草刈圭一朗

離散数学 講義資料 (2)

2.1 関係

本節は，教科書 1.2.1 節 (pp.9–12) に対応する．

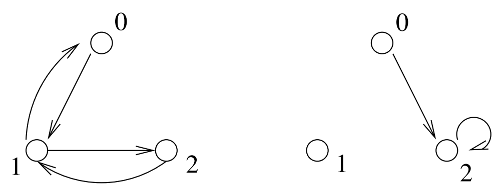
定義 2.1 集合 A 上の **2 項関係** (binary relation) とは直積集合 $A \times A$ の部分集合である．2 項関係 R にたいし，慣習に従い $(a_1, a_2) \in R$ を $a_1 R a_2$ で略記する． □

NOTE: 上記の定義において "集合 A" のところを "空でない集合 A" に限定することもある (教科書はそうなってる)．また，2 項関係の事を単に**関係**と呼ぶこともある．

例 2.2 以下では，集合 $X = \{0, 1, 2\}$ 上での 2 項関係の例を与える．

- $< \ \stackrel{\text{def}}{=\!=} \ \{(0,1), (0,2), (1,2)\}$
- $> \ \stackrel{\text{def}}{=\!=} \ \{(1,0), (2,0), (2,1)\}$
- $\leq \ \stackrel{\text{def}}{=\!=} \ \{(0,0), (0,1), (0,2), (1,1), (1,2), (2,2)\}$
- $R_1 \ \stackrel{\text{def}}{=\!=} \ \{(0,1), (1,0), (1,2), (2,1)\}$
- $R_2 \ \stackrel{\text{def}}{=\!=} \ \{(0,2), (2,2)\}$

また，関係は以下のように図示することもある．なお，左図が関係 R_1，右図が関係 R_2 に対応する．



□

定義 2.3 集合 A 上の 2 項関係 R に対し，以下の概念を定義する．

- R が**反射性** (reflexivity) を満たす $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ $\forall a \in A.\ aRa$
- R が**対称性** (symmetry) を満たす $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ $\forall a_1, a_2 \in A.\ [a_1 R a_2 \Rightarrow a_2 R a_1]$
- R が**反対称性** (antisymmetry) を満たす $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ $\forall a_1, a_2 \in A.\ [a_1 R a_2 \wedge a_2 R a_1 \Rightarrow a_1 = a_2]$
- R が**推移性** (transitivity) を満たす $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ $\forall a_1, a_2, a_3 \in A.\ [a_1 R a_2 \wedge a_2 R a_3 \Rightarrow a_1 R a_3]$
- R が**非反射性** (irreflexivity) を満たす $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ $\forall a \in A.\ \neg aRa$
- R が**比較可能性** (comparability) を満たす $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ $\forall a_1, a_2 \in A.\ [a_1 R a_2 \vee a_2 R a_1]$ □

NOTE: 「R が反射性を満たす」と言う代わりに,「R が反射性を持つ」や「R が反射的 (reflexive) である」や「R が反射律 (reflexive law) を満たす」と言うこともある.

NOTE: 比較可能性は $\forall a_1, a_2 \in A.\ [a_1 \neq a_2 \Rightarrow a_1 R a_2 \vee a_2 R a_1]$ で定義されることもある.

命題 2.4 X を族 (すなわち,集合の集合) とする.このとき,X 上の部分集合関係 $\subseteq$ は反射性と推移性を満たす.

証明 反射性,すなわち,任意の $A \in X$ に対し $A \subseteq A$ であることは明らか.
次に推移性を示す.$A, B, C \in X$ かつ $A \subseteq B \subseteq C$ とする.任意の $a \in A$ に対し $A \subseteq B$ より $a \in B$,さらに,$B \subseteq C$ より $a \in C$.よって,$A \subseteq C$. □

定義 2.5 R を集合 X 上の関係とする.

- R の**推移閉包** (transitive closure) とは R を含み推移性を満たす最小の関係のことである.
- R の**反射・推移閉包** (reflexive-transitive closure) とは R を含み反射性と推移性を満たす最小の関係のことである.

なお,上記の最小性は部分集合関係に対して定義される. □

定義 2.6 R を集合 X 上の関係とする.各 R_i を以下のように再帰的に定義する.

