第5章　自己相関関数とそのフーリエ変換

5.1　自己相関関数

ある波形と，それが一定値 τ だけずれたものがどれぐらい似ているかを表すものが，自己相関関数である．時間関数で記述された信号の自己相関関数のフーリエ変換は，その信号のエネルギーあるいは電力の周波数軸上での分布を示す．後でも述べるように時間関数では一意に記述できないような雑音等の不規則信号についても，自己相関関数は定義できる．従って，確定信号と不規則信号を統一的に表現する上でも，自己相関関数とそのフーリエ変換は重要である．

5.2　確定信号の自己相関関数とスペクトル

時間の関数として波形が定義できる確定信号について考える．自己相関関数の定義は，波形のエネルギーが有限か無限かで異なることに注意する必要がある．

5.2.1　エネルギー有限の信号の場合

エネルギーが有限の確定信号 $x(t)$[1] の自己相関関数は，

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)x(t+\tau)dt \tag{5.1}$$

と定義される．この式より明らかなように，$R(0)$ は信号の全エネルギーを表すことになる．

自己相関関数の τ に関するフーリエ変換 $S_x(f)$ は (5.2) となる．

$$\begin{aligned} R(\tau) \Leftrightarrow S_x(f) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)x(t+\tau)e^{-j2\pi f\tau}dtd\tau \\ &= X^*(f)\cdot X(f) = |X(f)|^2 \end{aligned} \tag{5.2}$$

ここで，$X(f)$ は，$x(t)$ の振幅密度スペクトル

$$x(t) \Leftrightarrow X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt$$

である．

ところで，フーリエ変換の性質より，

$$R(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f)df \tag{5.3}$$

である．また，先に述べたように，$R(0)$ は信号 $x(t)$ の全エネルギーを表す．従って，式 (5.2) の $S_x(f)$ は，有限エネルギー信号 $x(t)$ の**エネルギー密度スペクトル**を表すことになる．

5.2.2　エネルギー無限の信号の場合

エネルギーが無限の確定信号 $x(t)$ の自己相関関数は，

$$R(\tau) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x^*(t)x(t+\tau)dt \tag{5.4}$$

と定義される．この場合，$R(0)$ は信号の電力を表すことになる．

[1] ここでは複素信号に一般化している

この自己相関関数の τ に関するフーリエ変換 $S_x(f)$ は

$$R(\tau) \quad \Leftrightarrow \quad S_x(f) = \lim_{\Delta\to\infty} \frac{|X_\Delta(f)|^2}{\Delta} \tag{5.5}$$

となる．但し，

$$X_\Delta(f) \quad \Leftrightarrow \quad x_\Delta(t) = \begin{cases} x(t) & (-\Delta/2 < t < \Delta/2) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{5.6}$$

である．先に述べたように，$R(0)$ は信号 $x(t)$ の全電力を表す．このことと，式 (5.3) より，式 (5.5) の $S_x(f)$ は，無限エネルギー信号 $x(t)$ の**電力密度スペクトル**を表すことになる．

5.3 自己相関関数の性質

上に述べた自己相関関数は，信号のエネルギーが有限の場合も無限の場合も以下の性質を持つ．

1. 複素関数の自己相関関数は $R(\tau) = R^*(-\tau)$
（そのフーリエ変換は実関数）
2. 実数関数の自己相関関数は実偶関数.
（そのフーリエ変換も実偶関数）
3. 周期関数の自己相関関数は，同じ周期を持つ周期関数.

5.4 不規則信号の数学的表現

見本関数

たとえば，サイコロを繰り返し投げて，出た目の順を記録したとしても，その出目の順番は,「単なる一例」にすぎない．同様に，もし雑音の波形をペンレコーダなどで記録したとしても，それは無限の可能性を持つ雑音の波形の「一例」を記録したことにしかならない．

時刻 t における雑音の値を $n(t)$ と表現することを考える．この場合，それぞれの時刻における値 $n(t)$ の値は，サイコロの出目と同様に，確率に支配された確率変数である．雑音の場合，$n(t)$ を一意に定めることはできず，一例 (**見本関数**という) を示すことしかできない．またこのような確率過程として表現される信号 (雑音を含む) を**不規則信号**という．

