lambda} \right|^2 27_{\Psi_3}^* 27_{\Psi_3} \quad (8.15)$$

となる。 $a = 1, 2$ は $SU(2)_H$ の世代の添え字であり、 c, c_3 は $O(1)$ 係数である。また、 $\left| \frac{F_s}{\Lambda} \right|^2 \sim 3 \left(\frac{M_p}{\Lambda} \right)^2 s^2 m_{3/2}^2$ である。この項と低エネルギーで現れる 3 つの $\bar{5}$: ($\bar{5}_{\Psi_1}$, $\bar{5}'_{\Psi_1}$,

$\bar{5}_{\Psi 2}$)そして、10 表現の場を考えると、 $SU(5)$ の表現で次のようなスカラーフェルミオンの質量行列になる。(基底は $(\bar{5}_{\Psi 1}, \bar{5}'_{\Psi 1}, \bar{5}_{\Psi 2})$ 、 $(10_{\Psi 1}, 10_{\Psi 2}, 10_{\Psi 3})$)

$$\bar{5} \text{ の (質量)}^2 = \begin{pmatrix} c|F_s/\Lambda|^2 & 0 & 0 \\ 0 & c|F_s/\Lambda|^2 & 0 \\ 0 & 0 & c|F_s/\Lambda|^2 \end{pmatrix} \quad (8.16)$$

$$10 \text{ の (質量)}^2 = \begin{pmatrix} c|F_s/\Lambda|^2 & 0 & 0 \\ 0 & c|F_s/\Lambda|^2 & 0 \\ 0 & 0 & c_3|F_s/\Lambda|^2 \end{pmatrix} \quad (8.17)$$

このように、 E_6 GUT+ ホリゾンタル対称性の性質があるおかげで、gravity mediation を考えてもスカラーフェルミオンの低エネルギーで見える3つの $\bar{5}$ と10の1, 2世代の質量は世代間で同じ(ユニバーサルティー)であることがわかる。それゆえ、湯川行列を対角化したときに、 $\bar{5}$ の質量行列は形を変えずユニバーサルティーを保つことができ、10の質量行列は第3世代だけ質量が違うので非対角要素が生じるが、その要素は小さいため、現在の実験と矛盾しないようにできる。

スカラーフェルミオンの質量はケーラーポテンシャル (8.14) の寄与以外にも D 項から生成される。この D 項は $E_6 \rightarrow SO(10)$ 、 $SO(10) \rightarrow SU(5)$ と順に対称性が自発的に破れてスカラーフェルミオンの質量に寄与する。ラグランジアンには、 $\mathcal{L} \supset D^2 \supset gD(q|\tilde{Q}|)$ の形の項があるので、質量に ggD の寄与を与える。ここで g 、 q はそれぞれゲージ結合定数、破れた $U(1)$ のチャージである。 $E_6 \rightarrow SO(10)$ 、 $SO(10) \rightarrow SU(5)$ と順に対称性が自発的に破れたときの D 項の寄与は、(8.13) にある破れた $U(1)$ のチャージを考えると次のようになる。

$$\begin{aligned} \bar{5} \text{ の (質量)}^2 &= \begin{pmatrix} m^2 & 0 & 0 \\ 0 & m^2 & 0 \\ 0 & 0 & m^2 \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} g_6 \langle D_6 \rangle - 3g_{10} \langle D_{10} \rangle & 0 & 0 \\ 0 & -2g_6 \langle D_6 \rangle + 2g_{10} \langle D_{10} \rangle & 0 \\ 0 & 0 & g_6 \langle D_6 \rangle - 3g_{10} \langle D_{10} \rangle \end{pmatrix} \\ 10 \text{ の (質量)}^2 &= \begin{pmatrix} m^2 & 0 & 0 \\ 0 & m^2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3^2 \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} g_6 \langle D_6 \rangle + g_{10} \langle D_{10} \rangle & 0 & 0 \\ 0 & g_6 \langle D_6 \rangle + g_{10} \langle D_{10} \rangle & 0 \\ 0 & 0 & g_6 \langle D_6 \rangle + g_{10} \langle D_{10} \rangle \end{pmatrix} \quad (8.18) \end{aligned}$$

ここで、 $m^2 = c|F_s/\Lambda|^2$ 、 $m_3^2 = c_3|F_s/\Lambda|^2$ であり、 g_6 、 g_{10} と D_6 、 D_{10} はそれぞれ E_6 、 $SO(10)$ のゲージ結合定数と D 項を表している。また、文献 [64] によれば、対称性のゲー

