解析力学 II

野尻伸一

1　解析力学 I の復習

1.1　ラグランジアンとオイラー=ラグランジェ方程式

　運動エネルギー T と位置エネルギー V の差をラグランジアン L と呼ぶ:

$$L = T - V \ . \tag{1}$$

ラグランジアン L が一般の座標 q^i、$(i = 1, 2, \cdots N)$ とその時間微分 $\dot{q}^i$ で表されているとき $(L = L\left(q^i, \dot{q}^i\right))$、

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \tag{2}$$

を q^i に「共役な」運動量という。
　一個の質点の運動エネルギー T はその質点の質量を m、速さを v とすると

$$T = \frac{1}{2} m v^2 \tag{3}$$

と書ける。質点の速さの 2 乗は直角座標では $v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$ と表される。ここで、$\dot{} = \frac{d}{dt}$ である。一般の座標 $\{q^i\}, \, i = 1, 2, 3$ では $x = x\left(q^i(t)\right)$ なので、

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial x}{\partial q^i} \dot{q}^i \tag{4}$$

であり、

$$v^2 = \sum_{i,j=1}^{3} \left\{ \frac{\partial x}{\partial q^i}\frac{\partial x}{\partial q^j} + \frac{\partial y}{\partial q^i}\frac{\partial y}{\partial q^j} + \frac{\partial z}{\partial q^i}\frac{\partial z}{\partial q^j} \right\} \dot{q}^i \dot{q}^j \tag{5}$$

であることがわかる。
　また、

$$0 = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} \tag{6}$$

をオイラー=ラグランジェ方程式と呼び、ニュートンの運動方程式の一般化になっている。質量 m の一個の質点に対するラグランジアンは位置エネルギー $V(x^i)$ $(\{x^i\} = \{x, y, z\}, \ i = 1, 2, 3)$ を使い、

$$L(x^i, \dot{x}^i) = \frac{1}{2} m \sum_{i=1,2,3} (\dot{x})^2 - V(x^i) \tag{7}$$

と書けるが、これから導かれるオイラー=ラグランジェ方程式はニュートンの運動方程式に他ならない：

$$m \ddot{x}^i = -\frac{\partial V}{\partial x^i} \ . \tag{8}$$

一般の座標については $x^i = x^i(q^j)$ と思うと、$\dot{x}^i = \sum_{j=1,2,3} \frac{\partial x^i}{\partial q^j} \dot{q}^j$ なので

$$L(q^i, \dot{q}^i) = L\left(x^i(q^j), \dot{x}^i = \sum_{j=1,2,3} \frac{\partial x^i}{\partial q^j} \dot{q}^j\right) \tag{9}$$

を使うと、

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} \\
&= \sum_{j=1,2,3} \left\{ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^j}\frac{\partial x^j}{\partial q^i}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial q^i} + \sum_{k=,1,2,3} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^j}\frac{\partial^2 x^j}{\partial q^i \partial q^k}\dot{q}^k\right)\right\} \\
&= \sum_{j=1,2,3} \left\{ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^j}\right)\frac{\partial x^j}{\partial q^i} + \sum_{k=1,2,3} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^j}\frac{\partial^2 x^j}{\partial q^k \partial q^i}\dot{q}^k - \frac{\partial L}{\partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial q^i} - \sum_{k=,1,2,3} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^j}\frac{\partial^2 x^j}{\partial q^i \partial q^k}\dot{q}^k\right\} \\
&= \sum_{j=1,2,3} \left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^j}\right) - \frac{\partial L}{\partial x^j}\right)\frac{\partial x^j}{\partial q^i} = \sum_{j=1,2,3} \left(m\ddot{x}^j + \frac{\partial V}{\partial x^j}\right)\frac{\partial x^j}{\partial q^i} = 0
\end{aligned} \tag{10}$$

となり、オイラー=ラグランジェ方程式がニュートンの運動方程式から導かれることが分かる。

1.2 最小作用の原理

F を $q^i(t)$ と $\dot{q}^i(t)$ の関数とする。$q^i(t_1) = q^i_1$ また $q^i(t_2) = q^i_2$ $(t_2 > t_1)$ という条件を付けたとき、$q^i(t)$ という関数をいろいろと変えて $S = \int_{t_1}^{t_2} dt F\left(q^i(t), \dot{q}^i(t)\right)$ という量が極小又は極大値を持つような関数 $q^i(t) = q^i_0(t)$ を考えてみよう。このとき S を q^i の汎関数であるという。今、$\delta q^i(t)$ を $\delta q^i(t_1) = 0$ また $\delta q^i(t_2) = 0$ という条件を満たす任意の関数とする、$q^i(t) = q^i_0(t) + \epsilon\delta q^i(t)$ とおくと、S は ϵ の関数とみなせる。このとき、$\epsilon\delta q^i(t)$ を $q^i(t)$ の変分という。$q^i(t) = q^i_0(t)$ で S という量が極小又は極大値を持つということは $\left.\frac{dS}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} = 0$ でなければならない。これより

$$0 = \left.\frac{dS}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} = \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{\frac{\partial F}{\partial q^i(t)}\delta q^i(t) + \frac{\partial F}{\partial\left(\dot{q}^i(t)\right)}\delta\dot{q}^i(t)\right\} = \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{\frac{\partial F}{q^i(t)} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial\left(\dot{q}^i(t)\right)}\right)\right\}\delta q^i(t) \tag{11}$$

となる。ここで、最後の変形のところで部分積分と $\delta q^i(t_1) = 0$ また $\delta q^i(t_2) = 0$ という条件を使った。今、$\delta q^i(t)$ はこの条件を除き任意の関数なので、S という量が極小又は極大値を持つためには、$q^i(t) = q^i_0(t)$ のとき、

$$\frac{\partial F}{\partial q^i(t)} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial\left(\dot{q}^i(t)\right)}\right) = 0 \tag{12}$$

でなければならないことが分かる。この方程式をオイラーの方程式というが、F をラグランジアンとすればこれはオイラー=ラグランジェ方程式に他ならない。すなわち、運動方程式の解は作用を最小にする（実際は単に極値にする）。これを「最小作用の原理」という。

質点の速さは座標によらないので運動エネルギー T も座標にはよらない。位置エネルギーも座標にはよらないのでラグランジアンも座標によらず、その値が極値を取るという条件も座標によらない。従って、オイラー=ラグランジェ方程式が座標によらず成り立つ、または、異なる座標を選んで得られたオイラー=ラグランジェ方程式は互いに同等である。

1.3 正準変数とハミルトニアン

ラグランジアン L は座標 q^i、$(i=1,2,\cdots N)$ とその時間微分 $\dot{q}^i$ で表されている：$(L=L\left(q^i,\dot{q}^i\right))$。$q^i$ に「共役な」運動量は $p_i\equiv\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}$ で定義されるが、これを $\dot{q}^i$ について解くことにより、$\dot{q}^i$ を q^i と p_i の関数として表すことができる。このとき、q^i と p_i の関数としてハミルトニアンを次のように定義する：

$$H\left(q^i,p_i\right)\equiv\sum_i p_i\dot{q}^i\left(q^j,p_j\right)-L\left(q^i,\dot{q}^i\left(q^j,p_j\right)\right) \tag{13}$$

このようなラグランジアンからハミルトニアンへの変換をルジャンドレ変換と呼ぶ。このとき、共役な運動量の定義を使うと、

$$\frac{\partial H}{\partial p_j}=\sum_i\frac{\partial \dot{q}}{\partial p_j}p_i+\dot{q}^j-\sum_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\frac{\partial \dot{q}^i}{\partial p_j}=\dot{q}^j \tag{14}$$

であることがわかり、共役な運動量の定義とオイラー=ラグランジェ方程式を使うと、

$$\frac{\partial H}{\partial q^j}=\sum_i p_i\frac{\partial \dot{q}}{\partial q^j}-\frac{\partial L}{\partial q^j}-\sum_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\frac{\partial \dot{q}^i}{\partial q^j}=\sum_i p_i\frac{\partial \dot{q}}{\partial q^j}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j}\right)-\sum_i p_i\frac{\partial \dot{q}^i}{\partial q^j}=-\dot{p}_j \tag{15}$$

であることがわかる。

$$\dot{q}^j=\frac{\partial H}{\partial p_j}\ ,\quad \dot{p}_j=-\frac{\partial H}{\partial q^j} \tag{16}$$

をハミルトンの運動方程式という。また (q^i,p_i) $i=1,2,\cdots,N$ の作る $2N$-次元の空間を「位相空間」といい、(q^i,p_i) の集合を「正準変数」という。

ある系がある時刻に位相空間で (q,p) にあったとすると、微小な時間 δt 後には、$(q+\delta t\dot{q},p+\delta t\dot{p})=\left(q+\delta t\frac{\partial H}{\partial p},p-\delta t\frac{\partial H}{\partial q}\right)$ にある。位相空間の微小な体積を $dqdp$ で定義したとき、これが時間とともに変わらない、すなわち、$\frac{d}{dt}\left(dqdp\right)=0$ である。これをリュウビルの定理という。

1.4 正準変換

ハミルトニアンの定義式 (13) より

$$L=\sum_i p_i\dot{q}^i\left(q^j,p_j\right)-H \tag{17}$$

なので、作用 S は

$$S=\int_{t_1}^{t_2}dt\left(\sum_i p_i\dot{q}^i-H\right) \tag{18}$$

となる。$q\ i$ と p_i を独立な変数ととると、

$$\begin{aligned}\delta S &= \int_{t_1}^{t_2}dt\sum_i\left(\delta p_i\dot{q}^i+p_i\delta\dot{q}^i-\frac{\partial H}{\partial q^i}\delta q^i-\frac{\partial H}{\partial p_i}\delta p_i\right)\\ &= \int_{t_1}^{t_2}dt\sum_i\left(\left(\dot{q}^i-\frac{\partial H}{\partial p_i}\right)\delta p_i-\left(\dot{p}_i+\frac{\partial H}{\partial q^i}\right)\delta q^i\right)\end{aligned} \tag{19}$$

となり、作用が極値を取るという条件からハミルトンの運動方程式 (16) を得る。

正準変数 (q^i, p_i) $i = 1, 2, \cdots, N$ を新しい正準変数 (Q^i, P_i) に変換することを考える。新しい正準変数に対するハミルトニアンを $\mathcal{H}$、作用を S' とすると、

$$S' = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\sum_i P_i \dot{Q}^i - \mathcal{H} \right) \tag{20}$$

となるが、$\delta S = 0$ のときに $\delta S' = 0$ であるためには作用の被積分関数の差が時間の全微分であればいい：

$$\sum_i p_i \dot{q}^i - H = \sum_i P_i \dot{Q}^i - \mathcal{H} + \frac{dK}{dt} \tag{21}$$

もし、$K = K(q^i, Q^i, t)$ であれば、

$$\frac{dK}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial K}{\partial q^i} \dot{q}^i + \frac{\partial K}{\partial Q^i} \dot{Q}^i \right) + \frac{\partial K}{\partial t} \tag{22}$$

であるので (21) より

$$p_i = \frac{\partial K}{\partial q^i}\ , \quad P_i = -\frac{\partial K}{\partial Q^i}\ , \quad \mathcal{H} = H + \frac{\partial K}{\partial t} \tag{23}$$

を得る。$K = K(q^i, Q^i, t)$ は「母関数」と呼ばれる。$K = K(q^i, Q^i, t)$ の代わりに $K = K(q^i, P_i, t)$ を母関数として、

$$p_i = \frac{\partial K}{\partial q^i}\ , \quad Q^i = \frac{\partial K}{\partial P_i}\ , \quad \mathcal{H} = H + \frac{\partial K}{\partial t} \tag{24}$$

としたり、$K = K(p^i, Q_i, t)$ を母関数として、

$$q^i = -\frac{\partial K}{\partial p_i}\ , \quad P_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i}, \quad \mathcal{H} = H + \frac{\partial K}{\partial t} \tag{25}$$

とすることもできる。

1.5 ポアソン括弧式

一般に物理量 $F\left(q^i(t), p_i(t), t\right)$ の時間変化は

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial q^i} \dot{q}^i + \frac{\partial F}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) = \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial q^i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q^i} \right) = \frac{\partial F}{\partial t} + [F, H] \tag{26}$$

で与えられる。ここで、[,] はポアソンの括弧式と呼ばれ、一般の物理量 F、G に対し、

$$[F, G] \equiv \sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial q^i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q^i} \right) \tag{27}$$

で定義される。もし、F があらわに時刻 t によらなければ $\frac{\partial F}{\partial t} = 0$ なので、

$$\frac{dF}{dt} = [F, H] \tag{28}$$

であり、もし $[F,H]=0$ であれば、F は時間によらず一定、すなわち保存することが分かる。特に、ハミルトニアン H はポアソンの括弧式の定義より $[H,H]=0$ なので、あらわに時刻によらなければ保存する。ポアソンの括弧式は次のような性質を持つ：

$$
\begin{array}{ll}
1 & [F,G]=-[G,F] \\
2 & [q^i,q^j]=[p_i,p_j]=0\ , \quad [q^i,p_j]=\delta^i{}_j\ , \quad \text{ただし} \quad \delta^i{}_j \equiv \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases} \\
3 & [F,G_1G_2]=[F,G_1]G_2+G_1[F,G_2]\ , \quad [F_1F_2,G]=[F_1,G]F_2+F_1[F_2,G] \\
4 & \left[q^i,(p_j)^n\right]=n\,(p_j)^{n-1}\,\delta^i{}_j\ , \quad \left[p_i,\left(q^j\right)^n\right]=-n\left(q^j\right)^{n-1}\delta^j{}_i \\
5 & \left[q^i,F\right]=\dfrac{\partial F}{\partial p_i}\ , \quad [p_i,F]=-\dfrac{\partial F}{\partial q^i}\ , \\
6 & [[F,G],J]+[[G,J],F]+[[J,F],G]]=0
\end{array} \tag{29}
$$

