

一般化逆解析手法と岩盤力学への適用

大上俊之



報告番号 乙 第 3977 号

①

一般化逆解析手法と岩盤力学への適用

1991年2月

大上俊之

目次

1 序論	1
1.1 概説	1
1.2 既往の研究の展望	3
1.3 本論文の構成	9
2 慣用的手法による線形弾性体の同定	11
2.1 概説	11
2.2 逆定式化法	11
2.2.1 桜井らの同定法	11
2.2.2 Gioda らの同定法	13
2.3 直接定式化法	19
2.3.1 Gauss-Newton 法による定式化	19
2.3.2 直交異方性体の弾性パラメーターの同定	20
2.3.3 分布荷重を受ける成層岩盤	23
2.3.4 トンネル掘削問題	29
2.3.5 岩石の圧裂試験	31
2.4 まとめ	34
3 境界制御問題としての一般化逆解析手法	35
3.1 概説	35
3.2 境界制御問題としての逆解析	35
3.3 本解析手法の適用例	43
3.3.1 トラス問題	43
3.3.2 均一岩盤モデルに対する各手法の比較検討	45
3.3.3 平板載荷試験	49
3.3.4 複合岩盤掘削問題	53
3.3.5 無限領域, 半無限領域問題	56
3.4 まとめ	59

4	線形粘弾性体の同定解析	60
4.1	概説	60
4.2	線形粘弾性基礎理論	61
4.2.1	刺激・応答理論	61
4.2.2	応力緩和と緩和スペクトル	62
4.2.3	クリープと遅延スペクトル	67
4.2.4	緩和スペクトルと遅延スペクトルの漸近展開	69
4.3	増分理論による有限要素解析	71
4.4	材料試験とモデル定数の評価	76
4.5	逆解析による粘弾性定数の同定	79
4.6	本解析手法の適用例	88
4.6.1	一次元応力場の問題	88
4.6.2	平板載荷試験	98
4.6.3	線形粘弾性地山における斜面	101
4.7	まとめ	106
5	不連続性岩盤に対する損傷場の同定解析	108
5.1	概説	108
5.2	損傷テンソルと実質応力	109
5.3	損傷材料に対する仮想仕事式と有限要素解析	113
5.4	逆解析による損傷テンソルの同定	116
5.5	本手法の適用例	119
5.5.1	円形トンネル問題	119
5.5.2	地下空洞掘削問題	121
5.6	まとめ	131
6	結論	132
	謝辞	135
	参考文献	136

第1章 序論

1.1 概説

計算機の発達と有限要素法、境界要素法等の計算手法の開発の進歩に伴って、数値解析が理論解析や実験にとって変わるほどに進展し、地盤工学の分野においても調査、試験、設計、安定解析、計測、施工管理等のそれぞれの段階で種々の数値解析が適用されている。その結果、理論解析や実験的手法では再現ができない複雑な条件でも比較的容易に取り扱えるようになってきている。とりわけ有限要素法は、異方性体、材料非線形特性等を容易に取り込めることができるという大きな長所を有しており、その汎用性は大きい(川本・林 1978, グーデフス 1982, ネイラー他 1987, 市川 1990)。一方、境界要素法は有限要素法に比べて1次元低く問題を取り扱えるため、無限境界を有する問題や3次元問題の解析に威力を発揮でき、無限領域、半無限領域の問題を扱う地盤工学、岩盤力学の分野ではその利用価値は高い(グーデフス 1982, Venturini 1983, Telles 1983, Crouch and Starfield 1983)。また、両手法の特性を生かすために有限要素と境界要素を結合して解析する手法(Zienkiewicz et al. 1977, Beer 1983, Mitsui et al. 1985, Ohkami, Mitsui and Kusama 1985, Ohkami and Mitsui 1986, 遠藤他 1988)、岩盤の不連続面の影響を考慮するためにジョイント要素(Goodman, Taylor and Brekke 1968)やクラック要素(Kawamoto et al. 1982)を導入した有限要素解析、個別剛体要素法(Cundall 1971)、剛体バネモデル(川井 1981)、ステレオ投影図を利用する方法(川本・藤川 1984)、損傷力学理論(京谷・市川・川本 1985, 1987, Kawamoto, Ichikawa and Kyoya 1988)等も提案されており、有効な解析手法となっている。

地盤や岩盤の複雑な実際の挙動をより正確に把握するためには、原位置の状態にできるだけ忠実な数値解析モデルを設定することが重要であるが、それとともに、地盤材料の力学特性をできるだけ精度良く推定し、データとして入力することが必要不可欠である。一般には、地盤材料の力学特性は、室内試験や原位置試験を通じて評価されるが、十分な調査試験を行なって得られた値を用いて解析を行なっても、実際の地盤構造物の挙動と解析結果が一致しない場合が多い。これは、地盤の不均質性、不確定性や、さらに、地盤の挙動が施工する構造物の大きさや形状によっても影響を受ける等の多くの条件に大きく依存しているためであり、このような地盤材料固有の性質

が、調査試験技術の発達、解析手法の高度化にもかかわらず、地盤や岩盤の力学挙動の予測を困難なものとしている。

地盤工学におけるこのような問題点を解決する一つの手法として、現場計測結果の逆解析による方法が提案されている。これは、合理的な設計・施工を行うために現場計測工法におけるフィードバック解析として提案されたもので、施工中の構造物や地盤の挙動を観測・計測し、その結果から逆に地山の材料定数や初期応力などの系の未知パラメータを逆解析によって再評価し、続く施工の段階に対して設計の見直しや施工方法の検討のために情報を提供する手法である (Sakurai and Abe 1979, 桜井 1982, Gioda 1985, 桜井・清水 1987)。このように、通常の構造解析 (順解析) が荷重および材料定数をデータとして与え、定められた境界条件のもとで応力、変位およびひずみを求めるものであるのに対し、逆解析は、応力、変位あるいはひずみの測定値をデータとして与え、与えられた境界条件のもとで荷重および材料定数を求めるものである。

一般に、通常の原因から結果を導く順問題の解析プロセスとは逆に、観測結果などから原因となっているものを求めようとするのが逆問題あるいは逆解析といわれる (久保 1987, 数理科学 1986)。このような逆問題的アプローチは、種々の分野で用いられている。たとえば、医療検査の分野では、多方面からの X 線像をもとに断層像を再構成する X 線 CT、原子物理学では、粒子の散乱データをもとに散乱を生じさせたポテンシャルを求める逆散乱問題、言語学では現代の言語体系の比較と古典の調査より言語の起源と変遷をたどる問題、考古学では化石や遺跡から古代の事象や生活様式を推定する問題などがある。また、重力探査や電気探査による地中の埋蔵資源の推定や、天体運動に関するケプラーの法則なども逆問題に属すると考えられる。

逆問題の概念を以上のように広義に解釈するとその種類、内容もさまざまであるが、問題を境界値問題の逆解析に限定すると、つぎのように逆解析を定義することができる (久保・大路 1987)。すなわち、境界値問題の順解析では、結果を導くために必要な条件は、(1) 解析の対象とする領域および境界が既知であること、(2) 領域内の支配方程式が既知であること、(3) 必要な境界条件 (時間が関与するときには初期条件も含む) が与えられていること、(4) 領域内の材料定数が既知であることなどである。したがって、逆問題を順問題以外のものとするれば、(1) から (4) の条件の中に未知のものが一つ以上あるときに、それを観測値などの情報を用いて求めるのが逆問題であると考えることができる。

本研究は、上記 (1) から (4) の条件のうちの (4) の条件について、材料物性値の同定に関する逆解析をあらためて境界制御問題として考え、その理論的背景を明らかにするとともに、あらたに同定解析の一手法を提案しようとするものである。

1.2 既往の研究の展望

逆解析に関してこれまでに種々の解析方法が提案されている。Gioda (1985), Gioda and Sakurai (1987) によれば、その定式化の方法は大きく分けて、逆定式化法 (Inverse formulation method) と直接定式化法 (Direct formulation method) に分類できる。前者は、測定値を順解析 (通常解析) における支配方程式に取り込み、初期応力や材料定数を未知パラメータとして、新たに順解析の逆の定式化を行うものであり、後者は、測定値と解析値との差を最小化するように同定する方法である。なお、Yeh (1986) は浸透問題の逆解析において、前者のタイプを Equation error criterion (Direct method)、後者を Output error criterion (Indirect method) として 2 つの誤差規準 (Error criterion) で区分している。

有限要素法を用いた逆定式化法は Kavanagh and Clough (1971), Kavanagh (1973) によって定式化された。地盤材料を対象としては、Kirsten (1976) は斜面の掘削問題に対して材料の同定解析を行い、Gioda and Jurina (1981) は測定変位からアースアンカー等に作用する圧力を同定している。さらに、Cividini, Jurina and Gioda (1981), Maier and Gioda (1982) は線形弾性モデルを用いて非均質地盤にも適用可能な同定法を提案した。桜井は、地下空洞の掘削問題について地山の初期応力とヤング率との比を同定する有限要素法の定式化を示し (桜井・武内 1983, Sakurai and Takeuchi 1983)、さらに、境界要素法による定式化 (Shimizu and Sakurai 1983, 桜井・清水・壺内 1987) やマイクロコンピュータを利用したシステムの開発 (Sakurai and Shinji 1984, 桜井・進士 1985)、観測変位の結果から掘削による地下空洞周辺の塑性領域の拡りの推定 (Sakurai, Shimizu and Matsumuro 1985, 桜井・清水・松室 1988) 等、トンネルの設計・施工に関して、現場計測の結果の評価に積極的に逆解析の手法を取り入れることを提唱している。また、久武・伊藤・大田 (1984)、久武 (1986) はトンネルの掘削問題について有限要素法を用いた三次元逆解析の手法を示しており、Yang and Sterling (1989) は間接法の境界要素法を用いて、岩盤地山の素掘トンネルを対象として地山の初期応力、弾性

係数およびポアソン比の同定解析を提案している。Kyoya et al. (1988) は Maier and Giorda (1982) の手法を損傷力学に適用し、不連続性岩盤の損傷テンソルを同定している。この逆定式化法に基づく方法は、応力とひずみの関係が線形ならば、逆定式化の過程で未知量についての式を誘導できるが、そうでなければ定式化を行うことが困難であるという欠点を有している。

一方、Iding, Pister and Taylor (1974) は直接定式化法により非線形弾性体(超弾性体)に対して構成則の関数形に依存しない材料定数の同定法を提案した。市川ら(1987), Ichikawa, Kyoya and Kawamoto (1987)はこの思想を応用して大谷石の一軸および三軸試験の結果から岩質材料の硬化パラメーター K を推定することを提案している。Giorda and Maier (1980) はトンネルの水室試験によって得られた測定変位から、Mohr-Coulomb 型の弾塑性地山の粘着力、内部摩擦角および初期応力を同定する方法を示し、Cividini, Jurina and Giorda (1981) は軟弱な層を含む地盤が鉛直荷重を受ける場合について、有限要素法を用いて地盤の材料定数と軟弱層の位置の同定解析を行なっている。また、Arai, Ohta and Yasui (1983) は非均質地盤の掘削問題に対して線形弾性モデルのヤング率とポアソン比の同定を行ない、荒井は、その手法を拡張して、トンネル掘削時における周辺地盤の変形係数・強度定数の推定(荒井・片瀬 1984) や合理的な支保パターンの決定方法(荒井・片瀬・谷本 1984)、盛土による圧密粘土の材料定数の推定(Arai, Ohta and Kojima 1984, Arai et al. 1986, Arai, Ohta and Kojima 1987)、浸透流問題における透水係数の推定(Arai, Ohnishi and Kasagawa 1985) 等、一連の研究を行なっている。大西・東出(1983)は、境界要素法と Simplex 法を結合させて、素掘トンネルの掘削問題について等方等質弾性地山の材料定数を同定しており、Nguyen (1984) は、斜面の安定解析における円形すべり面について、地盤の粘着力と内部摩擦角を Secant 法を用いて同定している。また、Feng and Lewis (1987) は、トンネル掘削問題について、深さの一次関数と仮定した地山の初期応力を推定する同定解析法を提案している。さらに、異方性岩盤や非均質岩盤の材料に対しては境界要素法による定式化(大西・東出 1985, 大上他 1988) が示されている。この他、Hisatake and Ito (1985) は覆工内面変位からヤング率、ポアソン比、静止土圧係数を推定する有限要素法によるトンネルの三次元逆解析を行っており、大西・井尻(1986)は、不均質地盤の浸透流問題について、材料特性である透水係数とともに赤池の情報量基準(AIC)を用いてモデルの幾何学特性の同定解析を示し、青木・嘉門(1987)は Gauss-Newton 法

を用いて、不均質地盤における透水量係数、貯留係数およびその空間分布、初期条件を同時に推定する手法を提案している。この直接定式化法は、有限要素法や境界要素法などにより解析値を得る過程と、その解析値の一部と測定値との差を最小化するように未知パラメーターの値を探索する過程とが独立しているため、逆解析のための特別な定式化を必要とせず、プログラム作成は容易である。また、非線形問題にも適用できる利点を有しているが、繰り返し計算を必要とするために計算時間に問題がある。

上記の逆定式化法および直接定式化法の分類では、いずれの方法も同定解析が可能となるためには、未知パラメーターの数 (U) と観測データの数 (O) との関係に対して

$$U \leq O$$

を満足しなければならない。一方、未知パラメーターの数 (U) と観測データの数 (O) との関係が $U > O$ であるときや、 U にくらべて O が十分に多くないとき、あるいは、非線形最小二乗法(直接定式化法)を用いるとき解が初期値に依存して大きく変動するときなどには、逆解析に入る前の事前の情報を考慮した方法をとる必要が生じる。このために、カルマン・フィルターを用いた同定解析(星谷・斉藤 1983, Murakami and Hasegawa 1985, 村上・長谷川 1987, 門田他 1987, 1988, 斉藤・古賀・鎌田 1988, 鈴木・石井 1989) や、事前分布を観測値を用いて更新し、事後分布を作成するベイズ的アプローチによる逆解析が提案されている(Folayan, Hoeg and Benjamin 1970, Matsuo and Asaoka 1978, Asaoka 1978, Asaoka and Matsuo 1979, 1980, Cividini, Maier and Nappi 1983)。

上記の分類に基づいた逆解析法の一覧を表 1.1 ~ 表 1.3 に示す。ただしここで、逆解析の方法が決定論的であるか、統計的あるいは確率論的であるかという区別は表 1.1, 1.2 と表 1.3 との間の対比に見いだされるわけではない(村上 1989) ことに注意しなくてはならない。なお、このほか浸透問題の逆解析については、Yeh (1986) により詳細な分類表が作成されている。

表 1.1: 逆定式化法に基づく同定解析

対象モデル	離散化	同定するパラメータ	数値解法	参考文献
2次元弾性	FEM	ヤング率 E , ポアソン比 ν	最小二乗法	Kirsten (1976)
2次元 非均質弾性	FEM	土圧分布	最小二乗法	Gioda and Jurina (1981)
2次元 非均質弾性	FEM	E, ν	最小二乗法	Cividini et al. (1981) Maier and Gioda (1982)
2次元弾性	FEM	初期応力パラメータ (σ_0/E)	最小二乗法	桜井・武内 (1983) Sakurai and Tsubouchi (1983)
3次元弾性	BEM	初期応力パラメータ	最小二乗法	Sakurai and Shimizu (1983) 桜井・清水・壺内 (1987) Sakurai and Shinji (1984)
2次元弾性	FEM	初期応力パラメータ (マイクロコンピュータ用)	最小二乗法	桜井・進士 (1985)
2次元 Mohr-Coulomb 弾・完全塑性	FEM	塑性境界	最小二乗法	Sakurai et al. (1985) 桜井・清水・松室 (1988)
3次元弾性・ 粘弾性	FEM	E , 掘削解放力 クリープ関数	最小二乗法	久武・伊藤・太田 (1984) 久武 (1986)
2次元弾性 (母岩材)	FEM	損傷テンソル	最小二乗法	Kyoya et al. (1988)
2次元弾性	BEM	E, ν , 初期応力	最小二乗法	Yang and Sterling (1989)

表 1.2: 直接定式化法に基づく同定解析

対象モデル	離散化	同定するパラメータ	数値解法	参考文献
2次元 Mohr-Coulomb 弾・完全塑性	FEM	初期応力, 粘着力 c , 内部摩擦角 φ	Simplex 法	Gioda and Maier (1980)
2次元 非均質弾性	FEM	E , 軟弱層の位置	Simplex 法	Cividini et al. (1981)
2次元 非均質弾性	FEM	E, ν	共役勾配法	Arai et al. (1983)
2次元 Duncan-Chang モデル	FEM	初期接線剛性係数 G_i , せん断強度 S_f, ν	共役勾配法	荒井・片瀬 (1984)
2次元 Duncan-Chang モデル	FEM	G_i, S_f	共役勾配法	荒井・片瀬・ 谷本 (1984)
2次元 非均質弾性	FEM	E, ν , 透水係数 k	共役勾配法	Arai et al. (1984) Arai et al. (1986)
2次元 飽和-不飽和 浸透流	FEM	飽和透水係数	Simplex 法	Arai, Ohnishi and Kasagawa (1985)
2次元 Duncan-Chang モデル	FEM	G_i, S_f, ν, k	共役勾配法	Arai, Ohta and Kojima (1987)
2次元弾性	BEM	せん断弾性係数 G , ν	Simplex 法	大西・東出 (1983)
2次元弾性	円形す べり面	c, φ	Secant 法	Nguyen (1984)
2次元 非均質弾性	BEM	G, ν , 幾何学的特性	Simplex 法	大西・東出 (1985)
3次元弾性・ 粘弾性	FEM	E, ν , 静止土圧係数 クリープ関数	Simplex 法	Hisatake and Ito (1985)
2次元弾性	FEM	初期応力	Householder 変換	Feng and Lewis (1987)
2次元直交 異方性弾性	BEM	E, G, ν	Gauss-Newton 法	大上他 (1988)
2次元 不均質地盤 非定常浸透流	FEM	k , 幾何学的特性	修正 Marquardt 法	大西・井尻 (1986)
2次元 不均質地盤 非定常浸透流	FEM	k , 貯留係数および その空間分布, 初期条件	Gauss-Newton 法	青木・嘉門 (1987)
軸対称 Drucker- Prager 弾塑性	FEM	硬化パラメータ	Newton-Raphson 法	市川他 (1987) Ichikawa et al. (1988)

表 1.3: 事前情報を考慮した同定解析

離散化手法	同定するパラメータ	数値解法	参考文献
	体積圧縮係数 m_c	Bayes 推定	Folayan et al. (1970)
浅岡モデル	浅岡モデルのパラメータ	Bayes 推定	Asaoka (1978) Asaoka and Matsuo (1979), (1980)
FEM	E , 軟弱層の位置	Bayes 推定	Cividini et al. (1983)
飽和砂質地盤の等価線形モデル	線形モデルの減衰定数, 固有円振動数	拡張 Kalman フィルタ	星谷・斉藤 (1983)
浅岡モデル	浅岡モデルのパラメータ	最小二乗法	Asaoka and Matsuo (1984)
浅岡モデル	浅岡モデルのパラメータ	Kalman フィルタ	Murakami et al. (1985)
FDM	間隙水圧	Kalman フィルタ	Murakami et al. (1985)
FEM	E, ν	Kalman フィルタ	村上・長谷川 (1987)
FEM	E , せん断弾性係数 G , 初期地圧の側圧係数, 異方性の主軸方向	拡張 Kalman フィルタ	門田他 (1987)
FEM と BEM の結合手法	E	拡張 Kalman フィルタ	門田他 (1988)
山留め架構モデル	山留め壁背面側圧, 水平方向地盤反力係数	拡張 Kalman フィルタ	斉藤・古賀・鎌田 (1988)
FEM	透水量係数, 貯留係数, 流入量	共役勾配法	本城・森嶋 (1988)
FEM	E の分布	拡張 Kalman フィルタ	鈴木・石井 (1989)

1.3 本論文の構成

本論文は6章より成る。まず、第2章では、線形弾性問題を対象に、逆解析の代表的な定式化法である逆定式化法と直接定式化法についてその概要を述べる。逆定式化法では、有限要素法を用いた桜井と Gioda の方法について概説し、両者の比較・検討を行う。続いて、直接定式化法に基づく逆解析法の定式化の過程を示し、直接定式化法による解析例として境界要素法を用いた直交異方性体の同定解析を行い、その有効性ならびに問題点を検討する。

第3章では、線形弾性問題の枠組みの中で順解析に対して解くべき方程式系について整理した後、あらためて境界制御問題として逆解析について考察を行ない、逆解析の一般的な構造を示す。さらに、直接定式化法を一般化した同定解析の一手法を提案する。この手法は、有限要素法の剛性方程式あるいは境界要素法の係数方程式と観測条件式に対して Newton 法を適用し、最小二乗法を用いて線形連立方程式を繰り返し解くという手法で、系統的に問題を取り扱うことができる。解析例として簡単なトラス問題を取り上げ、提案する手法による具体的な同定解析手順を示すとともに、逆定式化法ならびに直接定式化法との比較検討を行う。つぎに、有限要素法を用いた数値計算例により、均質岩盤だけでなく複合材料からなる岩盤に対しても、少ない繰り返し計算でヤング率およびポアソン比ともに正確に同定でき、本手法による解の安定性ならびに収束性が非常に安定していることを示す。半無限領域あるいは無限領域問題に対して、有限要素法を用いて逆解析を行う場合、材料物性値を精度よく同定するためには、どのくらいの範囲まで要素の離散化を施せばよいか問題となる。本文では、半無限地盤上の平板載荷試験モデルについて、荷重幅と領域の離散化幅の比を変化させて軸対称問題として同定解析を行ない、その影響についても検討を行う。

第4章では第3章で展開した弾性体の同定解析の理論を拡張して、線形粘弾性体の粘弾性パラメータを同定することを試みる。最初に、線形粘弾性体の基礎理論および増分理論に基づく有限要素法(順解析)の適用について述べ、それらの理論を踏まえた上で、一般化 Maxwell モデルを対象として新たに線形粘弾性体に対する同定解析の一手法を提案する。続いて簡単な引っ張り問題、平板載荷試験モデルおよび粘弾性斜面問題について数値シミュレーションを行ない、提案する解析手法の妥当性を検討する。

第5章では、不連続性岩盤に対する損傷力学モデルに逆解析の手法を適用して、原

位置岩盤試験の結果から岩盤の損傷テンソルを同定する方法を提案する。不連続性岩盤の母岩材は線形弾性体であり、また、岩盤の不連続面に対して、不連続面に沿うすべり抵抗や圧縮による不連続面の閉合を考慮しないとすると、第3章で示した同定解析の手法を拡張することによって、容易に損傷力学モデルに対する同定解析が可能となる。提案した手法を数値モデル実験および実際の地下空洞の掘削解析に適用して提案手法の妥当性、適用性について検証する。

最後に、第6章では本研究で得られた結論の総括を行う。

第2章 慣用的手法による線形弾性体の同定

2.1 概説

序論で記述したように、逆解析の手法は大きく逆定式化法と直接定式化法に分類できる。前者は測定値を順解析における支配方程式に取り込んでその逆をとる定式化であり、後者は測定値と解析値の差を最小化するように同定する方法である。

本章では、第3章以降において展開する逆解析理論の基礎となる、線形弾性問題に対する代表的な逆解析手法について考察を行う。まず、2.2節では有限要素法を用いた逆定式化法の桜井とGiodaの方法について概説し、両者の比較を行う。続いて2.3節では直接定式化法の定式化を示すとともに、直接定式化法による解析例として境界要素法を用いた直交異方性体の同定解析を行い、その有効性ならびに問題点を検討する。

2.2 逆定式化法

2.2.1 桜井らの同定法

桜井らは、逆解析を掘削問題に適用し、初期応力と弾性定数との比（初期応力パラメーター）の同定を行っており、そこでは巨視的に作用する初期応力と等方均質性の地山を仮定して、線形弾性を岩盤挙動の第一近似として捉えている（桜井・武内 1983, Sakurai and Takeuchi 1983）。なお、構成モデルとしては弾性係数 E とポアソン比 ν を用いており、逆定式化には掘削荷重の線形性を利用している。さらにポアソン比を仮定することにより最小二乗法において繰り返し計算を不必要にしている。定式化は以下のとおりである。

線形弾性モデルは、弾性係数 E 、ポアソン比 ν を用いて

$$\mathbf{D} = E\mathbf{D}_E(\nu) \quad (2.1)$$

と表される。ただし、 \mathbf{D}_E は

$$D_E = \frac{1}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

である。

一方、掘削面に作用させる掘削相当外力は2次元問題の場合

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_0 &= \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_0 dv \\ &= \sigma_{x0} \mathbf{F}_{x0} + \sigma_{y0} \mathbf{F}_{y0} + \tau_{xy0} \mathbf{F}_{xy0} \end{aligned} \quad (2.3)$$

と表される。ここで、 σ_{x0} , σ_{y0} , τ_{xy0} は決定すべき初期応力であり、 F_{x0} , F_{y0} , F_{xy0} は初期応力成分を単位としたときの外力ベクトルの成分である。なお、 \mathbf{B} は変位・ひずみ関係マトリックス、 \mathbf{B}^T はその転置を表す。また、全体剛性マトリックスは次式のように表すことができる。

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D}_E \mathbf{B} dv \quad (2.4)$$

剛性方程式は、外力 \mathbf{F} を $\mathbf{F} = \mathbf{F}_0$ として

$$E \mathbf{K}_E \mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (2.5)$$

となる。ここで、節点変位 \mathbf{U} を測定変位 \mathbf{U}_1 、未知変位 \mathbf{U}_2 に分離すると

$$E \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_2 \end{Bmatrix} = \sigma_{x0} \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_x^1 \\ \mathbf{F}_x^2 \end{Bmatrix} + \sigma_{y0} \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_y^1 \\ \mathbf{F}_y^2 \end{Bmatrix} + \tau_{xy0} \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_{xy}^1 \\ \mathbf{F}_{xy}^2 \end{Bmatrix} \quad (2.6)$$

となり、 \mathbf{U}_2 を消去して整理すると次式を得る。

$$\sigma_{x0} \mathbf{F}_x + \sigma_{y0} \mathbf{F}_y + \tau_{xy0} \mathbf{F}_{xy} = E \mathbf{K}_N^E \mathbf{U}_1 \quad (2.7)$$

ここに

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_x &= \mathbf{F}_x^1 - \mathbf{K}_{12}^E (\mathbf{K}_{22}^E)^{-1} \mathbf{F}_x^2 \\ \mathbf{F}_y &= \mathbf{F}_y^1 - \mathbf{K}_{12}^E (\mathbf{K}_{22}^E)^{-1} \mathbf{F}_y^2 \\ \mathbf{F}_{xy} &= \mathbf{F}_{xy}^1 - \mathbf{K}_{12}^E (\mathbf{K}_{22}^E)^{-1} \mathbf{F}_{xy}^2 \\ \mathbf{K}_N^E &= \mathbf{K}_{11}^E - \mathbf{K}_{12}^E (\mathbf{K}_{22}^E)^{-1} \mathbf{K}_{21}^E \end{aligned} \quad (2.8)$$