ジ群を $U(1)$ 破ったときに生じる D 項は次のように書き表すことができる。

$$\langle D \rangle = -\frac{m_\phi^2 - m_{\bar{\phi}}^2}{2g} \quad (8.19)$$

ここで、 $\phi, \bar{\phi}$ はゲージ群 G_a の表現、反表現の場で自発的にそのゲージ群を $U(1)$ 破る場であり、 $m_\phi, m_{\bar{\phi}}$ はそれらの場の質量である。上記の E_6 GUT は、ヒッグス場 $27_H(h)$ 、 $27_{\bar{H}}(\bar{h})$ が E_6 を $SO(10)$ まで破り、ヒッグス場 $27_C(c)$ 、 $27_{\bar{C}}(\bar{c})$ が $SO(10)$ から $SU(5)$ までゲージ群を破る。ここで、それぞれのヒッグス場の括弧はアノマラス $U(1)$ チャージを表し、 $-(c + \bar{c}) < -(h + \bar{h})$ である。この D 項の表現を使ってより具体的に (8.18) の D 項の寄与を評価していきたいのでヒッグス場の質量について考えてみる。アノマラス $U(1)$ ゲージ対称性と超対称性の自発的な破れによる D 項は前章の計算からゼロではないことがわかっているので、 $\langle D_A \rangle$ の寄与も考慮に入れて、それぞれのヒッグス場の質量を表すと以下ようになる。

$$m_H^2 = \tilde{m}_H^2 + g_A h \langle D_A \rangle, \quad m_{\bar{H}}^2 = \tilde{m}_{\bar{H}}^2 + g_A \bar{h} \langle D_A \rangle \quad (8.20)$$

$$m_C^2 = \tilde{m}_C^2 + g_A c \langle D_A \rangle, \quad m_{\bar{C}}^2 = \tilde{m}_{\bar{C}}^2 + g_A \bar{c} \langle D_A \rangle \quad (8.21)$$

g_A はアノマラス $U(1)$ のゲージ結合定数、 $\tilde{m}_i^2 = O(1)_i |F_s/\Lambda|^2$ 、 $O(1)_i$ は $O(1)$ 係数 ($i = H, \bar{H}, C, \bar{C}$) である。ここで仮定として $\tilde{m}_H^2 = \tilde{m}_{\bar{H}}^2$ 、 $\tilde{m}_C^2 = \tilde{m}_{\bar{C}}^2$ とする。この仮定の下、 E_6 と $SO(10)$ の D 項を計算すると以下ようになる。

$$\langle D_6 \rangle = -\frac{m_H^2 - m_{\bar{H}}^2}{2g_6} = -\frac{g_A(h - \bar{h})}{2g_6} \langle D_A \rangle \quad (8.22)$$

$$\langle D_{10} \rangle = -\frac{m_C^2 - m_{\bar{C}}^2}{2g_{10}} = -\frac{g_A(c - \bar{c})}{2g_{10}} \langle D_A \rangle \quad (8.23)$$

このように書けることで、 $\bar{5}$ の質量行列 (8.18) の各成分に寄与する D 項は次のように書ける。

$$g_6 \langle D_6 \rangle - 3g_{10} \langle D_{10} \rangle = -\frac{g_A}{2} [(h - \bar{h}) - 3(c - \bar{c})] \langle D_A \rangle \quad (8.24)$$

$$-2g_6 \langle D_6 \rangle + 2g_{10} \langle D_{10} \rangle = -\frac{g_A}{2} [-2(h - \bar{h}) + 2(c - \bar{c})] \langle D_A \rangle \quad (8.25)$$

ゆえに、(8.24) と (8.25) が等しくなれば、D 項をユニバーサルにできるので、条件として

$$\frac{(h - \bar{h})}{(c - \bar{c})} = \frac{5}{3} \quad (8.26)$$

が得られる。この条件を満たすヒッグス場のチャージとして $h = -3, \bar{h} = 2, c = -4, \bar{c} = -1$ がある。まとめると、このチャージの下でスカラーフェルミオンの質量は以下のよう

に書ける。

$$\begin{aligned} \bar{5} \text{の (質量)}^2 &= \begin{pmatrix} m^2 - 2g_A \langle D_A \rangle & 0 & 0 \\ 0 & m^2 - 2g_A \langle D_A \rangle & 0 \\ 0 & 0 & m^2 - 2g_A \langle D_A \rangle \end{pmatrix} \\ 10 \text{の (質量)}^2 &= \begin{pmatrix} m^2 + 4g_A \langle D_A \rangle & 0 & 0 \\ 0 & m^2 + 4g_A \langle D_A \rangle & 0 \\ 0 & 0 & m_3^2 + 4g_A \langle D_A \rangle \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (8.27)$$