F と G が保存し、$[F,H]=[G,H]=0$ であるとき上の 6 より

$$[[F,G],H]=-[[G,H],F]-[[H,F],G]=0 \tag{30}$$

であり、$[F,G]$ という量も保存することが分かる。ポアソンの括弧式は正準変換で不変であり、ポアソンの括弧式は量子力学における交換子に対応する。

1.6 ハミルトン=ヤコビ方程式

先に作用 $S=\int_{t_1}^{t_2}dtL\left(q^i(t),\dot{q}^i(t),t\right)$ の変分をとる際に、$q^i(t_1)=q_1^i$ および $q^i(t_2)=q_2^i$ $(t_2>t_1)$ という条件を付けた。$q^i(t)$ として運動方程式（オイラー=ラグランジェ方程式）の解を考えれば S を $q^i(t_1)=q_1^i$ と $q^i(t_2)=q_2^i$ の関数とみなせる：$S=S\left(q^i(t_1),q^i(t_2),t_1,t_2\right)$。今、$q^i(t_1)=q_1^i$ を固定して、$q^i(t_2)=q_2^i$ を $q^i(t_2)=q_2^i+\epsilon\delta q_2^i$ だけ変更したとすると、それに伴い運動方程式の解も $q^i(t)$ から $q^i(t)+\epsilon\delta q^i(t)$ だけ変わる。ここで、$\delta q^i(t)$ は $\delta q^i(t_1)=0$ および $\delta q^i(t_2)=\delta q_2^i$ という条件を満たす。これによる作用の変化分は

$$
\begin{aligned}
\delta S &= \epsilon\int_{t_1}^{t_2}dt\left\{\frac{\partial L}{\partial q^i(t)}\delta q^i(t)+\frac{\partial L}{\partial\left(\dot{q}^i(t)\right)}\delta\dot{q}^i(t)\right\} \\
&= \epsilon\left[\left.\frac{\partial L}{\partial\left(\dot{q}^i(t)\right)}\delta q^i(t)\right|_{t=t_2}+\int_{t_1}^{t_2}dt\left\{\frac{\partial L}{\partial q^i(t)}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\left(\dot{q}^i(t)\right)}\right)\right\}\delta q^i(t)\right]
\end{aligned} \tag{31}
$$

二つ目の等号のところで、$\delta q^i(t_2)=\delta q_2^i\neq 0$ のために、部分積分した際に、$t=t_2$ の項（最後の式の 1 項目）が残ってくることに注意する。最後の式の二項目は $q^i(t)$ が運動方程式の解ならばゼロになる。また、$\frac{\partial L}{\partial(\dot{q}^i(t))}=p_i(t)$ なので、

$$\frac{\partial S}{\partial q^i(t_2)}=p_i(t_2) \tag{32}$$

であることがわかる。

定義より、$\frac{dS}{dt_2}=L\left(q^i(t_2),\dot{q}^i(t_2),t_2\right)$ であるが、一方、

$$\frac{dS}{dt_2}=\frac{\partial S}{\partial t_2}+\frac{\partial S}{\partial q^i(t_2)}\dot{q}^i(t_2) \tag{33}$$

なので、

$$0=\frac{\partial S}{\partial t_2}+p_i(t_2)\dot{q}^i(t_2)-L\left(q^i(t_2),\dot{q}^i(t_2),t_2\right)=\frac{\partial S}{\partial t_2}+H\left(q^i(t_2),p_i(t_2),t_2\right) \tag{34}$$

となる。$\frac{\partial S}{\partial q^i(t_2)}=p_i(t_2)$ なので、

$$0=\frac{\partial S}{\partial t}+H\left(q^i(t),\frac{\partial S}{\partial q^i(t)},t\right) \tag{35}$$

を得る。この式をハミルトン=ヤコビの方程式という。ここで簡単のため t_2 を t と書いた。もしハミルトニアン H があらわに時刻 t によらなければ、H は定数であり（$H=E$）、S が $S=S_0\left(q^i(t)\right)-Et$ と書けるので、

$$H\left(q^i(t),\frac{\partial S_0}{\partial q^i(t)}\right)=E \tag{36}$$

を得る。

ハミルトン=ヤコビの方程式は q^i と時刻についての1階微分だけを含んでいるので $i=1,2,\cdots,N$ とすると $N+1$ 個の積分定数を含む。S はハミルトン=ヤコビの方程式の中に微分の形でだけ含まれているので、$S=S_1$ というひとつの解が見つかればそれを定数 A だけずらした $S=S_1+A$ も解である。$N+1$ 個の積分定数のうちひとつはこの定数 A になるので、ハミルトン=ヤコビの方程式の解は次のような形になる：

$$S=S_1\left(q^1,q^2,\cdots,q^N;\alpha^1,\alpha^2,\cdots,\alpha^N,t\right)+A \tag{37}$$

ここで α^i が残りの N 個の積分定数になる。今、α^i を新たな座標と思い、S を母関数と思って ($W=S$)、正準変換を考えてみよう。 α^i に共役な運動量を β_i とすると

$$\beta_i=-\frac{\partial S}{\partial \alpha^i} \tag{38}$$

である。また、新しいハミルトニアン $\mathcal{H}$ は

$$\mathcal{H}=H+\frac{\partial S}{\partial t} \tag{39}$$

であるが、ハミルトン=ヤコビの方程式を使うと $\mathcal{H}=0$ であることがわかる。これより明らかに $[\beta_i,\mathcal{H}]=0$ なので、α^i ばかりではなく β_i も定数であることが分かる。

2　中心力の2体問題

2.1　質量中心座標の分離

質量 m_1、m_2 を持つ二つの質点が互いに力を及ぼしあって運動している場合を考えよう。それぞれの質点の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}_1$、$\boldsymbol{r}_2$ とすると運動エネルギーの和は

$$T=\frac{1}{2}m_1\dot{\boldsymbol{r}}_1\cdot\dot{\boldsymbol{r}}_1+\frac{1}{2}m_2\dot{\boldsymbol{r}}_2\cdot\dot{\boldsymbol{r}}_2 \tag{40}$$

とかける。 質量中心（重心）の位置ベクトル $\boldsymbol{R}$ と相対位置のベクトル $\boldsymbol{r}$ を次のように定義する：

$$\boldsymbol{R} \equiv \frac{m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2}{m_1 + m_2}\ , \quad \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1 \tag{41}$$

これより

$$\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{R} - \frac{m_2}{m_1 + m_2}\boldsymbol{r}\ , \quad \boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{R} + \frac{m_1}{m_1 + m_2}\boldsymbol{r} \tag{42}$$

なので

$$T = \frac{1}{2}M\dot{\boldsymbol{R}}\cdot\dot{\boldsymbol{R}} + \frac{1}{2}\mu\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\dot{\boldsymbol{r}} \tag{43}$$

となる。ここで

$$M = m_1 + m_2\ , \quad \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \tag{44}$$

で、μ は換算質量と呼ばれる。このように運動エネルギーは質量中心（重心）の位置ベクトルと相対位置のベクトルの部分に分かれているので、ポテンシャル U が相対位置のベクトル $\boldsymbol{r}$ だけによっているとすると、ラグランジアンも二つの部分に分かれる：

$$L = L_R + L_r\ , \quad L_R = \frac{1}{2}M\dot{\boldsymbol{R}}\cdot\dot{\boldsymbol{R}}\ , \quad L_r = \frac{1}{2}\mu\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\dot{\boldsymbol{r}} - U(\boldsymbol{r}) \tag{45}$$

従って、$\boldsymbol{R}$ の運動を忘れると、２体問題が質量 m 位置座標 $\boldsymbol{r}$ の質点がポテンシャル U の下で運動する１体問題になる。また、ラグランジアンは $\boldsymbol{R}$ をあらわに含まないので、$\boldsymbol{R}$ はサイクリックな座標でそれに共役な運動量 $\boldsymbol{P}_R$ は保存する：

$$\boldsymbol{P}_R \equiv \frac{\partial L}{\partial\dot{\boldsymbol{R}}} = M\dot{\boldsymbol{R}} = m_1\dot{\boldsymbol{r}}_1 + m_2\dot{\boldsymbol{r}}_2 \tag{46}$$

ここで (41) を使った。従って、$\boldsymbol{P}_R$ は全運動量である。全運動エネルギーの場合と異なり、全運動量は相対位置のベクトル $\boldsymbol{r}$ やその時間についての微分 $\dot{\boldsymbol{r}}$ を含まない。全角運動量 $\boldsymbol{L}$ は

$$\boldsymbol{L} = m_1\boldsymbol{r}_1\times\dot{\boldsymbol{r}}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2\times\dot{\boldsymbol{r}}_2 = M\boldsymbol{R}\times\dot{\boldsymbol{R}} + \mu\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}} \tag{47}$$

と運動エネルギー同様質量中心（重心）の位置ベクトルと相対位置のベクトルの部分の和で書ける。

今、$m_1 \gg m_2$ の極限を考える。この極限では

$$\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{r}_1\ , \quad \mu \to m_2 \tag{48}$$

となる。質量中心は等速度運動をしているので $\boldsymbol{r}_1 \sim \boldsymbol{R} = 0$ となるような座標系をとることができる。そうすると、$\boldsymbol{r}_2 \sim \boldsymbol{r}$ で、質量 m_1 の質点は原点に静止しており、質量 m_2 の質点がポテンシャル U を受けて運動する一体問題となる。

2.2　同等な１体問題

前節で２体問題がポテンシャル中の１体問題と同等であることを見た。ここでは $m_1 \gg m_2$ の極限を考え $\mu \to m$、$\boldsymbol{r} \to \boldsymbol{r}_1$ とする。ここでは U が保存力の中心力である場合だけを考えよう。そう

すると、U は $r = |\boldsymbol{r}|$ だけの関数となる：$U = U(r)$。従って（質量中心の運動を忘れることにして）ラグランジアンは次のように書ける：

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\boldsymbol{r}} \cdot \dot{\boldsymbol{r}} - U(r) \tag{49}$$

このラグランジアンは角度座標によっていないので、角度座標はサイクリックな座標であり、それに共役な運動量は保存する。この運動量は角運動量 $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} = m\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}} = (L_x, L_y, L_z)$ に他ならない。例えば z-軸を軸とする回転の角度に対する運動量が角運動量の z-成分 L_z になっている。これを見るために円筒座標 (ρ, θ, z) を導入する：

$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta \ , \\ y = \rho \sin\theta \ , \\ z = z \end{cases} \tag{50}$$

を導入する。

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{\rho} \cos\theta - \rho \sin\theta \, \dot{\theta} \ , \\ \dot{y} = \dot{\rho} \sin\theta + \rho \cos\theta \, \dot{\theta} \ , \\ \dot{z} = \dot{z} \end{cases} \tag{51}$$

なので (49) のラグランジアンは

$$L = \frac{1}{2} m \left(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2 \right) - U\left(\sqrt{\rho^2 + z^2} \right) \tag{52}$$

となる。従って、z-軸まわりの回転角 θ に共役な運動量 p_θ は

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m\rho^2 \dot{\theta} \tag{53}$$

となり、オイラー=ラグランジェ方程式を使うと保存することが分かる。

$$0 = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{dp_\theta}{dt} \tag{54}$$

一方角運動量の z-成分をあらわに計算してみると (50)、(51) を使い

$$L_z = m \left(x\dot{y} - y\dot{x} \right) = m\rho^2 \dot{\theta} \tag{55}$$

となり、$L_z = p_\theta$ であることが分かる。

角運動量は $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$ と書けるのでベクトル積（外積）の性質より、質点の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ と直交する。従って、角運動量が保存する場合は質点の運動は角運動量に垂直で原点を通る平面に限られる。$\boldsymbol{L}$ の向きを z-軸にとると、質点の運動は xy-平面に限られる。そこで (51) で $z = 0$ とすると $\rho = r$ となり、ラグランジアン (52) は

$$L = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \right) - U\left(r \right) \tag{56}$$

となる。

一般にラグランジアンが時刻にあらわによらない場合 $L = L\left(q^i, \dot{q}^i\right)$、

$$E = \sum_i \dot{q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - L \tag{57}$$

という量は保存する。実際オイラー=ラグランジェ方程式

$$0 = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} \tag{58}$$

を使うと

$$\dot{E} = \sum_i \left(\ddot{q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \dot{q}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q}\dot{q}^i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\ddot{q}\right) = 0 \tag{59}$$

となり E が時間によらない定数で保存していることが分かる。E はエネルギーに他ならない。(56) のラグランジアンの場合は

$$E = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + U\left(r\right) \tag{60}$$

となる。

角運動量は今保存しており、z-成分しか持たないのでこれを

$$l = L_z = mr^2\dot{\theta} \tag{61}$$

と置き、(60) から $\dot{\theta}$ を消去すると

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2} + U\left(r\right) \tag{62}$$

となる。この表式は半直線 $r \geq 0$ を有効ポテンシャル

$$U_{\mathrm{eff}} = \frac{l^2}{2mr^2} + U\left(r\right) \tag{63}$$

を受けて運動する質点のエネルギーとみなすことができる。(62) を次のように書き直すことができる：

$$t = \int^r \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \frac{l^2}{2mr^2} - U\left(r\right)\right)}} \tag{64}$$

これより $t = t(r)$ が分かるがこれを逆に解くことにより $r = r(t)$ という r の時間発展が分かる。また、角運動量の表式 (61) から

$$\dot{r} = \dot{\theta}\frac{dr}{d\theta} = \frac{l}{mr^2}\frac{dr}{d\theta} \tag{65}$$