- $R_0 \overset{\text{def}}{=} \{(x, x) \mid x \in X\}$
- $R_1 \overset{\text{def}}{=} R$
- $R_n \overset{\text{def}}{=} R_{n-1} \cup \{(x, z) \mid \exists y.\ (x, y), (y, z) \in R_{n-1}\} \quad \text{if } n \geq 2$

また,関係 R^+ と R^* を以下で定義する.

- $R^+ \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{i=1}^{\infty} R_i$
- $R^* \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{i=0}^{\infty} R_i$ □

補題 2.7 R を集合 X 上の関係とする.$1 \leq n \leq m$ のときはいつでも $R_n \subseteq R_m$ が成立.

証明 $m = n + k$ とする.k に関する帰納法で題意を示す.

Basis $k = 0$ とする.$R_m = R_{n+0} = R_n$ より $R_n \subseteq R_m$ は明らかに成立.

I.S. $k > 0$ とする.帰納法の仮定より $R_n \subseteq R_{m-1}$.また,$m \geq 2$ なので,定義より $R_{m-1} \subseteq R_m$. □

命題 2.8 R を集合 X 上の関係とする.このとき,R^+ は R の推移閉包であり,R^* は R の反射・推移閉包である.

証明 R^+ が R の推移閉包である事のみを示す (R^* が R の反射・推移閉包である事は同様の手法で証明できる).

- R^+ が R を含むこと，すなわち $R \subseteq R^+$ を示す.
定義より明らかに $R = R_1 \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} R_i = R^+$
- R^+ が推移性を満たすことを示す.
$(x,y),(y,z) \in R^+$ とする．定義より，ある n, m が存在して $(x,y) \in R^n$ かつ $(y,z) \in R^m$．$k = \max(n,m)$ とすると命題 2.4 より $R_n \subseteq R_k$ かつ $R_m \subseteq R_k$．よって，$(x,y),(y,z) \in R_k$．定義より $(x,z) \in R_{k+1}$．よって $(x,z) \in R^+$ が成立.
- 最小性，すなわち，R' を R を含み推移性を満たす任意の関係とし $R^+ \subseteq R'$ を示す.
任意の $n(\geq 1)$ に対し $R^n \subseteq R'$ を示せば十分．n に関する帰納法で示す.

  Basis $n = 1$ の場合を考える．R' は R を含むので $R_1 = R \subseteq R'$.

  I.S. $n > 1$ の場合を考える．定義より $R_n = R_{n-1} \cup \{(x,z) \mid \exists y.\ (x,y),(y,z) \in R_{n-1}\}$．帰納法の仮定より $R_{n-1} \subseteq R'$ であるので，$\{(x,z) \mid \exists y.\ (x,y),(y,z) \in R_{n-1}\} \subseteq R'$ を示せば十分．$(x,y),(y,z) \in R_{n-1}$ とする．帰納法の仮定より $(x,y),(y,z) \in R'$．R' は推移性を満たすので $(x,z) \in R'$．よって，$R_n \subseteq R'$．□

NOTE: 本資料では R^+ や R^* と推移閉包や反射・推移閉包の定義を分離した．しかしながら，多くの教科書や文献では R^+ を推移閉包の略記として，R^* を反射・推移閉包の略記として直接定義してある.

NOTE: 教科書では R の推移閉包を R^* で記している (p.12)．だが，通常は本資料のように，推移閉包を R^+ で記し，R^* は反射・推移閉包を表現するのに用いられる．注意されたし.

2.2 同値関係と商集合

本節は，教科書 1.2.3 節 (pp.19–23) に対応する.

定義 2.9 反射的かつ推移的かつ対称的な 2 項関係を**同値関係** (equivalence relation) と呼ぶ. □

定義 2.10 R を集合 A 上の同値関係とする．このとき，各 $a \in A$ に対し a の**同値類** (equivalence class) $[a]_R$ は以下で定義される.

$$[a]_R \overset{\text{def}}{=\!=} \{a' \in A \mid a'Ra\}$$

また，集合 A の R による**商集合** (quotient set) A/R は以下で定義される.

$$A/R \overset{\text{def}}{=\!=} \{[a]_\sim \mid a \in A\}$$

なお，文脈から明らかなときには $[a]_\sim$ を単に $[a]$ で記すこともある. □

定義 2.11 X を空でない集合とし T を X の部分集合よりなる集合とする (すなわち $T \subseteq 2^X$)．このとき T が以下の 3 つの条件を満たすならば T は X の**直和分解** (direct sum decomposition) と呼ばれる．