このように gravity mediation を考えてもスカラーフェルミオンの質量を世代でユニバーサルにできる*5。

次にゲージノの質量 $M_{\tilde{g}}$ について評価してみる。これは、高次のスーパーポテンシャル $W = (\Theta^s S) W^\alpha W_\alpha$ から評価できる。このスーパーポテンシャルに θ^2 をとってゲージノ質量を計算すると、 $M_{\tilde{g}} \sim \lambda^s (F_s/\Lambda)$ となることがわかる。ここで、スカラーフェルミオンの質量が $m = |F_s/\Lambda|$ であることを思い出し、 $m \sim 100 \text{ GeV}$ 、 $\Lambda = 10^{16} \text{ GeV}$ にとると、 $\lambda^s \sim 10^{-16}$ となってしまう、ゲージノの質量がスカラーフェルミオンの質量に比べ小さくなりすぎてしまう。このように単純に gravity mediation を使っただけでは、スカラーフェルミオンの質量に比べてゲージノの質量は軽すぎるという問題点がある。

次に gauge mediation を使ってゲージノの質量を計算してみよう。特に、 E_6 GUT の場、すなわち 27 表現のヒッグス場 $27_C, \bar{27}_{\bar{C}}, 27'_{C'}, \bar{27}'_{\bar{C}'}, 27_H, \bar{27}_{\bar{H}}$ 、物質場 $27_{\Psi_i} (i = 1, 2, 3)$ 、78 表現のアジョイント ヒッグス場 $78_A, 78'_{A'}$ を gauge mediation のメッセンジャーとして考えて計算していく。ここで、「'」が付く場はアノマラス $U(1)$ チャージが正であるものであり、以下でも同様に書いていく。ここで、メッセンジャーのスーパーポテンシャルの 1 つとして $27'_{C'}, \bar{27}'_{\bar{C}'}$ を考えてみよう*6。

$$\begin{aligned} W_{\text{messenger } 27'_{C'}, \bar{27}'_{\bar{C}'}} &= \Theta^{c'+\bar{c}'} 27'_{C'} \bar{27}'_{\bar{C}'} + \Theta^{z+c'+\bar{c}'} Z 27'_{C'} \bar{27}'_{\bar{C}'} + \dots \\ &\dots + \Theta^{kz+c'+\bar{c}'} Z^k 27'_{C'} \bar{27}'_{\bar{C}'}, \\ &+ \Theta^{s+c'+\bar{c}'} S 27'_{C'} \bar{27}'_{\bar{C}'} + \Theta^{\bar{s}+c'+\bar{c}'} \bar{S} 27'_{C'} \bar{27}'_{\bar{C}'} \end{aligned} \quad (8.28)$$

*5 ここでは、 $SU(2)$ ホリゾンタル対称性の破れによる D 項は考えていない。このような問題はホリゾンタル対称性を離散対称性にすれば問題はなくなる。この離散対称性を使った現実的な GUT の模型作りはこの研究の今後の課題である。

*6 すぐ後でコメントしてあるように、 $27'_{C'}$ と $\bar{27}'_{\bar{C}'}$ が質量を組み S, \bar{S}, Z とカップルする項 (8.28) の他にも、 27_C と $\bar{27}'_{\bar{C}'}$ が質量を組む項 $\lambda^{c'+\bar{c}'} 27_C \bar{27}'_{\bar{C}'}$ 、 $27'_{C'}$ と $\bar{27}_{\bar{C}}$ が質量を組む項 $\lambda^{c'+\bar{c}} 27'_{C'} \bar{27}_{\bar{C}}$ 、 78_A と $78'_{A'}$ が質量を組む項 $\lambda^{a+a'} 78_A 78'_{A'}$ など E_6 singlet に組める質量項と湯川相互作用項 $\lambda^{\psi_i+\psi_j+h} 27_{\Psi_i} 27_{\Psi_j} \langle 27_H \rangle$ 、 $\lambda^{\psi_i+\psi_j+c} 27_{\Psi_i} 27_{\Psi_j} \langle 27_C \rangle$ があり、 S, \bar{S}, Z とカップルできる。(もし $|z| \gg 1$ ならば、 Z とカップルするいくつかの質量項が SUSY zero メカニズムから禁止される。今は、 Z のチャージは小さいと考えて (SUSY zero メカニズムで禁止されていないと考えて) 議論している。) ゆえに、このような E_6 GUT の場メッセンジャーとしたスーパーポテンシャルも存在し、それによる gauge mediation の寄与も当然ある。この後の議論でそれらの寄与も含めたゲージノの質量を評価している。

ここで、 $k = \frac{c'+\bar{c}'}{-z} \geq 1$ であり、各項の $O(1)$ 係数を無視した。また、 $O(S^2, \bar{S}^2, S\bar{S})$ の寄与は小さいので無視した。このスーパーポテンシャルから、ゲージノの質量 $M_{\tilde{g}}$ は次のようになる。

$$M_{\tilde{g}} = \left(\frac{\alpha_s}{4\pi}\right) n_6 \times \left(\frac{\sum_{r=0}^k ((c' + \bar{c}' + rz)\lambda^{-1+c'+\bar{c}'} F_\theta + r\lambda^{z+c'+\bar{c}'} F_z) + \lambda^{s+c'+\bar{c}'} F_s + \lambda^{\bar{s}+c'+\bar{c}'} F_{\bar{s}}}{\lambda^{c'+\bar{c}'} \Lambda} \right) \sim \left(\frac{\alpha_s}{4\pi}\right) n_6 \frac{\sum_{r=0}^k ((c' + \bar{c}' + rz)\lambda^{-1} F_\theta + r\lambda^z F_z)}{\Lambda} \quad (8.29)$$

$$\sim \left(\frac{\alpha_s}{4\pi}\right) n_6 (c' + \bar{c}') m_{3/2}. \quad (8.30)$$

