

## 第2章 確定信号波形と周波数スペクトル

### 2.1 信号の分類

電気通信における信号は、時間とともに変化する電圧の値として表現される。通信システムを正しく理解するためには、信号の性質・振る舞いを正確に理解する必要がある。

#### 2.1.1 確定信号と不規則信号

時間の関数として記述できる信号を、確定信号 (deterministic signal)<sup>1</sup> という。確定信号は、通常の数学関数として取り扱うことが可能である<sup>2</sup>。

雑音源 (たとえば抵抗の熱雑音の時間波形) の観察を行う場合を考えよう。観測された雑音の電圧の時間変化は時間関数として表現できる。しかしこの波形は、その雑音源からその観測時間内において出力され得る雑音の波形の「一例」にすぎず、雑音源の出力の性質を完全に記述するものではない<sup>3</sup>。このように確率過程として与えられる信号を、不規則信号 (random signal) という。また上で述べたような、不規則信号の「一例」であるような関数を、見本関数 (sample function) という。

#### 2.1.2 周期信号と非周期信号

確定信号は、さらに周期信号と非周期信号に分類することができる。ここで周期信号とは、いま信号を  $x(t)$  と表わすとき

$$x(t) = x(t + nT) \quad (2.1)$$

となるような関数 ( $n$  は任意整数) である。ここで  $T$  は定数であり周期と呼ばれる。また  $1/T$  を基本周波数という。

#### 2.1.3 信号のエネルギーと電力

信号  $x(t)$  のエネルギーは、

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \quad (2.2)$$

と定義される。定義より明らかなように、周期信号のエネルギーは無限である。一方、非周期信号のエネルギーは、たとえば、

$$u(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq 1 \\ 0 & 1 < |t| \end{cases} \quad (2.3)$$

$$v(t) = \frac{\sin t}{t} \quad (2.4)$$

のように、エネルギーが有限である場合もあれば、

$$w(t) = \sin t^2 \quad (2.5)$$

のように、エネルギーが無限である場合もある。

エネルギーが無限の信号の「強度」は、電力で表わすことができる。信号  $x(t)$  の電力は、

$$\frac{1}{\Delta} \int_{t-\Delta/2}^{t+\Delta/2} |x(\tau)|^2 d\tau \quad (2.6)$$

で定義される。ここで、 $\Delta \rightarrow 0$  の場合は、時刻  $t$  における瞬間電力、また  $\Delta \rightarrow \infty$  は、平均電力である。周期  $T$  の周期関数の場合、 $\Delta \rightarrow \infty$  のときの値と  $\Delta = T$  のときの値は等しい。

<sup>1</sup> 決定論的信号ともいう

<sup>2</sup> 簡単な式で表現できるとは限らない

<sup>3</sup> 別の例をあげる。サイコロを繰り返し投げた場合の出目の記録 (各時刻で6通りの値のいずれかをとる離散時間関数) は、サイコロの出目の例 (このような出目の系列が発生しうることを示している) に過ぎない。

## 2.2 周期信号のスペクトル (フーリエ級数展開)

周期が  $T$  である周期信号は, 周波数  $1/T$  の整数倍 ( $0, 1/T, 2/T, 3/T, 4/T, \dots$ ) の正弦波の合成によってあらわすことができる (周波数  $0$  は直流項を表す). そして, このように信号を正弦波の級数で表すことを, フーリエ級数展開という. これは, 時間次元の信号を, 離散周波数  $n/T$  の次元で表現しているといえる. このように周波数次元で表現されたものを, 信号のスペクトルという.

### 2.2.1 片側スペクトル

周期  $T$  を持った任意の時間関数  $x(t)$  は, 以下のようにフーリエ級数展開できる.

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t \quad (2.7)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos(n\omega_0 t + \phi_n) \quad (2.8)$$

但し,  $\omega_0$  は基本角周波数

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = 2\pi/T \quad (2.9)$$

ただし, 各正弦波の振幅, 位相は, 下記である.