なので、(62) のエネルギーの表式を次のように書き換えることができる：

$$E = \frac{l^2}{2mr^4}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + \frac{l^2}{2mr^2} + U\left(r\right) \tag{66}$$

これより

$$\theta = \int^r \frac{dr}{\frac{r^2}{l}\sqrt{2m\left(E - \frac{l^2}{2mr^2} - U\left(r\right)\right)}} \tag{67}$$

となり θ を r の関数として表すことができる。これを $r = r(\theta)$ と解き直すことにより質点の運動の軌道の形が分かる。

2.3 万有引力による運動

ここでは具体的に太陽の周りを運動する惑星の運動について考えてみる。太陽と惑星の間には万有引力が働きそのポテンシャルは次のように与えられる：

$$U = -G\frac{mM}{r} \tag{68}$$

ここで G はニュートンの重力定数、m は惑星の質量、M は太陽の質量である。$m \gg M$ なので太陽は止まっているとみなすことができてる。また、換算質量は $\mu \sim m$ となる。有効ポテンシャルは次のように与えられる：

$$U_{\text{eff}} = \frac{l^2}{2mr^2} - G\frac{mM}{r} = \frac{l^2}{2m}\left(\frac{1}{r} - \frac{Gm^2M}{l^2}\right) - \frac{G^2m^3M^2}{2l^2} \tag{69}$$

エネルギーの表式 (62) から

$$E - U_{\text{eff}}(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 \geq 0 \tag{70}$$

であるので質点（惑星）の運動が $E - U_{\text{eff}}(r) > 0$ の範囲に限られることが分かる。(69) の表式から、

$$E \geq E_0 \equiv -\frac{G^2m^3M^2}{2l^2} \tag{71}$$

で

$$\left(\frac{1}{r} - \frac{Gm^2M}{l^2} - \sqrt{\left(\frac{Gm^2M}{l^2}\right)^2 + \frac{2mE}{l^2}}\right)\left(\frac{1}{r} - \frac{Gm^2M}{l^2} + \sqrt{\left(\frac{Gm^2M}{l^2}\right)^2 + \frac{2mE}{l^2}}\right) < 0 \tag{72}$$

となることが分かる。$r \geq 0$ より、$E \geq 0$ のときは質点の運動の範囲は

$$r \geq \left(\frac{Gm^2M}{l^2} + \sqrt{\left(\frac{Gm^2M}{l^2}\right)^2 + \frac{2mE}{l^2}}\right)^{-1} \tag{73}$$

に限られ、$E < 0$ のときは

$$\left(\frac{Gm^2M}{l^2} - \sqrt{\left(\frac{Gm^2M}{l^2}\right)^2 + \frac{2mE}{l^2}}\right)^{-1} \geq r \geq \left(\frac{Gm^2M}{l^2} + \sqrt{\left(\frac{Gm^2M}{l^2}\right)^2 + \frac{2mE}{l^2}}\right)^{-1} \tag{74}$$

に限られることが分かる。従って、$E < 0$ のときは質点（惑星）が太陽に束縛されていることが分かる。特に、$E = E_0$ の場合は

$$r = \frac{l^2}{Gm^2M} \tag{75}$$

の円軌道になる。

(66) 式に (68) を代入し、$r = 1/u$ と置くと、

$$0 = \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2 - \frac{2GMm^2}{l^2}u - \frac{2mE}{l^2} = \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + \left(u - \frac{GMm^2}{l^2}\right)^2 - \frac{G^2M^2m^4}{l^4} - \frac{2mE}{l^2} \tag{76}$$

を得るが、この解は

$$u=\frac{GMm^2}{l^2}+\sqrt{\frac{G^2M^2m^4}{l^4}+\frac{2mE}{l^2}}\cos\theta \tag{77}$$

となるので

$$r=\frac{\frac{l^2}{GMm^2}}{1+\sqrt{1+\frac{2l^2E}{m^3G^2M^2}}\cos\theta} \tag{78}$$

と軌道を表す方程式が得られる。このとき軌道の形は $E>0$ で双曲線、$E=0$ で放物線、$0>E>E_0=-G^2M^2/\left(2m^3l^2\right)$ で楕円、$E=E_0$ で円を表す。これは (73)、(74) の結果と矛盾がない。惑星の軌道が楕円になるというのがケプラーの第一法則である。

(78) 式が実際に双曲線、放物線、楕円及び円を表すことを見るために、(78) 式を

$$r=\frac{r_0}{1+\epsilon\cos\theta} \tag{79}$$

と書く。平面の極座標

$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases} \tag{80}$$

を使うと

$$r=\sqrt{x^2+y^2}\ ,\quad \cos\theta=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \tag{81}$$

なのでこれを (79) に代入することにより $|\epsilon|\neq 1$ ならば

$$\frac{\left(x+\frac{\epsilon r_0}{1-\epsilon^2}\right)^2}{\frac{r_0^2}{\left(1-\epsilon^2\right)^2}}+\frac{y^2}{\frac{r_0^2}{1-\epsilon^2}}=1 \tag{82}$$

と書ける。これより $|\epsilon|<1$ のときは楕円、$|\epsilon|>1$ のときは双曲線になっていることが分かる。また、$\epsilon=1$ のときは (81) の代わりに

$$x=-\frac{y^2}{2r_0}+\frac{r_0}{2} \tag{83}$$

と放物線を表す方程式が得られる[1]。

楕円の方程式を (79) のように書くと、長径 a と短径 b は

$$a=\frac{r_0}{1-\epsilon^2}\ ,\quad b=\frac{r_0}{\sqrt{1-\epsilon^2}} \tag{84}$$

とかけるので楕円の面積は

$$\pi ab=\frac{\pi r_0^2}{\left(1-\epsilon^2\right)^{3/2}}=\frac{\frac{\pi lK}{m^4}}{\left(-\frac{2E}{m^3}\right)^{3/2}} \tag{85}$$

となるが、質点（惑星）の運動の面積速度、すなわち中心と質点を結ぶ直線（これを動径という）が単位時間当たりに「掃く」面積は

$$\frac{1}{2}r^2\dot{\theta}=\frac{l}{2m} \tag{86}$$

[1] $\epsilon=-1$ のときは

$$x=\frac{y^2}{2r_0}-\frac{r_0}{2}$$

を得る。

となり一定になる。面積速度一定というのがケプラーの第二法則である。面積速度で楕円の面積を割ることにより周期 T が求まる：

$$T = \frac{2\pi GM}{m^3}\left(-\frac{2E}{m^3}\right)^{-3/2} \tag{87}$$

一方

$$r_{\max} + r_{\min} = 2a = \frac{2GM}{m^2}\left(-\frac{2E}{m^3}\right)^{-1} \tag{88}$$

より

$$\frac{T^2}{\left(r_{\max} + r_{\min}\right)^3} = \frac{\pi^2}{2GM} \tag{89}$$

と $T^2/\left(r_{\max} + r_{\min}\right)^3$ が質点の質量 m、角運動量 l やエネルギー E によらない定数になることが分かる。これがケプラーの第三法則である。

2.4 中心力による散乱

二つの粒子の散乱を考えるとき、標的粒子が静止しているような慣性座標系を「実験室系」と呼ぶ。実験室は Laboratory なので、実験室形の量を表すのに L または l の添え字を付けることがある。一方二つの粒子の質量中心が静止して見えるような慣性系を「重心系」と呼ぶ。質量中心は center of mass なので、重心系の量に C または c の添え字を付けることがある。

一方の粒子の質量が他方に比べて非常に大きい場合はその質量の大きい粒子が静止しているとみなすことができ、質量の小さい粒子のポテンシャルによる散乱とみなすことができる。以下ではそのポテンシャルが中心力によるポテンシャルである場合に限る。その粒子が中心に一番近づいた点を「回帰点」という。回帰点と中心との距離は

$$E = U_{\text{eff}}(r) \tag{90}$$

で決まる。この解を r_0 とする。その粒子が無限遠点にあるときから回帰点に達するまでの中心から見たときの角度の変化 $\Delta\theta$ は (67) を使うと、

$$|\Delta\theta| = \int_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{\frac{r^2}{l}\sqrt{2m\left(E - \frac{l^2}{2mr^2} - U\left(r\right)\right)}} \tag{91}$$

で与えられることがわかる。従って、散乱された粒子が再び無限遠点達するまでの見たときの角度の変化は $2\Delta\theta$ で与えられるので、粒子の進行方向の角度の変化 Θ は、中心力が斥力であれば

$$\Theta = \pi - 2\int_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{\frac{r^2}{l}\sqrt{2m\left(E - \frac{l^2}{2mr^2} - U\left(r\right)\right)}} \tag{92}$$

で与えられ、中心力が引力であれば

$$\Theta = -\pi + 2\int_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{\frac{r^2}{l}\sqrt{2m\left(E - \frac{l^2}{2mr^2} - U\left(r\right)\right)}} \tag{93}$$

で与えられる。

入射してくる粒子が、中心より十分遠方で入射方向に垂直な面上を単位時間単位面積当たり N 個通過するとする。中心力ポテンシャルで散乱された粒子が立体角 $d\Omega$ から単位立体角単位時間当たりに出てくる数を、N で割ったものを微分断面積といい、$\frac{d\sigma}{d\Omega}$ と書く。断面積は面積の次元を持ち、その単位として b (barn、バーン、1 b$=10^{-24}$cm^2)、mb$=10^{-27}$cm^2、μb$=10^{-30}$cm^2 が使われる。微分断面積を全立体角で積分したものを全断面積という[2]。

$$\sigma=\int d\Omega\frac{d\sigma}{d\Omega} \tag{94}$$

いま粒子の入射方向を z-軸の正の向きにとったとき無限遠方での α 粒子と z-軸の間の距離を s とする。この s を衝突径数または衝突パラメーターと呼ぶ。中心より十分遠方で粒子の入射方向に垂直な面上に平面の極座標を (s,ϕ) で与える $(0\le\phi<2\pi)$。今 $(s,s+ds)$、$(\phi,\phi+d\phi)$ で与えられる平面のを通過した粒子が $d\Omega$ という立体角で張られる領域に達したとする。空間の極座標を (r,Θ,ϕ) を使うと、$d\Omega=\sin\Theta d\phi d\Theta$ なので微分断面積は

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\left|\frac{sd\phi ds}{\sin\Theta d\phi d\Theta}\right|=\frac{1}{2}\left|\frac{d\left(s^2\right)}{d\left(\cos\Theta\right)}\right| \tag{95}$$

で与えられる。従って、Θ が s の関数として与えられていれば微分断面積を計算できる。

例として半径 a の剛体球による弾性散乱を考える。弾性散乱なので球面に入射してくる角度 α と反射される角度は同じになる。従って $\theta=2\alpha$ であるが、

$$\cos\alpha=\frac{s}{a} \tag{96}$$

なので、

$$\cos\theta=\cos2\alpha=2\cos^2\alpha-1=\frac{2s^2}{a^2}-1 \tag{97}$$

従って、微分断面積は

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\left|\frac{sds}{\sin\theta\,d\theta}\right|=\left|\frac{1}{2}\frac{ds^2}{d\cos\theta}\right|=\frac{a^2}{4} \tag{98}$$

で与えられ、全断面積は

$$\sigma=\int d\Omega\frac{d\sigma}{d\Omega}=\pi a^2 \tag{99}$$

となり、剛体球の断面積に等しいことがわかる。

次の例として α 粒子の原子核による散乱を考える。この散乱をラザフォード散乱と呼ぶ。この散乱を観測することにより原子の中で原子核が小さな固まりになっていることが分かる。実際の現象はミクロなところで起こるので量子力学を使わなくてはならないが、ラザフォード散乱では古典論でも同じ結果を与える。

今原子核に比べ、α-線を作る α 粒子の質量が非常に小さいとすると、散乱によって、原子核はほとんど動かないと仮定できる。従って、実験室系と重心系を区別する必要はない。

原子核と α 線の間に働く力がクーロン力だけであるとすると、クーロン力は中心力なので角運動量が保存するので、α 粒子の運動は原子核を含む平面に限られる。そこで、極座標 (r,θ) を導入すると有効ポテンシャル U_{eff} は角運動量の大きさを l として

$$U_{\mathrm{eff}}=\frac{l^2}{2mr^2}+\frac{qQ}{r} \tag{100}$$

[2]すぐ後で見るようにもし、剛体によって粒子が散乱したとすると、全断面積その剛体の進行方向についての断面積になる。

となる。ここで、m は α 粒子の質量 ($m \sim 2m_p + 2m_n \sim 4m_p$)、$q$ は α 粒子の電荷 ($q = 2e$) であり、Q は原子核の電荷 ($Q = Ze$) である。MKSA 単位系ではクーロン力のポテンシャルは真空の誘電率 ϵ_0 を使い、

$$V = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r} \tag{101}$$

のように表すが、ここでは $4\pi\epsilon_0 = 1$ となるような座標系をとる（$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \to e^2$ と再定義したと思ってよい)。

(90) を使うと回帰点と中心からの距離は

$$\frac{1}{r_0} = -\frac{mqQ}{l^2} + \sqrt{\left(\frac{mqQ}{l^2}\right)^2 + \frac{2mE}{l^2}} \ . \tag{102}$$

であることが分かる。今働く力は斥力であるので (92) を使い、

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{mqQ}{l^2}\right)^2 + \frac{2mE}{l^2}}} \left(\frac{1}{r} + \frac{mqQ}{l^2}\right) \tag{103}$$