であり、式(2.7)から次式を得る。

$$\mathbf{U}_1 = (\mathbf{K}_N^E)^{-1} \mathbf{F}^* \boldsymbol{\sigma}_0^* \quad (2.9)$$

ここに

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^* &= (\mathbf{F}_x, \mathbf{F}_y, \mathbf{F}_{xy}) \\ \boldsymbol{\sigma}_0^* &= \begin{Bmatrix} \sigma_{x0}/E \\ \sigma_{y0}/E \\ \tau_{xy0}/E \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (2.10)$$

である。

式(2.9)に最小二乗法を適用すると

$$\boldsymbol{\sigma}_0^* = [((\mathbf{K}_N^E)^{-1} \mathbf{F}^*)^T ((\mathbf{K}_N^E)^{-1} \mathbf{F}^*)]^{-1} \mathbf{U}_1 \quad (2.11)$$

となり、ポアソン比を与えることによって初期応力パラメーター $\boldsymbol{\sigma}_0^*$ が一意的に定まることになる。

2.2.2 Giodaらの同定法

Giodaらは、線形弾性モデルの弾性パラメーターを体積弾性係数 B (bulk modulus) とせん断弾性係数 G (shear modulus) に分け、非線形最適化手法を用いてこれらを同定している (Cividini, Jurina and Gioda 1981, Maier and Gioda 1982, Gioda 1985)。

この方法は、非均質地盤に対しても応用可能であり、多層地盤の各層のパラメーターが同定できる。以下にその定式化を示す。

線形弾性モデルにおける応力・ひずみマトリクス \mathbf{D} は、体積弾性係数とせん断弾性係数を用いて、つぎのように表すことができる。

$$\mathbf{D} = B\mathbf{D}_B + G\mathbf{D}_G \quad (2.12)$$

ここに、 \mathbf{D}_B 、 \mathbf{D}_G は、3次元問題の場合、つぎのとおりである。

$$\mathbf{D}_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

$$\mathbf{D}_G = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

一方、2次元問題では、 \mathbf{D} が平面応力、平面ひずみ場についてそれぞれ

平面応力:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{3B+4G} \begin{bmatrix} 4G(3B+G) & 2G(3B-2G) & 0 \\ 2G(3B-2G) & 2G(3B+G) & 0 \\ 0 & 0 & G(3B+4G) \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

平面ひずみ:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} (3B+4G)/3 & (3B-2G)/3 & 0 \\ (3B-2G)/3 & (3B+4G)/3 & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

となり、平面応力場では \mathbf{D} が体積弾性係数とせん断弾性係数の線形和の形で表現できないため、この方法は適用できないことになる。

有限要素法における剛性マトリクスは \mathbf{D}_B と \mathbf{D}_G を用いて

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D}_B \mathbf{B} dv + \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D}_G \mathbf{B} dv \\ = B\mathbf{K}_B + G\mathbf{K}_G \quad (2.16)$$

と表すことができる。ここに、 \mathbf{K}_B は $B=1$ に対する体積剛性マトリクス、 \mathbf{K}_G は $G=1$ に対するせん断剛性マトリクスである。

有限要素法におけるつり合い式(剛性方程式)は、節点変位 \mathbf{U} 、等価節点力 \mathbf{F} を用いて

$$\mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (2.17)$$

となる。ここで、節点変位 \mathbf{U} を測定変位 \mathbf{U}_1 と未知変位 \mathbf{U}_2 とに分けると

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \end{Bmatrix} \quad (2.18)$$

上式より、未知変位 \mathbf{U}_2 を消去すると

$$(\mathbf{K}_{11} - \mathbf{C}\mathbf{K}_{21})\mathbf{U}_1 = \mathbf{F}_1 - \mathbf{C}\mathbf{F}_2 \quad (2.19)$$

と表せる。ただし、

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}(B, G) = \mathbf{K}_{12}\mathbf{K}_{22}^{-1} \quad (2.20)$$

である。式(2.19)の左辺を、式(2.16)を用いて整理すると次式を得る。

$$\mathbf{V}(\mathbf{P})\mathbf{P} = \mathbf{F}_1 - \mathbf{C}(\mathbf{P})\mathbf{F}_2 \quad (2.21)$$

ここに、

$$\mathbf{V}_B = (\mathbf{K}_{11}^B - \mathbf{C}\mathbf{K}_{21}^B)\mathbf{U}_1$$

$$\mathbf{V}_G = (\mathbf{K}_{11}^G - \mathbf{C}\mathbf{K}_{21}^G)\mathbf{U}_1$$

$$\mathbf{V} = [\mathbf{V}_B, \mathbf{V}_G]$$

$$\mathbf{P} = [B, G]^T$$

$$(2.22)$$

であり、パラメーターの数を n 、測定変位の数を m とすると、式 (2.21) は、未知数 n 、式数 m の連立方程式系となる。

最小二乗法を用いて解くために誤差関数をつぎのように定義する。

$$W = \frac{1}{2}(\mathbf{VP} - \mathbf{F}_1 + \mathbf{CF}_2)^T(\mathbf{VP} - \mathbf{F}_1 + \mathbf{CF}_2) \quad (2.23)$$

ここで、 \mathbf{P} が与えられた場合には \mathbf{V} 、 \mathbf{C} が一定となり、 $\delta W = 0$ より

$$\mathbf{V}^T \mathbf{VP} = \mathbf{V}^T(\mathbf{F}_1 - \mathbf{CF}_2) \quad (2.24)$$

を得る。 \mathbf{P} の初期値を与えて、式 (2.24) より繰り返し収束計算を実施し、パラメーター \mathbf{P} を同定する。

Gioda の方法にもとづいて計算プログラムを作成し、図 2.1 に示すような均質な等方性地盤の解析を行った。したがって、この場合の未知パラメーターは体積弾性係数 B 、せん断弾性係数 G の 2 つのみである。ここでは、計測データとして与える測定変位の値は、あらかじめ同じモデルに対し順解析によって求めた変位解とし、測定変位の節点の数を つぎのように 3 種類に分けて設定して計算を行なった。

Case 1: 節点 58, 60 の 2 節点

Case 2: 節点 57, 58, 60, 61 の 4 節点

Case 3: 節点 56, 57, 58, 60, 61, 62 の 6 節点

与えた初期値は

$$B = 60.0 \text{ MPa}$$

$$G = 45.0 \text{ MPa}$$

である。

計算結果および同定値の収束状況をそれぞれ図 2.2、表 2.1 に示す。

ここで、桜井らの方法と Gioda らの方法を比較してみると、以下のようなになる。

桜井らの方法:

- 1) 荷重項の線形性を利用して逆定式化を行い、初期応力と弾性係数との比（初期応力パラメーター）を同定している。

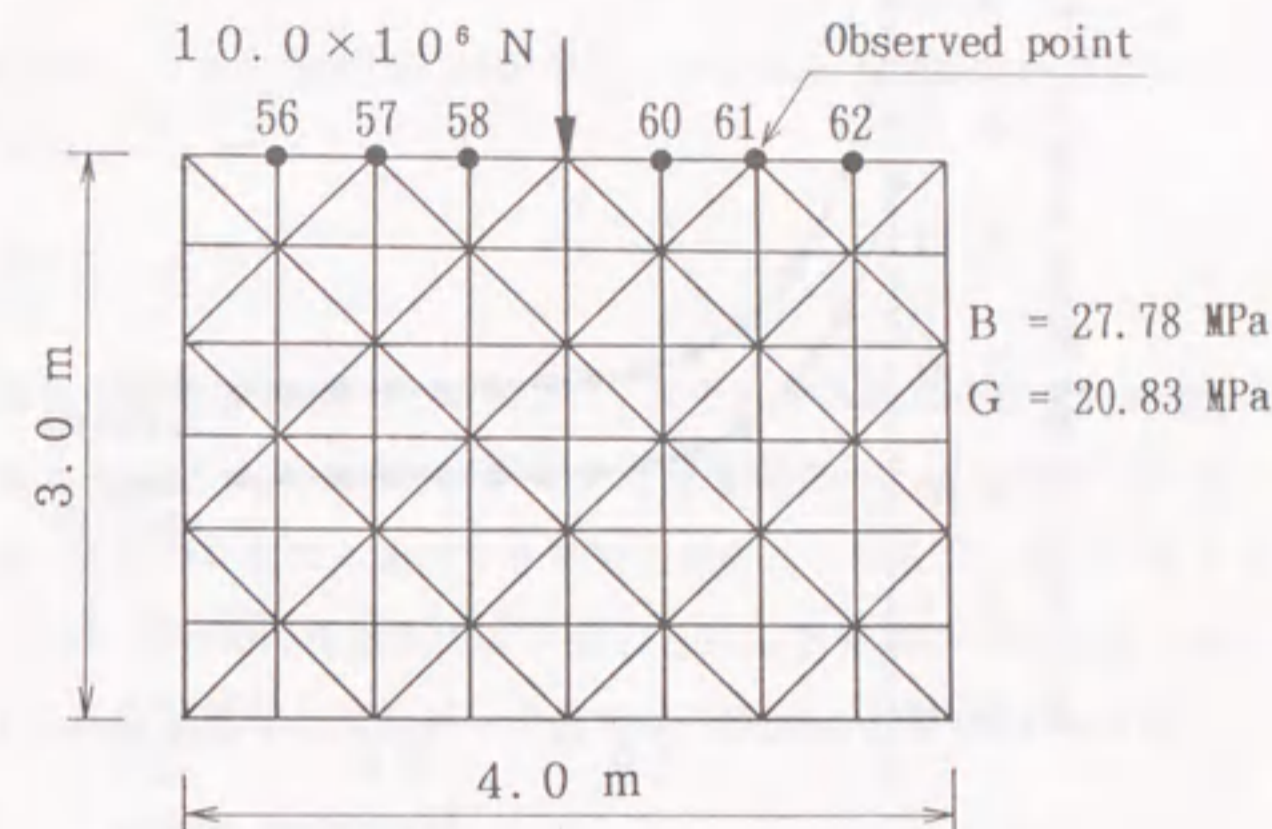


図 2.1: Gioda の方法による解析例

表 2.1: Gioda の方法による同定解析結果

	True	Initial	Case 1	Case 2	Case 3
$B(\text{MPa})$	27.78	60.0	27.80	27.80	27.80
$G(\text{MPa})$	20.83	45.0	20.85	20.85	20.85
Iteration			26	26	26

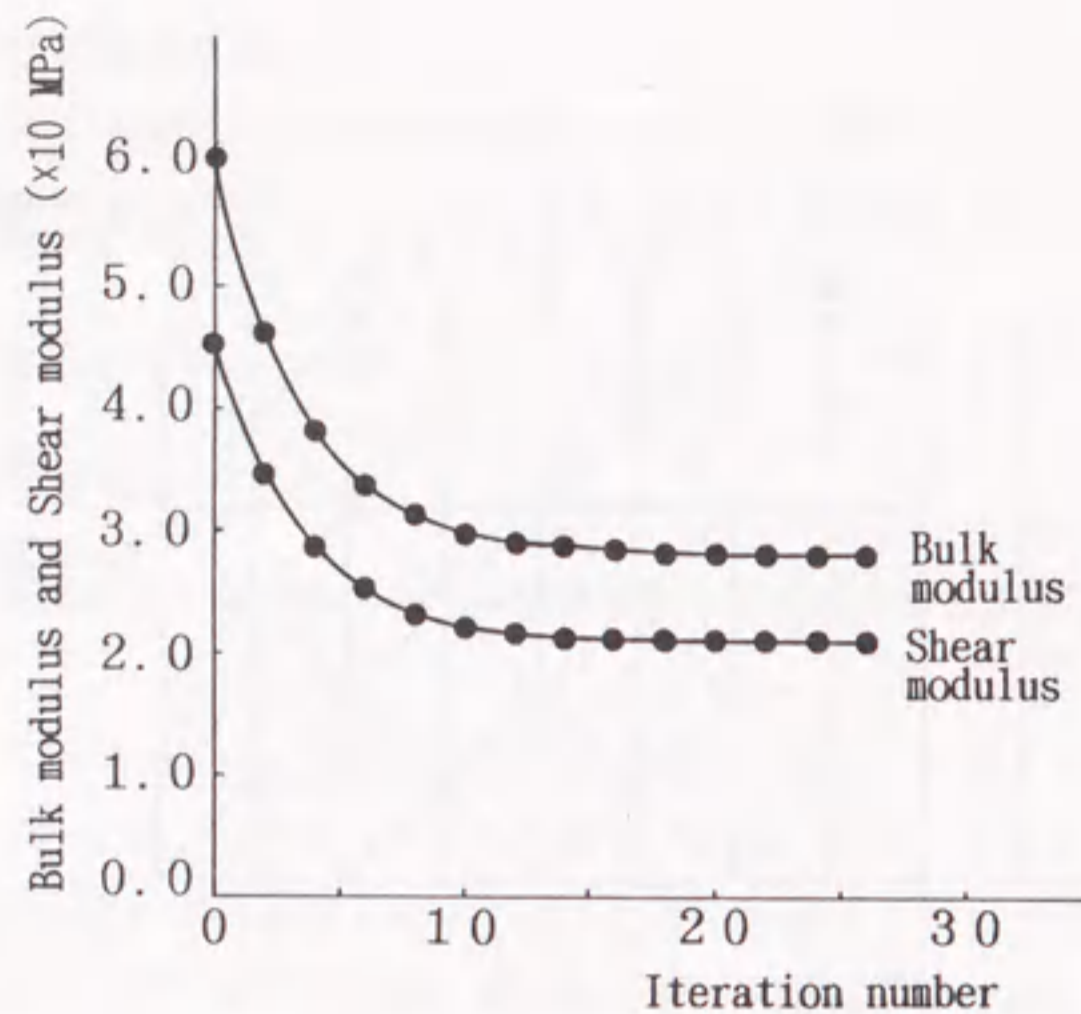


図 2.2: B と G の収束状況

- 2) 弾性係数を求めるためには初期応力の 1 つを何らかの方法で仮定する必要があるが、掘削問題の順解析およびその結果を用いた設計では初期応力パラメーターだけで充分であり、弾性係数を求める必要性はない。
- 3) ポアソン比を仮定しているため、繰り返し計算を必要としない。ただし、多層地盤の場合、各層の弾性係数比およびポアソン比を仮定する必要がある。
- 4) マイクロ・コンピュータの使用など、現場への適用性を重視している。

Gioda らの方法:

- 1) 体積弾性係数せん断弾性係数を用いて逆定式化を行い、非均質地盤への適用が可能である。
- 2) 外力は既知としている。
- 3) 繰り返し計算を必要とし、パラメーターの初期値を仮定する必要がある。

2.3 直接定式化法

2.3.1 Gauss-Newton 法による定式化

直接定式化法は、つぎに示す誤差関数を最小にするような初期応力や材料定数を同定するものである。

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (U_i - \bar{U}_i)^2 \quad (2.25)$$

ここで、 n は測定値の数であり、 U_i および \bar{U}_i はそれぞれ計算変位と計測変位を表す。この式より明らかのように、このアプローチでは逆解析のための特別な定式化を必要とせず、不均質・非線形問題にも適用できる利点を有している。しかし、繰り返し計算を必要とするため計算時間に問題がある。式 (2.25) の誤差関数は同定すべきパラメーター P_i の高次の非線形関数となるが、ここでは、Gauss-Newton 法を用いて解析を行う。

第 k 回目の計算ステップにおける同定パラメーターを P_i^k 、計算変位を U_i^k とし、計算変位 U_i をパラメーター P_j ($j = 1, 2, \dots, m$) の関数として

$$U_i^k = U_i^k(P_j^k) \quad (2.26)$$

と表す。ここに m は同定すべきパラメーターの数である。同定パラメーターおよび計算変位の増分

$$dP_j^k = P_j^{k+1} - P_j^k \quad (2.27)$$

$$dU_j^k = U_j^{k+1} - U_j^k \quad (2.28)$$

に対して式 (2.25) で定義される誤差関数 W は

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (U_i^k + dU_i^k - \bar{U}_i)^2 \quad (2.29)$$

と書ける。

一方、式 (2.26) に対しては

$$dU_i = \frac{\partial U_i^k}{\partial P_j^k} dP_j^k = A_{ij}^k dP_j^k \quad (2.30)$$

が得られる。ここに A_{ij}^k は影響係数であり、数値微分により評価される。式(2.30)を式(2.29)に代入すると

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (U_i^k - \bar{U}_i + A_{ij}^k dP_j^k)^2 \quad (2.31)$$

となり、同定パラメータ \mathbf{P} に関する W の停留条件 $\delta W(P_j^k) = 0$ より

$$A_{ij}^k A_{ii}^k dP_i^k = A_{ij}^k (\bar{U}_i - U_i^k) \quad (2.32)$$

を得る。

上式を整理してマトリックス表示することにより、弾性定数を同定するための基礎方程式がつぎのように得られる。

$$[A]^T [A] \{dP\} = [A]^t \{dU\} \quad (2.33)$$

ここに

$$\begin{aligned} [A] &= \left[\frac{\partial U_i}{\partial P_j} \right] \\ \{dP\} &= \{dP_1, dP_2, \dots, dP_m\}^T \\ &= \{dE_1, d\nu_1, dE_2, d\nu_2, \dots\}^T \\ \{dU\} &= \{\bar{U}_i - U_i\} \end{aligned} \quad (2.34)$$

である。

2.3.2 直交異方性体の弾性パラメータの同定

基礎岩盤が均質な場合でも、岩石の種類や細かい亀裂、節理の発達などによって、岩盤全体としては一般に異方性を示す場合が多い。また、沖積層、洪積層の地盤や、砂岩と泥岩の互層岩盤などのように、堆積岩からなる岩盤は成層状態をなしているものが多く、このような成層岩盤においても層相互間のすべりや剝離を起こさないような状態では、層状岩盤を全体的に見て、それと等価な性質を有する直交異方性体に置き

かえることによって、理論的な解析や数値解析が行なわれている(川本・林 1974, 川本・吉中・日比野 1985, Wardle and Gerrard 1972)。

ここでは、前節で述べた直接定式化法を用いた直交異方性体の弾性パラメータの同定解析例を示す。使用した数値解析手法は境界要素法であり、最初に境界要素法による直交異方性体の弾性解析の概略を以下に示す。

境界要素法(BEM)には直接法と間接法があるが、境界上の表面力と変位を未知物理量とする直接法の定式化に従うと、弾性問題に対する境界積分方程式は物体力を考慮しない場合、次式のように表される(例えば、Brebbia 1978, Brebbia, Telles and Wrobel 1984)。

$$c_{ij}(\mathbf{x}) u_i(\mathbf{x}) + \int_{\Gamma_y} T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) u_j(\mathbf{y}) d\Gamma_y = \int_{\Gamma_y} U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) t_j(\mathbf{y}) d\Gamma_y \quad (2.35)$$

ここに、 u_j , t_j は変位、表面力成分であり、 U_{ij} , T_{ij} は基本解およびその導関数で、点 (\mathbf{x}) において i 方向に単位集中荷重が作用したときの境界上の点 (\mathbf{y}) での j 方向の変位と表面力ベクトルを表す。また、 c_{ij} は境界の形状によって決まる係数である。直交異方性体に対する弾性基本解として、Dumir and Mehta (1987) の解を用いる。この基本解は半無限問題にも適用できるもので、無限問題に対する基本解に補正量を加えた形になっている。

いま、図 2.3 に示すように、2種の層 I (弾性係数 E_I , ポアソン比 ν_I , 層高 h_I) および層 II (E_{II} , ν_{II} , h_{II}) が成層状態をなしている岩盤を考え、層理面と平行な面内では等方性である (transversely isotropic) とすると、この層状岩盤と等価な直交異方性体の独立な弾性定数は、つぎのように5個となる(川本・吉中・日比野 1985, Zienkiewicz 1977)。

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{h_I E_I + h_{II} E_{II}}{h_I + h_{II}} \\ E_2 &= \frac{(h_I + h_{II}) E_I E_{II}}{h_I E_{II} + h_{II} E_I} \\ G_{12} &= \frac{(h_I + h_{II}) G_I G_{II}}{h_I G_{II} + h_{II} G_I} \end{aligned} \quad (2.36)$$

$$\nu_1 = \frac{(h_I + h_{II})E_I E_{II}(h_I \nu_I + h_{II} \nu_{II})}{(h_I E_{II} + h_{II} E_I)(h_I E_I + h_{II} E_{II})}$$

$$\nu_2 = \frac{h_I \nu_I + h_{II} \nu_{II}}{h_I + h_{II}}$$

ここに

E_1 : 層理面と平行方向の弾性係数

E_2 : 層理面と直交方向の弾性係数

G_{12} : 層理面と直交方向する面のせん断弾性係数

ν_1 : 層理面と平行方向のポアソン比

ν_2 : 層理面と直交方向のポアソン比

である。

実際の問題では図 2.3 に示すように直交異方性材料の主軸と解析対象の座標軸とが一致しない場合が多い。Dumir らの基本解は直交異方性の主軸と解析対象の座標軸が一致する場合の基本解であり、図 2.3 の場合は基本解の座標変換を施す必要がある。直交異方性の主軸を x'_i とすれば基本解の座標変換は次式で表される。

$$U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = a_{ik} a_{jl} U'_{kl}(\mathbf{x}', \mathbf{y}') \quad (2.37)$$

$$T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = a_{ik} a_{jl} T'_{kl}(\mathbf{x}', \mathbf{y}')$$

ここに U'_{kl} , T'_{kl} は直交異方性の主軸 x'_i と解析対象の座標軸系 x_i とが一致する場合の基本解であり、 a_{ij} は方向余弦である。式 (2.37) を式 (2.35) に代入すれば、弾性主軸の方向が任意方向に傾斜している場合の直交異方性体に対する境界積分方程式が、つぎのように得られる。

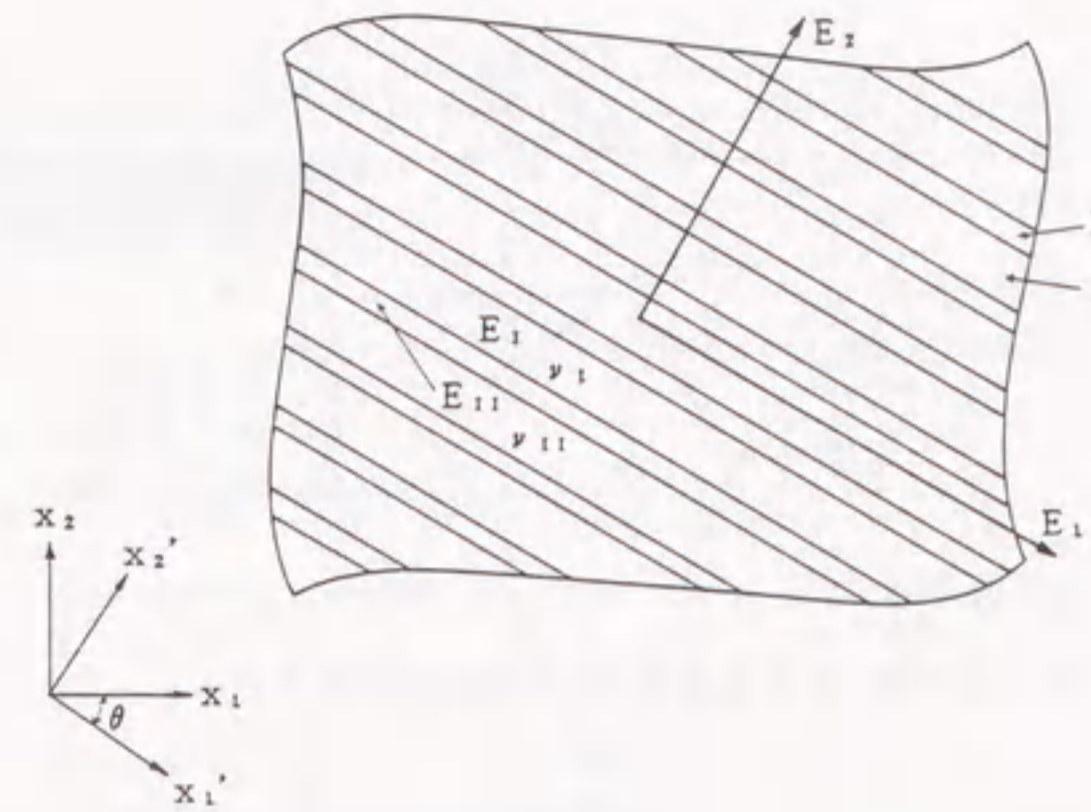


図 2.3: 理想化された層状体

$$c_{ij}(\mathbf{x}) u_i(\mathbf{x}) + \int_{\Gamma_y} a_{ik} a_{jl} T'_{kl}(\mathbf{x}', \mathbf{y}') u_j(\mathbf{y}) d\Gamma_y = \int_{\Gamma_y} a_{ik} a_{jl} U'_{kl}(\mathbf{x}', \mathbf{y}') t_j(\mathbf{y}) d\Gamma_y \quad (2.38)$$

上式を離散化して通常の境界要素法を適用することにより、境界上の変位、表面力の未知節点ベクトルを求めることができる。任意方向に主軸の方向が傾斜している場合に対しては、従来は基本解を直接用以て境界条件を座標変換する方法が取られていたが、このように基本解そのものを座標変換する方がより一般的で効率的と思われる。

以上述べた定式化に基づいて解析した結果を以下に示す。ここで使用した境界要素は線形要素であり、平面ひずみ状態として計算を行なった。

2.3.3 分布荷重を受ける成層岩盤

まず、弾性主軸の方向が傾斜している直交異方性体の解析法の妥当性を検証するために、図 2.4 に示すような層状地盤を計算モデルに取り上げ、既存の有限要素法 (FEM) による解と比較する。有限要素および境界要素による分割を図 2.5 に示す。

図 2.6 は地盤上の鉛直方向、水平方向の変位図であり、図 2.7 は地表面下 2 m の点の主応力の分布を図示したものである。これらの図より、BEM による解は FEM 解とよく一致していることがわかる。