ただし、真空期待値 $\langle \Theta \rangle = \lambda \Lambda$, $\langle Z \rangle = \lambda^{-z} \Lambda$, $\langle F \rangle_\theta \sim m_{3/2} \lambda \Lambda$, $\langle F_z \rangle \sim m_{3/2} z \lambda^{-z} \Lambda$ をそれぞれ代入した。 n_6 は E_6 のディンキン インデックスであり、27 表現の場の場合 $n_6 = 6$ 、78 表現の場の場合 $n_6 = 24$ である^{*7}。 α_s は GUT の微細構造定数であり $\alpha_s \sim 0.1$ の値で評価する。(8.30) の $(c' + \bar{c}')$ は、今考えたスーパーポテンシャル (8.28) のメッセンジャーのチャージの和である。また、 $\lambda^s F_s / \Lambda \sim \lambda^{\bar{s}} F_{\bar{s}} / \Lambda \sim \lambda^s (\lambda^s \Lambda)$ であり十分小さく無視した。これは、この模型の最も大きな F 項である F_s が、gauge mediation では、SUSY zero からくるファクター λ^s で suppress され、ゲージノの質量の生成に十分寄与していないことを意味する。ゆえに、この模型で gauge mediation を考えると、アノマラス $U(1)$ チャージが負の F 項がゲージノの質量に寄与することになる。 $27'_{C'}$ と $\bar{27}'_{C'}$ が質量を組み S 、 \bar{S} 、 Z とカップルする項 (8.28) の他にも、 27_C と $\bar{27}'_{C'}$ が質量を組む項、 $27'_{C'}$ と $\bar{27}_C$ が質量を組む項、 78_A と $78'_{A'}$ が質量を組む項など E_6 singlet に組める質量項と湯川相互作用項 $\lambda^{\psi_i+\psi_j+h} 27_{\Psi_i} 27_{\Psi_j} \langle 27_H \rangle$ 、 $\lambda^{\psi_i+\psi_j+c} 27_{\Psi_i} 27_{\Psi_j} \langle 27_C \rangle$ があり、 S 、 \bar{S} 、 Z とカップルできる。そして、それぞれ E_6 GUT の場をメッセンジャーとして gauge mediation すると、(8.29)、(8.30) のチャージのファクターをそれぞれのメッセンジャーのチャージに書き換えた形になることがわかる。ゆえに、これら E_6 GUT のメッセンジャーの場の数とディンキン インデックスを考えて (8.30) を評価すると、この寄与はループファクターを打ち消すほどあるので、ゲージノの質量は $M_{\tilde{g}} \sim m_{3/2}$ となる^{*8}。ここでカットオフ $\Lambda = 10^{16} \text{ GeV}$ の理論を考えてみると、このゲージノの質量

^{*7} この E_6 のディンキン インデックスの値は $SU(N)$ の基本表現のディンキン インデックスを 1 に normalize したときの値である。

^{*8} メッセンジャーのチャージの寄与も当然ある。そのチャージの寄与は模型に依る。チャージのアサイメントの例として、例えば、参考文献 [38] などがある。それらのチャージの寄与を考えて評価してもよいが、模型に依る話になってしまうので、ここではその寄与を考えずに評価した。(模型に依るが、もしチャージの寄与を考えて評価してもゲージノの質量 $M_{\tilde{g}} \sim m_{3/2}$ の係数の factor が 1 ~ 10 倍以下になる程度である。)

は、gravity mediation から生成したスカラー質量 $m = |F_s/\Lambda| \sim (M_p/\Lambda) \cdot sm_{3/2}$ よりかなり小さいことがわかる。一方、カットオフ $\Lambda = M_p \simeq 10^{18}\text{GeV}$ の理論を考えると、ゲージノの質量は $M_{\tilde{g}} \sim m_{3/2}$ 、gravity mediation から生成したスカラー質量 $m = |F_s/\Lambda| \sim sm_{3/2}$ であり、 $m_{3/2} \sim 100\text{GeV}$ にとれば、現実的な質量のオーダーを出せることがわかる。