とおくと積分が出来て

$$\Theta = -\pi + 2\cos^{-1}\left(\frac{\frac{mqQ}{l^2}}{\sqrt{\left(\frac{mqQ}{l^2}\right)^2 + \frac{2mE}{l^2}}}\right) \tag{104}$$

を得、

$$\sin\frac{\Theta}{2} = \frac{\frac{mqQ}{l^2}}{\sqrt{\left(\frac{mqQ}{l^2}\right)^2 + \frac{2mE}{l^2}}} \tag{105}$$

または

$$\cos\Theta = \frac{\frac{2mE}{l^2} - \left(\frac{qQm}{l^2}\right)^2}{\frac{2mE}{l^2} + \left(\frac{qQm}{l^2}\right)^2} \tag{106}$$

を得る。今 α 粒子の衝突径数を s またその速さを v とすると

$$E = \frac{1}{2}mv^2 \ , \quad l = msv \tag{107}$$

となるので

$$s = \frac{l}{\sqrt{2mE}} \tag{108}$$

となる。これより

$$\cos\Theta = \frac{s^2 - \left(\frac{qQ}{2E}\right)^2}{s^2 + \left(\frac{qQ}{2E}\right)^2} \tag{109}$$

または

$$s^2 = \left(\frac{qQ}{2E}\right)^2 \frac{1+\cos\Theta}{1-\cos\Theta} = \left(\frac{qQ}{2E}\right)^2 \frac{1}{\tan^2\frac{\Theta}{2}} \tag{110}$$

を得る。(95）を使うと

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{qQ}{2E}\right)^2 \frac{1}{(1-\cos\Theta)^2} = \left(\frac{qQ}{4E}\right)^2 \frac{1}{\sin^4\frac{\Theta}{2}} \tag{111}$$

となることがわかる。

実際に、α 粒子を原子核に当てて、散乱を測定すると、(111) 式がよくあっていて、原子核が小さい固まりになっていることが分かる。ところが、α 粒子のエネルギーを上げていくと、Θ の大きいところからずれていくことが分かる。(102) と (105)、(110) 式などより、α が原子核にもっとも近づく距離、すなわち回帰点と中心の距離 r_0 は

$$r_0 = \frac{qQ}{2E}\left(1 + \frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}}\right) \tag{112}$$

であり、エネルギー E が大きいほど、また、Θ が大きいほど r_0 は小さくなる。そのため、ラザフォード散乱からのずれは、α 粒子が原子核にぶつかるために生じると考えられる。このようなことから、原子核の半径 R を求めることができ、

$$R = r_0 A^{\frac{1}{3}} \ , \quad r_0 = 1.2 \sim 1.4 \text{ fm} \ , \quad (1 \text{ fm} = 10^{-13} \text{ cm}) \tag{113}$$

となることがわかる。(113) 式より原子核の体積が

$$V = \frac{4\pi}{3} r_0^3 A \tag{114}$$

で与えられるので、原子核の単位体積当たりの質量、または核子の数が一定であることを示している。これを核子の飽和性と呼ぶ。

3 回転の運動学

一般の物体は質点のように理想化され大きさを持たないものではなく拡がりを持ったものである。拡がりを持った物体も質点の集まりと考えることもできる。拡がりを持つ物体の中で「剛体」とは任意の二点間の距離が変わらないようなものである。

剛体の配置を指定するためにいくつの座標又はパラメーターが必要かを考えてみよう。最初に剛体の中の一点 A、例えば質量中心の位置を指定する必要がある。このために 3 つの座標がいる。この一転を固定しても、剛体は更に回転することができる。この回転を止めるために剛体のもうひとつの点 B を指定する必要がある。この点と最初の点の距離は変わらないので、この点 B の位置を指定するためには緯度と経度に対応するパラメーターが二つあれば十分である。二つの点 A, B を固定しても、剛体はその 2 点を通る直線を軸として回転することができる。この回転角を指定すれば剛体の配置は一通りに決まる。従って、剛体の配置は質量中心の位置を指定する 3 つの座標と、回転に伴う 3 つの座標を指定すればいい。

剛体の回転を考える場合、剛体に固定されたベクトル（例えば剛体上の一点を示すベクトル）の時間変化を剛体の外の固定された座標系から見る立場と、剛体に固定された座標系から、外の固定されたベクトルを見る立場の二つがある。

今 $x, y, z,$ それぞれの軸に平行な単位ベクトルを $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ とする：

$$\boldsymbol{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ , \quad \boldsymbol{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ , \quad \boldsymbol{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ , \tag{115}$$

今剛体に固定された座標軸と剛体の外で固定された座標軸を考える。ある時刻に二つの座標軸が一致していたが回転によって、剛体に固定された $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ というベクトルがそれぞれ $\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}', \boldsymbol{k}'$ というベクトルに移ったとする：

$$\boldsymbol{i}' = \begin{pmatrix} i'_x \\ i'_y \\ i'_z \end{pmatrix} , \quad \boldsymbol{j}' = \begin{pmatrix} j'_x \\ j'_y \\ j'_z \end{pmatrix} , \quad \boldsymbol{k}' = \begin{pmatrix} k'_x \\ k'_y \\ k'_z \end{pmatrix} , \tag{116}$$

この変換は 3 行 3 列の行列 O を

$$O = (\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}', \boldsymbol{k}') = \begin{pmatrix} i'_x & j'_x & k'_x \\ i'_y & j'_y & k'_y \\ i'_z & j'_z & k'_z \end{pmatrix} \tag{117}$$

のように定義すると

$$\boldsymbol{i}' = O\boldsymbol{i} , \quad \boldsymbol{j}' = O\boldsymbol{j} , \quad \boldsymbol{k}' = O\boldsymbol{k} \tag{118}$$

のように与えられる。$\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}', \boldsymbol{k}'$ は $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ を回転させることによって得られるので、長さが 1 で互いに直交する。これより

$$O^T O = I \tag{119}$$

であることが分かる。添え字 T は行列の転置を表し、I は 3 行 3 列の単位行列を表す。また、逆行列は一意的なので

$$O O^T = I \tag{120}$$

であることも分かる。(119) のような性質を満たす行列を（3 行 3 列の）直交行列と呼ぶ。従って、剛体の回転が直交行列によって表されることが分かる。回転により剛体に固定されたベクトル $\boldsymbol{A}$ は、今求めた (117) の直交行列 O を使うと、

$$\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}' = O\boldsymbol{A} \tag{121}$$

のように書ける。反対に剛体に固定された座標系から見ると外の世界は剛体の回転とは逆向きに回転しているので、剛体の外に固定されたベクトル $\boldsymbol{B}$ を剛体とともに回転する座標系から見ると、

$$\boldsymbol{B} \to \boldsymbol{B}' = O^{-1}\boldsymbol{B} = O^T\boldsymbol{B} \tag{122}$$

のように変換する。

先ほどの議論より回転は 3 つのパラメーターで表されるはずである。この 3 つのパラメーターとしてよく使われるものにオイラー角と呼ばれるものがある。ここでは、剛体とともに動く座標系から見たときに剛体の外に固定されたベクトルがどのように変化をするかを見る。

x-軸、y-軸、z-軸まわりのそれぞれ角度 $\theta_x,\ \theta_y,\ \theta_z$ の座標軸の回転を表す行列 $O_x(\theta_x),\ O_y(\theta_y),\ O_z(\theta_z)$, は

$$O_x(\theta_x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_x & \sin\theta_x \\ 0 & -\sin\theta_x & \cos\theta_x \end{pmatrix} , \quad O_y(\theta_y) = \begin{pmatrix} \cos\theta_y & 0 & -\sin\theta_y \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta_y & 0 & \cos\theta_y \end{pmatrix} ,$$
$$O_z(\theta_z) = \begin{pmatrix} \cos\theta_z & \sin\theta_z & 0 \\ -\sin\theta_z & \cos\theta_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{123}$$

と表される。オイラー角による回転の表示は回転を最初に z-軸周りに ϕ、この回転でまわった新しい x-軸のまわりに θ、更に新しい z-軸のまわりに ψ 回転させることで得られる。従って、オイラー角を使うと回転の行列は

$$\begin{aligned} &O(\psi,\theta,\phi) = O_z(\psi)O_x(\theta)O_z(\phi) \\ &= \begin{pmatrix} \cos\psi\cos\phi - \cos\theta\sin\phi\sin\psi & \cos\psi\sin\phi + \cos\theta\cos\phi\sin\psi & \sin\psi\sin\theta \\ -\sin\psi\cos\phi - \cos\theta\sin\phi\cos\psi & -\sin\psi\sin\phi + \cos\theta\cos\phi\cos\psi & \cos\psi\sin\theta \\ \sin\theta\sin\phi & -\sin\theta\cos\phi & \cos\theta \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{124}$$

と表される。この行列 $O(\psi,\theta,\phi)$ は剛体に固定された座標軸で、回転していない外の固定されたベクトル $\boldsymbol{A}$ が

$$\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}' = O(\psi,\theta,\phi)\boldsymbol{A} \tag{125}$$

と表されることを示しているので、剛体に固定されたベクトル $\tilde{\boldsymbol{A}}$ を回転しない外の座標軸から見たときはこの回転により

$$\tilde{\boldsymbol{A}} \to \tilde{\boldsymbol{A}}' = O(\psi,\theta,\phi)^T\tilde{\boldsymbol{A}} \tag{126}$$

のように変化する。

回転はまた回転の軸とその軸のまわりの回転角 θ で表すことができる。回転軸に平行な単位ベクトル $\boldsymbol{n}$ は緯度と経度に相当する 2 つのパラメーターを指定すればいいので、この場合も回転を表すパラメーターは 3 個である。今この座標軸の回転を表す行列を求めよう。この回転は $\boldsymbol{n}$ を z-軸に平行な単位ベクトル $\boldsymbol{k}$ に移し、z-軸のまわりに θ だけ回転させた後、最初に $\boldsymbol{n}$ を $\boldsymbol{k}$ に移したのと逆の回転を行って再び $\boldsymbol{k}$ を $\boldsymbol{n}$ に戻すことによって得られる。今、単位ベクトル $\boldsymbol{m}, \boldsymbol{l}$ を $\boldsymbol{n}, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{l}$ が互いに直交し、かつ右手系をなす様に選ぶ。そうすると (117) あたりの議論から、$\boldsymbol{k}$ を $\boldsymbol{n}$ に移す行列 $O_{\boldsymbol{n}}$ が

$$O_{\boldsymbol{n}} = (\boldsymbol{l}, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}) \tag{127}$$

で与えられることが分かる。$O_{\boldsymbol{n}}$ の転置行列 $O_{\boldsymbol{n}}^T$ は $O_{\boldsymbol{n}}$ の逆行列なので、$O_{\boldsymbol{n}}^T$ は $\boldsymbol{n}$ を $\boldsymbol{k}$ に移す。従って、$\boldsymbol{n}$ に平行な軸のまわりの角度 θ の回転を表す行列 $O(\theta,\boldsymbol{n})^T$ は

$$O(\theta,\boldsymbol{n})^T = O_{\boldsymbol{n}}O_z(\theta)^T O_{\boldsymbol{n}}^T \tag{128}$$

とかけることが分かる。$O_{\boldsymbol{n}}O_{\boldsymbol{n}}^T = I$ から得られる式、

$$\begin{aligned} &l_x^2 + m_x^2 + n_x^2 = l_y^2 + m_y^2 + n_y^2 = l_z^2 + m_z^2 + n_z^2 = 1 \\ &l_xl_y + m_xm_y + n_xn_y = l_yl_z + m_ym_z + n_yn_z = l_zl_x + m_zm_x + n_zn_x = 0 \end{aligned} \tag{129}$$

および

$$\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = \boldsymbol{l}\times\boldsymbol{m} \begin{pmatrix} l_ym_z - l_zm_y \\ l_zm_x - l_xm_z \\ l_xm_y - l_ym_x \end{pmatrix} \tag{130}$$

であることを使うと、$O(\theta,\boldsymbol{n})^T$ を具体的に成分で表すことができる：

$$O(\theta,\boldsymbol{n})^T = \cos\theta\, I + (1-\cos\theta)\begin{pmatrix} n_x^2 & n_xn_y & n_xn_z \\ n_yn_x & n_y^2 & n_yn_z \\ n_zn_x & n_zn_y & n_z^2 \end{pmatrix} - \sin\theta \begin{pmatrix} 0 & -n_z & n_y \\ n_z & 0 & -n_x \\ -n_y & n_x & 0 \end{pmatrix} \tag{131}$$

特に θ が微小である極限では

$$O(\theta,\boldsymbol{n})^T \sim I+\theta\begin{pmatrix} 0 & n_z & -n_y \\ -n_z & 0 & n_x \\ n_y & -n_x & 0 \end{pmatrix} \tag{132}$$

となる。従って、剛体の外で固定されたベクトル $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$ は剛体とともに回転する座標系から見たとき

$$\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{A}'=O(\theta,\boldsymbol{n})^T\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{A}-\theta\begin{pmatrix} n_yA_z-n_zA_y \\ n_zA_x-n_xA_z \\ n_xA_y-n_yA_x \end{pmatrix}=\boldsymbol{A}-\theta\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{A} \tag{133}$$

と書ける。逆に剛体とともに回転するベクトル $\tilde{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix} \tilde{A}_x \\ \tilde{A}_y \\ \tilde{A}_z \end{pmatrix}$ を外の固定された座標系から見たとき

$$\tilde{\boldsymbol{A}}\to\tilde{\boldsymbol{A}}'=O(\theta,\boldsymbol{n})\tilde{\boldsymbol{A}}\sim\tilde{\boldsymbol{A}}+\theta\boldsymbol{n}\times\tilde{\boldsymbol{A}} \tag{134}$$

