パターン認識及び演習 試験問題（2010. 7. 27 石井）

1. 三次元特徴空間 (x_1, x_2, x_3) 上に、以下に示す 6 個の学習パターン（パターン 1〜パターン 6）が分布している。

   パターン 1 $(2,1,2)$,　パターン 2 $(2,1,1)$,　パターン 3 $(2,2,1)$
   パターン 4 $(1,1,2)$,　パターン 5 $(1,2,2)$,　パターン 6 $(2,2,2)$

   このうちパターン 1, 2, 3 はクラス ω_1 に、パターン 4, 5, 6 はクラス ω_2 に属するものとする。いま、線形識別関数

   $$g(\mathbf{x}) = w_0 + w_1x_1 + w_2x_2 + w_3x_3$$

   を設定し、学習パターン $\mathbf{x}(x_1, x_2, x_3)$ に対し、

   $$g(\mathbf{x}) > 0 \quad (\mathbf{x}\text{ がクラス }\omega_1\text{ に属するとき})$$
   $$g(\mathbf{x}) < 0 \quad (\mathbf{x}\text{ がクラス }\omega_2\text{ に属するとき})$$

   となるよう、重み w_0, w_1, w_2, w_3 を決定したい。

   パーセプトロンの学習規則を用いて重み w_0, w_1, w_2, w_3 を求めよ。ただし、重みの初期値は $(w_0, w_1, w_2, w_3) = (-1, 3, -2, -2)$ とし、学習規則の式における定数 $\rho = 1$ とする。また、学習パターンは、パターン 1 からパターン 6 までこの順に繰り返し与えるものとする。

2. 三次元特徴空間 (x_1, x_2, x_3) 上に、複数の学習パターンが分布している。各学習パターンはクラス $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ のいずれかに属するものとする。各クラスの重心 $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$ をそれぞれ求めたところ

   $$\mathbf{p}_1 = (1,2,1),\quad \mathbf{p}_2 = (-2,1,-1),\quad \mathbf{p}_3 = (3,-1,2)$$

   であったとする。ここで上記 $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$ をプロトタイプとして用いた最小距離識別を実現したい。この特徴空間上のパターンを $\mathbf{x}$ で表すとき、

   (a) 決定境界 $g_{12}(\mathbf{x}) = 0$, $g_{23}(\mathbf{x}) = 0$, $g_{31}(\mathbf{x}) = 0$ をそれぞれ求めよ。ただし、決定境界 $g_{ij}(\mathbf{x}) = 0$ は、

   $$g_{ij}(\mathbf{x}) > 0 \quad (\mathbf{x}\text{ がクラス }\omega_i\text{ に属するとき})$$
   $$g_{ij}(\mathbf{x}) < 0 \quad (\mathbf{x}\text{ がクラス }\omega_j\text{ に属するとき})$$

   となるよう設定するものとする。

   (b) 上で求めた決定境界の式を用いてパターン $\mathbf{x} = (1,1,1)$ を多数決法によって識別した結果を示せ。

3. 箱の中に大量のコインが入っている。ただし、本物のコインはそのうち 9/10 で、残り 1/10 は偽物である。両者は外見上区別がつかないが、本物のコインは投げて表が出る確率が 1/2 であるのに対し、偽物は 3/4 である。

   (a) いま、箱の中から無作為にコインを 1 枚取りだして 3 回投げたところ表が 2 回出た。このコインが偽物である確率を求めよ。答は既約分数（irreducible fraction）とすること。

   (b) 同じコインをもう一度投げたところ、やはり表であった。このコインが偽物である確率はいくらになるか。ベイズ更新の手法を用いて求めよ。答は既約分数とすること。

4. 二次元特徴空間上に分布するパターン $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ を考える。この空間上に、クラス ω_1 に属するパターン、クラス ω_2 に属するパターンがそれぞれ次のように分布している。

   クラス ω_1 のパターン:

   x_1, x_2 が独立で、x_1, x_2 はそれぞれ区間 $[1, 5], [1, 6]$ で一様分布

   クラス ω_2 のパターン:

   x_1, x_2 が独立で、x_1, x_2 はそれぞれ区間 $[2, 6], [3, 5]$ で一様分布

   ただし、クラス ω_1, ω_2 の事前確率 $P(\omega_1), P(\omega_2)$ は、

$$P(\omega_1) = 3/5$$
$$P(\omega_2) = 2/5$$

   とする。

   (a) ベイズ決定則を適用したとき、クラス ω_1 と判定される領域を、2 次元平面 (x_1, x_2) 上に斜線で図示せよ。図は解答用紙にあらかじめ印刷されているものを用いること。

   (b) ベイズ誤り確率を求めよ。ただし、答は既約分数とすること。

5. 以下の問に数行程度で答えよ。ただし、図や式は用いないこと

   (a) 特徴空間の次元数を削減する方法として、KL 展開（Karhunen-Loeve expansion）とフィッシャーの方法（Fisher's method）が知られている。両者の差異について述べよ。

   (b) 一般に、学習パターン数の増大に伴い、線形分離できる可能性は小さくなる。にもかかわらず、パターン認識系を設計する際に、学習パターン数を特徴空間の次元数に対して十分大きく設定しなくてはならないとされているのは何故か、その理由を述べよ。