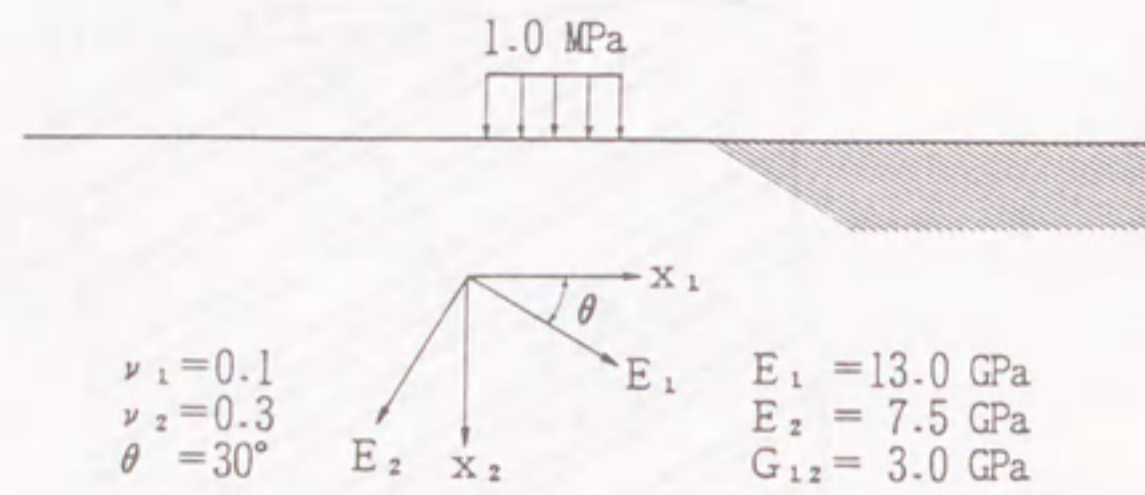


図 2.4: 分布荷重を受ける成層岩盤モデル

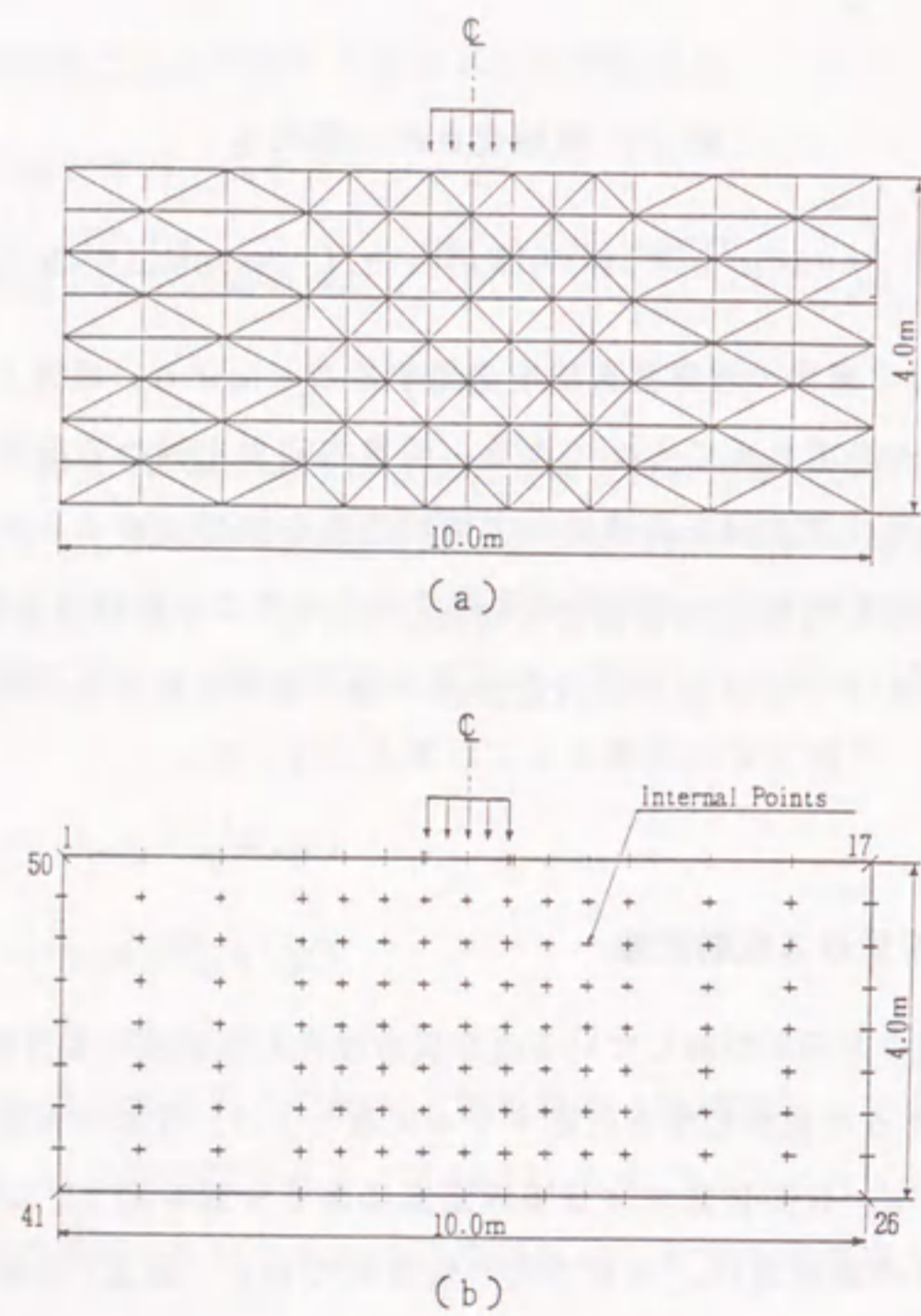


図 2.5: 要素分割図;(a) 有限要素分割;(b) 境界要素分割

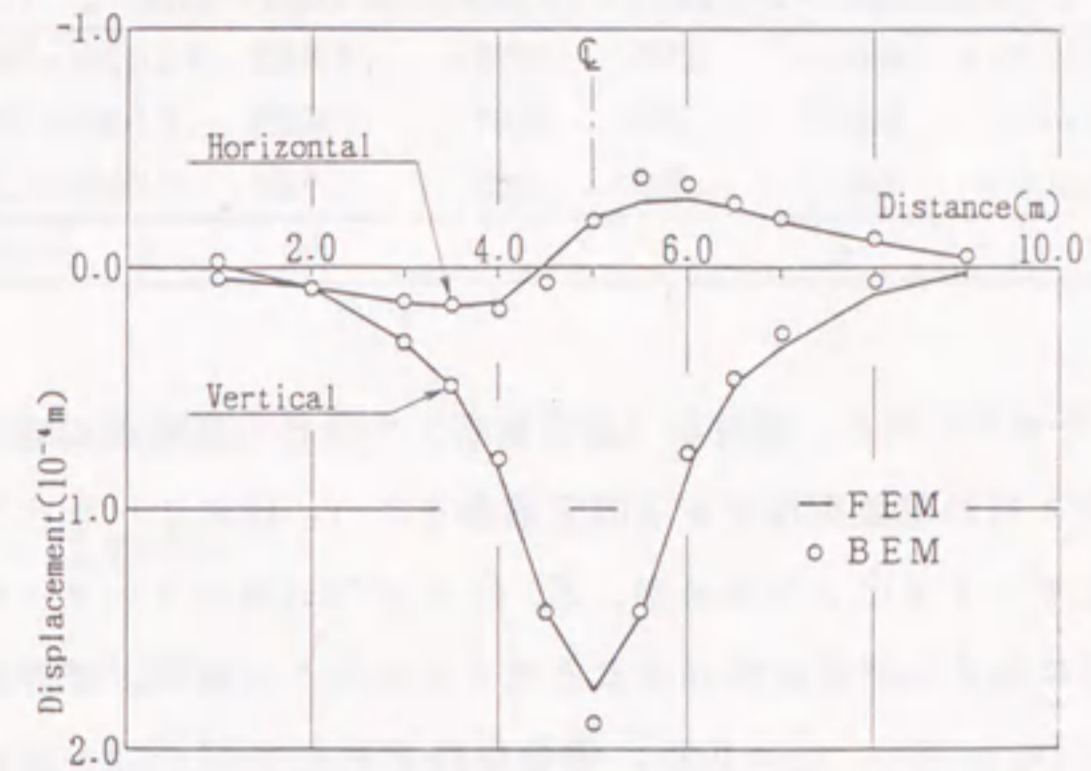


図 2.6: 地盤表面の変位

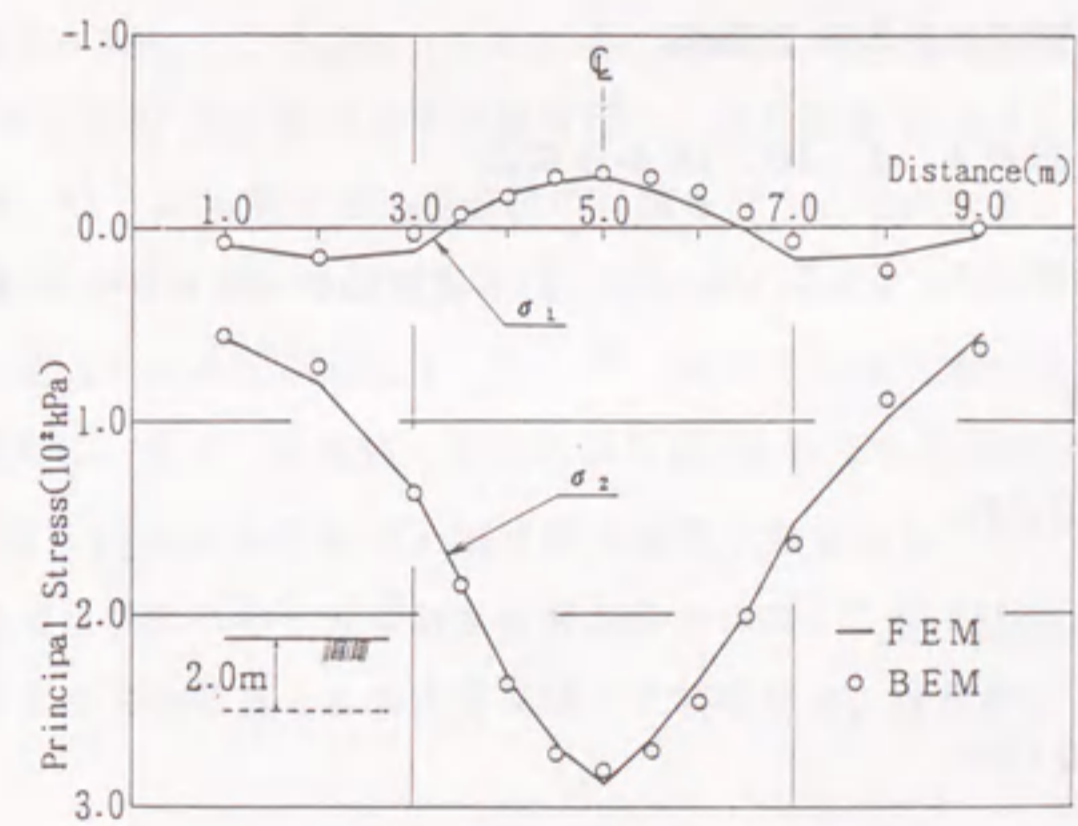


図 2.7: 地盤内の主応力分布

表 2.2: 成層岩盤モデルの同定解析結果 (1)

	(A)initial	(B) True	(A)/(B)	Case 1	Case 2	Case 3
E_1 (GPa)	10.0	13.0	0.77	13.003	13.026	13.001
E_2 (GPa)	5.0	7.5	0.67	7.499	7.509	7.503
G_{12} (GPa)	1.0	3.0	0.33	2.992	2.995	2.999
Iteration				3	4	6

つぎに、同じモデルに対し、順解析（通常解析）で求めた各節点の変位解を測定変位と見なして、逆に材料定数を推定する同定解析を行う。同定すべきパラメータは弾性係数 E 、 G とポアソン比 ν であるが、 E 、 G と ν では値のオーダーが大きく異なり、逆解析の結果に与える感度に差があると考えられることから、まず最初は、ポアソン比は既知とし ($\nu_1 = 0.1$, $\nu_2 = 0.3$)、弾性係数 E および G だけが未知量であるものとして計算を行う。したがって、同定すべきパラメータは E_1 、 E_2 および G_{12} の 3 個となることから、測定変位は最低 3 個あればよいことになる。

ここでは、変位測定の節点数をつぎのように 3 種類に分けて設定し、それぞれの解の比較検討を行った。

Case 1: 節点 4, 8 の 2 節点

Case 2: 節点 4, 8, 10, 14 の 4 節点

Case 3: 節点 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 13, 14, 15 の 10 節点

与えた初期値は

$$E_1 = 10.0 \text{ GPa}$$

$$E_2 = 5.0 \text{ GPa}$$

$$G_{12} = 1.0 \text{ GPa}$$

である。結果を表 2.2 に示すが、すべての Case において精度よい解が得られていることがわかる。

同じモデルに対して初期値を

表 2.3: 成層岩盤モデルの同定解析結果 (2)

	(A)initial	(B)True	(A)/(B)	Case 1	Case 2	Case 3
E_1 (GPa)	20.0	13.0	1.54	13.041	12.956	12.992
E_2 (GPa)	15.0	7.5	2.00	7.507	7.488	7.499
G_{12} (GPa)	0.7	3.0	0.23	2.980	3.005	3.001
Iteration				5	5	6

$$E_1 = 20.0 \text{ GPa}$$

$$E_2 = 15.0 \text{ GPa}$$

$$G_{12} = 0.7 \text{ GPa}$$

として正解値から離れた場合について計算を行なってみた。結果は表 2.3 に示されている。この場合においても十分な精度の解が得られている。

つぎに、同定すべきパラメータとして弾性係数 E 、 G だけでなく、ポアソン比 ν も未知量とする場合について計算を行う。先に述べたように、 E や G と ν では逆解析の結果に与える感度に差があり、 E 、 G 、 ν に対して同時に同定計算を行なうと解が収束しない可能性が高い。これに対しここでは、最初は、 ν の値を初期値のままに固定しておいて E および G だけについて計算を行い、ある程度 E と G の値が収束した後、あらためて E 、 G 、 ν に対する同定解析の計算を行うことにする。入力する初期値として E 、 G については最初の計算例と同じ値を与え、ポアソン比 ν は $\nu_1 = \nu_2 = 0.2$ と仮定した。図 2.5 における節点 4, 8, 10, 14 の 4 節点を測定節点とした場合の解析結果を表 2.4 に、また、計算値の収束状況を図 2.8 にそれぞれ示す。

この例では 5 回の反復計算で正確な値が同定されており、ポアソン比を同定パラメータに含めた場合にも十分な精度の解が得られた。これに対し、計算当初から E 、 G 、 ν の値をすべて未知量として計算を進めた場合には、収束解は得られなかった。

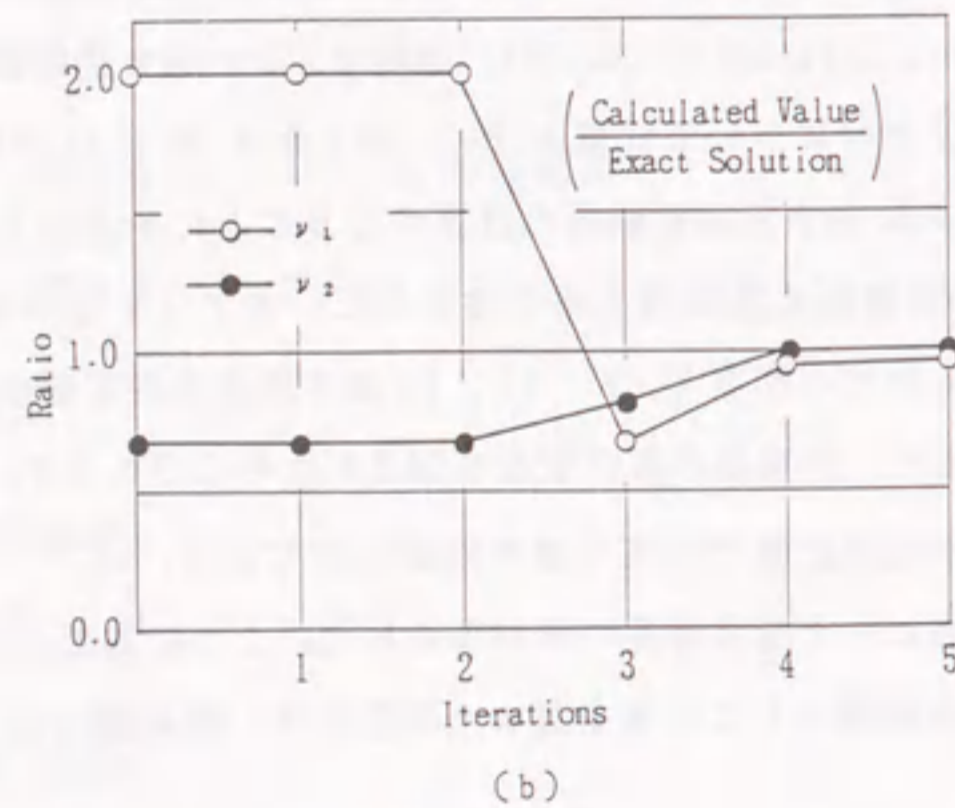
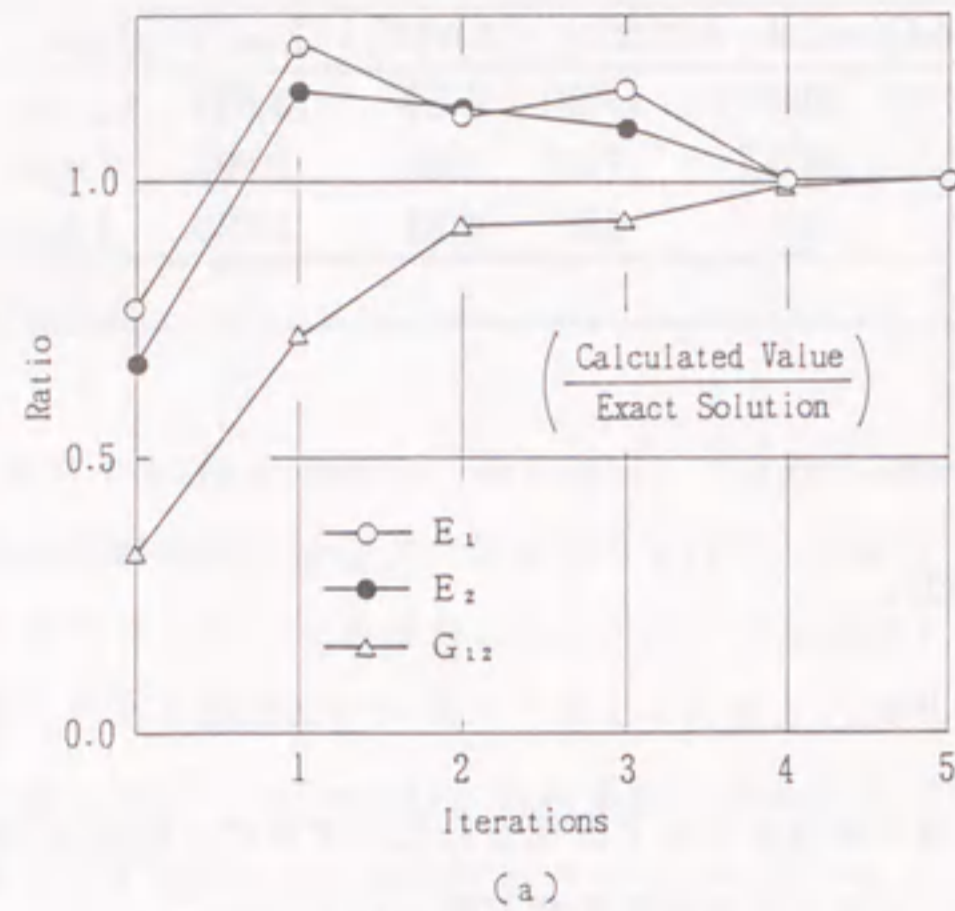


図 2.8: 未知パラメータの収束状況; (a) 弾性係数 E_1, E_2, G_{12} ; (b) ポアソン比 ν_1, ν_2

表 2.4: 成層岩盤モデルの同定解析結果 (3)

	(A)initial	(B) True	(A)/(B)	Calculated
E_1 (GPa)	10.0	13.0	0.77	13.013
E_2 (GPa)	5.0	7.5	0.67	7.492
G_{12} (GPa)	1.0	3.0	0.33	3.002
ν_1	0.2	0.1	2.00	0.096
ν_2	0.2	0.3	0.67	0.301
Iteration				3

2.3.4 トンネル掘削問題

つぎに、無限問題の解析例として図 2.9 に示すようなトンネルの掘削問題を考える。弾性主軸の方向が x_1 軸より 40° の方向に傾いている場合を想定しており、求める弾性係数 E, G およびポアソン比 ν は図に示す値とする。境界要素法で解析を行っているため、掘削面上の離散化だけで解析可能となる。

正解値に対する同定パラメータの初期値を、それぞれつぎのように与えた。

$$E_1 = 1.5 \text{ GPa}$$

$$E_2 = 6.0 \text{ GPa}$$

$$G_{12} = 0.4 \text{ GPa}$$

$$\nu_1 = 0.13$$

$$\nu_2 = 0.32$$

また、変位の測定節点は、節点 6, 28, 34, 39, 44 の計 5 節点を設定している。

結果を表 2.5 に示す。ここでも前例と同様な改良を施して E, G と ν に対する同定計算を行なったが、5 回の反復計算で E と G については正解値に近い値が得られているのに対し、ポアソン比はそれほどよい近似を示していない。この解析例からも、弾性係数とポアソン比をともに未知パラメータとして同定計算を行なう場合には、精度よい解を得るのが困難であるということを知ることができる。

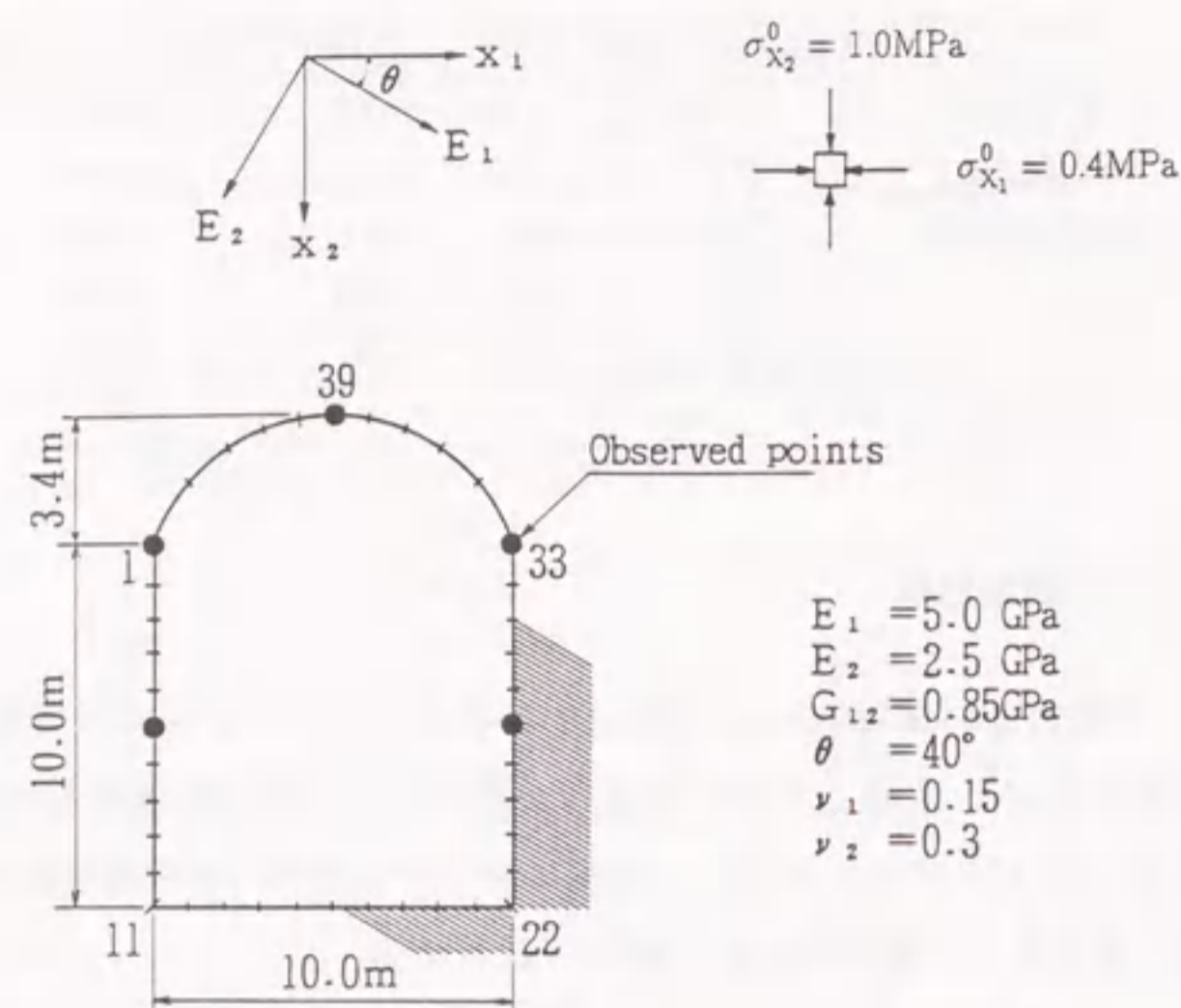


図 2.9: トンネル掘削モデル

表 2.5: トンネル掘削モデルの同定解析結果

	(A)initial	(B)True	(A)/(B)	Calculated
E_1 (GPa)	1.50	5.00	0.30	5.083
E_2 (GPa)	6.00	2.50	2.40	2.486
G_{12} (GPa)	0.40	0.85	0.47	0.847
ν_1	0.13	0.15	0.87	0.105
ν_2	0.32	0.30	1.10	0.314
Iteration				5

2.3.5 岩石の圧裂試験

岩盤や岩石の力学的性質を評価する手法の代表的なものとして圧裂強度実験がある(図 2.10)。圧裂強度実験は実験方法が簡単であるという大きな利点を持っているが、この試験が間接試験であるためにいくつかの仮定をおかなければならない。その一つに材料の性質を等方性線形弾性体と仮定して引張強度を求めていることがあげられる。これに対し、工藤は大島花崗岩を用いて作成した実験供試体に対して、弾性波速度 v_p と圧裂強度 σ_t を測定し、岩石の方向依存性について調べている(工藤他 1987, 工藤 1989)。工藤らの行った弾性波速度の実験結果から主弾性係数比 E_2/E_1 を求めると、その範囲はおよそ $0.6 < E_2/E_1 < 1.6$ となる。これより、引張強度における異方性の影響を調べるために、主弾性係数比が 0.6 と 1.6 の材料で、それぞれ弾性主軸の方向が角度 $\theta = 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ$ 傾斜している場合について最大引張応力の計算を行なった。

図 2.11 は y 軸上における引張応力 σ_x の分布図であり、図 2.12 は各角度に対する最大引張強度の変化を示したものである。 $\theta = 45^\circ$ では等方性の場合とほとんど違いがみられないものの、 $\theta = 0^\circ$ と $\theta = 90^\circ$ の場合には最大引張強度がかなり変化しており、圧裂試験における引張強度が主弾性係数比と主軸の方向に大きく影響を受けることがわかる。表 2.6 は $E_2/E_1 = 0.6$, $\theta = 45^\circ$ の場合についての同定解析を行なった結果であるが、この問題に対しても同定解析が可能であることを示している。