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt & n = 0 \\ \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos n\omega_0 t dt & n \neq 0 \end{cases} \quad (2.10)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin n\omega_0 t dt \quad (2.11)$$

$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad (2.12)$$

$$\phi_n = -\arctan \frac{b_n}{a_n} \quad (2.13)$$

主な性質

1. 周期信号のスペクトルは離散的. (基本周波数  $f_0 = 1/T$  の高調波)
2. 各々の周波数成分に2次元ベクトル, 即ち  $(a_n, b_n)$  または  $(c_n, \phi_n)$  が対応. (各周波数における振幅だけでは逆変換できない)
3.  $|c_n|$  と  $c_n^2/2$  は, 各々その周波数成分の振幅及び電力を表す.

$$x(t) \longleftrightarrow (a_n, b_n)$$

$$x(t) \longleftrightarrow (c_n, \phi_n)$$

$$a_n, b_n, c_n, \phi_n \text{ は実数であり } 0 \leq n$$

### 2.2.2 両側スペクトル

上のフーリエ級数展開は, 各項に二つのパラメータ ( $(a_n, b_n)$  あるいは  $(c_n, \phi_n)$ ) が存在する. これは, 複素正弦波  $e^{j\omega_0 t}$  を用いると一つの複素数にまとめる事が出来, 取り扱いが容易になる. この場合は, 仮想的に負の周波数成分を考える必要がある. したがって級数のパラメータ  $n$  は正負両方の値を持つ. このような周波数次元での表現を両側スペクトルという. 先に説明した片側スペクトルは, 両側スペクトルより直感的理解は容易であるが, 数学的な取り扱いは片側スペクトルの方が面倒になる傾向がある. そこで本書では, 以下両側スペクトルを用いて議論する.

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{jn\omega_0 t} \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} X_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \\ &= \frac{1}{2} (a_n - jb_n) \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta \quad (2.16)$$

但し,  $X_n$  は周波数  $nf_0$  成分の正弦波の複素振幅.  
 主な性質

1.  $X_n$  と  $X_{-n}$  は複素共役
2.  $X_n$  と  $X_{-n}$  の対が角周波数  $n\omega_0$  の成分を表す.

$$X_n = \begin{cases} c_0 & \text{if } n = 0 \\ \frac{c_n}{2} e^{-j\phi_n} & \text{if } 0 < n \end{cases} \quad (2.17)$$

$$c_n = |X_n| + |X_{-n}| = 2|X_n| \quad (2.18)$$

$$c_n^2 = X_n X_n^* + X_{-n} X_{-n}^* = 2X_n X_n^* \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} x(t) &\longleftrightarrow X_n \\ X_n &\text{は複素数であり, } -\infty < n < \infty \end{aligned}$$

## 2.3 非周期確定信号のスペクトル (フーリエ変換)

### 2.3.1 エネルギー有限の信号の場合

非周期信号  $x(t)$  も, 周期波形のフーリエ級数展開と同様に多数の正弦波の組み合わせで表現できる. 周期関数のフーリエ級数展開では, 正弦波の周波数が離散的であり, それらのたかだか可算無限個の正弦波の振幅あるいは位相の組で信号の周波数次元での振る舞いが記述される. これに対し非周期信号  $x(t)$  では, 周波数が連続した正弦波の合成で表される. つまり,  $x(t)$  に対応して, 正弦波の複素振幅密度関数  $X(f)$  が定まる. この  $x(t)$  と  $X(f)$  をフーリエ変換対とよぶ. 本書では  $x(t)$  と  $X(f)$  がフーリエ変換対をなすとき " $x(t) \longleftrightarrow X(f)$ " と表現することにする. また,  $x(t)$  から  $X(f)$  を求めることをフーリエ変換, 逆に  $X(f)$  から  $x(t)$  を求めることをフーリエ逆変換という. また  $x(t)$  が信号波形 (電圧の時間関数) である場合,  $X(f)$  を信号の振幅密度スペクトルとよぶ.<sup>4</sup>

具体的には, フーリエ変換対は以下のように表される.

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df \quad (2.20)$$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt \quad (2.21)$$

なお教科書によっては, 下記の対を使用する場合もある.

