2010. 7. 13　石井

1. ［第 12 回演習問題の変形］三つの扉 A, B, C があり、司会者とゲストがいる。司会者はゲストの見ていないところで、一つの扉の後ろに賞品を隠す。ゲストに扉を選ばせ、賞品の隠されている扉を言い当てたらゲストはその賞品を獲得できるものとする。ゲストは扉 A を選んだとする。選んだ扉を開ける前に、正解を知っている司会者は残った二つの扉のうち賞品の無い扉（外れ）を開け、確かに外れであることを確認させる。その扉が B であったとする。以下の問に答えよ。ただし、司会者が扉 A, B, C に商品を隠す確率はそれぞれ 1/4, 1/4, 1/2 とする。それ以外では司会者は三つの扉を公平に扱うものとする。
   (a) ゲストが扉 A を選んだ時点で、その扉が当たりである確率を求めよ。
   (b) 司会者が扉 B を開けて、それが外れであることを示した時点で扉 A が当たりである確率を求めよ。

2. 二種のコイン ω_1, ω_2 があり、それらを投げて表が出る確率はそれぞれ 1/2, 1/3 とする。いま、コイン ω_1, ω_2 をそれぞれ 1/3, 2/3 の割合で含む壷から無作為にコインを一枚取り出す。
   (a) このコインを一度だけ投げ、その結果から取り出したコインが ω_1, ω_2 の何れであるかを判定したい。ベイズ決定則を適用するとして、表が出た場合と裏が出た場合のそれぞれについて、判定結果をその理由とともに示せ。
   (b) この判定方法を適用した場合の誤り確率（ベイズ誤り確率）を求めよ。答は既約分数（irreducible fraction）とすること。

3. 二次元特徴空間上に分布するパターン $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^t$ を考える。この空間上に、クラス ω_1 に属するパターン、クラス ω_2 に属するパターンがそれぞれ次のように分布している。

   クラス ω_1 のパターン:　x_1, x_2 が独立で、いずれも区間 $[0, 4]$ で一様分布
   クラス ω_2 のパターン:　x_1, x_2 が独立で、いずれも区間 $[2, 5]$ で一様分布

   ただし、クラス ω_1, ω_2 の事前確率 $P(\omega_1), P(\omega_2)$ は、

$$P(\omega_1) = 2/3$$
$$P(\omega_2) = 1/3$$

   とする。
   (a) 2 次元平面 (x_1, x_2) 上に、ベイズ決定則による決定境界を図示せよ。
   (b) ベイズ誤り確率を求めよ。ただし、答は既約分数で表すこと。

4. ここに一枚のコインがある。このコインを投げて表の出る確率は θ である（$0 < \theta < 1$）。いま、このコインを n 回投げたところ r 回表が出たとする（$0 \leq r \leq n$）。この結果より、確率 θ を最尤法によって推定せよ。

5. 壷の中に、同じ大きさ・手触りの赤玉、青玉、白玉が大量に含まれており、その含有率はそれぞれ p_1, p_2, p_3 とする（$p_1 + p_2 + p_3 = 1$）。いま、この壷の中から、無作為に玉を 1 個取り出しては元に戻すという操作を n 回繰り返したところ、赤玉が n_1 回、青玉が n_2 回、白玉が n_3 回得られた（$n_1 + n_2 + n_3 = n$）。
   (a) このような結果が得られる確率 p を求めよ。
   (b) 上で求めた、確率 p をもとに、p_1, p_2, p_3 を最尤法によって推定せよ。

6. 二次元特徴空間上に 8 個の学習パターン $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_8$ が、以下の如く与えられている。

$$\begin{array}{llll} \mathbf{x}_1 = (1,1)^t, & \mathbf{x}_2 = (2,3)^t, & \mathbf{x}_3 = (3,7)^t, & \mathbf{x}_4 = (6,9)^t \\ \mathbf{x}_5 = (7,3)^t, & \mathbf{x}_6 = (8,5)^t, & \mathbf{x}_7 = (9,9)^t, & \mathbf{x}_8 = (12,11)^t \end{array}$$

   このうち、$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4$ はクラス ω_1 に、$\mathbf{x}_5, \mathbf{x}_6, \mathbf{x}_7, \mathbf{x}_8$ はクラス ω_2 にそれぞれ属しているものとする。両クラスともパターンは正規分布に従うことがわかっており、また、両クラスの事前確率は等しいと仮定する。
   (a) 両クラスの平均ベクトル $\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2$，および共分散行列 $\mathbf{\Sigma}_1, \mathbf{\Sigma}_2$ を最尤法によって推定せよ。
   (b) $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_8$ および $\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2$ をグラフ上にプロットせよ。
   (c) ベイズ決定則を適用して両クラスの識別を行うときの決定境界を求め、同グラフ上にプロットせよ。