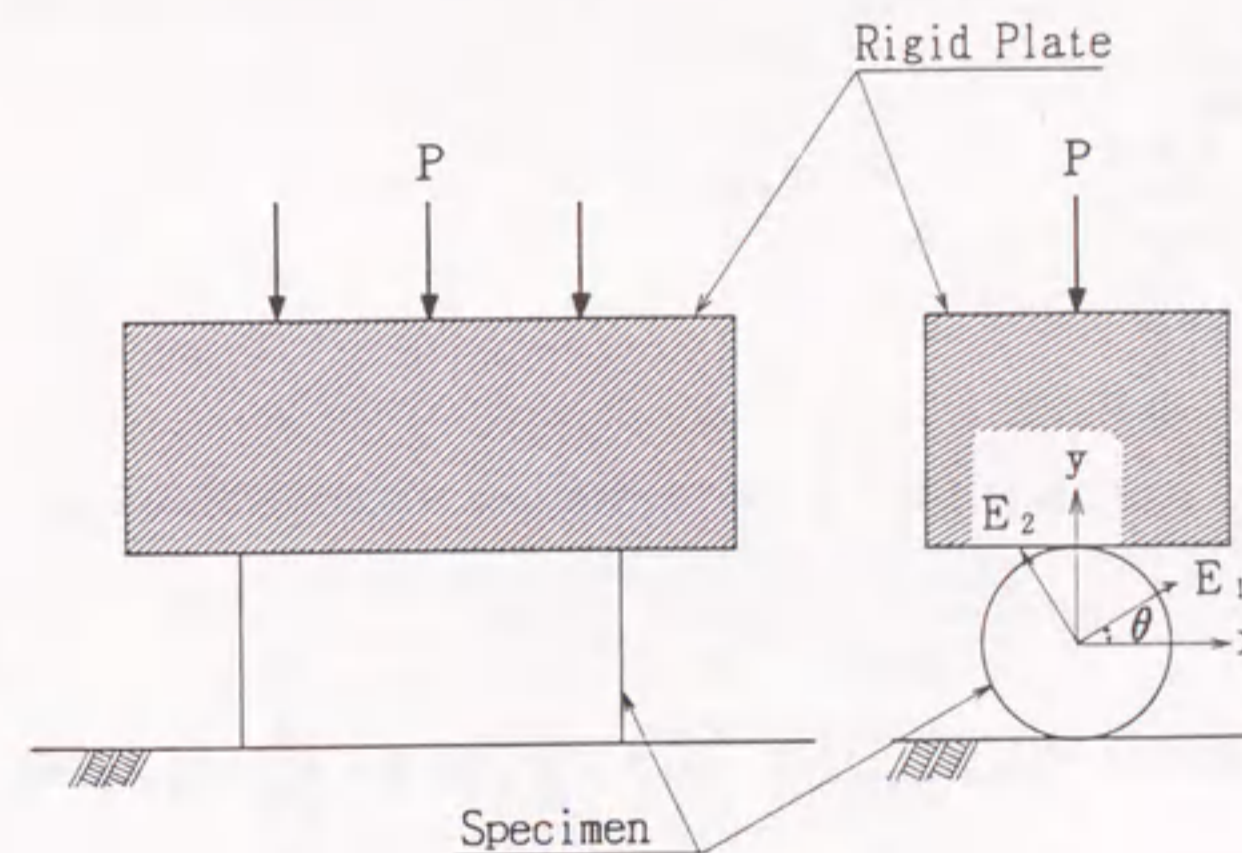


図 2.10: 岩石の圧裂試験

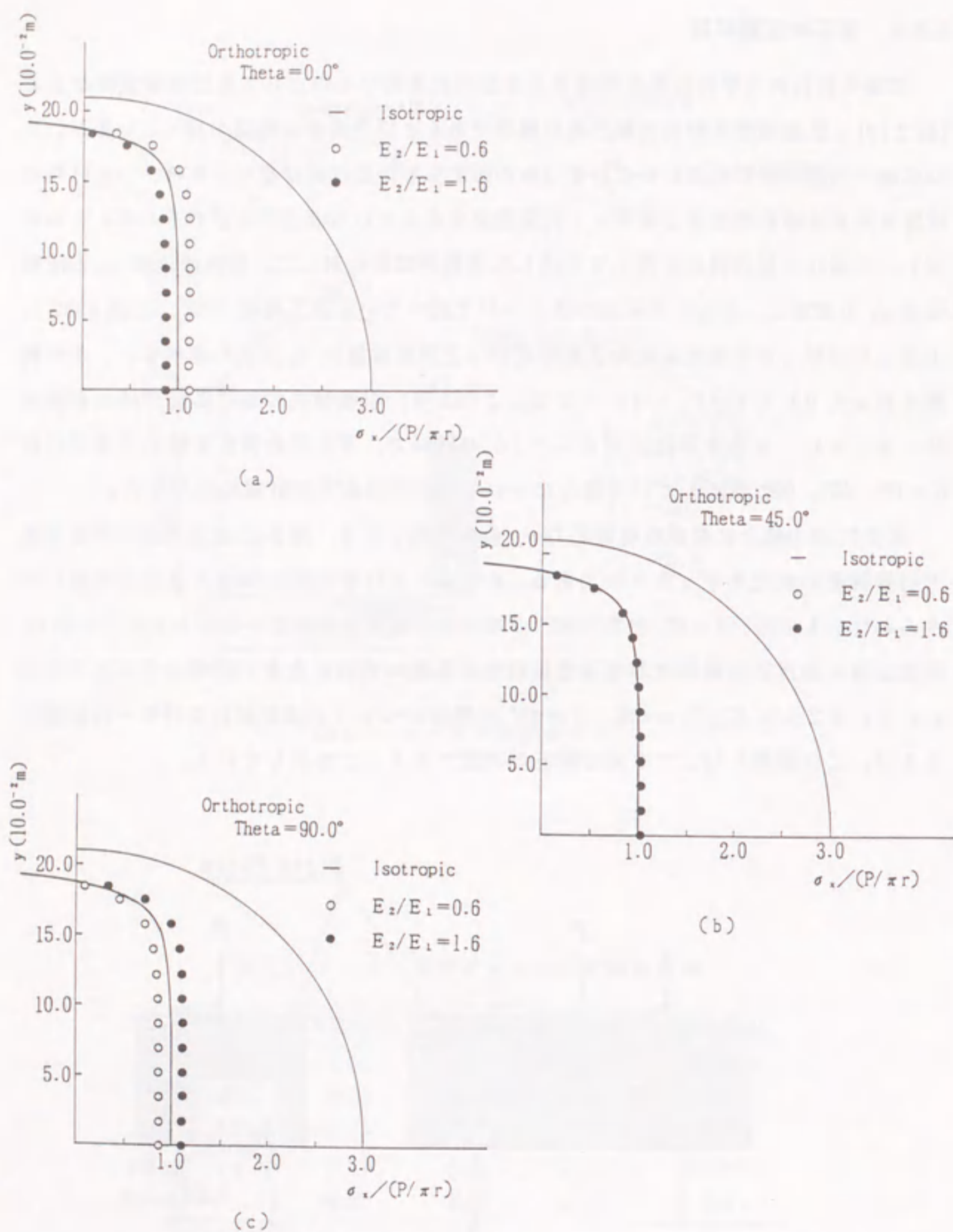


図 2.11: 引張応力 σ_x 分布 : (a) $\theta = 0^\circ$; (b) $\theta = 45^\circ$; (c) $\theta = 90^\circ$

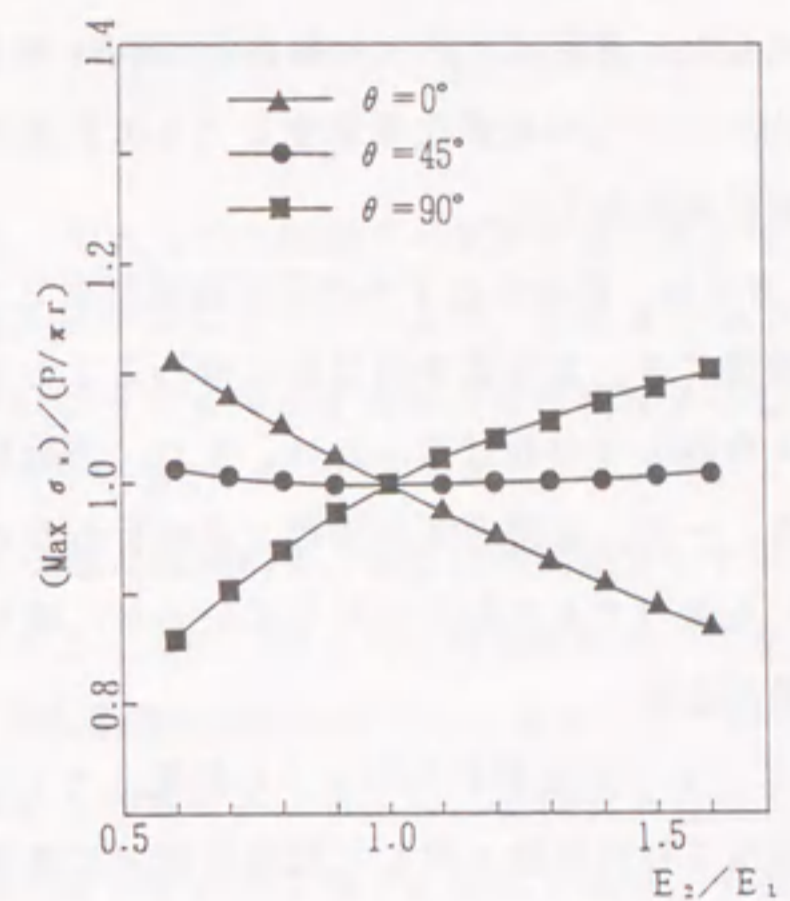


図 2.12: 最大引張強度の変化図

表 2.6: 圧裂試験モデルの弾性パラメーターの同定解析結果

	initial	True	Calculated
E_1	0.20	1.000	0.9996
E_2	0.05	0.600	0.6010
G_{12}	0.02	0.375	0.3906
Iteration			7

2.4 まとめ

本章では、線形弾性問題を対象に逆解析の代表的な定式化法として逆定式化法と直接定式化法について記述した。逆定式化法では桜井と Gioda の方法の比較・検討を行い、続いて直接定式化法については定式化を示すとともに具体的に直交異方性体の弾性パラメータの同定解析例を示した。

逆定式化法に基づく方法は、応力とひずみの関係が線形ならば、逆定式化の過程で未知量についての式を誘導でき、未知量を直接的に求めることができるが、そのための特別な解析プログラム作成しなければならない。また、非線形問題に対して定式化を行うことが困難である。一方、直接定式化法は、逆解析のための特別な定式化を必要とせず、非線形問題にも適用できる利点を有しているが、繰り返し計算を必要とするために計算時間に問題がある。

直交異方性体モデルについて同定解析を行なった結果、ヤング率やポアソン比のようにオーダーが大きく異なる材料定数に対して同時に同定計算を行うと、解が収束しないため、それに対して特別な考慮が必要であることが示された。

第3章 境界制御問題としての一般化逆解析手法

3.1 概説

地盤材料の物性値を、与えられた観測データから逆に推定する同定解析手法として、これまでに数多くの解析法が提案されているが、これまでの手法では、例えばヤング率とポアソン比を同時に同定しようとする場合には精度よい結果が得られない等の問題があるのが現状のようである。

本章では、線形弾性問題の範囲内で、境界制御問題としてあらためて逆解析を考え、その構造を明らかにするとともに、あらたに同定解析の一手法を提案する。

3.2節ではまず、静弾性問題の順解析に対して解くべき方程式系について整理し、そこからあらためて逆解析を考察する。さらに、直接定式化法を一般化した同定解析の一手法を提案し、提案手法の定式化を示す。提案手法は、有限要素法の剛性方程式あるいは境界要素法の係数方程式と観測条件式に対して Newton 法を適用し、最小二乗法を用いて線形連立方程式を繰り返し解くという手法で、簡潔なアルゴリズムで問題を取り扱えるようになっている。

3.3節では簡単なトラス問題を解析例として取り上げ、提案する手法による具体的な同定解析手順を示すとともに、逆定式化法ならびに直接定式化法との比較検討を行う。さらに、有限要素法および境界要素法を用いた数値計算例により本手法の有効性を検討する。

3.2 境界制御問題としての逆解析

静的な変位場における順解析は、微分方程式系から見るとつりあい方程式（支配方程式）を与えられた構成則および境界条件の下で解くことに帰着される（図3.1参照）。すなわち

（支配方程式）

$$\nabla \cdot \sigma = \mathbf{o} \quad \text{領域}\Omega\text{内で} \quad (3.1)$$

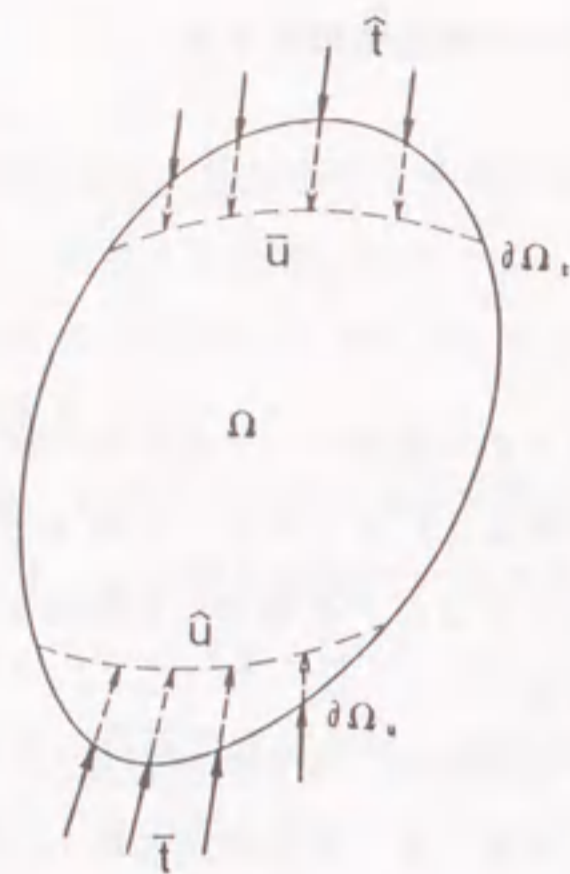


図 3.1: 領域および境界条件

(構成則: Hooke 則)

$$\sigma = D\varepsilon \quad (3.2)$$

(境界条件)

$$u = \hat{u} \quad \text{境界 } \partial\Omega_u \text{ 上で (変位境界条件)} \quad (3.3)$$

$$t = \sigma n = \hat{t} \quad \text{境界 } \partial\Omega_t \text{ 上で (荷重境界条件)} \quad (3.4)$$

ここに、 σ は応力テンソル、 u は変位ベクトル、 t は表面力ベクトルであり、 n は境界 $\partial\Omega$ 上の外向き単位法線ベクトルである。 D は弾性係数テンソルであり、等方性の線形弾性体に対してはヤング率 E 、ポアソン比 ν から構成される。また、ひずみ ε は

$$\varepsilon = \frac{1}{2}[\nabla u + (\nabla u)^T]$$

で与えられる。ただし、ここでは物体力の項は無視している。

上記つりあい方程式系 (3.1), (3.2), (3.3), (3.4) に対する弱形式は

$$\int_{\Omega} \sigma : \eta dv - \int_{\partial\Omega_t} \hat{t} \cdot v dS = 0 \quad (3.5)$$

と書くことができる。ただし、 v は変位境界 $\partial\Omega_u$ でゼロとなる任意のベクトル関数であり、 η は v に対して $\eta = [(\nabla v) + (\nabla v)^T]/2$ であるとしている。なお、ここで2階のテンソル、例えば a と b の内積として $a : b = \text{tr}(a^T b)$ と表している。

任意関数 v を仮想変位 δu と見なすと、 $\eta = \delta \varepsilon$ であるので、式 (3.5) は次のように仮想仕事式となる。

$$\int_{\Omega} \sigma : \delta \varepsilon dv - \int_{\partial\Omega_t} \hat{t} \cdot \delta u dS = 0 \quad (3.6)$$

有限要素法 (変位法) による順解析では、弱形式 (3.5) あるいは仮想仕事式 (3.6) に対して領域および境界の離散化を施すことによって、最終的に節点変位に関する

$$KU = F \quad (3.7)$$

$$K = \int_{\Omega} B^T D B dv$$

$$F = \int_{\partial\Omega_t} N^T \hat{t} dS$$

の形の代数方程式 (剛性方程式) を解くことになる。ここに、 N 、 B は、それぞれ形状関数マトリックス、変位・ひずみ関係マトリックスであり、 U は変位 u の近似解 u_h を形状関数 N を用いて

$$u \simeq u_h = NU \quad (3.8)$$

と離散化した節点変位である。

一方、材料パラメータを推定する同定問題においては、境界 $\partial\Omega_t$ 上で荷重 \hat{t} を与えて変位 \hat{u} が測定されるか、あるいは境界 $\partial\Omega_u$ 上で変位 \hat{u} が既知で表面力 \hat{t} を測定することによって、構成則 (3.2) を満足する材料パラメータが推定できることになる。したがって、ここで、境界条件 (3.3), (3.4) と双対な観測境界条件を次のように導入する。

(観測境界条件)

$$t = \sigma n = \bar{t} \quad \text{境界 } \partial\Omega_u \text{ 上で } (\bar{t}: \text{観測荷重}) \quad (3.9)$$

$$u = \bar{u} \quad \text{境界 } \partial\Omega_t \text{ 上で } (\bar{u}: \text{観測変位}) \quad (3.10)$$

上記の順問題に対する逆問題は、変位あるいは外力の一部が境界上で観測データとして得られたとき、つりあい方程式(3.1)、構成則(3.2)、境界条件(3.3)、(3.4)を満足したまま、構成則(3.2)の \mathbf{D} を変数として変動させながら、観測境界条件(3.9)、(3.10)を満たすような領域内の材料定数を見いだす問題となる。したがって、逆解析では境界上の変位と外力とを関係づける剛性方程式(3.7)に対して、観測境界条件(3.9)、(3.10)を導入することが必要であり、つりあい方程式の仮想仕事式を求める段階から、観測境界条件をペナルティ関数、ラグランジュ乗数等によって導入する定式化では解析できないことになる。

注 つりあい方程式(3.1)の仮想仕事式に対して、変位に関する観測境界条件式(3.9)をペナルティ関数によって導入することにより

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon} dv - \int_{\partial \Omega_t} \hat{\mathbf{i}} \cdot \delta \mathbf{u} dS + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\partial \Omega_t} (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) \cdot \delta \mathbf{u} dS = 0$$

と書くことができる。領域内の材料定数を推定するには境界上での変位と荷重の関係が既知であることが条件であるが、上式に対して $\varepsilon \rightarrow 0$ の極限操作を行えば、荷重の項が消え変位 \mathbf{u} だけの強制変位問題となり、同定解析不能となる。

以上の準備のもとに、あらたに観測境界条件から領域内の材料を同定する逆解析手法を提案する。本研究で提案する逆解析手法は、境界上の変位と外力とを関係づける剛性方程式(3.7)および観測境界条件式(3.9)、(3.10)に対してNewton法を適用し、最小二乗法を用いて線形連立方程式を繰り返し解くという手法を採用している。ここでは、有限要素法を用いて、提案する逆解析手法の概要を示す。なお、境界要素法による場合も同様の定式化で同定解析を行なうことができる。

つりあい式に対する有限要素の剛性方程式は、同定するパラメータ E_i, ν_i ($i=1, 2, \dots, m$) からなるベクトル \mathbf{P} に関する式として

$$\mathbf{F} = \left(\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D}(\mathbf{P}) \mathbf{B} dv \right) \mathbf{U} = \mathbf{K}(\mathbf{P}) \mathbf{U} \quad (3.11)$$

のように表現できる。ただし、式(3.11)はこの段階では既に変位境界条件の処理を行なった後の縮約された形であることに注意する。なお、 m は異なる物性値の数である。

観測境界条件は、有限要素の節点値として

$$\mathbf{S}_u \mathbf{U} = \bar{\mathbf{U}} \quad (3.12)$$

$$\mathbf{S}_t \mathbf{F} = \int_{\partial \Omega_u} \mathbf{N}^t \hat{\mathbf{i}} dS = \bar{\mathbf{F}} \quad (3.13)$$

と表される。ここで $\bar{\mathbf{U}}, \bar{\mathbf{F}}$ は該当する節点の測定データであり、 \mathbf{S}_u と \mathbf{S}_t は、それぞれ変位および荷重の測定データに対応する節点変位、節点荷重をセレクトするマトリックスで、該当する対角項が1で他はすべて0の要素から構成される。すなわち、いま i 節点の変位観測境界であり、 j 節点が荷重観測境界であるとすると、 \mathbf{S}_u および \mathbf{S}_t はそれぞれ次のようになる。

$$\mathbf{S}_u = \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{bmatrix} \quad \dots i\text{-th row} \quad (3.14)$$

\vdots
 $i\text{-th column}$

$$\mathbf{S}_t = \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{bmatrix} \quad \dots j\text{-th row} \quad (3.15)$$

\vdots
 $j\text{-th column}$

材料パラメータ \mathbf{P} を決定するために式(3.11)、(3.12)、(3.13)に対してNewtonのiteration schemeを適用すると、 k 回目の計算ステップに対してそれぞれ

$$-d\mathbf{F}^k + \mathbf{K}(\mathbf{P}^k) d\mathbf{U}^k + \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{P}} \right)^k d\mathbf{P}^k \mathbf{U}^k = [\mathbf{F} - \mathbf{K}\mathbf{U}]^k \quad (3.16)$$

$$\mathbf{S}_u d\mathbf{U}^k = [\bar{\mathbf{U}} - \mathbf{S}_u \mathbf{U}^k]^k = \bar{\mathbf{U}} - \mathbf{S}_u \mathbf{U}^k \quad (3.17)$$

$$\mathbf{S}_t d\mathbf{F}^k = [\bar{\mathbf{F}} - \mathbf{S}_t \mathbf{F}^k]^k = \bar{\mathbf{F}} - \mathbf{S}_t \mathbf{F}^k \quad (3.18)$$

となる。ここに

$$\begin{aligned} d\mathbf{U}^k &= \mathbf{U}^{k+1} - \mathbf{U}^k \\ d\mathbf{F}^k &= \mathbf{F}^{k+1} - \mathbf{F}^k \\ d\mathbf{P}^k &= \mathbf{P}^{k+1} - \mathbf{P}^k \end{aligned} \quad (3.19)$$

である。なお、上式の \mathbf{K} の偏微分要素 $\partial\mathbf{K}/\partial\mathbf{P}$ は、 \mathbf{P} がベクトルであることから3階のテンソルであり、線形弾性問題の場合には数値微分を必要とせず、容易に解析的に評価することができる。式(3.16), (3.17), (3.18)をマトリックス表示することにより、 k 回目の計算ステップに対して

$$\mathbf{G}d\mathbf{x} = \mathbf{R} \quad (3.20)$$

ここに

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}(\mathbf{P}^k) & -\mathbf{I} & (\frac{\partial\mathbf{K}}{\partial\mathbf{P}}\mathbf{U})^k \\ \mathbf{S}_u & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_t & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$d\mathbf{x} = \begin{bmatrix} d\mathbf{U}^k \\ d\mathbf{F}^k \\ d\mathbf{P}^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}^{k+1} - \mathbf{U}^k \\ \mathbf{F}^{k+1} - \mathbf{F}^k \\ \mathbf{P}^{k+1} - \mathbf{P}^k \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}^k - \mathbf{K}(\mathbf{P}^k)\mathbf{U}^k \\ \bar{\mathbf{U}} - \mathbf{S}_u\mathbf{U}^k \\ \bar{\mathbf{F}} - \mathbf{S}_t\mathbf{F}^k \end{bmatrix}$$

を得る。

一般には、観測データ(変位, 荷重)の数は、未知量の数より多く取り得るので、式(3.20)は条件過多の系(over determined system)となる。そのため、式(3.20)に対して、最小二乗法を適用して誤差関数

$$E = \frac{1}{2}(\mathbf{G}d\mathbf{x} - \mathbf{R}) \cdot (\mathbf{G}d\mathbf{x} - \mathbf{R}) \quad (3.22)$$

を定義すれば、条件 $\delta E = 0$ より正規方程式が次のように得られる。

$$\mathbf{G}^T \mathbf{G} d\mathbf{x} = \mathbf{G}^T \mathbf{R} \quad (3.23)$$

$$\mathbf{G}^T \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}^2 + \mathbf{S}_u & -\mathbf{K} & \mathbf{K}(\frac{\partial\mathbf{K}}{\partial\mathbf{P}}\mathbf{U}) \\ -\mathbf{K} & \mathbf{I} + \mathbf{S}_t & -\frac{\partial\mathbf{K}}{\partial\mathbf{P}}\mathbf{U} \\ (\frac{\partial\mathbf{K}}{\partial\mathbf{P}}\mathbf{U})^T \mathbf{K} & -(\frac{\partial\mathbf{K}}{\partial\mathbf{P}}\mathbf{U})^T & (\frac{\partial\mathbf{K}}{\partial\mathbf{P}}\mathbf{U})^T \frac{\partial\mathbf{K}}{\partial\mathbf{P}}\mathbf{U} \end{bmatrix}^k$$

$$\mathbf{G}^T \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}(\mathbf{F} - \mathbf{K}\mathbf{U}) + \bar{\mathbf{U}} - \mathbf{S}_u\mathbf{U} \\ -\mathbf{F} + \mathbf{K}\mathbf{U} + \bar{\mathbf{F}} - \mathbf{S}_t\mathbf{F} \\ (\frac{\partial\mathbf{K}}{\partial\mathbf{P}}\mathbf{U})^T (\mathbf{F} - \mathbf{K}\mathbf{U}) \end{bmatrix}^k$$

ここで、 \mathbf{K} , \mathbf{S}_u , \mathbf{S}_t の対称性、ならびに $\mathbf{S}_u^2 = \mathbf{S}_u$, $\mathbf{S}_t^2 = \mathbf{S}_t$, $\mathbf{S}_t\bar{\mathbf{U}} = \bar{\mathbf{U}}$ および $\mathbf{S}_t\bar{\mathbf{F}} = \bar{\mathbf{F}}$ であることを利用している。式(3.23)を繰り返し解くことによって材料の物性値が同定される。

ここではさらに、計算の収束性を高めるために次のような操作を行なう。まず、同定パラメータ \mathbf{P} の関数として

$$W(\mathbf{P}) = \frac{1-\omega}{2}(\mathbf{U} - \bar{\mathbf{U}}) \cdot (\mathbf{U} - \bar{\mathbf{U}}) + \frac{\omega}{2}(\mathbf{F} - \bar{\mathbf{F}}) \cdot (\mathbf{F} - \bar{\mathbf{F}}) \quad (3.24)$$