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (2.22)$$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (2.23)$$

主な性質

1. 非周期信号のスペクトルは連続的.
2.  $X(f)df$  が  $X_n$  に対応.<sup>5</sup>

<sup>4</sup>片側スペクトルで定義することも可能であるが, 以下では, よりすっきりとした両側スペクトルに議論を限定する.

<sup>5</sup> $|X(f)|^2 df \rightarrow |X_n|^2 / df \rightarrow |X_n|^2 \times T$  (電力  $\times$  1 周期)

3.  $X(f)$  は振幅密度スペクトル
4.  $|X(f)|^2$  はエネルギー密度スペクトル

$$x(t) \iff X(f)$$

### 2.3.2 エネルギーが無限大の信号のフーリエ変換

上に述べたようなフーリエ変換が可能である十分条件は、信号エネルギーが有限、即ち

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df < \infty \quad (2.24)$$

であることである。しかしながら、これは必要条件ではなく十分条件にすぎない。エネルギー無限でもフーリエ変換が可能な場合も多い。

また

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ \infty & t = 0 \end{cases} \quad (2.25)$$

かつ

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (2.26)$$

となるインパルス関数（デルタ関数） $\delta(t)$  を考えるとさらに多くの信号がフーリエ変換可能となる。なおこのインパルス関数は、任意の時刻  $t_0$  において任意の関数  $f(t)$  について

$$\int_A^B f(t) \delta(t - t_0) dt = \begin{cases} f(t_0), & \text{if } A < t_0 < B \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (2.27)$$

を成立させる関数として定義することもできる。インパルス関数を用いたフーリエ変換対の代表的なものを以下に示す。

$$\sin(kt^2) \iff \sqrt{\frac{\pi}{2k}} [\cos(|\frac{\pi^2 f^2}{k}|) - \sin(|\frac{\pi^2 f^2}{k}|)] \quad (2.28)$$

$$\delta(t) \iff 1 \text{ (白色)} \quad (2.29)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{j2\pi n f_0 t} \iff \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n \delta(f - n f_0) \quad (2.30)$$

上の三つの式のうち、上二つ（即ち (2.28), (2.29)）は非周期で無限エネルギーを持つ時間波形の振幅密度スペクトルの例である。また最後の式 (2.30) は、周期関数（フーリエ展開形で表現）も、フーリエ級数展開とインパルス関数を使用することによって、フーリエ変換として周波数表現が可能であることを示している。

### 2.3.3 フーリエ変換の性質

$x(t) \iff X(f)$ ,  $v(t) \iff V(f)$ ,  $w(t) \iff W(f)$  とする

1. 時間的にゆっくりとした関数は、周波数成分が低くなる  
実定数  $\alpha$  について

$$x(\alpha t) \iff X(f/\alpha)/|\alpha| \quad (2.31)$$

2. 偶関数と奇関数

$x(t) = x_e(t) + x_o(t)$  とすることができ、 $x_e(t)$  が偶関数であり  $x_o(t)$  が奇関数だとすると

$$x_e(t) \iff \Re[X(f)] \quad (2.32)$$

$$x_o(t) \iff j\Im[X(f)] \quad (2.33)$$

3. 時間シフト

$$x(t - t_0) \iff X(f)e^{-j2\pi f t_0} \quad (2.34)$$

#### 4. 周波数シフト

$$x(t)e^{j(2\pi f_0 t + \theta)} \Leftrightarrow X(f - f_0)e^{j\theta} \quad (2.35)$$

$$x(t) \cos(2\pi f_0 t + \theta) \Leftrightarrow \frac{1}{2}[e^{-j\theta} X(f + f_0) + e^{j\theta} X(f - f_0)] \quad (2.36)$$

$$x(t) \cos 2\pi f_0 t \Leftrightarrow \frac{1}{2}[X(f + f_0) + X(f - f_0)] \quad (2.37)$$

$$x(t) \sin 2\pi f_0 t \Leftrightarrow \frac{j}{2}[X(f + f_0) - X(f - f_0)] \quad (2.38)$$