$\Lambda = 10^{16}\text{GeV}$ の理論において、ゲージノの質量がスカラーフェルミオンの質量に比べ軽い問題を解決する方法がある。その方法とは、1つのメッセンジャーの質量項を小さくする方法である。そのため、スーパーポテンシャル (8.28) の質量項を微調整で小さくすることを考える。その小ささを表すパラメータを β とする。この質量パラメータを $\beta \sim 10^{-4\sim-5}$ になるまで微調整してメッセンジャーの質量を小さくすると $M_{\tilde{g}} \sim 10^3 m_{3/2}$ になり、スカラーフェルミオンの質量と同じオーダーにできる。^{*9}

カットオフ $\Lambda = 10^{16}\text{GeV}$ の理論では、最も軽い超対称性粒子は、gravitino になる。その理由は、gravity mediation から生成されるスカラーフェルミオンの質量 (8.15) と gravitino の質量 (8.2) から、 $m_{3/2} = \sqrt{\frac{f(x)}{3}} \left(\frac{\Lambda}{M_p} \right) m$ という関係式が導かれるからである。ここで $m = |F_s/\Lambda|$ であり、 $f(x)$ は前章でモジュライの安定化を考えるときに重要になった関数で $f(x) \sim s^{-2}$ である。この関係式は、上で議論したパラメータの微調整とは関係なく成立する。この関係式で、 $m \sim 100\text{GeV}$ にとると、 $m_{3/2} \sim 0.1\text{GeV}$ になり、必ず最も軽い超対称性粒子は gravitino であることを示している。

^{*9} ただし、このように GUT の場の質量を小さくすると、GUT のモチベーションの1つである SM のゲージ結合定数の一致がずれてしまう可能性が大きい。

第9章

まとめと議論

本論文では、アノマラス $U(1)$ ゲージ対称性を使った現象論のほとんどのモデルに適応できる新しい超対称性の破れのシナリオについての研究を議論した。この研究により、超対称性を破るのに本質的な役割をする $U(1)_R$ 対称性がなくても、準安定真空で超対称性を自発的に破ることができることが新たにわかった。 $U(1)_R$ 対称性を課したモデルのように最低エネルギーの真空で超対称性を破る必要は無く、 $U(1)_R$ 対称性の無い一般的な相互作用を含むモデルの準安定真空で超対称性を破ればよいのである。そして、超対称性を自発的に破っている準安定真空は、従来の現象論の様々な問題点を解くことのできる性質、真空期待値がアノマラス $U(1)$ チャージで決まる性質を保っていることが新たにわかった。従来の現象論の様々な問題点を解くアノマラス $U(1)$ GUT は超対称な真空で議論していたが、このモデルにたった1つアノマラス $U(1)$ チャージ正の場を入れるだけでその真空は超対称性を自発的に破る準安定な真空になり、そして従来のアノマラス $U(1)$ GUT の良い性質真空期待値がアノマラス $U(1)$ チャージで決まる性質を保っていることもわかった。

また、本論文では、さらにこのアノマラス $U(1)$ ゲージ対称性を使った自発的な超対称性の破れのモデルを使って、新しいモジュライの安定化のシナリオについて議論した。そのモデルでは、チャージ正の場 S のケーラーポテンシャルの変化を使い、パラメータを微調整を要求するが、モジュライの安定化を実現できることがわかった。ここで重要なことは、先行研究の多くのモデルで使われていたモジュライに依存するスーパーポテンシャルなしでモジュライの安定化を実現できたことである。この点が今回の新しい安定化のシナリオで重要なことである。もし、モジュライに依存するスーパーポテンシャルがあれば現象論の様々な問題点を自然に解く本質的なメカニズムである SUSY zero メカニズムを壊してしまうので、我々のシナリオであるモジュライのスーパーポテンシャル無しの新しい安定化のモデルは現象論的に重要である。

我々のモデルでは、超対称性を破るために、またモジュライを安定化させるために新しい相互作用 (SQCD) を使っていない。我々のモデルでは、超対称性の破れのスケールは FI パ

ラメータの小ささと場 S の大きなアノマラス $U(1)$ チャージによって得られる。(そのスケールをプランクスケールよりも小さくできる。) それゆえ、この新しい自発的に超対称性を破るシナリオは、エコノミカルである。この点が今回のシナリオと先行研究 [43][44][46]-[52] との間のとて大きな違いの1つである。