(1) $X = \bigcup_{C \in T} C$

(2) $\forall C, C' \in T.\ [C = C' \vee C \cap C' = \emptyset]$

(3) $\forall C \in T.\ C \neq \emptyset$ □

NOTE: 教科書の直和分解の定義は条件 (3) を要求していない．しかし，通常は本資料の定義のように条件 (3) も要求する．

次の命題より，同値関係により定義される商集合が与えられた集合の直和分解を与えていることが分かる．この事実により，同値関係は様々な場所で重要な役割を果たすことになるのである．本講義でもしばしば利用することになるであろう．

命題 2.12 R を集合 A 上の同値関係とする．このとき，R による A の商集合 A/R は A の直和分解である．

証明

(1) $A = \bigcup_{[a]_R \in A/R} [a]_R$ を示す．
定義より $\bigcup_{[a]_R \in A/R} [a]_R = \bigcup_{a \in A} [a]_R$ であるので，$A = \bigcup_{a \in A} [a]_R$ を示せば十分．

 (⊆) $x \in A$ とする．R は反射性を持つので $x \in \{a \mid aRx\} = [x]_R$.
 よって，$x \in \bigcup_{a \in A} [a]_R$.

 (⊇) $\bigcup_{a \in A} [a]_R \subseteq \bigcup_{a \in A} A = A$.

(2) 任意の $[x]_R, [y]_R \in A/R$ に対し $[x]_R = [y]_R \vee [x]_R \cap [y]_R = \emptyset$ が成立することを示す．

- xRy の場合を考える．このとき，$[x]_R = [y]_R$ となる事を示す．
  最初に，$[x]_R \subseteq [y]_R$ を示す．$a \in [x]_R$ とする．定義より aRx．R は推移性を持つので aRy．よって，$a \in [y]_R$.

  次に，$[y]_R \subseteq [x]_R$ を示す．$a \in [y]_R$ とする．定義より aRy．R を対称性を持つので仮定より yRx．R は推移性を持つので aRx．よって，$a \in [x]_R$.
- $\neg xRy$ の場合を考える．このとき，$[x]_R \cap [y]_R = \emptyset$ となることを示す．
  ある $z \in [x]_R \cap [y]_R$ が存在と仮定する．仮定より zRx かつ zRy．R は対称性を持つので xRz．また，R は推移性を持つので xRy となり矛盾する．

(3) $\forall [a]_R \in A/R.\ [a]_R \neq \emptyset$ を示す．
R は反射性を持つので，任意の $a \in A$ に対して $a \in [a]_R$，すなわち $[a]_R \neq \emptyset$ が成立．
□

2.3 順序

本節は，教科書 1.2.2 節の前半 (pp.12–16) に対応する．

定義 2.13

- 反射的かつ推移的な２項関係を**擬順序** (quasi-order) と呼ぶ．
- 反射的かつ推移的かつ反対称的な２項関係を**半順序** (partial order) と呼ぶ．
- 推移的かつ非反射的な２項関係を**狭義の半順序** (strict partial order) と呼ぶ．
- 比較可能性を持つ半順序のことを**全順序** (total order) と呼ぶ． □

NOTE: 擬順序, 半順序, 狭義の半順序をそれぞれ $\lesssim, \leq, <$ で記すことが多い．

定義 2.14 集合 A と A 上のある半順序 $\leq$ の組み $(A, \leq)$ を**半順序集合** (partially ordered set または poset) と呼び，特に，$\leq$ が全順序のとき**全順序集合** (totally ordered set) と呼ぶ． □

NOTE: 教科書では "半順序" のことを単に "順序" と呼び，"半順序集合" のことを単に "順序集合" と呼んでいる．

定義 2.15 $(X, \leq)$ を半順序集合，U を X の部分集合とし，$x \in X$ とする．

- x が U の**上界** (upper bound) $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ $\forall y \in U.\ y \leq x$
- x が U の**下界** (lower bound) $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ $\forall y \in U.\ x \leq y$
- x が U の**最大元** (gratest element) $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ $x \in U \land \forall y \in U.\ y \leq x$
- x が U の**最小元** (least element) $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ $x \in U \land \forall y \in U.\ x \leq y$
- x が U の**極大元** (maximal element) $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ $x \in U \land \forall y \in X[x \leq y \land x \neq y \Rightarrow y \notin U]$
- x が U の**極小元** (minimal element) $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ $x \in U \land \forall y \in X[y \leq x \land x \neq y \Rightarrow y \notin U]$
- x が U の**上限** (least upper bound, supremum) $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ x が U の最小上界，すなわち U の上界全体からなる集合の最小元
- x が U の**下限** (gratest lower bound, infimum) $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ x が U の最大下界，すなわち U の下界全体からなる集合の最大元 □