#### 5. 時間反転

$$x(-t) \Leftrightarrow X(-f) \quad (2.39)$$

#### 6. 微分

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \Leftrightarrow (j2\pi f)^n X(f) \quad (2.40)$$

$$(-j2\pi f)^n x(t) \Leftrightarrow \frac{d^n X(f)}{df^n} \quad (2.41)$$

#### 7. 双対性

$$x(\pm f) \Leftrightarrow X(\mp t) \quad (2.42)$$

#### 8. たたみこみ積分

$$v(t) * w(t) \Leftrightarrow V(f) \cdot W(f) \quad (2.43)$$

$$v(t) \cdot w(t) \Leftrightarrow V(f) * W(f) \quad (2.44)$$

$$\text{但し, } v(x) * w(x) = \int_{-\infty}^{\infty} v(y)w(x-y)dy \quad (2.45)$$

#### 9. パーシバルの定理

$$\int_{-\infty}^{\infty} v^*(t)w(t+\tau)dt = \int_{-\infty}^{\infty} V^*(f)W(f)e^{j2\pi f\tau}df \quad (2.46)$$

またこれより以下が導ける

$$\int_{-\infty}^{\infty} |v(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |V(f)|^2 df \quad (2.47)$$

## 2.4 狭帯域信号と等価低域系

### 2.4.1 狭帯域信号とは

狭帯域信号とは、その信号の電力密度スペクトルが、ある周波数  $f_0$  付近に集中している信号である。無線信号は、通常この条件を満足する狭帯域信号である。このような信号は、

$$s(t) = x(t) \cos[2\pi f_0 t + \theta(t)] \quad (2.48)$$

$$= u_I(t) \cos 2\pi f_0 t - u_Q(t) \sin 2\pi f_0 t \quad (2.49)$$

と表せる。ここで上式の  $u_I(t), u_Q(t)$  を、それぞれ信号  $s(t)$  の同相、直交成分とよぶ。但し

$$u_I(t) = x(t) \cos \theta(t) \quad (2.50)$$

$$u_Q(t) = x(t) \sin \theta(t) \quad (2.51)$$

$$|x(t)| = \sqrt{u_I^2(t) + u_Q^2(t)} \quad (2.52)$$

$$\theta(t) = \tan^{-1} \frac{u_Q(t)}{u_I(t)} \quad (2.53)$$

である。

## 2.4.2 狭帯域信号の複素帯域信号による表現

狭帯域信号は、複素帯域信号の形で表すと扱いやすい。

- 複素帯域信号

$$u(t)e^{j2\pi f_o t} \quad (2.54)$$

- 複素搬送波

$$e^{j2\pi f_o t} = \cos 2\pi f_o t + j \sin 2\pi f_o t \quad (2.55)$$

- 複素包絡線 (複素変調関数)

$$u(t) = u_I(t) + ju_Q(t) \quad (2.56)$$

$$= x(t)e^{j\theta(t)} \quad (2.57)$$

このように信号の複素包絡線を考えると、同相成分と直交成分を一つの式で表現でき、また直接議論に関係の無い搬送波周波数を省略できる。このような複素包絡線でシステムを表したものを等価低域系表示という。

- 実数狭帯域信号との関係

$$s(t) = x(t) \cos[2\pi f_o t + \theta(t)] \quad (2.58)$$

$$= \Re\{u(t)e^{j2\pi f_o t}\} \quad (2.59)$$

## 2.4.3 狭帯域信号のスペクトル

実数狭帯域信号を  $s(t)$  とし、その複素包絡線を  $u(t)$  として、

$$s(t) \iff S(f) \quad (2.60)$$

$$u(t) \iff U(f) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{-j2\pi ft} dt \quad (2.61)$$

とすると、振幅密度スペクトルは

$$S(f) = \frac{1}{2}[U(f - f_o) + U^*(-f - f_o)] \quad (2.62)$$

となる。

## 2.5 線形システムの時間および周波数表現

### 2.5.1 線形系のインパルス応答

インパルス関数は、すべての周波数において一様な振幅を持つ ( $\delta(t)$  のフーリエ変換は 1) 関数である。従って、これを線形系に入力することは、すべての周波数で同一振幅の信号を与えて系を試験することに等しく、そのときの出力は、系の性質を良く反映したものとなる。このように、線形系にインパルス関数  $\delta(t)$  を印加したときの出力波形を、系のインパルス応答という。たとえば図 2.1