本論文の最後の章で、アノマラス $U(1)$ ゲージ対称性を用いた超対称性の破れの模型の発展として、現象論の様々な問題点を解く E_6 GUT の相互作用を使った gravity mediation と gauge mediation を考え、現実的なスカラーフェルミオンの質量、ゲージノの質量を生成するにはどうすればよいかを議論した。まず、gravity mediation を考え、スカラーフェルミオンの質量を生成した。また、 E_6 GUT の E-Twisting メカニズムと水平対称性が本質的な役割を果たし、スカラーフェルミオンの質量が $SU(5)$ の 10_3 を除いてユニバーサルにできる。さらに、この模型では E-Twisting メカニズムと水平対称性を考え、ヒッグス場のチャージの条件 $(h - \bar{h})/(c - \bar{c}) = 5/3$ を満たすとき GUT の D 項をユニバーサルにできることが新たにわかった。もし GUT の D 項がユニバーサルでなければ、スカラーフェルミオンの質量のユニバーサリティーを壊すことになるので、発展で紹介した D 項のユニバーサリティーの研究はとても重要である。一方、gravity mediation で生成したゲージノの質量はこれに比べると小さくなりすぎてしまう問題点があった。次に、 E_6 GUT の場を利用した gauge mediation も考えた。 $\Lambda = 10^{16}$ GeV の理論では、gravity mediation から生成されるスカラーフェルミオンの質量に比べてゲージノの質量は小さくなった。この小ささは、カットオフがプランクスケールに比べ小さいことからきている。我々は、ゲージノの質量が小さい問題の解決策として1つの GUT の質量項を小さくして、つまりメッセンジャーの質量をパラメータの微調整で小さくしてゲージノの質量を大きく生成する方法を考えた。これにより、質量パラメータを微調整することでスカラーフェルミオンの質量とゲージノの質量を同じオーダーにできることがわかった。また、この模型では、gravitino の質量と gravity mediation から生成されるスカラーフェルミオンの質量との関係式から、最も軽い超対称性粒子は gravitino になることもわかった。一方、 $\Lambda = 10^{18}$ GeV の理論では微調整をしなくても現実的なスカラーフェルミオンとゲージノの質量が生成できることもわかった。

最後に μ 項についてコメントしておく。 μ 項を生成する単純な方法は、チャージ正の場 S と MSSM を含んでいる E_6 GUT のヒッグス場 27_H とを直接カップルさせる方法である。すなわち $W \supset \lambda^{s+3h} S 27_H 27_H 27_H$ から μ 項を生成する方法である。実際に、 $\langle S \rangle$ と $\langle 27_H \rangle$ を代入することで μ 項は得られる。その値は、gravity mediation で生成したスカラーフェルミオンの質量と同じ大きさになる。一方、 B 項は μ 項よりも大きくなる (10^4 程度 B 項の方が大きくなる)。しかし、この方法で μ 項を生成すると超対称性は破れなくなってしまう。2重項-3重項分離問題を解くアノマラス $U(1)$ 大統一理論は、MSSM のヒッグス場に真空期待値を持たせていない。ゆえに、 $W \supset \lambda^{s+3h} S 27_H 27_H 27_H$ という

項があると、MSSM のヒッグス場が真空期待値をもつことで、 $F_s = 0$ を満たすようになり、超対称性が破れなくなってしまう。この問題があるため、 S と 27_H を直接カップルさせずに μ 項を生成する必要がある。この問題を解決する方法として、この模型に離散対称性を課す方法が考えられる。これにより、 S と 27_H とのカップルを禁止し、別の方法で μ を生成することを考えればよい。例えば、 \bar{S} の F 項はゼロになってもよいので、この \bar{S} と 27_H をカップルさせ、 μ 項を生成する方法である。また、 $F_{\bar{S}}$ がゼロに近づけば、 B 項も小さくなるので、この方法で B 項が大きすぎる問題なども同時に解決できる可能性がある。この μ 項と B 項の問題は、この研究の将来の課題になるだろう。

謝辞

本研究や本論文の作成にあたって数多くの方にお世話になりました。私の指導教官である前川展祐先生には、私の研究のアドバイスや有意義な議論をしてくださり、問題点へのアプローチの仕方など多くの事をご指導してくださいました。今までのご指導、本当にありがとうございました。桜井一樹さん、金晟基さんもまた、共同研究者として、研究や素粒子論について数多くの有意義な議論やアドバイスしてくださいました。また、山下敏史さんも、アノマラス $U(1)$ GUT などの議論の相手になってくださりアドバイスをさせていただきました。長尾桂子さん、鞍田靖宏さんは、宇宙論を中心とした現象論のモデルの議論について、よく議論の相手になってくださいました。大変感謝しています。その他にも、EHQ 研のスタッフの皆様、EHQ を卒業された先輩方、学生の皆様には、私が研究活動する上で大変お世話になりました。この場をかりて感謝を申し上げます。本当にありがとうございました。

また、本論文は GCOE プログラム、そして日本学術振興会（特別研究員 No.218247）の多くのサポートがあって書き上げることができました。この場をかりて感謝を申し上げます。