命題 2.16 $(X, \leq)$ を半順序集合とし，U を X の部分集合とする．U の最大元は高々1つしか存在しない．

証明 相異なる U の最大元 x, y が存在すると仮定する．最大元の定義より $x \leq y$ かつ $y \leq x$．半順序は反対称性を持つので $x = y$ となり矛盾する． □

上記の命題と同様に最小元・上限・下限も高々1つしか存在しない．ただし，極大元・極小元は2つ以上存在する場合もある，注意されたし．

NOTE: “最大元” と “極大元” の違いは非常に微妙であり，最初はかなり混乱するであろう．だが，この違いは高校の微積の授業で習った “最大値” と “極大値” の違いにだいたい対応している．この事実に気づけば少しはイメージも湧いてくるであろう……多分.

2.4 束

本節は，教科書 1.2.2 節の後半 (pp.16–19) に対応する．

定義 2.17 半順序集合 $(A, \leq)$ において，全ての A の空でない有限部分集合が上限と下限を持つとき $(A, \leq)$ を**束** (lattice) と呼ぶ．特に，全ての A の部分集合が上限と下限を持つならば**完備束** (complete lattice) とも呼ぶ. □

全ての束が完備束で無いことに注意されたし．例えば，$(\mathbb{Z}, \leq)$ は束ではあるが完備束ではない.

NOTE: 上記の束の定義の “全ての A の空でない有限部分集合が” の部分は，教科書では “全ての A の有限部分集合が” となっている．そのため束の概念が微妙に異なっている.

定義 2.18 $(A, \leq)$ を束とする．各 $x, y \in A$ に対し，A の部分集合 $\{x, y\}$ の上限を x と y の**結び** (join) と呼び $x \vee y$ で記す．また，$\{x, y\}$ の下限を x と y の**交わり** (meet) と呼び $x \wedge y$ で記す. □

NOTE: 教科書では x と y の結びを $x + y$ で，x と y の交わりを $x \cdot y$ で記している.

定理 2.19 $(A, \leq)$ を束とする．この時，任意の $x, y, z \in A$ に対して次の等式が成立する.

(1) **結合律** (associative law): $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$, $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$

(2) **交換律** (commutative law): $x \vee y = y \vee x$, $x \wedge y = y \wedge x$

(3) **吸収律** (idempotent law): $x \vee (x \wedge y) = x$, $x \wedge (x \vee y) = x$

証明 A の部分集合 U の上限を $lub(U)$ で記し，下限を $glb(U)$ で記す.

(1) 結合律: $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ のみを示す．なお，$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$ も同様に証明できる.

$x \vee (y \vee z)$ が $\{x, y, z\}$ の上界であることは明らか．u を $\{x, y, z\}$ の任意の上界とする．u は $\{y, z\}$ の上界でもあるから，上限の定義より $y \vee z \leq u$．再び上限の定義より $x \vee (y \vee z) \leq u$．よって，$x \vee (y \vee z) = lub(\{x, y, z\})$ となる．同様にして，$(x \vee y) \vee z = lub(\{x, y, z\})$ も示せる．よって，$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ が成立.

(2) 交換律: $x \vee y = lub(\{x, y\}) = y \vee x$．$x \wedge y = glb(\{x, y\}) = y \wedge x$.

(3) 吸収律: $x \wedge y \leq x$ なので，x は $\{x, x \wedge y\}$ の最大元である，それゆえに上限である．すなわち $x \vee (x \wedge y) = x$．また，$x \wedge (x \vee y) = x$ も同様に示せる． □

定理 2.20 A を集合とし $\vee, \wedge$ を定理 2.19 の条件 (1–3) を満たす A 上の二項関係とする．ここで，A 上の二項関係 $\leq$ を

$$x \leq y \overset{\text{def}}{\iff} x \vee y = y$$

で定義する．このとき，$\vee$ と $\wedge$ は $\leq$ に関してそれぞれ上限と下限を定義している．さらに，$(A, \leq)$ は束となる．