を定義する。ここに、 ω は $0 \leq \omega \leq 1$ を満たす定数であり、観測境界条件が変位観測だけの場合には $\omega = 0$ であり、荷重観測だけの場合には $\omega = 1$ となる。続いて、式(3.23)から得られる $d\mathbf{P}^k$ に対して勾配 α^k

$$\alpha_i^k = \frac{dP_i^k}{P_i^k} \quad (3.25)$$

の方向に沿って式 (3.24) の $W(\mathbf{P})$ が

$$W(\mathbf{P}^k + \lambda \alpha^k) \rightarrow \min \quad (3.26)$$

となるような、 λ を一次元探索法 (例えば、コワリック・オスボーン 1972, 井伊谷・堀田 1972) によって求める。一次元探索法には逐次 2 分法, Fibonacci 探索法, Powell の 1 変数探索法, Davidon の方法等数多くの手法があるが, ここでは計算実行上安全で (コワリック・オスボーン 1972), 関数の傾斜を必要としない Davis らによる方法 (ジャコビ他 1976) を採用した。この探索法は, 最小値を含む領域をある区間内に囲い込み, 最終的に等距離にある 3 点より構成される囲みに対して 2 次式の多項式により λ を求めるものである。

材料パラメータに対しては次の制約条件

$$\begin{aligned} E > 0 \\ 0 < \nu < 0.5 \end{aligned} \quad (3.27)$$

を満足しなければならない。したがって, 制約条件を入れた形で $W(\mathbf{P})$ を

$$\begin{aligned} W(\mathbf{P}) = & \frac{1-\omega}{2}(\mathbf{U} - \bar{\mathbf{U}}) \cdot (\mathbf{U} - \bar{\mathbf{U}}) + \frac{\omega}{2}(\mathbf{F} - \bar{\mathbf{F}}) \cdot (\mathbf{F} - \bar{\mathbf{F}}) \\ & - \frac{1}{\varepsilon} E^- - \frac{1}{\varepsilon} \nu^- + \frac{1}{\varepsilon} (\nu - 0.5)^+ \end{aligned} \quad (3.28)$$

のように書き直しておく。ここで, ε はペナルティ一定数 $0 < \varepsilon \ll 1$ であり,

$$a^+ = \begin{cases} a & \text{if } a > 0 \\ 0 & \text{if } a < 0 \end{cases} \quad a^- = \begin{cases} 0 & \text{if } a > 0 \\ a & \text{if } a < 0 \end{cases} \quad (3.29)$$

である。

これより, 繰り返しステップ $(k+1)$ に対する新しい近似解が

$$\mathbf{P}^{k+1} = \mathbf{P}^k + \lambda \alpha^k \quad (3.30)$$

と決定される。

以上, 有限要素法を用いた同定解析の定式化について述べたが, 境界要素法による場合も, まったく同様の解析手順で定式化することができる。

\mathbf{P}^{k+1} が求まれば, この近似解に対して変位, 荷重を通常の有限要素法, 境界要素法等の順解析により再評価できるので, 収束判定の条件を満足するまでこのステップを繰り返し, 材料パラメータ E_i, ν_i を同定する。なお, 本研究の計算例では次の収束条件を満足した時, 反復計算が収束したものとしている。

$$\begin{aligned} \frac{\|\mathbf{U}^{k+1} - \mathbf{U}^k\|}{\|\mathbf{U}^{k+1}\|} &< \varepsilon_1 \\ \frac{\|\mathbf{F}^{k+1} - \mathbf{F}^k\|}{\|\mathbf{F}^{k+1}\|} &< \varepsilon_2 \\ \frac{\|\mathbf{P}^{k+1} - \mathbf{P}^k\|}{\|\mathbf{P}^{k+1}\|} &< \varepsilon_3 \\ \frac{|W^{k+1} - W^k|}{|W^{k+1}|} &< \varepsilon_4 \end{aligned} \quad (3.31)$$

ここに $0 < \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4 \ll 1$ はあらかじめ与えられた定数であり, $\|\mathbf{a}\| = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})^{1/2}$ である。

3.3 本解析手法の適用例

3.3.1 トラス問題

まず, 図 3.2 に示すような簡単なトラス問題を計算例として考え, 提案する手法の具体的な解析手順についてを示す。解析手順は以下のとおりである。

節点 1 ($\partial\Omega_1$) では荷重 $\hat{t} = 10^6$ N が作用するとともに, 観測境界として変位 $\bar{u} = 0.2$ m が測定され, 他方, 節点 3 が変位境界 ($\hat{u} = 0$) であるとする。ただし, 節点 3 では反力は測定されていないものとする。したがって $d\mathbf{F}^k \equiv \mathbf{o}$ より, 式 (3.16), (3.17) は次のように計算される。

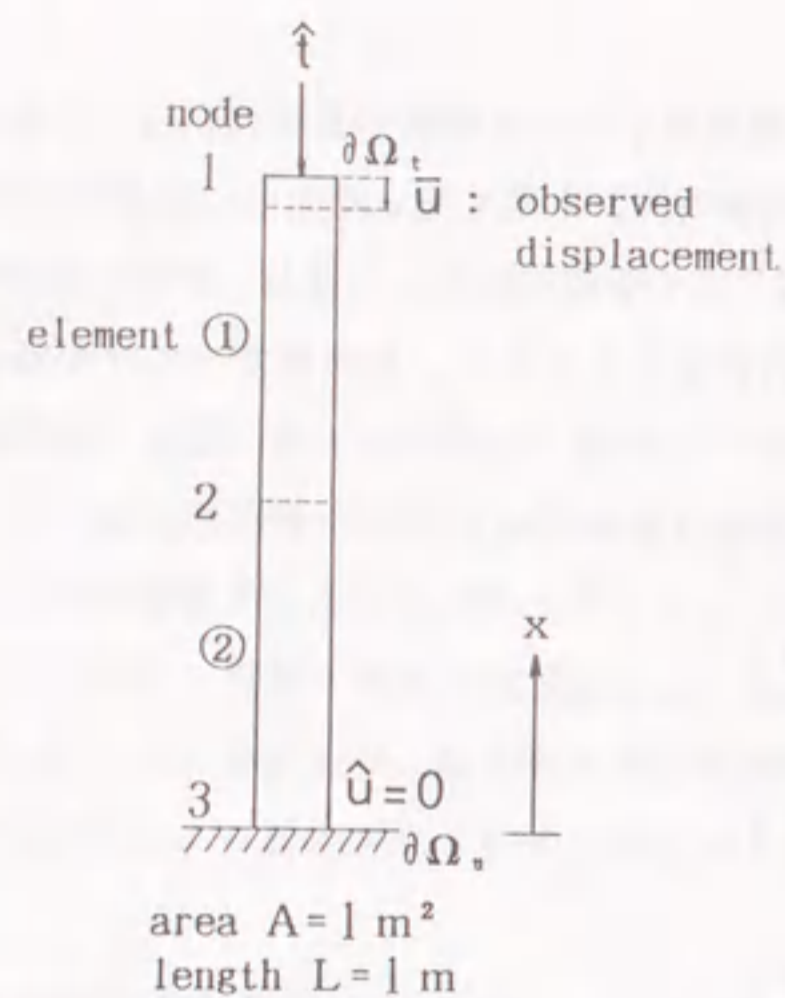


図 3.2: トラス問題

$$\begin{bmatrix} \frac{E^k}{l} & -\frac{E^k}{l} \\ -\frac{E^k}{l} & 2\frac{E^k}{l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dU_1^k \\ dU_2^k \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{l} & -\frac{1}{l} \\ -\frac{1}{l} & 2\frac{1}{l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1^k \\ U_2^k \end{Bmatrix} dE^k \\ = \begin{Bmatrix} -\hat{t} \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{E^k}{l} & -\frac{E^k}{l} \\ -\frac{E^k}{l} & 2\frac{E^k}{l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1^k \\ U_2^k \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dU_1^k \\ dU_2^k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{u} \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1^k \\ U_2^k \end{Bmatrix}$$

ここに、 $l=0.5$ m は要素長さである。この問題では荷重観測境界は考えていないので、式 (3.23) のマトリックスは次のように計算できる。

$$\mathbf{G}^T \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 2(\frac{E}{l})^2 + 1 & -3(\frac{E}{l})^2 & \frac{E}{l^2}(2U_1 - 3U_2) \\ & 5(\frac{E}{l})^2 & \frac{E}{l^2}(-3U_1 + 5U_2) \\ \text{Sym.} & & \frac{1}{l^2}(2U_1^2 - 6U_1U_2 + 5U_2^2) \end{bmatrix}$$

表 3.1: トラス問題の解析結果

	Initial	True	Inverse form.	Direct form.	Proposed
E(MPa)	2.0	5.0	5.000	5.000	5.000
No. of iterations			1	5	3

$$\mathbf{G}^T \mathbf{R} = \begin{Bmatrix} -\frac{E}{l}\hat{t} + (\frac{E}{l})^2(-2U_1 + 3U_2) + \bar{U} - U_1 \\ \frac{E}{l}\hat{t} + (\frac{E}{l})^2(3U_1 - 5U_2) \\ -\frac{1}{l}\hat{t}(U_1 - U_2) - \frac{1}{l^2}(2U_1^2 - 6U_1U_2 + 5U_2^2) \end{Bmatrix}$$

ただし、式 (3.23) 中の上添字 k は省略している。

初期値を $E^0 = 2.0$ MPa とすると、これより変位の初期値が式 (3.11) より計算できて $U_1^0 = -0.5$ m, $U_2^0 = -0.25$ m となる。したがって、これらの値を用いて上式を順次解けば同定解が得られることになる。

収束条件を $\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = 0.01$ とした場合の解析結果を逆定式化法の Gioda らの方法、直接定式化法による結果とあわせて表 3.1 に示す。この簡単な例題では、同定値にこれらの手法の差は見られない。

3.3.2 均一岩盤モデルに対する各手法の比較検討

ここでは、2次元弾性問題について数値シミュレーションを行い、提案する手法の妥当性を検証する。検証方法として、最初に物性が既知であるとして通常の有限要素解析を実施し、順解析によって得られた各測点の変位を観測データと見なして、逆に材料パラメータを推定する同定計算を行った。

図 3.3 に示すような簡単な岩盤モデルを対象に、同定解析法として逆定式化法の Gioda らの方法、直接定式化法による解析、提案する手法、の異なる 3 種類の手法で同定計算を行い、それぞれの手法による材料パラメータの推定結果を比較する。なお、1次元探索法を用いた最適化計算は 3 つの解析手法のすべてについて行なっている。

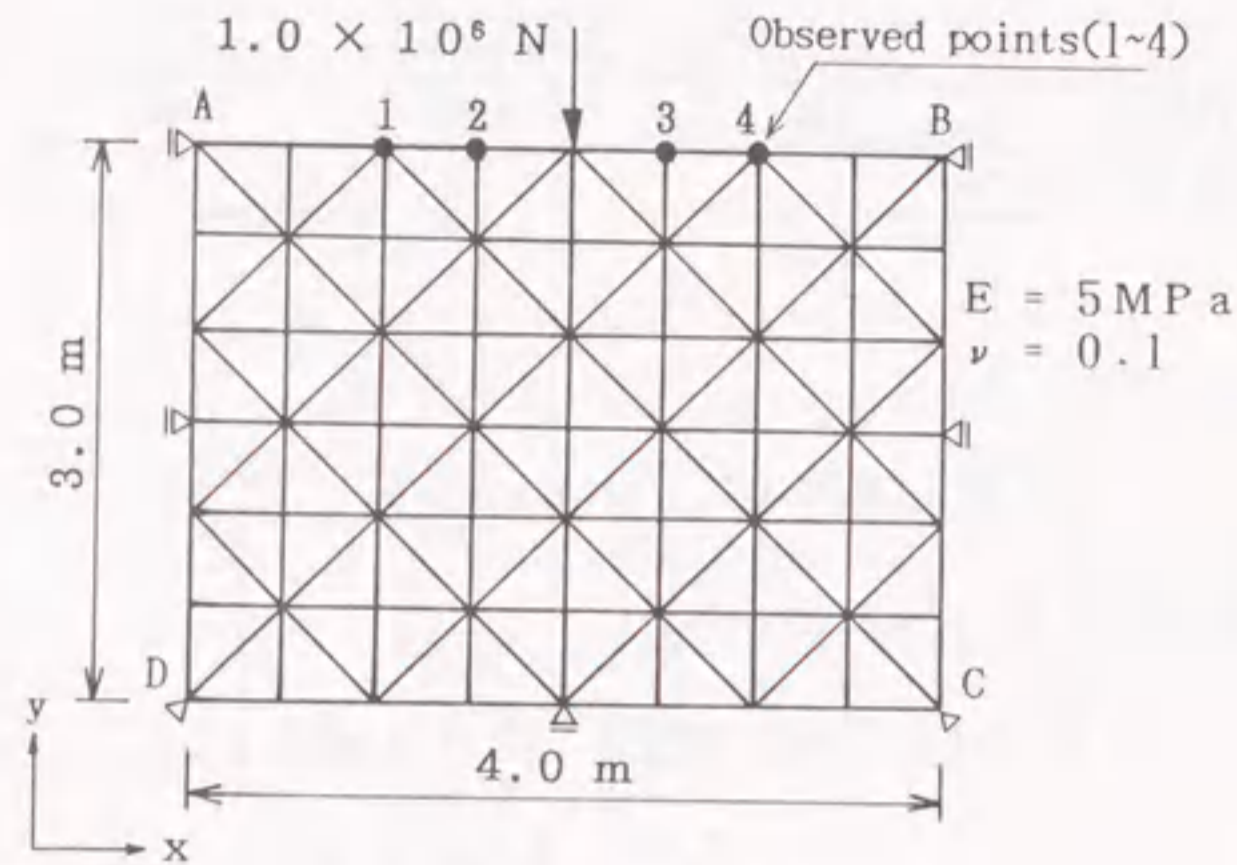


図 3.3: 簡単な均一岩盤モデル

表 3.2: 各手法による解析結果の比較 (ポアソン比を既知とした場合)

	Initial	True	Inverse form. (Gioda)	Direct form.	Proposed
E(MPa)	2.0	5.0	5.000	5.000	5.000
No. of iterations			2	3	3

$$\epsilon_1 = \epsilon_3 = \epsilon_4 = 0.01$$

地表面 AB が荷重境界 $\partial\Omega_t$ であり, 地表面中央に集中荷重 10^6 N が作用している。地表面上の 4 節点 (1 ~ 4) で次のような変位観測データ

$$u_1 = u_4 = 3.94, \quad u_2 = u_3 = 5.15 \quad (\text{cm})$$

$$v_1 = v_4 = -10.51, \quad v_2 = v_3 = -18.76 \quad (\text{cm})$$

を得たものとして同定解析を行なった。ヤング率だけを同定した場合とヤング率だけでなくポアソン比についても同定計算を行った場合の各手法による推定値の結果をそれぞれ表 3.2, 表 3.3 に示す。

表 3.2 より, ヤング率だけについて同定計算を行う場合には, 3 種類の計算方法と

表 3.3: 各手法による解析結果の比較 (ポアソン比が未知の場合)

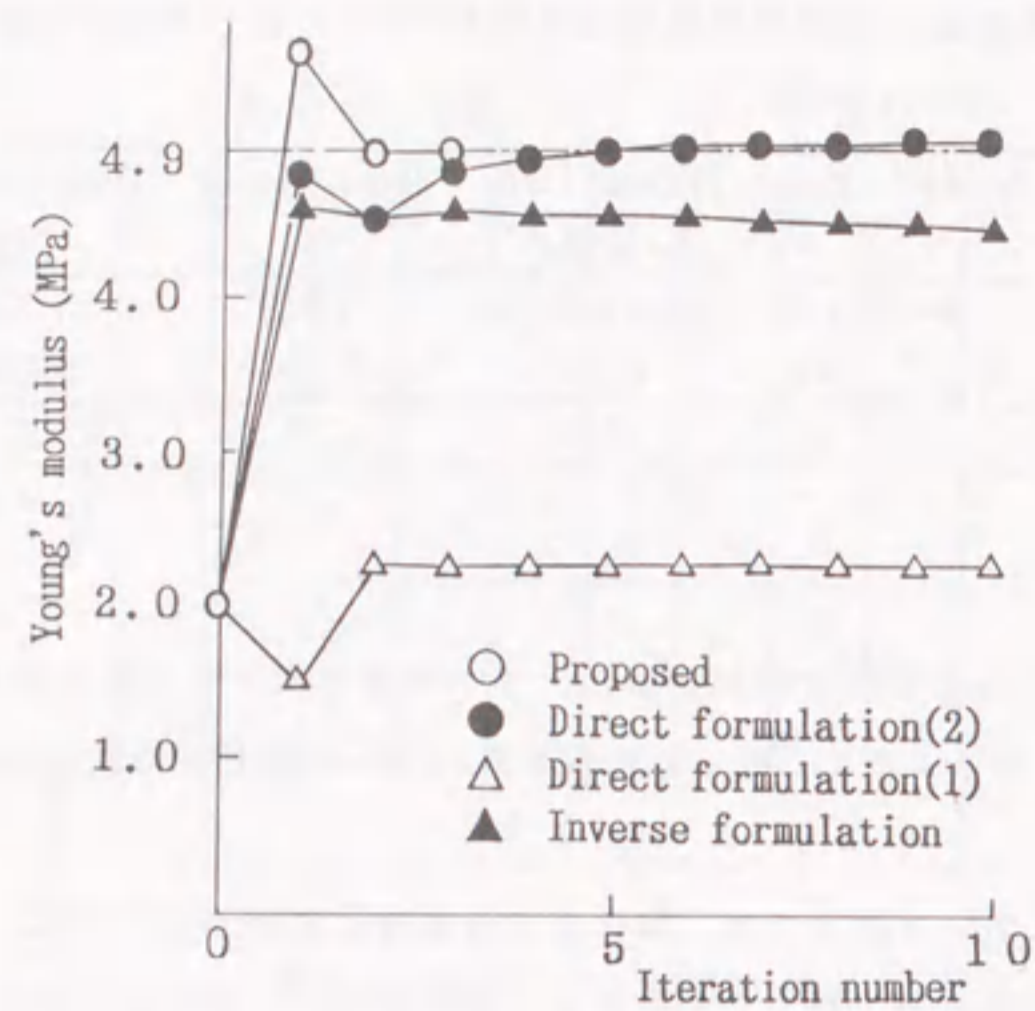
	Initial	True	Inverse form. (Gioda)	Direct form. (1)	Direct form. (2)	Proposed
E(MPa)	2.0	5.0	4.077	2.268	5.056	5.000
ν	0.2	0.1	0.280	0.418	0.102	0.100
No. of iterations			20	12	20	3

$$\epsilon_1 = \epsilon_3 = \epsilon_4 = 0.01$$

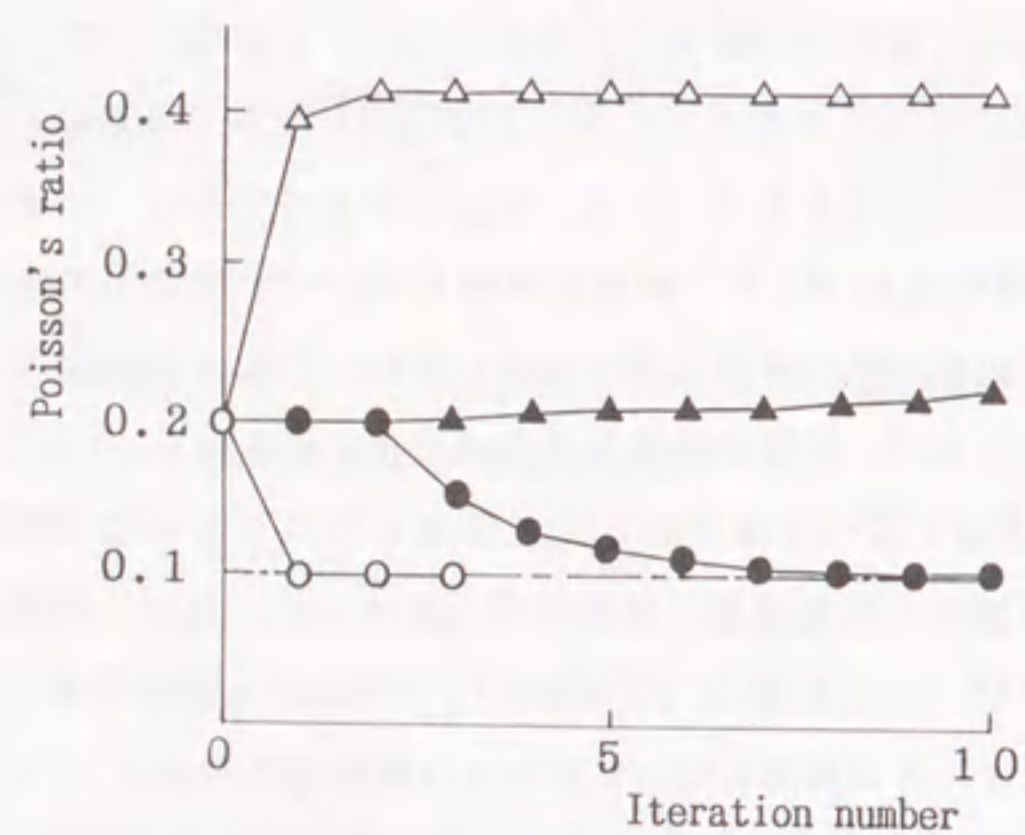
も精度良い結果が得られることがわかるが, ヤング率とポアソン比を同定する場合には, 表 3.3 を見てわかるように, 用いる解析手法によって結果の精度に大きな差異が生じている。

ヤング率 E とポアソン比 ν では, 解に与える感度に差があるために, E と ν に対して最初から同時に同定計算を行うと発散する可能性が高い。表 3.3 における「直接定式化法 (1)」は計算の最初から同時に E と ν の同定を行うものであり, 精度良い結果は得られていない。これに対して, 「直接定式化法 (2)」は, 最初は ν の値を初期値のまま固定しておいて E だけについて計算を行い, ある程度 E の値が収束した後, あらためて E と ν に対する同定解析の計算を行う方法であり, この場合, 式 (3.31) に示す収束条件 ($\epsilon_1 = \epsilon_3 = \epsilon_4 = 1\%$) のすべてについては満足しなかったものの, 解析結果はかなり改善されていることがわかる。なお, Gioda の方法は応力-ひずみマトリックス $D(E, \nu)$ を体積弾性係数 B とせん断弾性係数 G を用いて, それらの線形和として表し, B と G について同定計算を行う方法であるために, E と ν を求める場合には上記のような考慮は適用できず, 結果の精度もそれほど良くなかった。

一方, 他の解析方法と比べて本手法では, E だけでなく ν の値を同定する場合にも少ない繰り返し計算で十分精度良い結果が得られており, また, 計算の途中で数値微分を必要としないこともあり, 計算機の c.p.u. time も最小であった。なお, 各手法による未知パラメータの収束状況の比較および観測境界節点 1, 2 における測定変位の収束状況の比較をそれぞれ図 3.4, 表 3.4 に示す。



(a)



(b)

図 3.4: 未知パラメータの収束状況 (均一岩盤モデル): (a) ヤング率; (b) ポアソン比

表 3.4: 各手法による計算変位の収束状況

Measured data	True (cm)	Inverse form. (Gioda)	Direct form. (1)	Direct form. (2)	Proposed
u_1	3.94	3.34	3.07	3.89	3.94
v_1	-10.51	-9.21	-3.51	-10.38	-10.51
u_2	5.15	4.43	3.66	5.08	5.15
v_2	-18.76	-18.87	-21.04	-18.54	-18.76

3.3.3 平板荷試験

半無限領域あるいは無限領域問題に対して、有限要素法を用いて逆解析を行う場合、材料物性値を精度よく同定するためには、どのくらいの範囲まで要素の離散化を施せばよいか問題となる。ここでは、その数値モデルとして図 3.5 に示すような半無限地盤上の平板荷試験を考え、荷重幅 a と領域の離散化幅 b の比 b/a を変化させて同定解析を行ない、その影響を検討する。なお、ここでは軸対称問題として取り扱っている。

まず、物性値が既知であるとした有限要素による順解析の結果、図 3.5 中の $r = z = 0$ 点における沈下量について、 $b/a = 15$ とした場合の有限要素解が厳密解 (Poulos and Davis 1974) に対して 0.8% の相対誤差であったため、 $b/a = 15$ の時の順解析による結果を真値と見なし、その時の節点 1, 2 (図 3.6 参照) の計算変位を観測データとして同定計算を行った。順解析における要素分割および観測点の位置を図 3.6 に示す。