参考文献

- [1] H. P. Nilles, “Supersymmetry, Supergravity And Particle Physics,” Phys. Rept. **110**, 1 (1984).
- [2] H. E. Haber and G. L. Kane, “The Search For Supersymmetry: Probing Physics Beyond The Standard Model,” Phys. Rept. **117**, 75 (1985).
- [3] For a review, see S. P. Martin, “A supersymmetry primer,” arXiv:hep-ph/9709356; J. Terning, “Modern supersymmetry”
- [4] For a review, see Julius Wess, Jonathan Bagger, “Supersymmetry and Supergravity”
- [5] For a review, see Steven Weinberg “The Quantum theory of fields III”
- [6] S. Coleman and J. Mandula, Phys. Rev. **159**, 1251 (1967).
- [7] R. Haag, J. T. Lopuszanski and M. Sohnius, Nucl. Phys. **B88**, 257 (1975).
- [8] R. D. Peccei and H. R. Quinn, Phys. Rev. Lett. **38**, 1440 (1977); Phys. Rev. D **16**, 1791 (1977).
- [9] M. Dine, arXiv:hep-ph/9612389.
- [10] F. Gabbiani, E. Gabrielli, A. Masiero and L. Silvestrini, Nucl. Phys. B **477**, 321 (1996)
- [11] A. H. Chamseddine, R. L. Arnowitt and P. Nath, Phys. Rev. Lett. **49**, 970 (1982); R. Barbieri, S. Ferrara and C. A. Savoy, Phys. Lett. B **119**, 343 (1982). L. J. Hall, J. D. Lykken and S. Weinberg, Phys. Rev. D **27** (1983) 2359; N. Ohta, Prog. Theor. Phys. **70**, 542 (1983); J. R. Ellis, D. V. Nanopoulos and K. Tamvakis, Phys. Lett. B **121**, 123 (1983); L. Alvarez-Gaume, J. Polchinski and M. B. Wise, Nucl. Phys. B **221**, 495 (1983);
- [12] C. R. Nappi and B. A. Ovrut, Phys. Lett. B **113**, 175 (1982); L. Alvarez-Gaume, M. Claudson and M. B. Wise, Nucl. Phys. B **207**, 96 (1982).
- [13] M. Dine and A. E. Nelson, Phys. Rev. D **48**, 1277 (1993); M. Dine, A. E. Nelson and Y. Shirman, Phys. Rev. D **51**, 1362 (1995); M. Dine, A. E. Nelson, Y. Nir

- and Y. Shirman, Phys. Rev. D **53**, 2658 (1996)
- [14] S.Dimopoulos, S.Raby and F.Wilczek, Phys. Rev. **D24**, 1681 (1981).
- [15] S.Dimopoulos, H.Georgi, Nucl. Phys. **B193**, 150 (1981).
- [16] N.Sakai, Z. Phys. **C11**, 153 (1981).
- [17] J. R. Ellis and D. V. Nanopoulos, Phys. Lett. B **110**, 44 (1982).
- [18] R. Barbieri and R. Gatto, Phys. Lett. B **110**, 211 (1982).
- [19] J. S. Hagelin, S. Kelley and T. Tanaka, Nucl. Phys. B **415**, 293 (1994).
F. Gabbiani, E. Gabrielli, A. Masiero and L. Silvestrini,
- [20] J. E. Kim and H. P. Nilles, Phys. Lett. B **138**, 150 (1984).
- [21] For a review, see L.Randall and C.Csa'ki hep-ph/9508208.
- [22] L.O'Raifeartaigh. Nucl. Phys. **B96**, 331(1975).
- [23] P.Fayet and J.Iliopoulos, Phys, Lett. **B51**, 461 (1974); P.Fayet, Nucl,Phys. **B90**, 104 (1975).
- [24] C.D.Froggatt and H.B.Nielsen, Nucl. Phys. **B147**, 227 (1979).
- [25] L.E.Ibanez, G.G.Ross, Phys. Lett. **B332**, 100 (1994).
- [26] E.Dudas, S.Pokorski, C.A.Savoy, Phys. Lett. **B356**, 45 (1995).
- [27] P.Binetruy, P.Ramond, Phys. Lett. **B350**, 49 (1995); P. Binetruy, S. Lavignac, and P. Ramond, Nucl. Phys. **B477**, 353 (1996); P. Binetruy, S. Lavignac, S. Petcov, and P. Ramond, Nucl. Phys. **B496**, 3 (1997).
- [28] H. Dreiner, G.K. Leontaris, S. Lola, G.G. Ross, and C. Scheich, Nucl. Phys. **B436**, 461 (1995).
- [29] M. Bando and T. Kugo, Prog. Theor. Phys. **101**, 1313 (1999); M. Bando, T. Kugo and K. Yoshioka, Prog. Theor. Phys. **104**, 211 (2000).
- [30] N. Maekawa, Phys. Lett. B **561**, 273 (2003)
- [31] N.Maekawa, Prog.Theor.Phys. **112** (2004), 639; M. Bando and N. Maekawa, Prog. Theor. Phys. **106**, 1255 (2001).
- [32] N.Maekawa, Prog.Theor.Phys.**106**, 401 (2001)
- [33] L. J. Hall and S. Raby, Phys. Rev. D **51**, 6524 (1995).
- [34] G. R. Dvali and S. Pokorski, Phys. Rev. Lett. **78**, 807 (1997).
- [35] Z. Berezhiani and Z. Tavartkiladze, Phys. Lett. B **396**, 150 (1997).
- [36] Q. Shafi and Z. Tavartkiladze, Phys. Lett. B **459**, 563 (1999).
- [37] J. L. Chkareuli, C. D. Froggatt, I. G. Gogoladze and A. B. Kobakhidze, Nucl. Phys. B **594**, 23 (2001).
- [38] N. Maekawa and T. Yamashita, Prog.Theor.Phys.**107**, 1201 (2002); **110**, 93 (2003).