と書ける。

今剛体が質量中心を通り、単位ベクトル $\boldsymbol{n}$ に平行な軸のまわりに時間 δt の間に角度 $\omega\delta t$ だけ回転するとする。この ω を角速度（の大きさ）という。このときの剛体上の固定された点を質量中心から剛体とともに回転する座標系から見たときの位置ベクトル $\boldsymbol{r}'$ の変化分 $\delta\boldsymbol{r}'$ は (134) より

$$\delta\boldsymbol{r}'=\omega\delta t\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{r}' \tag{135}$$

となるので、$\boldsymbol{r}'$ の速度は剛体の外の回転しない座標系から見たとき

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}'\ ,\quad \boldsymbol{\omega}\equiv\omega\boldsymbol{n} \tag{136}$$

となる。$\boldsymbol{\omega}$ を角速度ベクトルという。地球を剛体とみなすと、その上を自動車が動いていくなどというような剛体に固定された座標から見たときの位置ベクトル $\boldsymbol{r}'$ が時間変化する場合を考えることができる。このときは (136) は次のように修正される：

$$\dot{\boldsymbol{r}}=\dot{\boldsymbol{r}}'+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}' \tag{137}$$

この表式は一般のベクトル $\boldsymbol{A}$ に対しても成り立つ：

$$\dot{\boldsymbol{A}}=\dot{\boldsymbol{A}}'+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{A}' \tag{138}$$

(137) に対し (138) をもう一度使うと

$$\ddot{\boldsymbol{r}}=\ddot{\boldsymbol{r}}'+\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{r}'+\boldsymbol{\omega}\times\dot{\boldsymbol{r}}'+\boldsymbol{\omega}\times\left(\dot{\boldsymbol{r}}'+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}'\right)=\ddot{\boldsymbol{r}}'+\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{r}'+2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}'+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}') \tag{139}$$

を得る。これをニュートンの運動方程式に代入すると

$$m\ddot{\boldsymbol{r}}'=\boldsymbol{F}-m\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{r}'-2m\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}'-m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}') \tag{140}$$

を得る。右辺の 2 項目以降は「見かけの力」と呼ばれるもので、3 項目は「コリオリ力」、4 項目は「遠心力」と呼ばれる。2 項目の力には名前がない。

4　剛体の運動方程式

二つの質点の運動が質量中心の運動と相対運動に分けられたように、剛体の運動も質量中心の運動と質量中心を中心とする回転運動に分けることができる。今、剛体中の点 $\boldsymbol{r}$ における質量密度を $\rho(\boldsymbol{r})$ とすると、剛体の全質量 M は

$$M = \int_{\text{剛体全体}} dV \rho(\boldsymbol{r}) \tag{141}$$

と書ける。そうすると質量中心の位置ベクトルは

$$\boldsymbol{R} = \frac{1}{M} \int_{\text{剛体全体}} dV \rho(\boldsymbol{r}) \boldsymbol{r} \tag{142}$$

となる。質量中心を原点に取ったときの剛体内の点の位置ベクトルは

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{R} \tag{143}$$

で与えられる。今剛体の回転が角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ で表されるとすると、(136) を使うことにより、剛体の角運動量は

$$\begin{aligned} \boldsymbol{L} &= \int_{\text{剛体全体}} dV \rho(\boldsymbol{r}) \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{r}' \\ &= \int_{\text{剛体全体}} dV \rho(\boldsymbol{r}) \left(\boldsymbol{R} + \boldsymbol{r}'\right) \times \left(\dot{\boldsymbol{R}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}'\right) \\ &= M \boldsymbol{R} \times \dot{\boldsymbol{R}} + \boldsymbol{R} \times \left(\boldsymbol{\omega} \times \int_{\text{剛体全体}} dV \rho(\boldsymbol{r}) \boldsymbol{r}'\right) \\ &\quad + \left(\int_{\text{剛体全体}} dV \rho(\boldsymbol{r}) \boldsymbol{r}'\right) \times \dot{\boldsymbol{R}} + \int_{\text{剛体全体}} dV \rho(\boldsymbol{r}) \boldsymbol{r}' \times \left(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}'\right) \end{aligned} \tag{144}$$

と書けるが質量中心の定義 (142) より

$$\int_{\text{剛体全体}} dV \rho(\boldsymbol{r}) \boldsymbol{r}' = \int_{\text{剛体全体}} dV \rho(\boldsymbol{r}) \boldsymbol{r} - \left(\int_{\text{剛体全体}} dV \rho(\boldsymbol{r})\right) \boldsymbol{R} = M\boldsymbol{R} - M\boldsymbol{R} = 0 \tag{145}$$

であることと、$r' = |\boldsymbol{r}'|$ として

$$\boldsymbol{r}' \times \left(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}'\right) = {r'}^2 \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{r}' \left(\boldsymbol{r}' \cdot \boldsymbol{\omega}\right) \tag{146}$$

となるを使うと角運動量が質量中心の回転の部分と質量中心周りの回転の部分 $\boldsymbol{L}^C$ に分離する：

$$\boldsymbol{L} = M \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}' + \boldsymbol{L}^C \ , \quad L_i^C = \sum_{j=1,2,3} I_{ij} \omega_j \ , \quad I_{ij} \equiv \int_{\text{剛体全体}} dV \rho(\boldsymbol{r}) \left({r'}^2 \delta_{ij} - r'_i r'_j\right) \tag{147}$$

ここで一般のベクトル $\boldsymbol{A}$ $(= \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{r}', \cdots)$ の成分を $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}$ の様に書いた。I_{ij} は慣性モーメントと呼ばれる。I_{ij} はベクトルの添え字を二つ持つので 2 階のテンソルと呼ばれる量になっ

ている。また、定義より $I_{ij}=I_{ji}$ である。従って適当な座標系を取れば I_{ij} は対角的な形になる：[3]

$$I=\begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \tag{148}$$

I が対角行列に見える座標軸を主軸という。また、$I_{1,2,3}$ を主慣性モーメントと呼ぶ。(147) 式は回転軸と角運動量の向きが必ずしも平行でないことを示している。回転軸と角運動量の向きが平行になるのは (148) から分かるように、回転軸が主軸の場合である。角運動量は保存しようとする場合が多いので、主軸と異なる軸で物体を回そうとすると安定せずガタガタする。

今、平面状の剛体を考える。剛体の質量中心を原点に取り、剛体が xy-面内にあるようにとる。今原点を質量中心に取ったので、

$$0=\int_{\text{剛体全体}} dxdy\sigma(x,y)\boldsymbol{r} \tag{149}$$

である。ここで $\sigma(x,y)$ は単位体積あたりの質量の密度（質量の面密度）である。また、xy-平面上

---

[3]一般に $N\times N$ 実対称行列 $A_{ij}=A_{ji}$ の N 個の固有値 $\lambda^{(k)}$ と固有ベクトル $V_i^{(k)}$ $(k=1,2,\cdots,N)$ を考える：

$$\sum_{j=1}^{N} A_{ij}V_j^{(k)}=\lambda^{(k)}V_i^{(k)}$$

この式の転置を取ると、A_{ij} が対称なので

$$\sum_{j=1}^{N} V_j^{(k)}A_{ji}=\lambda^{(k)}V_i^{(k)}$$

となる。これより異なる固有値を持つ固有ベクトルは互いに直交することが分かる。実際、上の二つの式をそれぞれ使うと

$$\sum_{i,j=1}^{N} V_j^{(k)}A_{ji}V_i^{(l)}=\lambda^{(k)}\sum_{i=1}^{N} V_i^{(k)}V^{(l)}=\lambda^{(l)}\sum_{i=1}^{N} V_i^{(k)}V^{(l)}$$

を得る。従って $\left(\lambda^{(k)}-\lambda^{(l)}\right)\sum_{i=1}^{N} V_i^{(k)}V^{(l)}=0$ となるので $\lambda^{(k)}\neq\lambda^{(l)}$ であれば $\sum_{i=1}^{N} V_i^{(k)}V^{(l)}=0$ で固有値の異なる二つの固有ベクトルが互いに直交することが分かる。同じ固有値を持つ持つ固有ベクトル同士であればシュミットの直交化法等を使えば互いに直交化するように選べる。このようにして N 個の直交する固有ベクトルが得られる。これらのベクトルの大きさを１に規格化する。今、二つの行列 V、Λ を次のように定義する：

$$V=(V_{ij})=(V_i^{(j)})\ ,\quad \Lambda=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_N \end{pmatrix}$$

を使うと最初の２式を

$$AV=V\Lambda\ ,\quad V^TA=\Lambda V^T$$

と書くことができる。$V_i^{(k)}$ を互いに直交する単位行列に選んだので、V は直交行列で

$$VV^T=V^TV=1$$

であり、

$$V^TAV=\Lambda$$

と A を対角化することができる。今考えている回転の場合は直交行列は座標軸の回転を表すので、適当な座標軸を取れば慣性モーメントのテンソルを対角化できる。

で $z=0$ で $r^2=x^2+y^2$ であるので、

$$
\begin{aligned}
&I_{zz}=\int_{剛体全体} dxdy\sigma(x,y)\left(x^2+y^2\right)\ , \quad I_{zx}=I_{xz}=I_{zy}=I_{yz}=0 \\
&I_{xx}=\int_{剛体全体} dxdy\sigma(x,y)y^2\ , \quad I_{yy}=\int_{剛体全体} dxdy\sigma(x,y)x^2\ , \\
&I_{xy}=I_{yx}=\int_{剛体全体} dxdy\sigma(x,y)xy
\end{aligned} \tag{150}
$$

という表式を得る。これより質量中心を通り剛体に垂直な軸は常に主軸であり、

$$
I_{zz}=I_{xx}+I_{yy} \tag{151}
$$

であることが分かる。

今剛体の運動エネルギー T を考えてみよう。

$$
T=\frac{1}{2}\int_{剛体全体} dV\rho(\boldsymbol{r})\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\dot{\boldsymbol{r}} \tag{152}
$$

(136) を使うと

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2}\left(\int_{剛体全体} dV\rho(\boldsymbol{r})\right)\dot{\boldsymbol{R}}\cdot\dot{\boldsymbol{R}}+\boldsymbol{R}\times\left(\boldsymbol{\omega}\times\int_{剛体全体} dV\rho(\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}'\right) \\
&\quad +\frac{1}{2}\int_{剛体全体} dV\rho(\boldsymbol{r})\left(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}'\right)\cdot\left(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}'\right)
\end{aligned} \tag{153}
$$

なので (145) および

$$
(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}')\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}')=\boldsymbol{\omega}\cdot(\boldsymbol{r}'\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}'))={r'}^2\omega^2-(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{r}')^2 \tag{154}
$$

を使うと

$$
T=\frac{1}{2}M\dot{\boldsymbol{R}}\cdot\dot{\boldsymbol{R}}+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1,2,3} I_{ij}\omega_i\omega_j \tag{155}
$$

と質量中心の運動による部分と回転運動による部分に分かれることが分かる。

剛体に力を働かせた場合を考える。その準備として質点に力が働いたとき角運動量がどのように変化するかを見る：

$$
\dot{\boldsymbol{L}}=\frac{d}{dt}\left(m\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}}\right)=m\boldsymbol{r}\times\ddot{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F} \tag{156}
$$

ここで $\boldsymbol{T}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}$ ($\boldsymbol{T}$ を $\boldsymbol{N}$ と書く場合も多い) をトルクまたは力のモーメントという。剛体の角運動量の変化も剛体全体に働くトルクになる：

$$
\boldsymbol{T}=\int_{剛体全体} dV\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \tag{157}
$$

特に重力の場合は $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})=\rho(\boldsymbol{r})\boldsymbol{g}$（$\boldsymbol{g}$ は重力加速度）

$$
\boldsymbol{T}=\left(\int_{剛体全体} dV\rho(\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}\right)\times\boldsymbol{g}=M\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{g} \tag{158}
$$

と書ける。剛体が静止するためには剛体全体に働く力がゼロであるとともに剛体全体に働くトルクがゼロでなくてはならない。

今剛体とともに動く座標系で見た角運動量を $\boldsymbol{L}'$ とする。(138) を使うと

$$\dot{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{T} = \dot{\boldsymbol{L}}' + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{L}' \tag{159}$$

となるが ($\boldsymbol{\omega}$ は (136) の角速度ベクトルである)、剛体とともに動く座標系では座標軸を常に慣性モーメントの主軸に取れるので (159) の各成分は

$$T_1 = I_1\dot{\omega}_1 - (I_2 - I_3)\,\omega_2\omega_3\ , \quad T_2 = I_2\dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1)\,\omega_3\omega_1\ , \quad T_3 = I_3\dot{\omega}_3 - (I_1 - I_2)\,\omega_1\omega_2 \tag{160}$$

となる。これをオイラーの運動方程式という。

$I_1 = I_2$ となるような剛体を「対称コマ」と呼ぶことがある。特に外力が働かず、$\boldsymbol{T} = 0$ の場合オイラーの運動方程式 (160) の最後の式から $\dot{\omega}_3 = 0$ であり、ω_3 が定数であることが分かる。

$$\Omega = \frac{(I_2 - I_3)\,\omega_3}{I_1} = -\frac{(I_3 - I_1)\,\omega_3}{I_2} = \left(1 - \frac{I_3}{I_1}\right)\omega_3 \tag{161}$$

とおくとオイラーの方程式の残りの二つは、

$$0 = \dot{\omega}_1 - \Omega\omega_2 = \dot{\Omega}_2 + \omega\omega_1 \tag{162}$$

と書き直すことができて、これより、

$$\frac{d}{dt}\left(\omega_1^2 + \omega_2^3\right) = 0 \tag{163}$$

で、ω_3 も定数なので角速度ベクトルの大きさ $\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2}$ が一定であり、また、

$$0 = \ddot{\omega}_1 - \Omega^2\omega_1 = \ddot{\omega}_2 - \Omega^2\omega_2 \tag{164}$$