集合平均と時間平均

サイコロの出目の系列そのものは，系列の一例（見本系列）にすぎない．しかしサイコロの出目の期待値や分散はサイコロの出目の性質を正しく反映した値である．このように，確率過程では，それぞれの値を記録しても例示にすぎないが，それらの (各種の) 平均値は，確率過程の性質を表現することができる．

不規則信号 $n(t)$ のある時刻 t_0 における値，$n(t_0)$ は，確率変数である．ここで時刻 t_0 における不規則信号 $n(t)$ の期待値 $\mathrm{E}[n(t_0)]$ は，

$$\mathrm{E}[n(t_0)] \quad = \quad \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \mathrm{Prob}[n(t_0) = x] dx \tag{5.7}$$

と表現できる．これは時刻 t_0 における $n(t)$ の取り得る値の平均値**集合平均 (ensemble average)** である．また不規則信号について，以下のような平均を考えることもできる．

$$\overline{n(t)} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} n(t) dt. \tag{5.8}$$

これは，見本関数の各時刻における値の平均値，すなわち**時間平均 (time average)** である．以下，$n(t)$ の集合平均を $\mathrm{E}[n(t)]$，時間平均を $\overline{n(t)}$ で表現する．

5.5 不規則信号の自己相関関数とスペクトル

不規則信号は, ひとつ時間関数で表現することができない．見本関数のフーリエ変換を行っても，それもまたスペクトルの「一例」に過ぎない．しかしながら，不規則信号の自己相関関数を定義し，そのフーリエ変換として**電力密度スペクトル**を定義することは可能である．

不規則信号の見本関数 $n(t)$ を考える．その自己相関関数は次のように定義できる．

$$R(t,\tau) = \mathrm{E}[n(t)\cdot n(t+\tau)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} n_1 n_2 \mathrm{Prob}[n(t)=n_1, n(t+\tau)=n_2]dn_1 dn_2 \tag{5.9}$$

これは, 一般の関数であり, 不規則信号に対して一意に定めることができる．

ここで $n(t)$ が（広義）定常過程であるとすると, 時刻 t にかかわらず

$$R(\tau) = \mathrm{E}[n(t)\cdot n(t+\tau)]. \tag{5.10}$$

さらに, エルゴード過程（集合平均と時間平均が等しい確率過程）なら，

$$R(\tau) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} n(t)n(t+\tau)dt. \tag{5.11}$$

自己相関関数がわかれば，そのフーリエ変換は, 確定信号の場合同様に, 電力密度スペクトルを表す.[2]また逆に，雑音の電力密度スペクトルが与えられれば，その逆フーリエ変換として自己相関関数が定まる．

たとえば，不規則信号が白色（電力密度スペクトルが周波数によらず一定値）であれば，その自己相関関数は，インパルス $\delta(\tau)$ となる．これは，時刻の異なる不規則信号が互いに無相関であることをあらわす．また不規則信号が $0<f<W$ の帯域幅で帯域制限されているなら，その逆フーリエ変換は，$1/2W$ 毎に零値をとる．すなわち帯域幅の 2 倍の逆数毎にとったサンプル値は互いに無相関となる．

5.6 ランダムデータによるパルス列 (周期定常過程)

ランダムデータ系列 a_k を考える．　但し，k は整数である. この a_k を送信シンボルデータ列とし，周期 $1/T$, 送信パルス波形 $g(t)$ で伝送するベースバンド信号

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k g(t-kT) \tag{5.12}$$

を考える．ここで k 番目の変調データ a_k はランダム変数（離散確率過程）であるから，信号 $x(t)$ もまた確率過程（不規則信号) となる．($x(t)$ は見本関数である）以下，この信号について議論する．そのために，以下ではまず，ランダムデータ系列の自己相関値を定義する．

5.6.1 ランダムデータ系列の自己相関値

ランダムデータ系列 a_k の自己相関値を，

$$\begin{aligned}\varphi(m,n) &= \mathrm{E}[a_m\cdot a_n] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} a_m\cdot a_n P(a_m,a_n)da_m da_n\end{aligned} \tag{5.13}$$