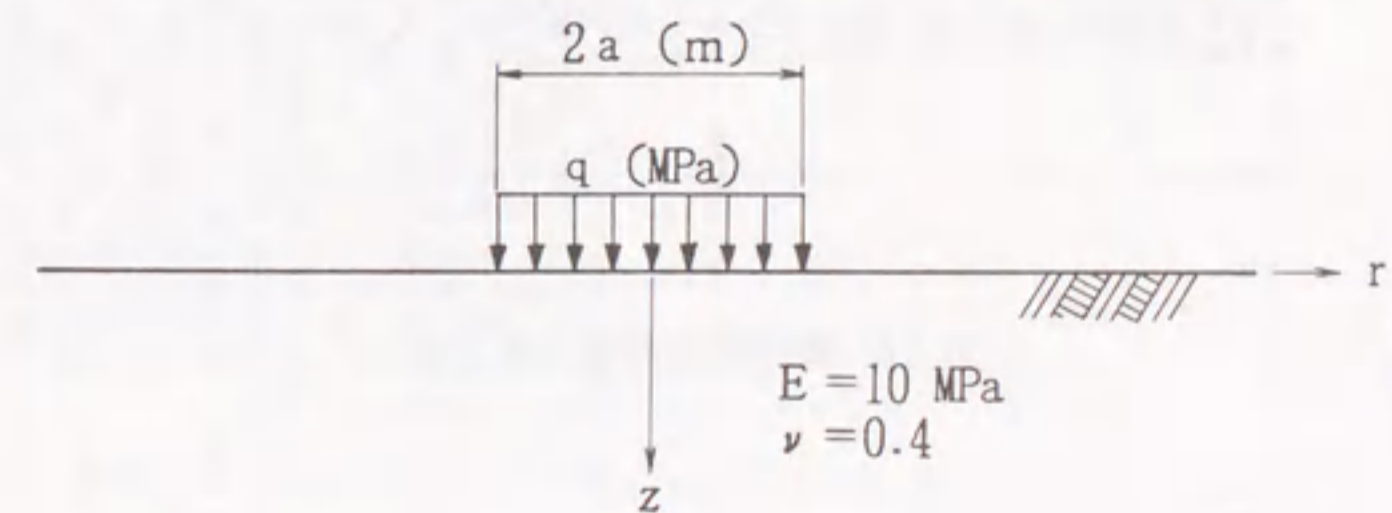


図 3.5: 半無限地盤上の平板荷試験モデル

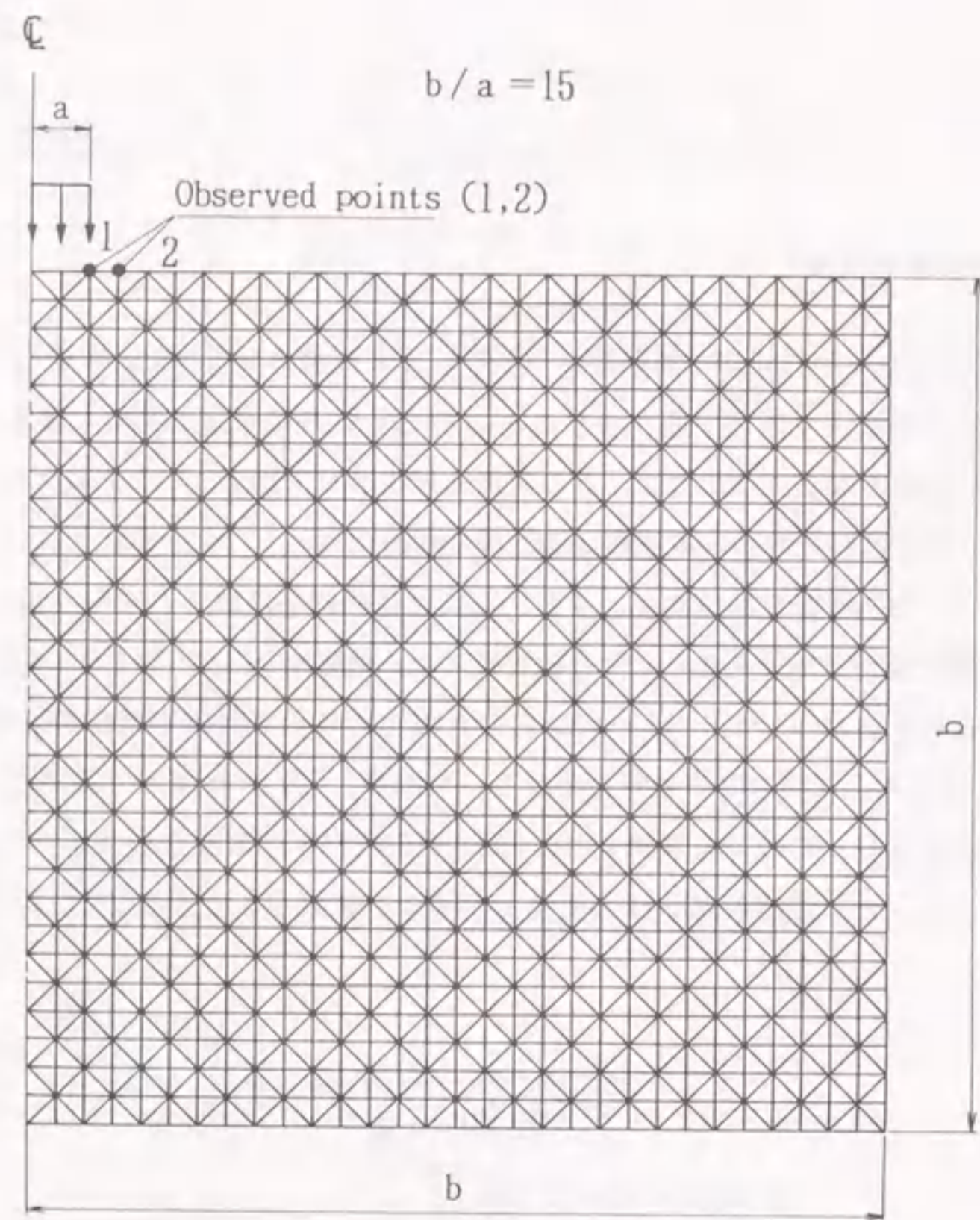


図 3.6: 順解析の有限要素分割図

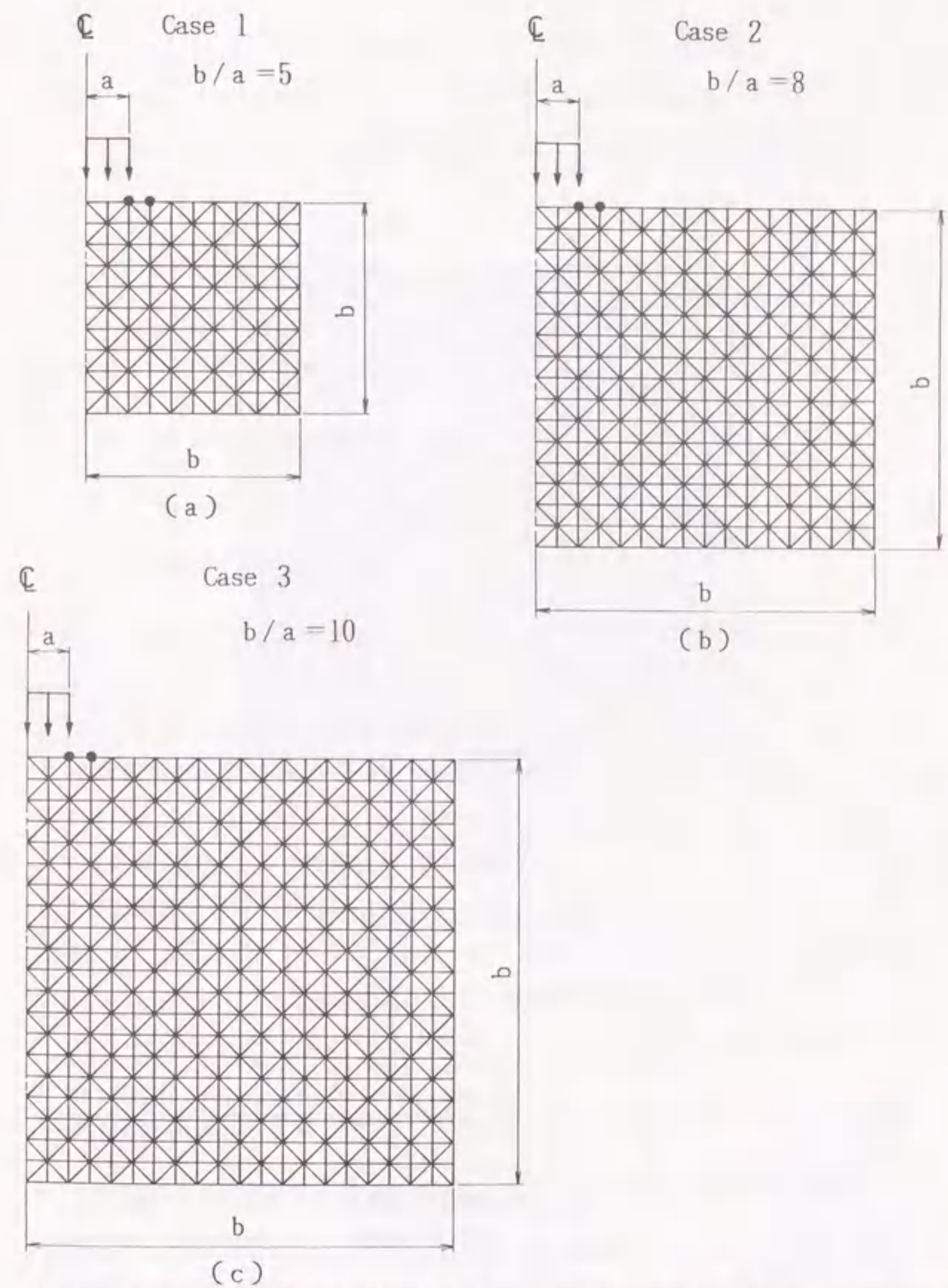


図 3.7: 同定解析の有限要素分割図:(a)Case 1($b/a=5$);(b)Case 2($b/a=8$); (c)Case 3($b/a=10$)

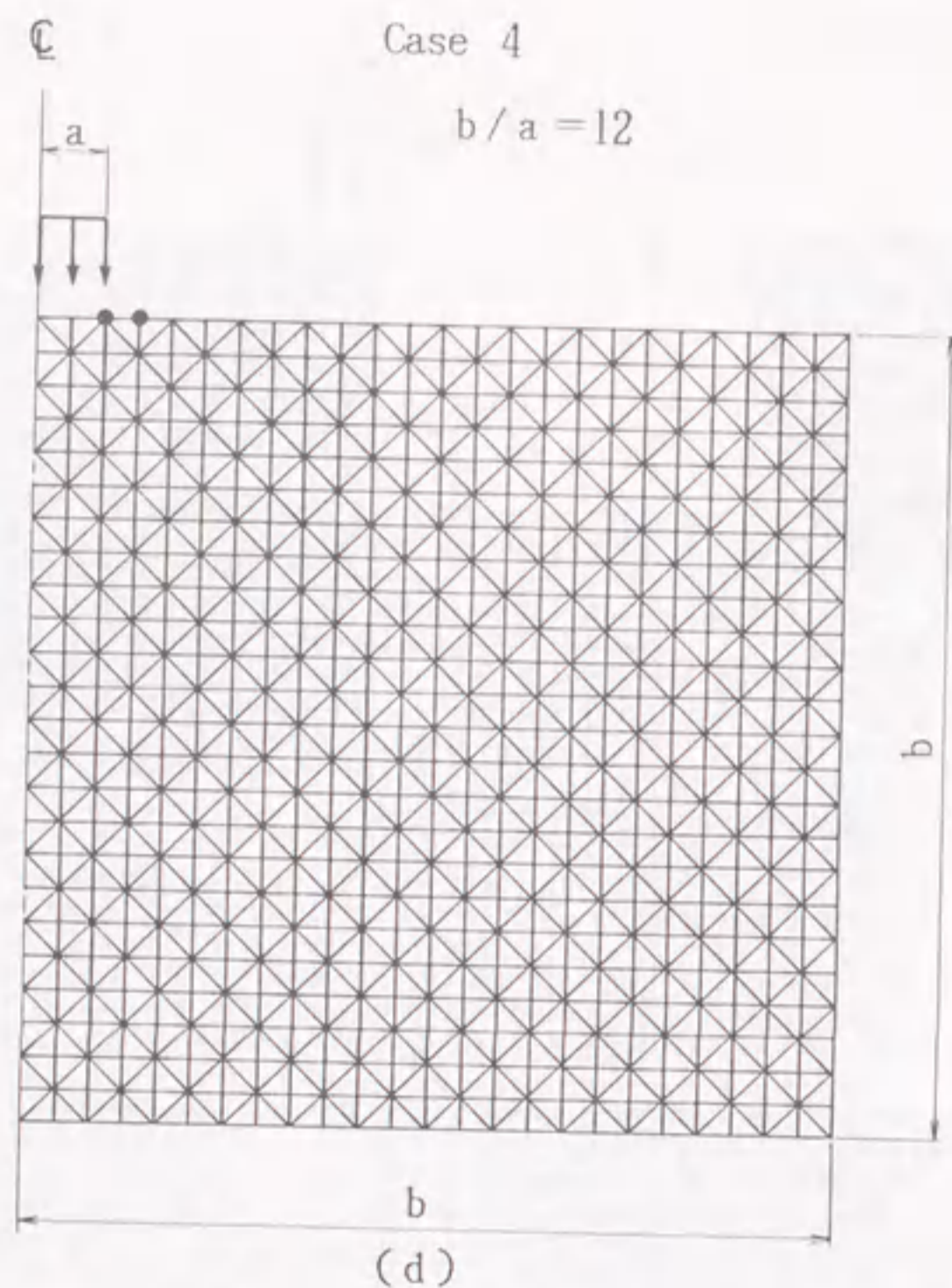


図 3.7: (続き):(d)Case 4(b/a=12)

表 3.5: 平板荷試験モデルの同定解析結果

	Initial	True	Case 1 (b/a=5)	Case 2 (b/a=8)	Case 3 (b/a=10)	Case 4 (b/a=12)
$E(\text{MPa})$	5.0	10.0	7.824	8.972	9.362	9.897
Relative error(%)			21.8	12.0	6.4	1.0
ν	0.1	0.4	0.392	0.401	0.403	0.401
Relative error(%)			2.0	0.3	0.8	0.3
No. of iterations			3	3	3	4

$$\epsilon_3 = \epsilon_4 = 0.01$$

表 3.6: 各 Case における計算変位の収束状況

Measured data	True (cm)	Case 1 (b/a=5)	Case 2 (b/a=8)	Case 3 (b/a=10)	Case 4 (b/a=12)
u_r^1	0.93	1.20	1.00	0.94	0.98
u_z^1	9.13	9.44	9.25	9.21	9.20
u_r^2	0.66	0.80	0.70	0.66	0.64
u_z^2	4.94	4.10	4.60	4.75	4.80

同定すべきパラメーターの正解値

$$E = 10\text{MPa}, \quad \nu = 0.4$$

に対して, 初期値を

$$E = 5\text{MPa}, \quad \nu = 0.1$$

と設定し, 離散化領域の大きさについては, 図 3.7 に示すように $b/a = 5, 8, 10, 12$ の 4 Case について同定計算を行った。また, 計算値の収束判定は, 各 Case について式 (3.31) の収束条件を $\epsilon_3 = \epsilon_4 = 0.01$ とした。

解析結果を表 3.5 に示す。ポアソン比は $b/a = 5$ の範囲までの離散化ですでに正解値に近い値が得られているが, ヤング率については荷重幅の 8 倍の領域まで離散化を施しても正解値に対する相対誤差が 10% を超えており, これより, 半無限領域問題に対して有限要素を用いて同定解析を行うには, およそ荷重幅の 10 倍以上の領域にわたって離散化する必要があることがわかる。各 Case における観測点に対する計算変位の値を表 3.6 に示す。

3.3.4 複合岩盤掘削問題

次に材料特性の異なる複合地盤の同定問題について考える。Arai, Ohta and Yasui (1983) は, 直接定式化法による同定解析の一手法を提案しており, その中で複合地盤の掘削問題を解析している。計算モデルは図 3.8 に示すような 3 層構造をなす地山を掘削する問題であり, 境界 4-6 に掘削による分布荷重が作用している。

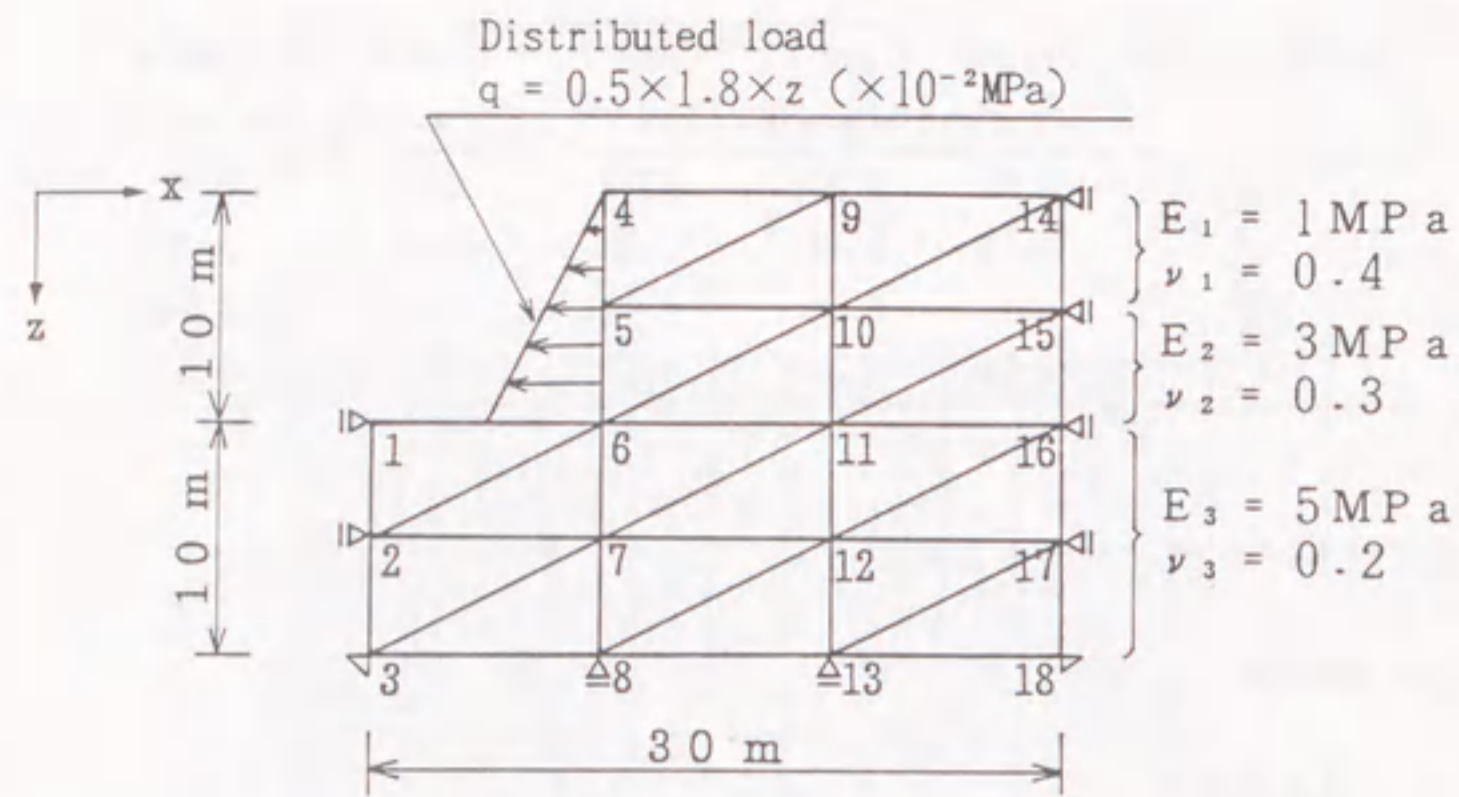


図 3.8: 複合岩盤掘削問題 (Arai et al. 1983)

Arai ら (1983) の計算と同様に、通常の順解析から得られる水平変位 u_4, u_5, u_6, u_9 と鉛直変位 v_1, v_4, v_5, v_6, v_9 を測定変位 (観測データ) として与え、物性値が異なる領域のヤング率 E_1, E_2, E_3 、およびポアソン比 ν_1, ν_2, ν_3 を同定する。与えた観測変位は

$$\begin{aligned}
 v_1 &= -0.014 \text{ (cm)} \\
 u_4 &= 2.16, \quad v_4 = 0.926 \text{ (cm)} \\
 u_5 &= 1.81, \quad v_5 = 0.521 \text{ (cm)} \\
 u_6 &= 0.646, \quad v_6 = 0.133 \text{ (cm)} \\
 u_9 &= 0.959, \quad v_9 = 0.344 \text{ (cm)}
 \end{aligned}$$

である。

各未知パラメータの収束状況を図 3.9 および表 3.7 に示す。Arai らは、観測節点の位置が第 3 層から離れているために、第 3 層のヤング率 E_3 、ポアソン比 ν_3 が精度良く同定できないと結論づけているが、物性値が異なる複合地盤の問題においても、本手法によれば 5 回の繰り返し計算ですべての未知パラメータについて大変精度の良い解が得られていることがわかる。

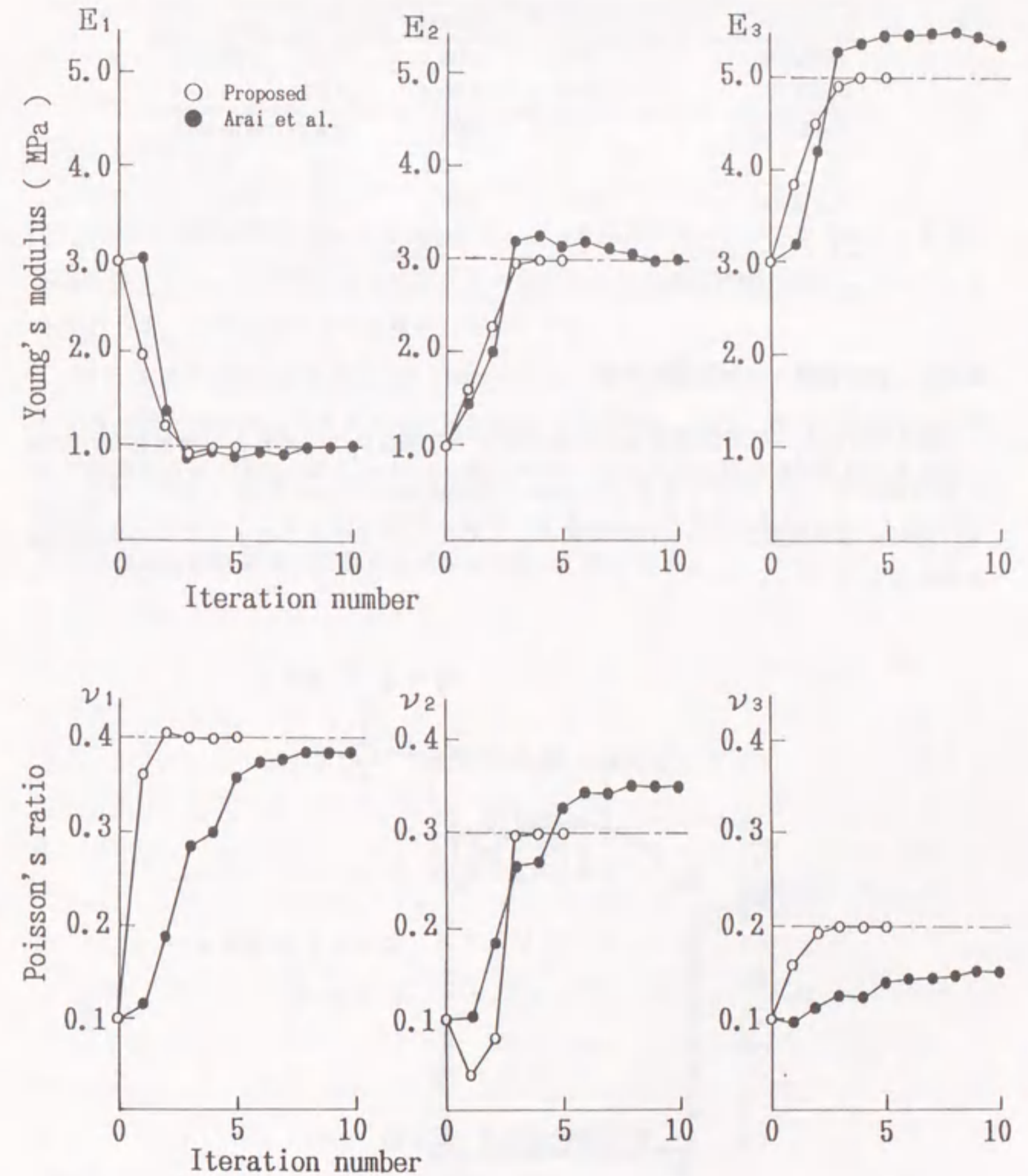


図 3.9: 未知パラメータの収束状況 (複合岩盤モデル): (a) ヤング率; (b) ポアソン比

表 3.7: 複合岩盤モデルに対する同定解析結果

	(A)Initial	(B)True	(A)/(B)	Calculated
E_1 (MPa)	300.0	100.0	3.00	100.00
ν_1	0.1	0.4	0.25	0.40
E_2 (MPa)	100.0	300.0	0.33	300.00
ν_2	0.1	0.3	0.33	0.30
E_3 (MPa)	300.0	500.0	0.60	500.00
ν_3	0.1	0.2	0.50	0.20
No. of iterations				5

3.3.5 無限領域, 半無限領域問題

無限領域あるいは半無限領域の問題を解析する場合には, 境界上の離散化だけで良い境界要素法がより有効である (Kusama, Ohkami and Mitsui 1989, 草間・大上・三井 1990)。境界要素法を用いた解析例として図 3.10 に示すようなトンネルの掘削問題を考える。

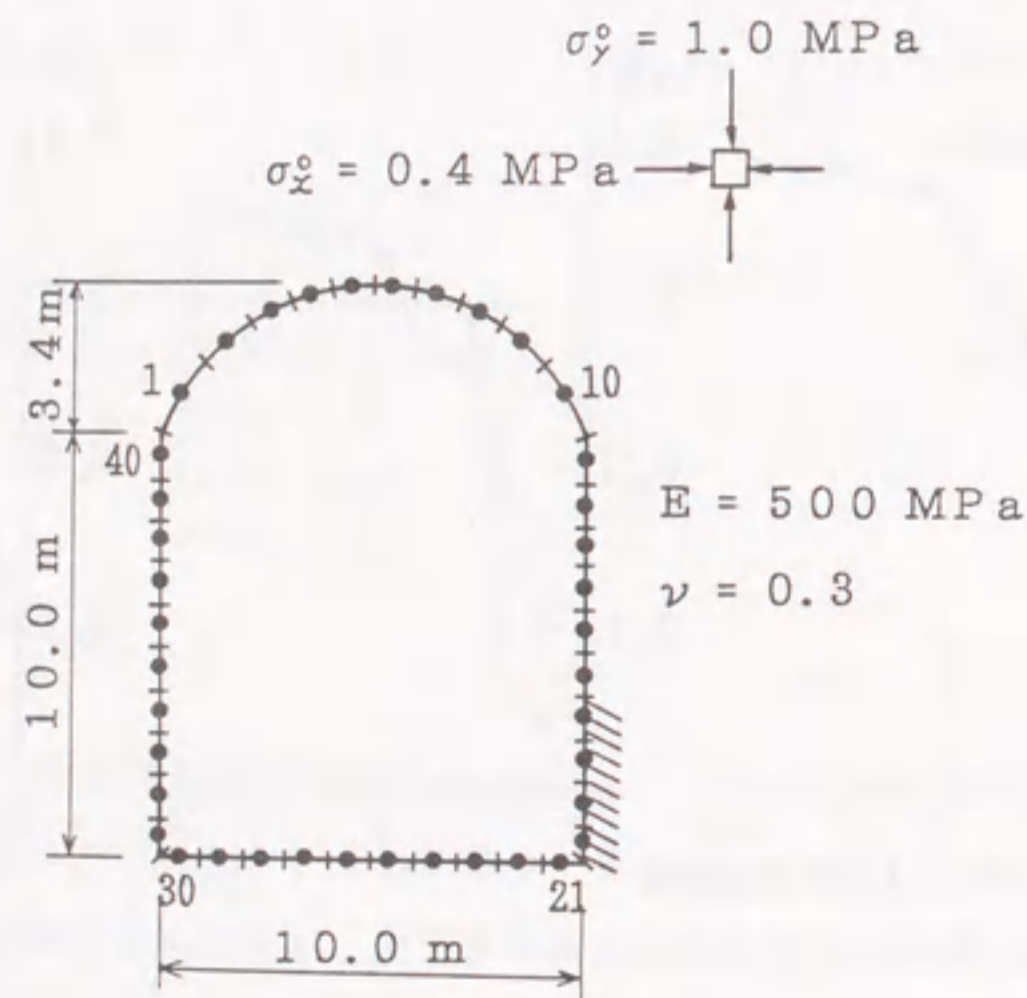


図 3.10: 無限領域問題

表 3.8: トンネル掘削問題の同定解析結果

	(A)Initial	(B)True	(A)/(B)	Calculated
E (MPa)	10.0	500.0	0.02	493.56
ν	0.2	0.3	0.67	0.297
No. of iterations				14

掘削前の初期地圧は図に示す値を仮定し, 一定要素を用いて計算を行った。結果を表 3.8 に示すが, 材料定数の初期値を正解値からかなり離れた値に設定しているにもかかわらず, かなり精度良い結果が得られている。