なので、角速度ベクトルが 3-軸を中心に角速度 Ω で回転運動していることが分かる。これを「歳差運動」という。

5 特殊相対性理論

古典力学（ニュートン力学）と同程度に確立されていた電磁気学では、光速度（電磁波の速さ）が一定であることが分かる。すなわち、速度が加算的でなく、古典力学と矛盾している。このことは、例えば質点の速さが光速（$c = 2.99792458 \times 10^8$ m/s と「定義」されている）に近くなってくると、古典力学が成り立たなくなることを示している。特殊相対性理論では、このような光速に近い速さでは、時間と空間が混じってくることが分かる。

5.1　ガリレオ変換

古典力学（ニュートン力学）における運動の第一法則（慣性の法則）は次のようなものである：

「外力を受けていない質点は静止または等速直線運動（等速度運動）をする。」

この法則は、物体に力が働いていないときにその物体が等速度運動しているように見える座標系が存在していることを示している。このような座標系を慣性系という。今運動をしている座標系 A の原点の位置をある慣性系 C から見たときの位置ベクトルを $\boldsymbol{r}_0(t)$ とすると、A からみたときの質点の位置ベクトル $\boldsymbol{r}'$ は、

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0 \tag{165}$$

となる。ただしここで $\boldsymbol{r}$ は C からみたときの位置ベクトルである。そうすると、運動の第二法則である運動方程式

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F} \tag{166}$$

は、

$$m\ddot{\boldsymbol{r}}' = \boldsymbol{F} - m\ddot{\boldsymbol{r}}_0 \tag{167}$$

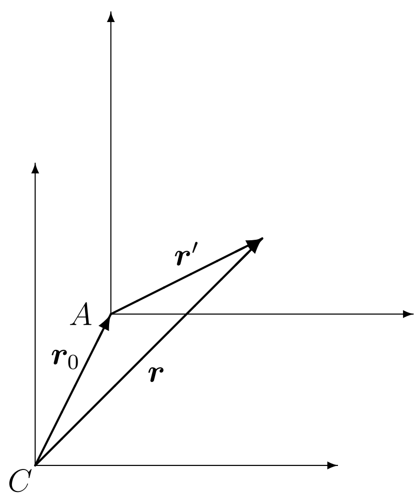
となる。したがって、$\ddot{\boldsymbol{r}}_0 = 0$ の場合には運動方程式が不変になる。この場合は、

$$\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{V}_0 t + \boldsymbol{R}_0 \tag{168}$$

となって、運動をしている座標系 A の原点が、等速度運動している場合になる。今の $\boldsymbol{r}_0$ で与えられるような慣性系同士の座標変換

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} - (\boldsymbol{V}_0 t + \boldsymbol{R}_0) \tag{169}$$

をガリレイ（ガリレオ）変換という。運動方程式の形が変わらないので、ガリレイ変換で結びつく二つの座標系はニュートン力学では互いに同等になっている。また、ある座標系で速度 $\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}}$ で運動している質点をもとの座標系から見て速度 $\boldsymbol{V}_0$ で等速度運動している座標系から見れば質点の速度は $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{V}_0$ となり、速度が加算的になる。これは一見当たり前のことのようであるが、次に見るようにマクスウェルの方程式を解いて光（電磁波）の速さを求めるとそれがある決まった値になるということが分かり、電磁気学では速度の可算性が成り立たないことが分かる。



5.2 光速度一定の法則

x 軸を正の向きに進む波の振幅は、

$$f(x - vt) \tag{170}$$

で表され、f が一定のところが速度 v で進む。この波は、

$$\frac{\partial f}{\partial t} - v\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \tag{171}$$

という方程式を満たす。一方、x 軸を負の向きに進む波は

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \tag{172}$$

という方程式を満たす。従って、これらの波は

$$0 = \left(\frac{\partial}{\partial t} - v\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + v\frac{\partial}{\partial x}\right) f = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - v^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \tag{173}$$

という方程式を満たす。一般に空間を伝わる速さ v の波は、

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - v^2 \triangle f = 0 \tag{174}$$

という方程式を満たす。ここで、$\triangle$ はラプラシアン（Laplacian）とよばれ、

$$\triangle \equiv \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{175}$$

で

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \tag{176}$$

である。実際速さ v で $\boldsymbol{n}$ ($\boldsymbol{n}$ は単位ベクトル) の方向に進む波は

$$f = f(\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{r} - vt) \tag{177}$$

と表されるで表されるが、これは空間内を伝播する波動方程式の解になっている。

真空中（$\boldsymbol{j} = \rho = 0$）のマクスウェルの方程式は

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{E} = 0\,, \quad \mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0\,, \quad \mathrm{rot}\,\boldsymbol{B} - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = 0\,, \quad \mathrm{div}\,\boldsymbol{B} = 0 \tag{178}$$

の 4 つである。最初の式は電荷がない時のガウスの法則、2 番目の式は起電力を表すファラデーの法則、三番目は変位電流を含むが通常の電流がない時のアンペールの法則である。最後の式には名前がないが、S 極または N 極だけを持つ磁気単極子がないという式である。また、ϵ_0 は真空の誘電率、μ_0 は真空の透磁率と呼ばれる量である。二つ目の式の rot を考えると、

$$0 = \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} + \frac{\partial \mathrm{rot}\,\boldsymbol{B}}{\partial t} = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{E} - \triangle\boldsymbol{E} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = -\triangle\boldsymbol{E} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} \tag{179}$$

となり、電場が

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{\mu_0\epsilon_0}\triangle\right)\boldsymbol{E} = 0 \tag{180}$$

という波動方程式を満たすことがわかる。ここで、

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{A} - \triangle\boldsymbol{A} \tag{181}$$

という公式を２行目で使い、３行目の式でマクスウェル方程式の１つめと３つめの式を使った。同様に、マクスウェル方程式の３つめの式の rot を考えることにより、磁場についての波動方程式、

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{\mu_0\epsilon_0}\triangle\right)\boldsymbol{B} = 0 \tag{182}$$

が得られる。（電場と磁場は互いに独立ではなく、マクスウェルの方程式により互いに関係が付く。）このような電場と磁場の波を電磁波という。光も電磁波の一種であり、その速度（光速） c は

$$c \equiv 2.99792458 \times 10^8 \text{ m/s} \tag{183}$$

である。上の波動方程式から、

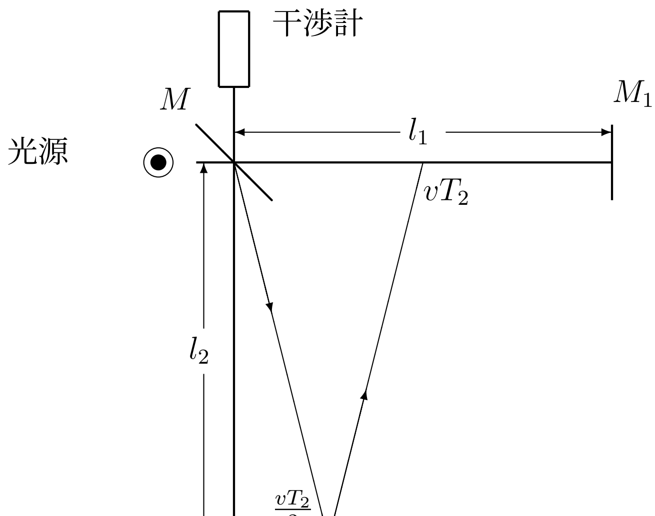
$$c^2 = \frac{1}{\mu_0\epsilon_0} \tag{184}$$

であることがわかる。

このように光速はある決まった値を取る。ニュートン力学が正しいとすると、速度は加算的なので、光速度が決まった値を持つということは、慣性系のなかに光の速さが (183) の値をとって見えるような特別のものがあるということを意味する。例えば、音速というのはそれが伝わる空気に対する速さであるので、何か光が伝わる媒質（エーテル）があるはずである。そうすると特別な慣性系では、エーテルが止まってみえるはずである。そこで、マイケルソン（Michelson）とモーレー（Morley）は、地表においた観測器がこのエーテルに対して実際に動いているかを実験しようとした。

5.3 マイケルソンとモーレーの実験

マイケルソンとモーレーの実験装置は大体次のようなものである：



光源から出た光は半透明のマジックミラー M により、一部が反射されて、鏡 M_2 に行き、反射され、更に一部が M を通り抜けて、干渉計に入る。光源から出て M を通った光は鏡 M_1 で反射され、更に M で再び反射された光が干渉計に入る。二つの経路を通った光は互いに干渉し、行路差に応じた干渉縞を作る。

もし装置が、M_1 の方向に速さ v で運動していたとする。そうすると、光が M と M_1 の間を往復するのに必要な時間 T_1 は

$$T_1 = \frac{l_1}{c-v} + \frac{l_1}{c+v} = \frac{2l_1 c}{c^2 - v^2} \tag{185}$$

であり、行路の長さ L_1 は、

$$L_1 = cT_1 = \frac{l_1}{1-\beta^2}\ , \qquad \beta \equiv \frac{v}{c} \tag{186}$$

一方、光が M と M_2 の間を往復するのに必要な時間 T_2 は

$$T_2 = \frac{2\sqrt{l_2^2 + \left(\frac{vT_2}{2}\right)}}{c} \tag{187}$$

より

$$T_2 = \frac{2l_2}{c\sqrt{1-\beta^2}} \tag{188}$$

となるので、行路差 Δ は

$$\Delta = c(T_1 - T_2) = 2\left(\frac{l_1}{1-\beta^2} - \frac{l_2}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) \tag{189}$$

となる。もし装置を M を中心に時計回りに 90 °回転させたとするとその時の行路差 Δ' は

$$\Delta' = 2\left(\frac{l_1}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{l_2}{1-\beta^2}\right) \tag{190}$$

となるので二つの行路差の差は $\beta \ll 1$ として、

$$\delta = \Delta' - \triangle \sim -(l_1 + l_2)\beta^2 \tag{191}$$

となるので、干渉計を覗きながら装置を回転させれば、干渉縞の移動が見られるはずである。v が地球の公転の速さ（$\sim 3\times 10$ km/s $\sim 3\times 10^4$ m/s）で与えられ、$l_1 = l_2 = 10$ m で、光源としてナトリウムの D 線 (波長 6×10^{-4} cm $= 6\times 10^{-7}$ m) を使ったとき、$c \sim 3\times 10^8$ m/s なので

$$\delta = 20 \times \left(\frac{3\times 10^4}{3\times 10^8}\right)^2 = 2\times 10^{-7} \tag{192}$$

従って、

$$\left|\frac{\delta}{\lambda}\right| \sim \frac{1}{3} \tag{193}$$

行路差の差 δ はおよそ 1/3 波長分に当たるが、実際の観測では

$$\left|\frac{\delta}{\lambda}\right| < 0.02 \tag{194}$$

で誤差程度と見られるので、干渉縞の移動が実際には観測されなかったと見なすことが出来る。このことは、装置がエーテルに対して止まっているということを意味するので、実際に地球が自転や公転をしているということと矛盾しているように思える。

5.4 ローレンツ変換

運動方程式

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F} \tag{195}$$

は、

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} - (\boldsymbol{V}_0 t + \boldsymbol{R}_0) \tag{196}$$

というガリレイ（ガリレオ）変換の下で不変であったが、電磁波の波動方程式、

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2\triangle\right)\boldsymbol{E} = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2\triangle\right)\boldsymbol{B} = 0 \tag{197}$$

は不変でなかった。マイケルソンとモーレーの実験によれば、光速が不変であるというのが正しいようなので、この波動方程式を不変にするような（座標）変換を求めてみよう。簡単のために、x-方向に伝わる波

$$\boldsymbol{E},\ \boldsymbol{E} \propto f(x - vt) \tag{198}$$

を考えると、波動方程式は

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\boldsymbol{E} = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\boldsymbol{B} = 0 \tag{199}$$

となり、空間座標として x だけを考えることができる。このとき、

$$t' = At + Bx\,, \quad x' = Ct + Dx \tag{200}$$

とすると、（A、B、C、D は定数。）

$$\frac{\partial}{\partial t} = A\frac{\partial}{\partial t'} + C\frac{\partial}{\partial x'}\,, \quad \frac{\partial}{\partial x} = B\frac{\partial}{\partial t'} + D\frac{\partial}{\partial x'} \tag{201}$$

なので[4]、

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} = (A^2 - c^2B^2)\frac{\partial^2}{\partial (t')^2} + 2(AC - c^2BD)\frac{\partial}{\partial t'}\frac{\partial}{\partial x'} + (C^2 - c^2D^2)\frac{\partial^2}{\partial (x')^2} \tag{203}$$

従って

$$A^2 - c^2B^2 = 1\,, \quad AC - c^2BD = 0\,, \quad C^2 - c^2D^2 = c^2 \tag{204}$$

であればいい。この解は、θ をパラメーターとして、

$$A = \cosh\theta\,, \quad B = \frac{1}{c}\mathrm{sinh}\theta\,, \quad C = c\mathrm{sinh}\theta\,, \quad D = \cosh\theta \tag{205}$$

で与えられ、

$$t' = t\cosh\theta - \frac{x}{c}\mathrm{sinh}\theta\,, \quad x' = x\cosh\theta - ct\mathrm{sinh}\theta \tag{206}$$

[4]関数 $f(t,x)$ を上の変換により、(t',x') を通して（合成関数として）(t,x) の関数である、すなわち $f(t,x) = f(t'(x,t), x'(x,t))$ であるとすると、