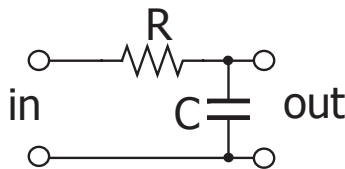


図 2.1: RC 積分回路 (LPF)

のインパルス応答は、

$$h(t) = \begin{cases} \frac{1}{RC}e^{-t/RC} & 0 \leq t \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (2.63)$$

である。

## 2.5.2 線形系の周波数関数

インパルス応答は線形系の時間領域での性質を表現する．これをフーリエ変換したものは，系の周波数関数とよばれる．すべての周波数において一様な振幅を持つインパルス関数を入力した場合の出力であるから，系の周波数関数は，それぞれの周波数における出力の振幅と位相をあらわすことになる．

先に示した，図 2.1 の回路の周波数関数は，インパルス応答  $h(t)$  のフーリエ変換として，

$$H(f) = \frac{1}{1 + j2\pi fRC} \quad (2.64)$$

となる．

線形系の周波数関数  $H(f)$  を測定するには，周波数  $f$  の単一周波数信号（正弦波）を入力としその出力の振幅と位相を測定するという作業を， $f$  を変えながら行えばよい．実際にこの作業を自動的に行う装置が，ネットワークアナライザである．

## 2.5.3 線形系による信号のフィルタリング

インパルス応答が  $h(t)$  である線形系に信号  $g(t)$  が入力された場合の出力  $f(t)$  は畳み込み積分 (convolution integral) または重畳積分 (superposition integral) とよばれる以下の演算で決定される．

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)h(t - \tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)g(t - \tau)d\tau \quad (2.65)$$

この演算を本書では，

$$f(t) = h(t) * g(t) = g(t) * h(t) \quad (2.66)$$

と表現することにする<sup>6</sup>．  
ところで畳み込み積分には，

$$g(t) * h(t) \Leftrightarrow G(f) \cdot H(f) \quad (2.67)$$

という性質がある．このことは，線形系の出力信号のスペクトルは，入力信号のスペクトルと系の周波数関数の積で表現できることを意味している．

## 2.5.4 理想低域フィルタ

通信システムの解析においては，しばしば以下の周波数関数をもつ理想低域フィルタを用いる．

$$H(f) = \begin{cases} (1)e^{-j2\pi ft_0} & |f| \leq B/2 \\ 0 & B/2 < |f| \end{cases} \quad (2.68)$$

このフィルタは， $B/2$  以下の周波数範囲で，振幅スペクトルが 1 であり，位相は勾配  $-2\pi t_0$  の直線である．またこの周波数範囲外では周波数関数は零である．従って，周波数範囲外の信号は，このフィルタを通過できない．

一方，この周波数範囲内に全エネルギーが存在する信号  $g(t)$  を，このフィルタに入力するときの出力  $f(t)$  を考える．ここで  $g(t)$  のスペクトルを  $G(f)$  とすると，出力信号のスペクトルは，

$$F(f) = G(f)H(f) = G(f)e^{-j2\pi ft_0} \quad (2.69)$$

となり，従って

$$f(t) = g(t - t_0) \quad (2.70)$$

となる．すなわち  $B/2$  以下の周波数範囲においては，フィルタは，時間遅延  $t_0$  を与えるのみである．逆に信号をひずみなく伝送するためのフィルタの条件は，

- 信号のエネルギーが存在する周波数範囲において振幅スペクトルは一定． $|H(f)| = 1$
- 信号のエネルギーが存在する周波数範囲において位相スペクトルは直線． $\arg(H(f)) = Cf$

である．但し  $C$  は正定数．この式は，各周波数において遅延量が一定であることを表している．

<sup>6</sup>教科書によっては \* ではなく  $\otimes$  を用いることも多い．