図 3.11 は半無限地盤上に等分布荷重が作用している場合のモデル図である。図 3.12 に要素分割を示すが, このような半無限領域の問題に対しては, 境界要素法の基本解に半無限基本解 (Telles and Brebbia 1981) を用いれば自由表面の境界条件は解析的に満足されるので, データ作成上極めて簡略化できることになる。材料パラメータ E, ν の同定値および観測変位の収束状況を表 3.9, 3.10 に示す。

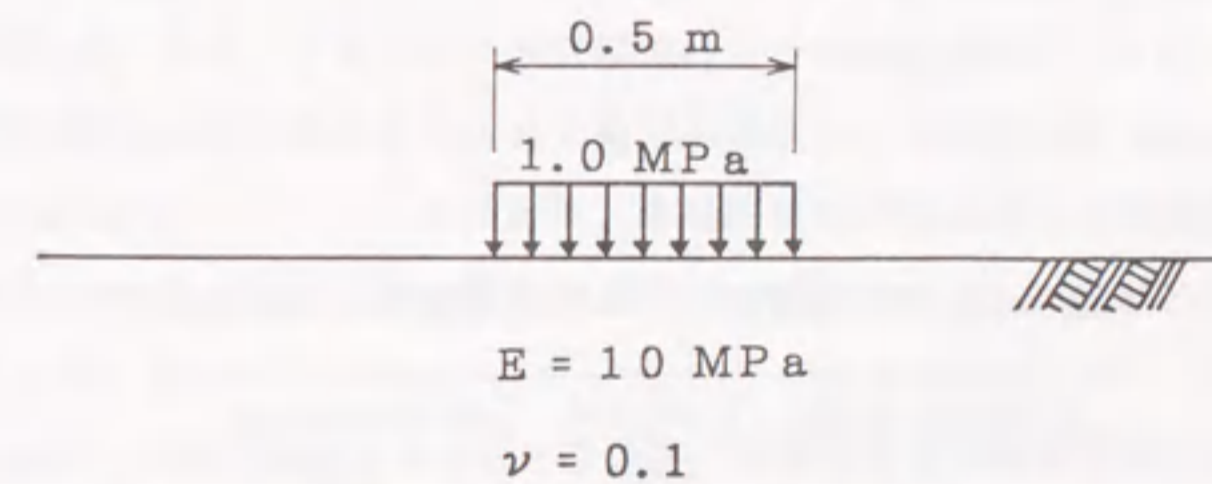


図 3.11: 半無限領域問題

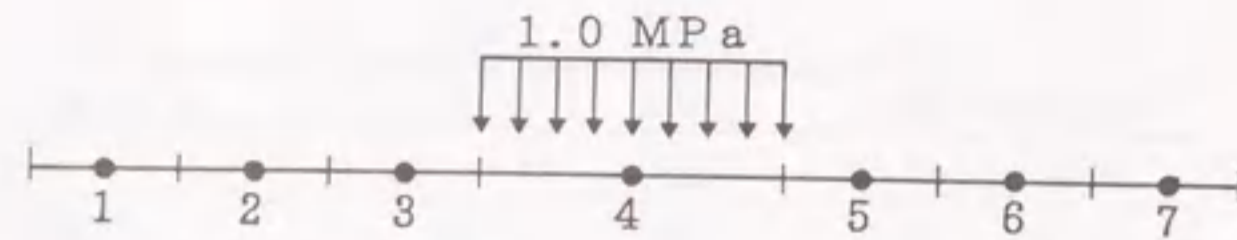


図 3.12: 境界要素分割図 (一定要素)

表 3.9: 半無限地盤モデルの同定解析結果

	(A)Initial	(B)True	(A)/(B)	Calculated
$E(\text{MPa})$	500.0	10.0	50.0	9.725
ν	0.2	0.1	2.0	0.125
No. of iterations	20			

表 3.10: 半無限地盤モデルの鉛直変位の収束状況

Measured point	True(cm)	Calculated(cm)
1	0.47	0.48
2	1.57	1.60
3	3.36	3.44

3.4 まとめ

本章では、線形弾性問題の枠組みの中であらためて境界制御問題としての逆解析について考察を行ない、逆解析の一般的な構造を示した。続いて観測境界において得られる計測データから逆に岩盤の材料定数を推定する同定解析の一手法を提案し、その有効性を検討した。

提案する手法は、有限要素法の剛性方程式あるいは境界要素法の係数方程式と観測条件式に対して Newton 法を適用し、最小二乗法を用いて線形連立方程式を繰り返し解くという手法で、非常に簡単なアルゴリズムで問題を取り扱えるようになっている。また、一次元探索法を適用することによって、制約条件付きの問題も容易に処理でき、解の収束性を高めることができることを示した。

一般には、ヤング率やポアソン比のようにオーダーが大きく異なる材料定数に対して同時に同定計算を行うと、解が発散する可能性が高いと考えられる。しかしながら本文での数値シミュレーションの結果、均質岩盤だけでなく複合材料からなる岩盤に対しても、少ない繰り返し計算でヤング率およびポアソン比ともに正確に同定でき、解の安定性ならびに収束性が非常に安定していることが確かめられた。

半無限領域あるいは無限領域問題に対して、有限要素法を用いて逆解析を行う場合、材料物性値を精度よく同定するためには、どのくらいの範囲まで要素の離散化を施せばよいか問題となる。本章では、半無限地盤上の平板載荷試験モデルについて、荷重幅と領域の離散化幅の比を変化させて軸対称問題として同定解析を行ない、その影響についても検討を行なった。その結果、半無限領域問題に対して有限要素を用いて同定解析を行うには、およそ荷重幅の 10 倍以上の領域にわたって離散化する必要があることを示した。

本章で提案した同定解析の基本的考え方は、有限要素法や境界要素法等の解析手法も含め、特定の問題だけに限定されるものではなく、線形あるいは区分線形関係で表現できるものであれば、他の種々の問題に対しても、同様な定式化で容易に拡張できることが期待できる。

4.1 概説

土木、建築等の建設部門や航空、造船をも含む機械部門での主材料であるコンクリート、土、プラスチック、高温時での金属等は多かれ少なかれ粘弾性的挙動を示すことはよく知られているところである。粘弾性体の応力解析に関してはこれまでに数多くの研究がなされているが、特に増分理論や弾性-粘弾性の対応原理 (Lee 1955) を用いた有限要素法等の計算手法により、複雑な構造や境界条件を有する問題に対しても解析可能となっている (例えば, Zienkiewicz et al. 1968, Rizzo and Shippy 1971, 赤木・大野・色部 1973, 矢川・宮崎 1976, 草間・三井・吉田 1979, Kusama and Mitsui 1982, 市川 1985)。これらの解析において用いる粘弾性体の力学モデルについては、定応力クリープ試験、定ひずみ応力緩和試験などの材料試験を実施することによって、その材料パラメータ値を評価するのが一般的である。しかしながら、各変形段階において区分的に線形であるとする増分理論に立脚するならば、式表現が増分形に変わるだけで、前の章で展開した議論をそのまま容易に拡張することが可能である。

本章では、前章で示した弾性体の同定解析手法を拡張して、線形粘弾性体に対する同定解析の一手法を提案することを試みる。4.2, 4.3 節で線形粘弾性体の基礎理論および増分理論に基づく有限要素法 (順解析) の適用について述べた後、4.4 節ではこれまでの粘弾性物性値のモデル定数の評価方法について示す。それらの理論を踏まえた上で、4.5 節において、一般化 Maxwell モデルを対象として新たに線形粘弾性体に対する同定解析の一手法を提案する。4.6 節では簡単な一次元応力場の問題、平板荷重試験モデルおよび粘弾性斜面問題について数値シミュレーションを行ない、提案する解析手法の有効性を検討している。

なお、久武 (1986) は時間依存性地山を線形粘弾性体と仮定して、トンネル掘削によって生じる地中および地表面の変位から、地山のクリープ関数を求める逆解析手法を提案している。久武の手法は、あらかじめクリープ関数を時間に関する対数関数に近似しておき (伊藤・久武 1981), 仮定した関数モデルに対して対応原理を用いた後, Schapery (1961) の提案した数値ラプラス逆変換手法を適用してモデル定数を決定しようとするもので、本章で提案する手法とは定式化がまったく異なるものである。

4.2 線形粘弾性基礎理論

4.2.1 刺激・応答理論

いま、何も刺激を与えない、自然状態のときともに零である二つの量 x と y を考え、図 4.1(a) に示すようなステップ入力

$$x(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ x_0 = \text{const.} & t > 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

があった時、その応答が

$$y(t) = \varphi(t)x_0 \quad (4.2)$$

となったとする。ここに $\varphi(t)$ は y の変化を与える余効関数 (after-effect function) と呼ばれ、

$$\varphi(t) = 0 \quad t < 0 \quad (4.3)$$

である。

この $\varphi(t)$ の形がどのようなものであるかは、個々の x および y によって定まるものであるが、実在の物理系ではあまり妙な関数ではなく、たかだか有限個の点で δ 関数型の特異性を持つ、準連続関数と考えてよい。

入力 $x(t)$ が図 4.1(b) のようにステップ関数の重ね合わせで表現された場合、その応答は

$$y(t) = \sum_{t_i < t} \varphi(t - t_i) \Delta x_i \quad (4.4)$$

と与えられるので、 t の分割の時間間隔を十分に小さくし、ステップ入力を連続的な入力関数 $x(t)$ におき換えると、

$$y(t) = \int_{-\infty}^t \varphi(t - s) \frac{dx(s)}{ds} ds \quad (4.5)$$

と書くことができる。この式は時刻 t の y の値が、それ以前の時刻 s における x の変化速度に重み関数 $\varphi(t - s)$ を掛けたものを、 $s (< t)$ に対してすべて加え合わせたもので表せることを示すもので、Boltzmann の重畳原理と呼ばれる。

式 (4.5) に部分積分を施すと

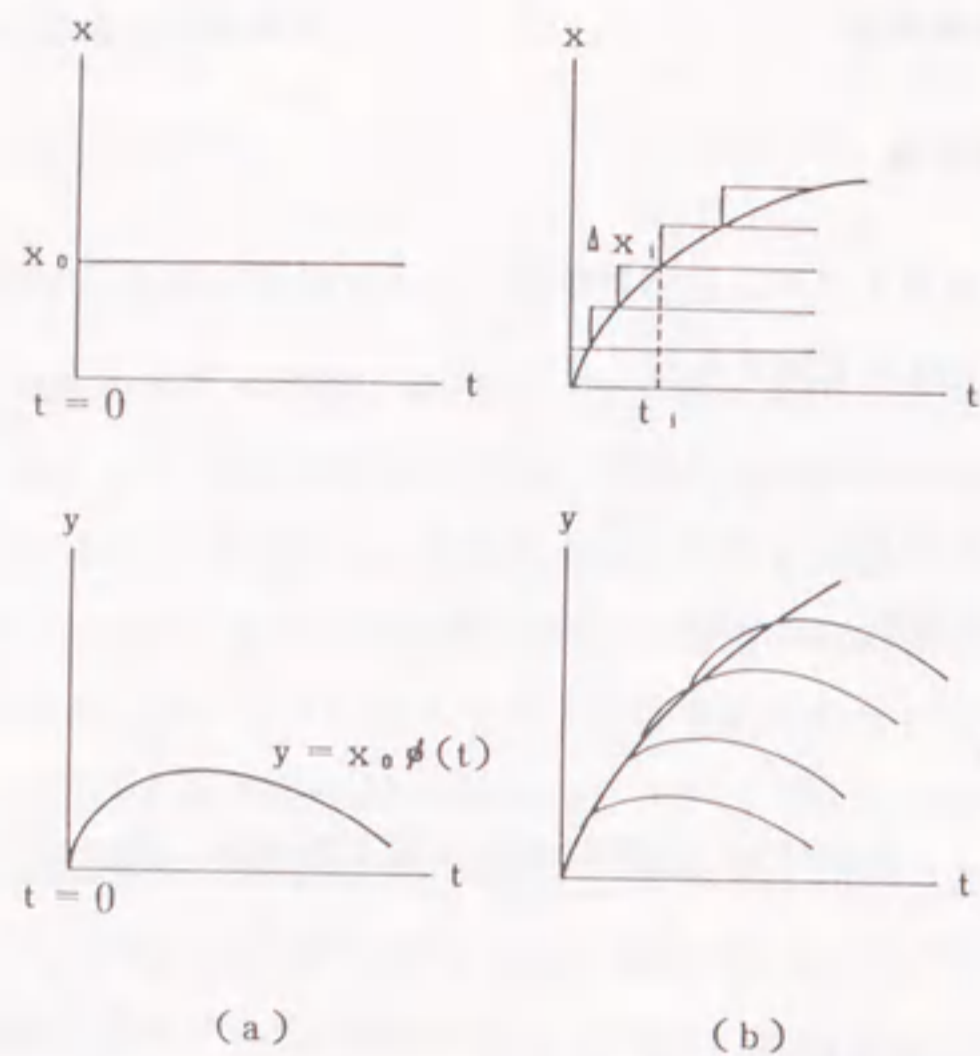


図 4.1: 余効関数と重畳原理 (山本 1972)

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \lim_{s \rightarrow +0} \varphi(s)x(t) + \int_{-\infty}^t \frac{d\varphi(t-s)}{d(t-s)} x(s) ds \\
 &= \int_{-\infty}^t \mu(t-s)x(s) ds
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

を得る。ただし

$$\mu(t-s) = \frac{d\varphi(t-s)}{ds} + \delta(t-s)\varphi(s) \tag{4.7}$$

であり、 $\mu(t)$ は応答関数 (response function) と呼ばれる。

4.2.2 応力緩和と緩和スペクトル

入力 x としてひずみ ε を、 y として応力 σ をとる場合について考えると、単軸状態でひずみ ε が

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \varepsilon_0 & t > 0 \end{cases} \tag{4.8}$$

と与えられた場合の応力変化は

$$\sigma(t) = E(t)\varepsilon_0, \quad E(t) = 0 \quad t < 0 \tag{4.9}$$

と表される。ここで、余効関数 E は単位の段階的変形 ($\varepsilon = 1$) に対する緩和応力を与えるもので、緩和関数と呼ばれる。連続的な入力 $\varepsilon(t)$ に対しては、Boltzmann の重畳原理によって応力応答が

$$\begin{aligned}
 \sigma(t) &= \int_{-\infty}^t E(t-s) \frac{d\varepsilon(s)}{ds} ds \\
 &= \int_{-\infty}^t \Lambda(t-s)\varepsilon(s) ds
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

と得られる。

現実の物体を式 (4.8) で表されるように変形させるためには、 $t=0$ の瞬間に無限大の速さで変形させねばならず、一般にそのためには瞬間に無限大の力を要する。これは、物体が弾性体であるときには問題がないが、粘性流体的なふるまいをするときには考慮する必要がある。このような一過性の大きい応力の後、応力は有限の値になり、しかも一般に時間とともに減少してゆく。これが応力緩和の部分であるが、この応力は時間が充分になっても零になるとは限らず、有限の値に漸近することがある。このように、一般に粘弾性体では、瞬間弾性的な性質、粘性流体的な性質および純粋に応力緩和を示す性質が組み合わさって応答ができるので、緩和関数 E は

$$E(t) = E_0 + \eta_\infty \delta(t) + \bar{E}(t) \tag{4.11}$$

と書くことができる。ここに $\bar{E}(t)$ は純粋に応力緩和を与える部分で、

$$\bar{E}(0) = \kappa < \infty, \quad \bar{E}(+\infty) = 0 \tag{4.12}$$

を満たす単調減少関数である。したがって、Laplace 変換を用いて

$$\bar{E}(t) = \int_0^\infty N(s)e^{-st} ds \tag{4.13}$$

と書くことができる。ここで便宜上変数を s から $\tau = 1/s$ に、さらに $\ln \tau$ に変えて式 (4.13) を

$$\bar{E}(t) = \int_0^\infty F(\tau)e^{-t/\tau} ds$$

$$= \int_0^{\infty} H(\tau) e^{-t/\tau} d(\ln \tau) \quad (4.14)$$

と書き換える。ここに $F(\tau)$, $H(\tau)$ は $N(s)$ と

$$H(\tau) = \tau F(\tau) = N(1/\tau)/\tau \quad (4.15)$$

なる関係がある。通常 $F(\tau)$ は緩和時間の分布関数, $H(\tau)$ は緩和スペクトルと呼ばれる。

式 (4.14) を式 (4.10) に代入して積分順序を変更すると, 応力 σ は

$$\sigma(t) = \sigma_0(t) + \sigma_{\infty}(t) + \int_0^{\infty} \sigma(t; \tau) d(\ln \tau) \quad (4.16)$$

で与えられる。ここに

$$\sigma(t; \tau) = H(\tau) \int_{-\infty}^t e^{-(t-s)/\tau} \frac{d\varepsilon(s)}{ds} ds \quad (4.17)$$

であり, また

$$\sigma_0(t) = E_0 \varepsilon, \quad \sigma_{\infty}(t) = \eta_{\infty} \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (4.18)$$

である。

式 (4.17) を時間で微分すると $\sigma(t; \tau)$ と $\varepsilon(t)$ に関する微分方程式が次のように得られる。

$$H(\tau) \frac{d\varepsilon(t)}{dt} = \frac{d\sigma(t; \tau)}{dt} + \frac{1}{\tau} \sigma(t; \tau) \quad (4.19)$$

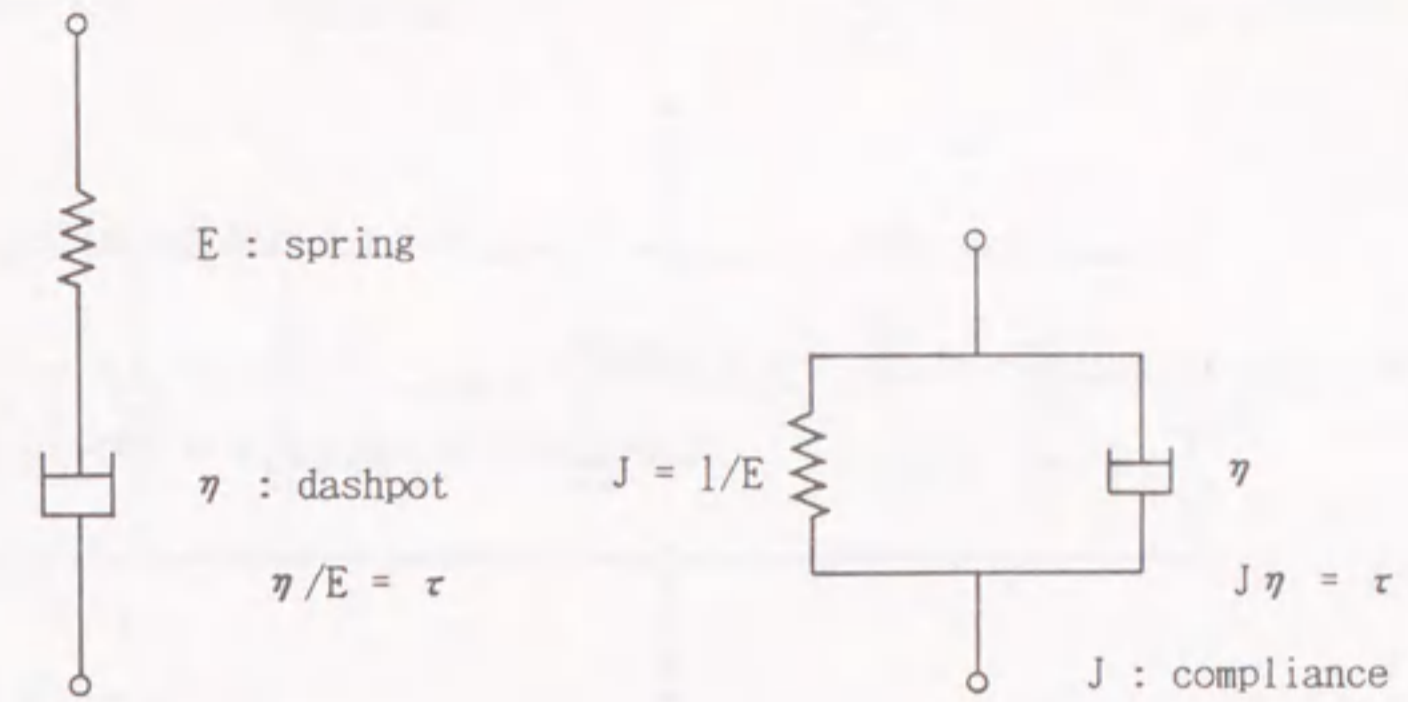
図 4.2(a) に示す単一 Maxwell モデルの応答は

$$E \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\sigma}{dt} + \frac{1}{\tau} \sigma \quad (4.20)$$

E : 弾性係数
 $\tau = \eta/E$: 緩和時間
 η : 粘性係数

と式 (4.19) と相似な形に書くことができるので, 応答 (4.16) は結局, 各スペクトルごとの応答を合成したものであり, 離散的に

$$E(\tau) = \sum_i E_i \delta(\tau - \tau_i) \quad (4.21)$$



(a) Maxwell model (b) Voigt model

図 4.2: 単一要素モデル: (a)Maxwell モデル; (b)Voigt モデル

と表現すると図 4.3(a) の一般化 Maxwell モデルとなる。

物体が等方性を有すると, 応力はその偏差成分と体積成分ごとに

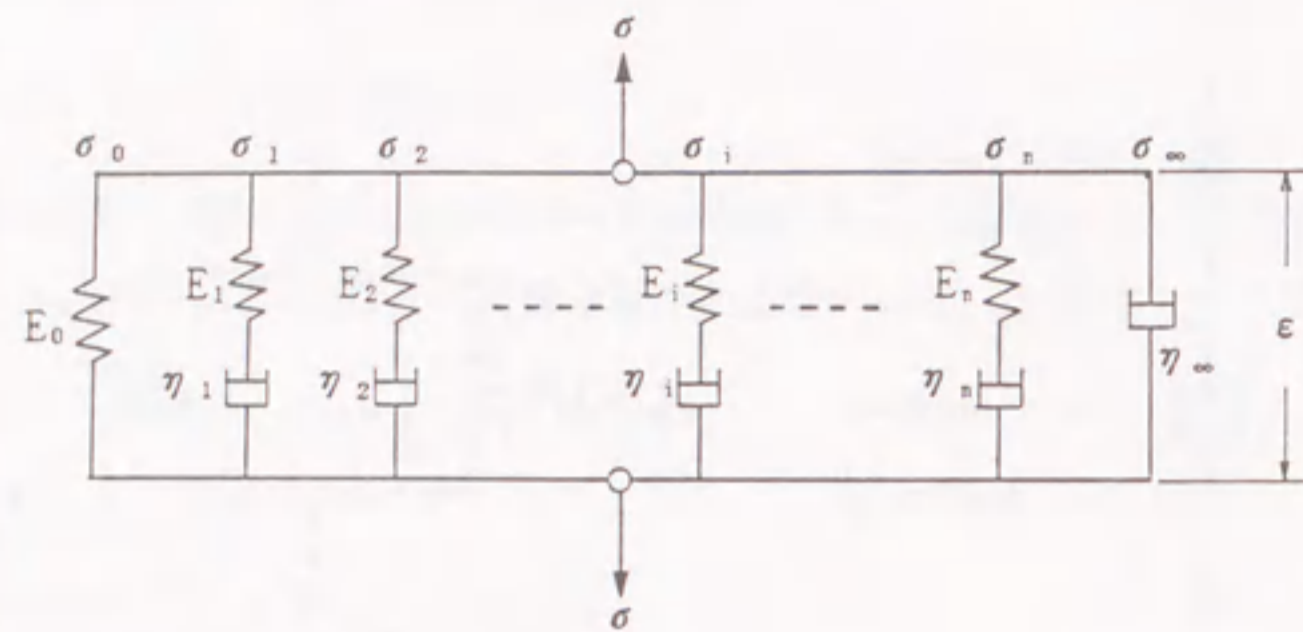
$$\begin{aligned} \bar{s}(t) &= 2 \int_{-\infty}^t G(t-s) \frac{d\varepsilon(s)}{ds} ds \\ \bar{\sigma}(t) &= 3 \int_{-\infty}^t K(t-s) \frac{d\bar{\varepsilon}(s)}{ds} ds \end{aligned} \quad (4.22)$$

と表される。ここに

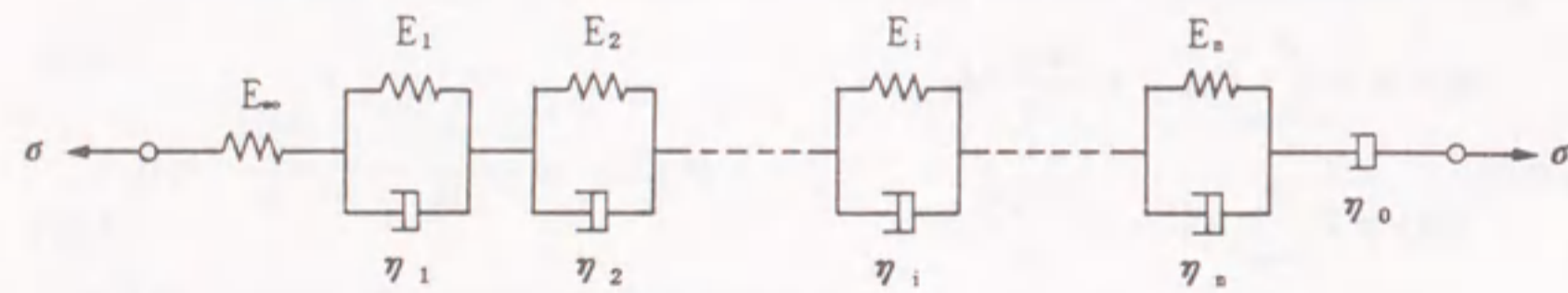
$$\begin{aligned} G(t) &= G_0 + \eta_{\infty}^G \delta(t) + \bar{G}(t) \\ K(t) &= K_0 + \eta_{\infty}^K \delta(t) + \bar{K}(t) \end{aligned} \quad (4.23)$$

であり,

$$\begin{aligned} \bar{G}(t) &= \int_0^{\infty} \Phi^G(\tau) e^{-t/\tau} d(\ln \tau) \\ \bar{K}(t) &= \int_0^{\infty} \Phi^K(\tau) e^{-t/\tau} d(\ln \tau) \end{aligned} \quad (4.24)$$



(a) Maxwell model



(b) Voigt model

図 4.3: 一般化モデル: (a)Maxwell モデル; (b)Voigt モデル

と与えられる。 $\sigma(t) = s(t) + \bar{\sigma}(t)$ であるのに注意すると、全応力応答は式 (4.22) の両式の和で与えられることがわかる。

4.2.3 クリープと遅延スペクトル

前節では x としてひずみを、 y として応力を考えたが、ここでは逆に、刺激 x に応力を、応答 y にひずみを与える。すなわち応力を

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \sigma_0 & t > 0 \end{cases} \quad (4.25)$$