と定義する. 但し, $P(a_m,a_n)$ は a_m, a_n の結合確率密度関数である．

いま a_k が定常過程であるとすると，自己相関は m と n の差だけで定まる．そこで新たに関数 $\phi(m-n)$ を導入して

$$\varphi(m,n) = \phi(m-n) \tag{5.14}$$

と表わすことができる．[3]

[2]定常信号のエネルギーは無限大である．

[3]定義より明らかに，$\varphi(m,n)=\varphi(n,m)$ であり，従って $\phi(l)=\phi(-l)$

5.6.2 ランダムデータ系列によるパルス列の自己相関関数

ランダムデータ系列 a_k が，自己相関値 $\phi(m-n)$ の定常過程であるする．このとき信号 $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k g(t-kT)$ の自己相関関数は,

$$\begin{aligned} R_x(t,\tau) &= \mathrm{E}[x(t)x(t+\tau)] \\ &= \mathrm{E}[\sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m g(t-mT) \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n g(t+\tau-nT)] \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi(m-n) g(t-mT) g(t+\tau-nT) \end{aligned} \tag{5.15}$$

となる．ここで，パルス $g(t)$ が時間的に一様でないことから，ランダムデータ系列は定常であっても，信号 $x(t)$ は非定常（周期定常）であることに注意する必要がある．したがって，その自己相関関数は，t,τ のように２つの変数をもつことになる．したがってそのスペクトルを直接求めるためには２次元フーリエ変換が必要となる．そこで, (5.15) を直接フーリエ変換するのではなく，その時間平均のフーリエ変換を考える.

ところで，$R_x(t,\tau)$ は，周期 T を持つ. 即ち，任意の整数 k について，$R_x(t,\tau) = R_x(t+kT,\tau)$ である．したがって，その時間平均 $R_x(\tau)$ は,

$$\overline{R_x(t,\tau)} = R_x(\tau) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} R_x(t,\tau)dt. \tag{5.16}$$

となる.

これに，式 (5.15) を代入し，$l = m-n$ として整理すると

$$\begin{aligned} R_x(\tau) &= \frac{1}{T}\sum_{l=-\infty}^{\infty} \phi(l) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-T/2}^{T/2} g(t-mT) g(t+\tau-(m-l)T) dt \\ &= \frac{1}{T}\sum_{l=-\infty}^{\infty} \phi(l) R_g(\tau+lT) \end{aligned} \tag{5.17}$$

を得る．但し，$R_g(\tau)$ は有限エネルギーのパルス $g(t)$ の自己相関関数である.

すると，$x(t)$ の平均電力密度スペクトル（$R_x(\tau)$ のフーリエ変換）は

$$\begin{aligned} S_x(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{T}\sum_{l=-\infty}^{\infty} \phi(l) R_g(\tau+lT) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \\ &= \frac{1}{T}\sum_{l=-\infty}^{\infty} \phi(l) e^{j2\pi flT} S_g(f) = \quad S_a(f) S_g(f) \end{aligned} \tag{5.18}$$

となる．但し，$S_g(f)$ は，$R_g(\tau)$ のフーリエ変換，即ちパルス $g(t)$ のエネルギー密度スペクトルであり，また

$$S_a(f) = \frac{1}{T}\sum_{l=-\infty}^{\infty} \phi(l) e^{+j2\pi flT} = \frac{1}{T}\sum_{l=-\infty}^{\infty} \phi(l) e^{-j2\pi flT} \tag{5.19}$$

である．[4].

以上より，データ系列によるパルス列の電力密度スペクトル (5.18) は，データ系列 a_k の自己相関関数によって定まる $S_a(f)$ と，パルス $g(t)$ のエネルギー密度スペクトル $S_g(f)$ の積となることがわかる.

なお上式 (5.19) は $S_g(f) = 1$（$g(t) = \delta(t)$）のときの $x(t)$，即ちデータ系列 a_k による周期 T のインパルス列

$$a(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(t-kT) \tag{5.20}$$

の電力密度スペクトルとみることができる.

[4] この変形では $\phi(l) = \phi(-l)$ を利用