証明

(I) $\vee$ と $\wedge$ が共にベキ等律 (absorptive law) を持つこと，すなわち，$x \vee x = x$ かつ $x \wedge x = x$ を示す．これは吸収律を繰り返し適用することにより以下のように示せる．

$$x = x \vee (x \wedge (x \vee y)) = x \vee x, \qquad x = x \wedge (x \vee (x \wedge y)) = x \wedge x$$

(II) $\leq$ が半順序であることを示す．

反射律: ベキ等律より $\leq$ は反射的である．

推移律: $x \leq y \leq z$ とする．$\leq$ の定義より $x \vee y = y$ かつ $y \vee z = z$．よって，結合律を考えて $x \vee z = x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z = y \vee z = z$．すなわち，$x \leq z$．

反対称律: $x \leq y$ かつ $y \leq x$ とする．$\leq$ の定義より $x \vee y = y$ かつ $y \vee x = x$．よって，交換律を考えて $x = y \vee x = x \vee y = y$．

(III) $\vee$ が上限を定義していることを示す．$x, y \in A$ とする．結合律とベキ等律より $x \vee (x \vee y) = (x \vee x) \vee y = x \vee y$ であるので，$x \leq x \vee y$．また，結合律と交換律とベキ等律より $y \vee (x \vee y) = y \vee (y \vee x) = (y \vee y) \vee x = y \vee x = x \vee y$ であるので，$y \leq x \vee y$．よって，$x \vee y$ は $\{x, y\}$ の上界である．

u を $\{x, y\}$ の任意の上界とする．このとき，$x \vee u = u$ かつ $y \vee u = u$．結合律より $(x \vee y) \vee u = x \vee (y \vee u) = x \vee u = u$．よって，$x \vee y \leq u$．よって，$x \vee y$ は $\{x, y\}$ の最小上界，すなわち，上限である．

(IV) $\wedge$ が下限を定義していることを示す．$x, y \in A$ とする．結合律と吸収律より $(x \wedge y) \vee x = x \vee (x \wedge y) = x$ なので $x \wedge y \leq x$．また，結合律と交換律と吸収律より $(x \wedge y) \vee y = y \vee (x \wedge y) = y \vee (y \wedge x) = x$ なので $x \wedge y \leq y$．よって，$x \wedge y$ は $\{x, y\}$ の下界である．

u を $\{x, y\}$ の任意の下界とする．このとき，$u \vee x = x$ かつ $u \vee y = y$．よって，

$$\begin{array}{rcll}
u \vee (x \wedge y) & = & (u \wedge (u \vee y)) \vee (x \wedge y) & \text{吸収律より} \\
& = & ((u \wedge (u \vee x)) \wedge (u \vee y)) \vee (x \wedge y) & \text{吸収律より} \\
& = & ((u \wedge x) \wedge (u \vee y)) \vee (x \wedge y) & u \vee x = x\ \text{より} \\
& = & ((u \wedge x) \wedge y) \vee (x \wedge y) & u \vee y = y\ \text{より} \\
& = & (u \wedge (x \wedge y)) \vee (x \wedge y) & \text{結合律より} \\
& = & ((x \wedge y) \wedge u) \vee (x \wedge y) & \text{交換律より} \\
& = & (x \wedge y) \vee ((x \wedge y) \wedge u) & \text{交換律より} \\
& = & x \wedge y & \text{吸収律より}
\end{array}$$

よって，$u \leq x \wedge y$．よって，$x \wedge y$ は $\{x, y\}$ の最大下界，すなわち，下限である．

(V) 任意の A の空でない有限部分集合 U が上限と下限を持つことを $|U|$ に関する帰納法で示す．

Basis $|U| = 1$ の場合を考える．$U = \{x\}$ とすると，明らかに $lub(U) = glb(U) = x$．

I.S. $|U| > 1$ の場合を考える．$x \in U$ とし，$U' = U \setminus \{x\}$ とする．帰納法の仮定より U' の上限は存在する．$u = lub(U')$ とする．(III) より $u \vee x$ は $\{u, x\}$ の上限なので，$u \vee x$ は U の上界となる．u' を U の任意の上界とする．このとき $x \leq u'$．また，u' は U' の上界でもあるので $u \leq u'$．再び (III) より $x \vee u \leq u'$．よって，$lub(U) = u \vee x$ となり U の上限は存在する．同様にして U の下限の存在も証明できる．□

2.5 帰納法の原理

定義 2.21 A を集合とし $\leq$ を A 上の半順序とする．全ての空でない A の部分集合が極小元を持つならば $\leq$ を**整礎** (well-founded) であると呼び，全ての空でない A の部分集合が最小元を持つならば $\leq$ を**整列順序** (well-order) と呼ぶ．□