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial t'}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial t'} + \frac{\partial x'}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial x'} = A\frac{\partial f}{\partial t'} + C\frac{\partial f}{\partial x'}\,, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial t'}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial t'} + \frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x'} = B\frac{\partial f}{\partial t'} + D\frac{\partial f}{\partial x'} \tag{202}$$

となる。

$$\theta = i\phi\ , \quad ct = i\tau \tag{207}$$

とおけば、

$$\tau' = \tau\cos\phi - x\sin\phi\,, \quad x' = x\cos\phi + \tau\sin\phi \tag{208}$$

となるとなるので、この座標変換を (虚数) 時間と空間座標 x の間の虚数角度の回転とみなす事も出来る。

x'-軸の原点は、もちろん $x' = 0$ で与えられるが、これは、(t, x) を書けば、

$$Ct + Dx = 0 \ \ \text{すなわち} \ \ \frac{x}{t} = -\frac{C}{D} = -c\tanh\theta \equiv V \tag{209}$$

となるので、V が二つの座標系の相対速度であることが分かる。

$$1 - \tanh^2\theta = \frac{1}{\cosh^2\theta}\,, \quad \frac{1}{\tanh^2\theta} - 1 = \frac{1}{\sinh^2\theta} \tag{210}$$

などを使うと

$$\beta \equiv \frac{V}{c} \tag{211}$$

とおいて

$$A = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\,, \quad B = -\frac{\frac{\beta}{c}}{\sqrt{1-\beta^2}}\,, \quad C = -\frac{c\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\,, \quad D = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{212}$$

すなわち、

$$t' = \frac{t - \frac{\beta}{c}x}{\sqrt{1-\beta^2}}\,, \quad x' = \frac{-c\beta t + x}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{213}$$

であることがわかる。この変換を、ローレンツ変換という。逆にこの変換により

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{\partial}{\partial t'} - \frac{c\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{\partial}{\partial x'}\,, \quad \frac{\partial}{\partial x} = -\frac{\frac{\beta}{c}}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{\partial}{\partial t'} + \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{\partial}{\partial x'} \tag{214}$$

となり、

$$y' = y\ , \quad z' = z \tag{215}$$

とすれば、電磁場の波動方程式が不変になっていることが分かる。ここで方程式が不変になっているという事は

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2\triangle\right)\boldsymbol{E} = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2\triangle\right)\boldsymbol{B} = 0 \tag{216}$$

ならば

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t'^2} - c^2\triangle'\right)\boldsymbol{E} = \left(\frac{\partial^2}{\partial t'^2} - c^2\triangle'\right)\boldsymbol{B} = 0 \tag{217}$$

が成り立つということである[5]。

今、日常的な時間間隔や距離での運動を考えると、

$$|\beta| \ll 1 \qquad \frac{x}{t} \ll c \tag{218}$$

[5]実際には $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$ はローレンツ変換の下で不変ではない。

なので、

$$t' = t\,, \quad x' = -Vt + x \tag{219}$$

となり、通常のガリレイ変換に含まれる形となる[6]。

5.5 ローレンツ収縮

先のローレンツ変換で、(t, x) という座標で見たときの時空上の 2 点 (t_1, x_1)、(t_2, x_2) は

$$t'_{1,2} = \frac{t_{1,2} - \frac{\beta}{c}x_{1,2}}{\sqrt{1-\beta^2}}\,, \quad x'_{1,2} = \frac{-c\beta t_{1,2} + x_{1,2}}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{220}$$

というように変換される。この変換の下で、

$$(x_1 - x_2)^2 - c^2(t_1 - t_2)^2 = (x'_1 - x'_2)^2 - c^2(t'_1 - t'_2)^2 \tag{221}$$

が不変になることが分かる。回転が、２点間の距離を不変に保つ変換であることを思い出すと、

$$(x_1 - x_2)^2 - c^2(t_1 - t_2)^2 \tag{222}$$

を二つの時空点の間の距離と定義すれば、ローレンツ変換を時間と空間の間の回転とみなすこともできる。ただし、普通の距離が常にゼロより大きいのに対し、この距離は負の値をとることもできる。

さて、長さ l の棒が、棒に平行な方向に速さ v で進んでいたとする。進行方向を x-軸にとると、棒に張り付いていて、棒の進行方向に対して後方の端を原点に取る座標系 (t', x') では棒の両端は、$x = 0$ と $x = l$ で表される。この両端を棒を見ている人の座標系 (x, t) からみると、見ている人の同時刻で（すなわち t を共通にとると）、

$$0 = \frac{-c\beta t + x}{\sqrt{1-\beta^2}}\,, \quad l = \frac{-c\beta t + (x + l')}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{223}$$

すなわち、

$$l = \frac{l'}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{224}$$

ここで l' は見ている人が観測する棒の長さである。

$$\sqrt{1-\beta^2} < 1 \tag{225}$$

より

$$l' < l \tag{226}$$

であり、観測される長さが棒本来の長さより短いことが分かる。これをローレンツ収縮という。時刻 t での棒の両端は棒に固定された座標系で見るとその時刻がそれぞれ

$$t'_{\text{前}} = \frac{t - \frac{\beta}{c}(x + l')}{\sqrt{1-\beta^2}}\,, \quad t'_{\text{後}} = \frac{t - \frac{\beta}{c}x}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{227}$$

[6]変換

$$t' = t + t_0\,, \quad x' = x + x_0$$

でも電磁波の波動方程式は不変である。

より、

$$t'_{前} - t'_{後} = -\frac{\frac{\beta}{c}l'}{\sqrt{1-\beta^2}} = -\frac{\beta l}{c} > 0 \tag{228}$$

となり時間的にずれていることが分かる。すなわち止まっている人が棒の両端を同時に観測したとき、棒に固定された時計が計る時間では、棒の前の先は後の先より過去にあり、その分後ろにあるので短くなる。

同様な考察を棒の長さではなく時間間隔について行う。例えば棒の後端部が時刻 $t' = 0$ のときと $t' = \Delta t'$ のときが、見ている人の座標系で (t_0, x_0) と $(t_0 + \Delta t, x_0 + \Delta x)$ という時空点に対応しているとすると、

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{t_0 - \frac{\beta}{c}x_0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad 0 = \frac{-c\beta t_0 + x_0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \\ \Delta t' &= \frac{(t_0 + \Delta t) - \frac{\beta}{c}(x_0 + \Delta x)}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad 0 = \frac{-c\beta(t_0 + \Delta t) + (x_0 + \Delta x)}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{aligned} \tag{229}$$

なので

$$\Delta t' = \Delta t\sqrt{1-\beta^2} \tag{230}$$

を得る。これは棒の上に置いた時計を見ると進みかたが遅く見えるということを示している。これにより、いわゆる「双子のパラドックス」という現象や、大気圏の上空で生じた寿命の小さなミュー粒子が地表に達するというようなことが起こる。

ミュー粒子はパイ中間子が大気にぶつかったときに生じるが、その寿命はおよそ 2×10^{-6} 秒であり、もし相対性理論による時間の伸びがなければ光速は 3×10^5 km/s なので、0.6 km しか移動できず、到底地表には達しない。

5.6 速度の合成則

ニュートン力学ではある座標系で $\boldsymbol{v}$ で動いている質点をその座標系から速度 $\boldsymbol{V}$ で動いている座標系から見ると、その質点は $\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{V}$ で動いているように見える。しかし、特殊相対性理論では光速度が一定であることからも分かるようにこれは成り立たない。

$\beta = \frac{V}{c}$ として、ローレンツ変換

$$t' = \frac{t - \frac{\beta}{c}x}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad x' = \frac{-c\beta t + x}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{231}$$

から

$$dt' = \frac{dt - \frac{\beta}{c}dx}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad dx' = \frac{-c\beta dt + dx}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{232}$$

であるので、$v^x = \frac{dx}{dt}$ $v'^x = \frac{dx'}{dt'}$ であることに注意すると、

$$v'^x = \frac{v^x - c\beta}{1 - \frac{v^x\beta}{c}} \tag{233}$$

となる。また、

$$y' = y \ , \quad z' = z \tag{234}$$

すなわち

$$dy' = dy \ , \quad dz' = dz \tag{235}$$

であることに注意すると

$$v'^{y,z} = \frac{v^{y,z}\sqrt{1-\beta^2}}{1-\frac{v^x\beta}{c}} \tag{236}$$

であることがわかる。この速度の合成則を見れば分かるように、$\boldsymbol{v}$ や V の大きさが光速より小さいと、$\boldsymbol{v}'$ も光速を越えない。実際

$$\begin{aligned}
&\left(v'^x\right)^2 + \left(v'^y\right)^2 + \left(v'^y\right)^2 \\
&= \frac{\left(v^x - c\beta\right)^2 + \left\{\left(v^y\right)^2 + \left(v^z\right)^2\right\}\left(1-\beta^2\right)}{\left(1-\frac{\beta v^x}{c}\right)^2} \\
&= \frac{\left(v^x\right)^2\left(1-\beta^2\right) + \left(c - \beta v^x\right)^2 - c^2\left(1-\beta^2\right) + \left\{\left(v^y\right)^2 + \left(v^z\right)^2\right\}\left(1-\beta^2\right)}{\left(1-\frac{\beta v^x}{c}\right)^2} \\
&= \frac{\left(v^2 - c^2\right)\left(1-\beta^2\right) + \left(c-\beta v^x\right)^2}{\left(1-\frac{\beta v^x}{c}\right)^2} \\
&= c^2 - \frac{\left(c^2 - v^2\right)\left(1-\beta^2\right)}{\left(1-\frac{\beta v^x}{c}\right)^2}
\end{aligned} \tag{237}$$

であるが $c^2 > v^2$ ならば最後の式の 2 項目は負になるので

$$\left(v'^x\right)^2 + \left(v'^y\right)^2 + \left(v'^y\right)^2 < c^2 \tag{238}$$

である。従って、特殊相対性理論では光速が速さの上限を与えることが分かる。

5.7 4元ベクトルと固有時

(x, y, z) が空間の一点を示す位置ベクトルであるように、(t, x, y, z) も時空間の一点を示すベクトルであるとみなすことができる。一般にローレンツ変換によって (ct, x, y, z) と同じように変換するベクトルを 4 元ベクトルと呼ぶ。速度はその変換則から分かるように 4 元ベクトルではない。ところが、

$$1 - \frac{v'^2}{c^2} = \frac{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\left(1-\beta^2\right)}{\left(1-\frac{v^x\beta}{c}\right)^2} \tag{239}$$

であることを使うと、

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \frac{v^x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{\beta}{c}}{\sqrt{1-\beta^2}} \ , \quad \frac{v'^x}{\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}} = \frac{\frac{v^x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}c\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \ , \quad \frac{v'^{y,z}}{\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}} = \frac{v^{y,z}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{240}$$

となり、

$$\left(\frac{c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \frac{v^x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \frac{v^y}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \frac{v^z}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) \tag{241}$$

が４元ベクトルになっていることが分かり、これを４元速度という。

質点の運動は (t, x, y, z) という時空間中の曲線（軌跡）として表せる。これを世界線という。２時空間点 (t_1, x_1, y_1, z_1) と (t_2, x_2, y_2, z_2) の間の距離の二乗を

$$l^2 = -c^2(t_1-t_2)^2 + (x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2 + (z_1-z_2)^2 \tag{242}$$

で定義するとこれがローレンツ変換で不変になっていることが分かる。このようなローレンツ変換で不変な量を（ローレンツ）スカラーと呼ぶ。そこで、世界線上の微小な距離を利用して

$$d\tau^2 = \frac{1}{c^2}(c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2) = dt^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) > 0 \tag{243}$$

という量を定義すると、これを積分した τ は世界線の長さに比例している。また、各時刻毎に質点が止まっているような座標系を考えると、そのような座標系では

$$dx = dy = dz = 0 \tag{244}$$

なので、

$$d\tau = dt \tag{245}$$

となり、τ が質点上の観測者が観測する時間になっていて固有時と呼ばれる。$d\tau$ が（ローレンツ）スカラーで (cdt, dx, dy, dz) は４元ベクトルなので $\left(\frac{cdt}{d\tau}, \frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}, \frac{dz}{d\tau}\right)$ も４元ベクトルであることがわかる。これは４元速度に他ならない。

今

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{246}$$

という量を導入し、$x^0 \equiv ct$ とすると、

$$ds^2 \equiv c^2d\tau^2 = \sum_{\mu,\nu=0,1,2,3} \eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \tag{247}$$

と書ける。特殊相対性理論では上下に同じギリシャ文字がある際にはその文字について 0, 1, 2, 3 について和をとることにする。これをアインシュタインの縮約またはアインシュタインの記法という。例えば

$$A^\mu B_\mu = \sum_{\mu=0,1,2,3} A^\mu B_\mu\,, \quad \eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = \sum_{\mu,\nu=0,1,2,3} \eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \tag{248}$$

である。$\eta_{\mu\nu}$ の逆行列を $\eta^{\mu\nu}$ と書く。

$$\eta_{\mu\rho}\eta^{\rho\nu} = \sum_{\mu=0,1,2,3} \eta_{\mu\rho}\eta^{\rho\nu} = \delta_\mu^{\ \nu} \equiv \begin{cases} 1 & (\mu = \nu) \\ 0 & (\mu \neq \nu) \end{cases} \tag{249}$$