- [39] N.Cabibbo, Phys. Rev. Lett.**10**, 531 (1963).
- [40] M. Kobayashi and T.Maskawa, Prog. Theor. Phys.**49**, 652 (1973).
- [41] G. Dvali and A. Pomarol, Phys. Rev. Lett. **77**, 3728, (1996); P.Binetruy and E.Dudas, Phys.Lett. **B389**, 503, (1996).
- [42] M. Dine, A.E. Nelson, Y. Nir and Y. Shirman, Phys. Rev. **D 53**, 2658, (1996); M.A. Luty and J. Terning, Phys. Rev. **D 62**, 075006 (2000); N. Maekawa, hep-ph/0004260; T. Banks, hep-ph/0007146.
- [43] K. A. Intriligator, N. Seiberg and D. Shih, JHEP **0604** (2006) 021
- [44] A. Amariti, L. Girardello and A. Mariotti, JHEP **0612** (2006) 058; S. A. Abel and V. V. Khoze, arXiv:hep-ph/0701069; S. Forste, Phys. Lett. B **642** (2006) 142; M. Gomez-Reino and C. A. Scrucca, JHEP **0708** (2007) 091; R. Essig, K. Sinha and G. Torroba, JHEP **0709** (2007) 032; S. Abel, C. Durnford, J. Jaeckel and V. V. Khoze, Phys. Lett. B **661** (2008) 201; H. Abe, T. Kobayashi and Y. Omura, JHEP **0711** (2007) 044; A. Givon and D. Kutasov, Nucl. Phys. B **796**, 25 (2008); A. Givon, A. Katz and Z. Komargodski, JHEP **0806**, (2008), 003 .
- [45] M. Dine and N. Seiberg, Phys. Lett. B **162**, 299 (1985).
- [46] N. V. Krasnikov, Phys. Lett. B **193**, 37 (1987).
- [47] J. A. Casas, Z. Lalak, C. Munoz and G. G. Ross, Nucl. Phys. B **347**, 243 (1990).
- [48] B. de Carlos, J. A. Casas and C. Munoz, Nucl. Phys. B **399**, 623 (1993).
- [49] T. Banks and M. Dine, Phys. Rev. D **53**, 5790 (1996).
- [50] P. Binetruy, M. K. Gaillard and Y. Y. Wu, Nucl. Phys. B **481**, 109 (1996). Nucl. Phys. B **493**, 27 (1997). Phys. Lett. B **412**, 288 (1997).
- [51] J. A. Casas, Phys. Lett. B **384**, 103 (1996).
- [52] N. Arkani-Hamed, M. Dine and S. P. Martin, Phys. Lett. B **431**, 329 (1998).
- [53] E. Witten, Phys. Lett. B **105**, 267 (1981).
- [54] M. Dine, N. Seiberg and E. Witten, Nucl. Phys. B **289**, 589 (1987).
- [55] J. J. Atick, L. J. Dixon and A. Sen, Nucl. Phys. B **292**, 109 (1987).
- [56] M. Dine, I. Ichinose and N. Seiberg, Nucl. Phys. B **293**, 253 (1987).
- [57] Y. Nir and N. Seiberg, Phys. Lett. B **309**, 337 (1993)
- [58] S. Coleman, Phys. Rev. **D15**, 2929 (1977);erratum ibid. **D16**, 1248 (1977); S. Coleman and F. DeLuccia, Phys. Rev. **D21**, 3305 (1980); A. Linde, Phys. Lett. **B100**, 37 (1981); M.J.Duncan and Lars Gerhard Jensen, Phys. Lett.**B 291**, 109 (1992).
- [59] R.Hempfling, Phys. Lett. B **329**, 222 (1994)
- [60] N.Maekawa, Phys. Lett. B **521**, 42 (2001)

- [61] N. Maekawa, arXiv:hep-ph/0304076.
- [62] K. S. Babu, J. C. Pati and Z. Tavartkiladze, JHEP **1006**, 084 (2010)
- [63] K. S. Babu, I. Gogoladze and Z. Tavartkiladze, Phys. Lett. B **650**, 49 (2007)
- [64] Y. Kawamura, H. Murayama and M. Yamaguchi, Phys. Rev. D **51**, 1337 (1995)
[arXiv:hep-ph/9406245].