なお，$\leq$ が整礎であることを，$a > a' \overset{\text{def}}{\iff} a \geq a' \wedge a \neq a'$ で与えた関係 $>$ を用いて，$a_0 > a_1 > a_2 > \cdots$ のような無限列が存在しないことである，として定義する場合も多い．この定義と上述の定義は等価である (厳密には選択公理と呼ばれる公理を仮定する必要がある)．

命題 2.22 自然数上の通常の半順序 $\leq$ は整列順序である．□

この命題を証明するためには，自然数上の通常の順序 $\leq$ と自然数自体の定義を与えなければならない．これは本講義の枠組みは遥かに越えているため，証明は割愛する．なお，命題 2.22 の性質を自然数の**整列性** (well-ordered property) と呼ぶ．

命題 2.23 (数学的帰納法 (I)) 自然数上の命題関数 $P(n)$ が以下の性質を満たすとする．

- $P(0)$ が成立．
- $P(n)$ が成立するならば $P(n+1)$ も成立する．

このとき，全ての自然数 n に対して $P(n)$ が成立する．

証明 $A = \{n \in \mathbb{N} \mid \neg P(n)\}$ とする．$A = \emptyset$ であることを示せば十分．$A \neq \emptyset$ と仮定して矛盾を導く．
自然数の整列性より A は最小元を持つ．この最小元を k とする．$k \in A$ なので $\neg P(k)$ が成立．1 つ目の仮定より $P(0)$ は成立しているので，$k \neq 0$．よって，ある k' が存在して $k = k' + 1$．k は A の最小元であるので $k' \notin A$，すなわち $P(k')$ は成立する．よって，2 つ目の仮定より $P(k)$ が成立するので矛盾．□

数学的帰納法 (I) は次のように拡張することができる (証明は演習課題に残しておく).

命題 2.24 (数学的帰納法 (II)) 自然数上の命題関数 $P(n)$ が以下の性質を満たすとする.

- 任意の m $(< n)$ で $P(m)$ が成立するならば $P(n)$ も成立する

このとき，全ての自然数 n に対して $P(n)$ が成立する. □

数学的帰納法は次に紹介する**ネーター帰納法** (Neotherian induction) と呼ばれるより一般的な帰納法の特別な場合である. なお，ネーター帰納法の正当性の証明は演習課題に残しておく.

命題 2.25 (ネーター帰納法) A を集合とし，$>$ を A 上の整礎順序とする. 集合 A 上の命題関数 $P(x)$ が以下の性質を満たすとする.

- $\forall x \in A.\ [\forall y \in A.\ [x > y \Rightarrow P(y)] \Rightarrow P(x)]$

このとき，全ての $x \in A$ に対して $P(x)$ が成立する. □

演習課題

問 2.1 関数 $f : A \to B$ のグラフ $graph(f)$ は以下で定義される.

$$graph(f) \stackrel{\text{def}}{=\!=} \{(a, b) \in A \times B \mid f(a) = b\}$$

よって，A 上の関数 $f : A \to A$ のグラフは A 上の関係とも見做せる. では逆に，R が A 上の関係であるとき，R がある関数 $f : A \to A$ のグラフである (すなわち，全ての $a \in A$ に対して一意に $f(a) \in A$ が決定されている) ための必要十分条件は何か？論理式で書き下せ.

問 2.2 例 2.2 で与えた関係 R_1, R_2 のそれぞれが，反射性・対称性・反対称性・推移性・非反射性・比較可能性のどれを満たし，どれを満たさないか答えよ.

問 2.3 以下の性質を持つ空でないできるだけ簡単な関係をそれぞれ図示せよ.

(i) 推移性を持つが反射性を持たない.

(ii) 推移性・反射性を持つが対称性を持たない.

(iii) 対称性を持つが推移性を持たない.

問 2.4 集合 $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ 上の関係 R を以下で定義する.

$$R \stackrel{\text{def}}{=\!=} \{(0, 1), (1, 2), (3, 2)\}$$

このとき，R の推移閉包 R^+ と反射・推移閉包 R^* を図示せよ.

問 2.5 $(A, \leq)$ を束とする. A が有限集合のときはいつでも $(A, \leq)$ が完備束になることを示せ.

問 2.6 命題 2.23 の証明を参考にして，命題 2.24 と命題 2.25 の証明を完成せよ.