$\eta_{\mu\nu}$ と $\eta^{\mu\nu}$ の成分は同じである。上付きの添え字を持つベクトルと下付きの添え字を持つベクトルは次のような関係にある：

$$A^\mu = \eta^{\mu\nu}A_\nu\,, \quad A_\mu = \eta_{\mu\nu}A^\nu\ . \tag{250}$$

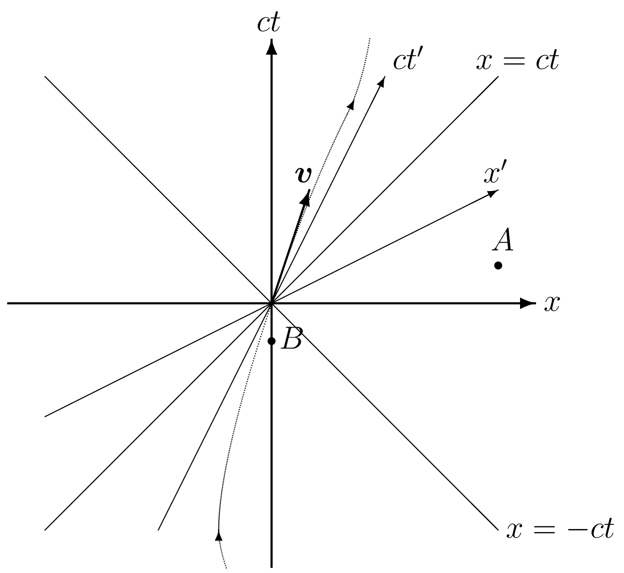
5.8　光円錐と因果律

x-方向に進む光の軌跡は $x = \pm ct$ となる。通常の物体の速さは光速より小さいので、図の様に ct-x 平面上でその軌跡は、$|x| < |ct|$ $(x^2 < (ct)^2)$ の領域に限られる。このことは、あらゆる信号が光速を越えて伝わらないことを示している。

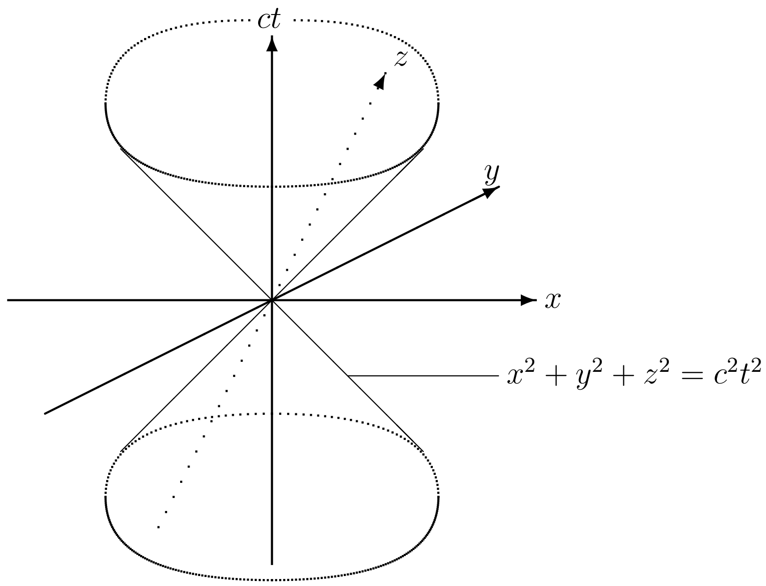
ローレンツ変換で

$$x' \pm ct' = \frac{x - c\beta t \pm c\left(t - \frac{\beta}{c}\right)}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{(x \pm ct)(1 \mp \beta)}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{251}$$

なので、$x = \pm ct$ ならば $x' = \pm ct'$ で光の軌跡はどちらの座標系で見ても変わらない。一方 x'-軸は $t' = 0$ で与えられるので、ct-x 平面上では $ct = \beta x$ という直線で表され、ct'-軸は $x' = 0$ で与えられるので、ct-x 平面上では $c = c\beta t = Vt$ という直線で表される。もし、図の A という時空間上の点を考えると、この点は元の xt-座標系では未来にあるが、$x't'$-座標系では過去にある。このように $|x| > |ct|$ にあるような時空間上の点はローレンツ変換で未来にも過去にもなる。もし、光より早く信号を伝えられるとすると、原点から A に信号を伝えることが出来る。点 B は $x't'$-座標系では (空間的には離れているが) 未来にあるので点 A から再び B に信号を伝えることが出来る。そうすると、結果的に過去に信号を伝えることが出来るようになる。通常親の因果は子に報いるが子の因果は親に報いない。このことは信号が過去に伝わらないということで、このことを因果律という。信号が光速より早く伝わらないという事は因果律を破らないために必要である。



今度は x-方向に限らず (x, y, z) という空間座標全てを考えることにする。時間 t の間に光が原点から (x, y, z) という点に達したとすると、$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = ct$ である。$z = 0$ とすると $x^2 + y^2 = c^2t^2$ となるが、これは図の様に xy-ct 空間内の円錐となる。一般に $x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2$ を満たす 4 次元時空 (空間 3 次元と時間を合わせて) 内の超曲面のことを光円錐という。物体の速さは光速より遅いのでその運動は光円錐の内部に限られる。この領域を時間的な領域という。一般に $x^2 + y^2 - c^2t^2 > 0$ となる領域を空間的な領域といい、$x^2 + y^2 - c^2t^2 < 0$ となる領域を時間的な領域という。時間的な領域は $t > 0$ である未来と $t < 0$ である過去に分かれる。空間的領域では過去と未来がローレンツ変換で変わる。



5.9 相対論的エネルギー

４元速度にに質点の質量 m をかけたものを４元運動量という:

$$(p^\mu) = \left(\frac{mc}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \frac{mv^x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \frac{mv^y}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \frac{mv^z}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right) \tag{252}$$

４元運動量の空間成分はニュートン力学の運動量の拡張とみなせるが時間成分はどのような意味を持っているだろうか？時間成分に c^2 を掛けたものを、$\frac{v^2}{c^2}$ が小さいとして展開すると、

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \cdots \tag{253}$$

となり、２項目が運動エネルギーに他ならないことがわかる。ニュートン力学ではエネルギーには定数だけ加える不定性があった。最初の項は定数なのでこの不定性に含めることができ、４元運動量の時間成分に c^2 を掛けたものを相対論的なエネルギーとみなすことができる。ニュートン力学ではエネルギーに定数だけ加える不定性があったが、特殊相対性理論ではエネルギーは４元ベクトルの１成分なのでこのような不定性がなくなる。従って、先の展開の第１項 mc^2 は意味のある量で静止エネルギーと呼ばれる。このことは、質量もエネルギーの一種であるということを示している。

$$(p^\mu) = \left(\frac{E}{c}, p^x, p^y p^z \right) = \left(\frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \frac{mv^x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \frac{mv^y}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \frac{mv^z}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right) \tag{254}$$

とおくと、相対論的なエネルギー E と $\boldsymbol{p} = (p^x, p^y, p^z)$ の間には、

$$E^2 - \boldsymbol{p}^2 c^2 = m^2 c^4 \tag{255}$$

という関係があることに注意する。アインシュタインの記法を使うと (255) 式は

$$p^{\mu}p_{\mu}=\eta_{\mu\nu}p^{\mu}p^{\nu}=m^2c^2 \tag{256}$$

と書ける。

ニュートンの運動方程式は特殊相対性理論ではどのように拡張されるのであろうか。ニュートン力学が質点の速度が 0 になる極限をとった座標系では正しく、固有時 τ が質点が止まってみえるような座標系での時間であることを考えると、ニュートンの運動方程式を

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{d\tau}=\boldsymbol{F} \tag{257}$$

と書き換えればいいことが分かる。ここで、$\boldsymbol{p}$ は４元運動量の空間成分である。４元運動量の時間成分がエネルギーであり、エネルギーの時間変化が仕事率 P であるので、

$$\left(\frac{P}{c^2},F^x,F^y,F^z\right) \tag{258}$$

が４元ベクトルになっていることが分かる。

5.10 相対論的ラグランジアン

運動方程式 (257) は次のラグランジアンから導かれる。

$$L=-mc^2\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\sum_{i=1,2,3}\left(\frac{dx^i}{dt}\right)^2}-V(x^i)\ . \tag{259}$$

実際、

$$p_i=\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}=\frac{m\dot{x}^i}{\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\sum_{j=1,2,3}\left(\frac{dx^i}{dt}\right)^2}}\ . \tag{260}$$

で (254) の表式と一致する。

$$\sum_{i=1,2,3}\left(p^i\right)^2=\frac{m^2\sum_{i=1,2,3}\left(\dot{x}^i\right)^2}{1-\frac{1}{c^2}\sum_{i=1,2,3}\left(\dot{x}^i\right)^2} \tag{261}$$

より

$$\sum_{i=1,2,3}\left(\dot{x}^i\right)^2=\frac{\sum_{i=1,2,3}\left(p^i\right)^2}{m^2+\frac{1}{c^2}\sum_{i=1,2,3}\left(p^i\right)^2} \tag{262}$$

となるのでハミルトニアンは

$$H=\sum_{i=1,2,3}p^i\dot{x}^i-L=\sqrt{m^2c^4+c^2\sum_{i=1,2,3}\left(p^i\right)^2}+V(x^i)\quad\left(=\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\sum_{i=1,2,3}\left(\dot{x}^i\right)^2}}+V(x^i)\right) \tag{263}$$

となり、初項は (254) または (255) の E の表式と一致する。

(259) の第一項を積分すると

$$S=-mc^2\int dt\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\sum_{i=1,2,3}\left(\frac{dx^i}{dt}\right)^2}=-mc^2\int d\tau \tag{264}$$

となり、固有時に比例することがわかる。

5.11 相対論的電磁気学

マクスウェル方程式

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}\,, \quad \mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0\,, \quad \mathrm{rot}\,\boldsymbol{B} - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \mu_0\boldsymbol{j}\,, \quad \mathrm{div}\,\boldsymbol{B} = 0 \tag{265}$$

の中の電場 $\boldsymbol{E}$ と磁束密度 $\boldsymbol{B}$ を静電ポテンシャル ϕ とベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ を使って次のように書く：

$$\boldsymbol{E} = -\mathrm{grad}\,\phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\ , \quad \boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}\ . \tag{266}$$

そうするとマクスウェル方程式 (265) の第 2 式と第 4 式は恒等式になり、第 1 式と第 3 式は

$$-\triangle\phi - \frac{\partial\,(\mathrm{div}\,\boldsymbol{A})}{\partial t} = \frac{\rho}{\epsilon_0}\ , \quad -\triangle\boldsymbol{A} + \mathrm{grad}\ (\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}) + \mu_0\epsilon_0\left(\frac{\partial\,(\mathrm{grad}\,\phi)}{\partial t} + \frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}\right) = \mu_0\boldsymbol{j}\ . \tag{267}$$

と書き直せる。更に

$$x^0 \equiv ct\ , \quad A^0 \equiv \frac{\phi}{c}\ , \quad \boldsymbol{A} = (A^i)\ , \quad j^0 \equiv c\rho\ , \quad \boldsymbol{j} = (j^i) \tag{268}$$

とすると $\mu_0\epsilon_0 = 1/c^2$ であることを使うと (267) の二つの式は次のひとつの式で書ける：

$$\Box A_\mu - \partial_\mu\,(\partial_\nu A^\nu) = \mu_0 j_\mu \tag{269}$$

と書ける。ここで $\Box$ はダランベルシアンと呼ばれ、以下のように定義される：

$$\Box = \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \triangle\ . \tag{270}$$

ここで

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} \tag{271}$$

である。今

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\nu \tag{272}$$

とすると、

$$E^i = cF^{i0} = -cF^{0i}\ , \quad B^1 = {F_2}^3 - = {F_3}^2\ , \quad B^2 = {F_3}^1 = -{F_1}^3\ , \quad B^3 = {F_1}^2 = -{F_2}^1 \tag{273}$$

であり、(269) は

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\mu\ . \tag{274}$$

と書ける。

電磁場から力を受ける電荷 q を持つ粒子のラグランジアンは次のように与えられる：

$$L = -mc^2\sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\sum_{i=1,2,3}\left(\frac{dx^i}{dt}\right)^2} - q\frac{dx^\mu}{dt}A_\mu(x^\mu) = -mc^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - qv^iA_i - qcA_0 \tag{275}$$

実際オイラー=ラグランジェ方程式は

$$0 = \frac{d}{dt}\left(\frac{mv_i}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - qA_i\right) + q\sum_{j=1,2,3} v^j \frac{\partial A_j}{\partial x^i} + qc\frac{\partial A_0}{\partial x^i} \tag{276}$$

すなわち、

$$\frac{dp_i}{dt} = q\dot{A}_i + q\sum_{j=1,2,3} v^j \frac{\partial A_i}{\partial x^j} - q\sum_{j=1,2,3} v^j \frac{\partial A_j}{\partial x^i} - qc\frac{\partial A_0}{\partial x^i} \tag{277}$$

となるが、(268), (272), (273) などを使うと

$$\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B} = \boldsymbol{v}\times \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} = -\left(\boldsymbol{v}\cdot\nabla\right)\boldsymbol{A} + \sum_{i=1,2,3} v^i \nabla A^i \tag{278}$$

なので、ローレンツ力 F^i は

$$\begin{aligned} F_i &= q\left(E_i + (\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})_i\right) \\ &= q\left(\frac{\partial A_i}{\partial t} - c\frac{\partial A^0}{\partial x^i} - \sum_{j=1,2,3} v^j \frac{\partial A^i}{\partial x^j} + \sum_{j=1,2,3} v^j \frac{\partial A^j}{\partial x^i}\right) \\ &= q\left(\frac{\partial A_i}{\partial t} - c\frac{\partial A^0}{\partial x^i} + \sum_{j=1,2,3} v^j \frac{\partial A_i}{\partial x^j} - \sum_{j=1,2,3} v^j \frac{\partial A_j}{\partial x^i}\right) \end{aligned} \tag{279}$$

と (277) の右辺が得られる。