と与えたときのひずみが

$$\epsilon(t) = J(t)\sigma_0, \quad J(t) = 0 \quad t < 0 \quad (4.26)$$

となったとする。この定義より $J(t)$ が単位の階段状応力に対するクリープ変形を表すことがわかる。前と同様に一般的な入力 $\sigma(t)$ に対するひずみ応答は

$$\begin{aligned} \epsilon(t) &= \int_{-\infty}^t J(t-s) \frac{d\sigma(s)}{ds} ds \\ &= \int_{-\infty}^t \Gamma(t-s) \sigma(s) ds \end{aligned} \quad (4.27)$$

で与えられる。ここで $J(t)$ はクリープ関数と呼ばれる。

応力緩和の場合と同様に、瞬間弾性的な性質、粘性流体的な性質および純粋にクリープ現象を示す性質を組み合わせ、クリープ関数 $J(t)$ は

$$J(t) = J_\infty + t/\eta_0 + \bar{J}(t) \quad (4.28)$$

と書くことができる。ただし、 $J_\infty = 1/E_\infty$ である。 $\bar{J}(t)$ は

$$\bar{J}(0) = 0, \quad \bar{J}(+\infty) = \rho < +\infty \quad (4.29)$$

を満たす単調減少関数であることから、Laplace 変換を用いて

$$\bar{J}(t) = \int_0^\infty M(s)(1 - e^{-st}) ds \quad (4.30)$$

と書くことができ、前と同様に s の代わりに $\tau = 1/s$ を用いて

$$\begin{aligned}\bar{J}(t) &= \int_0^\infty K(\tau)(1 - e^{-t/\tau})ds \\ &= \int_0^\infty L(\tau)(1 - e^{-t/\tau})d(\ln \tau)\end{aligned}\quad (4.31)$$

と書くことができる。ここに

$$L(\tau) = \tau K(\tau) = M(1/\tau)/\tau \quad (4.32)$$

である。 $K(\tau)$ は遅延時間の分布関数、 $L(\tau)$ は遅延スペクトルと呼ばれる。

式(4.31)を式(4.27)に代入して

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0(t) + \varepsilon_\infty(t) + \int_0^\infty \varepsilon(t; \tau)d(\ln \tau) \quad (4.33)$$

を得る。ここに

$$\varepsilon(t; \tau) = L(\tau) \int_{-\infty}^t (1 - e^{-(t-s)/\tau}) \frac{d\sigma(s)}{ds} ds \quad (4.34)$$

であり、また

$$\varepsilon_\infty(t) = J_\infty \sigma, \quad \varepsilon_0(t) = \frac{1}{\eta_0} \int_{-\infty}^t \sigma(s) ds \quad (4.35)$$

である。

式(4.34)を時間で微分すると

$$L(\tau)\sigma(t) = \tau \frac{d\varepsilon(t; \tau)}{dt} + \varepsilon(t; \tau) \quad (4.36)$$

を得る。図4.2(b)に示す単一 Voigt モデルの応答が

$$J\sigma = \tau \frac{d\varepsilon}{dt} + \varepsilon \quad (4.37)$$

$J = 1/E$: 弾性コンプライアンス

$\tau = \eta J$: 遅延時間

η : 粘性係数

と書くことができるので、応答(4.33)は結局、各スペクトルごとの応答を合成したものであり、離散的に

$$L(\tau) = \sum_i J_i \delta(\tau - \tau_i) \quad (4.38)$$

と表現すると図4.3(b)の一般化 Voigt モデルとなる。

等方物体に対しては、応力緩和の場合と同様に、ひずみをその偏差成分と体積成分に分けて

$$\begin{aligned}\mathbf{e}(t) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^t B(t-s) \frac{d\mathbf{s}(s)}{ds} ds \\ \bar{\varepsilon}(t) &= \frac{1}{3} \int_{-\infty}^t C(t-s) \frac{d\bar{\sigma}(s)}{ds} ds\end{aligned}\quad (4.39)$$

と表される。ここに

$$B(t) = B_\infty + t/\eta_0^G + \bar{B}(t) \quad (4.40)$$

$$C(t) = C_\infty + t/\eta_0^K + \bar{C}(t)$$

であり、

$$\begin{aligned}\bar{B}(t) &= \int_0^\infty \Psi^G(\tau)(1 - e^{-t/\tau})d(\ln \tau) \\ \bar{C}(t) &= \int_0^\infty \Psi^K(\tau)(1 - e^{-t/\tau})d(\ln \tau)\end{aligned}\quad (4.41)$$

と与えられる。なお、 $\varepsilon(t) = \mathbf{e}(t) + \bar{\varepsilon}(t)$ であることに注意する。

4.2.4 緩和スペクトルと遅延スペクトルの漸近展開

実験的に得られた緩和関数から緩和スペクトルを求める方法は Schwarzl-Staverman, Learnerman らによって提唱された(山本 1972)。

いま、式(4.13)の両辺を k 回微分すると

$$\frac{d^k \bar{E}(t)}{dt^k} = (-1)^k \int_0^\infty N(s) s^k e^{-st} ds \quad (4.42)$$

が得られるが、 $s^k e^{-st}$ は $s = k/t$ で極大を持ち、かつ、 k の増大にともなってその値も増大するので、 δ 関数で置き換えることができる。ただし、

$$\int_0^\infty s^k e^{-st} ds = \frac{k!}{t^{k+1}} \quad (4.43)$$

であるので

$$\begin{aligned} \frac{d^k \bar{E}(t)}{dt^k} &= (-1)^k \frac{k!}{t^{k+1}} \int_0^\infty N(s) \delta(s - k/t) ds \\ &= (-1)^k \frac{k!}{t^{k+1}} N(k/t) \end{aligned} \quad (4.44)$$

となる。\$k \to 0\$ とすることによって漸近式

$$N(s) = \sum_{k \rightarrow \infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{k}{s}\right)^{k+1} \frac{d^k \bar{E}(k/s)}{d(k/s)^k} \quad (4.45)$$

が得られるが、\$\bar{E}\$ が \$k/s\$ の関数となっているため、式 (4.15) によって \$H(\tau)\$ になおして

$$H(\tau) = \sum_{k \rightarrow \infty} \frac{(-1)^k}{(k-1)!} (k\tau)^k \frac{d^k \bar{E}(k\tau)}{d(k\tau)^k} \quad (4.46)$$

を得る。これは緩和スペクトル \$H(\tau)\$ が

$$\begin{aligned} H_1(\tau) &= -\tau \frac{d\bar{E}(\tau)}{d\tau} \\ H_2(\tau/2) &= \tau^2 \frac{d^2 \bar{E}(\tau)}{d\tau^2} \\ &\vdots \end{aligned} \quad (4.47)$$

と近似的に表されることを示している。

式 (4.31) の遅延スペクトル \$L(\tau)\$ も同様に

$$L(\tau) = \sum_{k \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(k-1)!} (k\tau)^k \frac{d^k \bar{J}(k\tau)}{d(k\tau)^k} \quad (4.48)$$

と表される。

等方物体の緩和スペクトルに対しては

$$\begin{aligned} \Phi^G(\tau) &= \sum_{k \rightarrow \infty} \frac{(-1)^k}{(k-1)!} (k\tau)^k \frac{d^k \bar{G}(k\tau)}{d(k\tau)^k} \\ \Phi^K(\tau) &= \sum_{k \rightarrow \infty} \frac{(-1)^k}{(k-1)!} (k\tau)^k \frac{d^k \bar{K}(k\tau)}{d(k\tau)^k} \end{aligned} \quad (4.49)$$

であり、遅延スペクトルに対しては

$$\Psi^G(\tau) = \sum_{k \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(k-1)!} (k\tau)^k \frac{d^k \bar{B}(k\tau)}{d(k\tau)^k}$$

$$\Psi^K(\tau) = \sum_{k \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(k-1)!} (k\tau)^k \frac{d^k \bar{C}(k\tau)}{d(k\tau)^k} \quad (4.50)$$

と求まる。

これらのスペクトルの式は、\$k\$ が大きい方が近似度が高まるが、一方、実験的に得られた値を数値微分することによる誤差が大きくなるので、むやみに \$k\$ を大きくすることはできない。通常、\$k=1\$ または \$k=2\$ がよく用いられている。

4.3 増分理論による有限要素解析

粘弾性理論の有限要素法への適用において、弾性問題と異なる基礎式は、応力・ひずみ関係式（構成則）のみで、他に変わりはない。したがって、粘弾性問題で得られる剛性方程式は、応力・ひずみ関係式における履歴積分が付加項として加わった連立積分方程式となる。ここでは、各変形段階において基礎方程式を区分的に線形とする増分理論を用いて、一般化 Maxwell モデルに対する有限要素解析の定式化について記述する。一般化 Voigt モデルに対する解析も同様のプロセスを進めることができる。また、一般化 Voigt モデルと一般化 Maxwell モデルの等価性（色部・赤木 1973, 赤木 1976）より、クリープ試験によって求めた Voigt モデルの定数をそれと等価な Maxwell モデルの材料定数に変換して計算することも可能である。

最初に、構成則の増分形について述べる。一般化 Maxwell モデルの緩和関数は式 (4.23) で与えられるが、前節で述べたように離散形では

$$\begin{aligned} G(t) &= G_0 + \eta_\infty^G \delta(t) + \sum_i G_i e^{-t/\tau_i^G} \\ K(t) &= K_0 + \eta_\infty^K \delta(t) + \sum_i K_i e^{-t/\tau_i^K} \end{aligned} \quad (4.51)$$

と書くことができる。いま、応答 (4.22) を次のように書き換える。

$$\begin{aligned} \mathbf{s}(t) &= \mathbf{s}(t_0) + 2 \int_{t_0}^t G(t-s) \frac{d\mathbf{e}(s)}{ds} ds \\ \bar{\sigma}(t) &= \bar{\sigma}(t_0) + 3 \int_{t_0}^t K(t-s) \frac{d\bar{\mathbf{e}}(s)}{ds} ds \end{aligned} \quad (4.52)$$

ただし

$$\begin{aligned} \mathbf{s}(t_0) &= 2 \int_{-\infty}^{t_0} G(t-s) \frac{d\mathbf{e}(s)}{ds} ds \\ \bar{\boldsymbol{\sigma}}(t_0) &= 3 \int_{-\infty}^{t_0} K(t-s) \frac{d\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(s)}{ds} ds \end{aligned} \quad (4.53)$$

である。初期時刻を t にとり、微小時間内 $(t, t+\Delta t)$ においてひずみ速度 $d\mathbf{e}/dt$, $d\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}/dt$ が一定であるとして積分を実行すると

$$\begin{aligned} \mathbf{s}(t+\Delta t) &= \mathbf{s}(t) + 2G_0\Delta\mathbf{e}(t) \\ &\quad + 2\eta_\infty^G \left(\Delta \frac{d\mathbf{e}(t)}{dt}\right) + 2 \int_t^{t+\Delta t} \sum_i G_i e^{-(t-s)/\tau_i^G} \frac{d\mathbf{e}(s)}{ds} ds \\ \bar{\boldsymbol{\sigma}}(t+\Delta t) &= \bar{\boldsymbol{\sigma}}(t) + 3K_0\Delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) \\ &\quad + 3\eta_\infty^K \left(\Delta \frac{d\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)}{dt}\right) + 3 \int_t^{t+\Delta t} \sum_i K_i e^{-(t-s)/\tau_i^K} \frac{d\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(s)}{ds} ds \end{aligned} \quad (4.54)$$

となる。ただし

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{e}(t) &= \mathbf{e}(t+\Delta t) - \mathbf{e}(t), & \Delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) &= \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(t+\Delta t) - \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) \\ \Delta \frac{d\mathbf{e}(t)}{dt} &= \frac{d\mathbf{e}(t)}{dt} \Big|_{t=t+\Delta t} - \frac{d\mathbf{e}(t)}{dt}, & \Delta \frac{d\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)}{dt} &= \frac{d\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)}{dt} \Big|_{t=t+\Delta t} - \frac{d\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)}{dt} \end{aligned} \quad (4.55)$$

である。式(4.54)の積分中の $d\mathbf{e}/dt \simeq \Delta\mathbf{e}/\Delta t$, $d\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}/dt \simeq \Delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}/\Delta t$ は一定であると仮定して積分を実行し、 $\Delta\mathbf{s}(t) = \mathbf{s}(t+\Delta t) - \mathbf{s}(t)$, $\Delta\bar{\boldsymbol{\sigma}}(t) = \bar{\boldsymbol{\sigma}}(t+\Delta t) - \bar{\boldsymbol{\sigma}}(t)$ を求めると

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{s}(t) &= 2\hat{G}\Delta\mathbf{e}(t) - \Delta\mathbf{s}^r \\ \Delta\bar{\boldsymbol{\sigma}}(t) &= 3\hat{K}\Delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) - \Delta\bar{\boldsymbol{\sigma}}^r \end{aligned} \quad (4.56)$$

となる。ただし、ここで

$$\begin{aligned} \hat{G} &= G_0 + \frac{\eta_\infty^G}{\Delta t} + \sum_i \frac{\eta_i^G}{\Delta t} (1 - e^{-\Delta t/\tau_i^G}) \\ \Delta\mathbf{s}^r &= 2 \frac{\eta_\infty^G}{\Delta t} \Delta\mathbf{e}(t - \Delta t) + \sum_i (1 - e^{-\Delta t/\tau_i^G}) \mathbf{s}(t) \\ \hat{K} &= K_0 + \frac{\eta_\infty^K}{\Delta t} + \sum_i \frac{\eta_i^K}{\Delta t} (1 - e^{-\Delta t/\tau_i^K}) \end{aligned} \quad (4.57)$$

$$\Delta\bar{\boldsymbol{\sigma}}^r = 3 \frac{\eta_\infty^K}{\Delta t} \Delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(t - \Delta t) + \sum_i (1 - e^{-\Delta t/\tau_i^K}) \bar{\boldsymbol{\sigma}}(t)$$

と置いている。 $\Delta\boldsymbol{\sigma}(t) = \Delta\mathbf{s}(t) + \Delta\bar{\boldsymbol{\sigma}}(t)$, $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}(t) = \Delta\mathbf{e}(t) + \Delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)$ であることより、増分応力と増分ひずみの関係式は、最終的に次のように表される。

$$\begin{aligned} \Delta\boldsymbol{\sigma}(t) &= 2\hat{G}\Delta\mathbf{e}(t) + 3\hat{K}\Delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) - \Delta\boldsymbol{\sigma}^r \\ &= \hat{\mathbf{D}}\Delta\boldsymbol{\varepsilon} - \Delta\boldsymbol{\sigma}^r \end{aligned} \quad (4.58)$$

$$\Delta\boldsymbol{\sigma}^r = \Delta\mathbf{s}^r + \Delta\bar{\boldsymbol{\sigma}}^r$$

いま、応力テンソル σ_{ij} , ひずみテンソル ε_{ij} の対称性を利用してこれらをベクトル形

$$\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{yz}, \sigma_{zx}\}^t \quad (4.59)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}\}^t$$

と書き換える。ただし、 $\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy}$, $\gamma_{yz} = 2\varepsilon_{yz}$, $\gamma_{zx} = 2\varepsilon_{zx}$ は工学ひずみである。こうすると、式(4.58)の $\hat{\mathbf{D}}$, $\Delta\boldsymbol{\sigma}^r$ は

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{D}} &= \hat{\mathbf{D}}_0 + \hat{\mathbf{D}}_\infty + \sum_i \hat{\mathbf{D}}_i \\ \Delta\boldsymbol{\sigma}^r &= \mathbf{D}'_\infty \Delta\boldsymbol{\varepsilon} + \sum_i \mathbf{D}'_i \boldsymbol{\sigma}_i(t) \end{aligned} \quad (4.60)$$

となる。ただし、各項の具体形は次のように与えられる。

$$\hat{\mathbf{D}}_0 = \begin{bmatrix} K_0 + \frac{4}{3}G_0 & K_0 - \frac{2}{3}G_0 & K_0 - \frac{2}{3}G_0 & 0 & 0 & 0 \\ & K_0 + \frac{4}{3}G_0 & K_0 - \frac{2}{3}G_0 & 0 & 0 & 0 \\ & & K_0 + \frac{4}{3}G_0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & G_0 & 0 & 0 \\ & & & & G_0 & 0 \\ & & & & & G_0 \end{bmatrix} \quad (4.61)$$

$$\hat{D}_\infty = \begin{bmatrix} \frac{\eta_\infty^K}{\Delta t} + \frac{4}{3} \frac{\eta_\infty^G}{\Delta t} & \frac{\eta_\infty^K}{\Delta t} - \frac{2}{3} \frac{\eta_\infty^G}{\Delta t} & \frac{\eta_\infty^K}{\Delta t} - \frac{2}{3} \frac{\eta_\infty^G}{\Delta t} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\eta_\infty^K}{\Delta t} + \frac{4}{3} \frac{\eta_\infty^G}{\Delta t} & \frac{\eta_\infty^K}{\Delta t} - \frac{2}{3} \frac{\eta_\infty^G}{\Delta t} & \frac{\eta_\infty^K}{\Delta t} - \frac{2}{3} \frac{\eta_\infty^G}{\Delta t} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\eta_\infty^K}{\Delta t} + \frac{4}{3} \frac{\eta_\infty^G}{\Delta t} & \frac{\eta_\infty^K}{\Delta t} - \frac{2}{3} \frac{\eta_\infty^G}{\Delta t} & \frac{\eta_\infty^K}{\Delta t} - \frac{2}{3} \frac{\eta_\infty^G}{\Delta t} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\eta_\infty^K}{\Delta t} + \frac{4}{3} \frac{\eta_\infty^G}{\Delta t} & \frac{\eta_\infty^K}{\Delta t} - \frac{2}{3} \frac{\eta_\infty^G}{\Delta t} & \frac{\eta_\infty^K}{\Delta t} - \frac{2}{3} \frac{\eta_\infty^G}{\Delta t} & 0 & 0 & 0 \\ \text{Sym.} & & & \frac{\eta_\infty^G}{\Delta t} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{\eta_\infty^G}{\Delta t} & 0 \\ & & & & & \frac{\eta_\infty^G}{\Delta t} \end{bmatrix} \quad (4.62)$$

$$\hat{D}_i = \begin{bmatrix} K_{ri} + \frac{4}{3} G_{ri} & K_{ri} - \frac{2}{3} G_{ri} & K_{ri} - \frac{2}{3} G_{ri} & 0 & 0 & 0 \\ K_{ri} + \frac{4}{3} G_{ri} & K_{ri} - \frac{2}{3} G_{ri} & K_{ri} - \frac{2}{3} G_{ri} & 0 & 0 & 0 \\ & & K_{ri} + \frac{4}{3} G_{ri} & 0 & 0 & 0 \\ & & & G_{ri} & 0 & 0 \\ \text{Sym.} & & & & G_{ri} & 0 \\ & & & & & G_{ri} \end{bmatrix} \quad (4.63)$$

$$K_{ri} = \frac{\eta_i^K}{\Delta t} A_{Ki}, \quad A_{Ki} = 1 - e^{\Delta t / \tau_i^K}$$

$$G_{ri} = \frac{\eta_i^G}{\Delta t} A_{Gi}, \quad A_{Gi} = 1 - e^{\Delta t / \tau_i^G} \quad (4.64)$$

$$D'_\infty = \hat{D}_\infty \quad (4.65)$$

$$D'_i = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} A_{Ki} + 2A_{Gi} & A_{Ki} - A_{Gi} & A_{Ki} - A_{Gi} & 0 & 0 & 0 \\ & A_{Ki} + 2A_{Gi} & A_{Ki} - A_{Gi} & 0 & 0 & 0 \\ & & A_{Ki} + 2A_{Gi} & 0 & 0 & 0 \\ & & & 3A_{Gi} & 0 & 0 \\ \text{Sym.} & & & & 3A_{Gi} & 0 \\ & & & & & 3A_{Gi} \end{bmatrix} \quad (4.66)$$

増分形のつりあい方程式および境界条件は
(つりあい方程式)

$$\nabla \cdot \Delta \sigma = \mathbf{0} \quad \text{領域}\Omega\text{内で} \quad (4.67)$$

(境界条件)

$$\Delta \mathbf{u} = \Delta \hat{\mathbf{u}} \quad \text{境界}\partial\Omega_u\text{上で(変位境界条件)}$$

$$\Delta \mathbf{t} = \Delta \sigma \mathbf{n} = \Delta \hat{\mathbf{t}} \quad \text{境界}\partial\Omega_t\text{上で(荷重境界条件)} \quad (4.68)$$

と与えられる。ここに、 \mathbf{n} は境界上の外向き単位法線ベクトルである。仮想仕事の原理は境界 $\partial\Omega_u$ 上で $\delta(\Delta \mathbf{u}) = \mathbf{0}$ として

$$\int_{\partial\Omega_t} \Delta \hat{\mathbf{t}} \cdot \delta(\Delta \mathbf{u}) dS - \int_{\Omega} \Delta \sigma \cdot \delta(\Delta \epsilon) dv = 0 \quad (4.69)$$

と書かれる。

適当な形状関数 \mathbf{N} を用いて、要素内の変位増分 $\Delta \mathbf{u} = \{\Delta u_x, \Delta u_y, \Delta u_z\}^T$ を要素の節点変位増分 $\Delta \mathbf{U} = \{\Delta U_x^1, \Delta U_y^1, \Delta U_z^1, \dots, \Delta U_x^m, \Delta U_y^m, \Delta U_z^m\}^T$ によって

$$\Delta \mathbf{u} = \mathbf{N} \Delta \mathbf{U} \quad (4.70)$$

と離散化すれば、ひずみ増分 $\Delta \epsilon$ は式(4.59)のベクトル形に対して、要素ごとに

$$\Delta \epsilon = \mathbf{B} \Delta \mathbf{U} \quad (4.71)$$

と表される。 \mathbf{B} は変位・ひずみ関係マトリックスである。

応力増分は、式(4.71)を式(4.58)に代入して

$$\Delta \sigma(t) = \hat{D} \mathbf{B} \Delta \mathbf{U} - \Delta \sigma^r \quad (4.72)$$

と求まるので、これらを仮想仕事式に代入して各要素ごとに重ね合わせると

$$\Delta \mathbf{F} - \mathbf{K} \Delta \mathbf{U} + \Delta \mathbf{F}^r = \mathbf{0} \quad (4.73)$$

を得る。ここで \mathbf{K} 、 $\Delta \mathbf{F}$ および $\Delta \mathbf{F}^r$ は要素ごとの

$$\mathbf{K}^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^t \hat{D} \mathbf{B} dv$$

$$(\Delta \mathbf{F})^e = \int_{\partial\Omega_t^e} \mathbf{N}^t \Delta \hat{\mathbf{t}} dS \quad (4.74)$$

$$(\Delta \mathbf{F}^r)^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^t \Delta \sigma^r dv$$

を対応する節点ごとに重ね合わせたものである。

したがって、時間ステップ n における全変位 U^n は、代数方程式 (4.73) を解いて増分変位 ΔU を求めることによって

$$U^n = U^{n-1} + \Delta U \quad (4.75)$$

と得られる。

4.4 材料試験とモデル定数の評価

材料の粘弾性的性質を特定するには、クリープ試験、応力緩和試験および定応力速度試験を実施するのが一般的である。

最初に、一次元物体を対象として、クリープ試験に依ってクリープ関数 $J(t)$ を決定する方法を示す。クリープ応力が式 (4.25) で与えられる場合の応答は式 (4.26) である。いま、遅延スペクトル $L(\tau)$ が式 (4.48) の第 1 近似によって表現されるとすると

$$L(\tau) = \tau \frac{d\bar{J}(\tau)}{d\tau} \quad (4.76)$$

であり、この式に式 (4.26) を代入することによって

$$L(\tau) = \frac{1}{\sigma_0} \tau \frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau} \quad (4.77)$$

となる。したがって、クリープ曲線より式 (4.77) の値を求めて図示し、この図から離散的な遅延時間 τ_1, τ_2, \dots を定める。式 (4.31) の第 2 式の離散表現は

$$\begin{aligned} \bar{J}(t) &= \sum_i J_i (1 - e^{-t/\tau_i}) \\ J_i &= L(\tau_i) \Delta \ln \tau_i \end{aligned} \quad (4.78)$$

であるから、こうして求めた τ_i を式 (4.78) に代入し、式 (4.26), (4.28) より

$$\varepsilon(t) = \{J_\infty + t/\eta_0 + \sum_i J_i (1 - e^{-t/\tau_i})\} \sigma_0 \quad (4.79)$$

とする。

粘性係数 η_0 については、クリープ曲線の最終時刻 t^* における勾配は式 (4.79) より

$$\frac{1}{\sigma_0} \frac{d\varepsilon}{dt} \Big|_{t=t^*} = \sum_i \frac{J_i}{\tau_i} e^{-t^*/\tau_i} + \frac{1}{\eta_0} \quad (4.80)$$

で与えられるので、 $\tau_i \ll t^*$ ならば、この時の勾配 $1/\eta_0$ を直接求めることができる。

このようにして $\tau_i (i = 1, 2, \dots)$ および η_0 が決まると、コンプライアンス J_∞ および $J_i (i = 1, 2, \dots)$ はクリープ曲線に対して最小二乗法を用いて決定される。すなわち、誤差関数を

$$\Pi = \frac{1}{2} \{ \varepsilon(t) - \sigma_0 (J_\infty + t/\eta_0 + \sum_i J_i (1 - e^{-t/\tau_i})) \}^2 \quad (4.81)$$

として、 J_∞ および J_i を

$$\frac{\partial \Pi}{\partial J_\infty} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial J_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots \quad (4.82)$$

の連立方程式より決定する。

等方性物体のクリープ関数 $B(t), C(t)$ も三軸クリープ試験の結果より同様のプロセスで求めることができる。いま、三軸クリープ試験の軸圧を σ_1 , 側圧を σ_3 , 測定した軸ひずみを ε_1 , 側方ひずみを ε_3 とすると

$$\begin{aligned} s_{11} &= \frac{2}{3}(\sigma_1 - \sigma_3) = -2s_{22} = -2s_{33} \equiv q_0 \\ s_{23} &= s_{31} = s_{12} = 0 \\ \bar{\sigma} &= \frac{1}{\sqrt{3}}(\sigma_1 + 2\sigma_3) \equiv p_0 \\ e_{11} &= \frac{2}{3}(\varepsilon_1 - \varepsilon_3) = -2e_{22} = -2e_{33} \\ e_{23} &= e_{31} = e_{12} = 0 \\ \bar{\varepsilon} &= \frac{1}{\sqrt{3}}(\varepsilon_1 + 2\varepsilon_3) \end{aligned} \quad (4.83)$$

であるので、偏差成分および体積成分の各クリープ応答が

$$\begin{aligned} e_{11}(t) &= \frac{1}{2} B(t) q_0 \\ \bar{\varepsilon}(t) &= \frac{1}{3} C(t) p_0 \end{aligned} \quad (4.84)$$

と与えられる。各成分の遅延スペクトルの第1近似を式(4.50)によって

$$\begin{aligned}\Psi^G(\tau^G) &= \frac{2}{q_0} \tau^G \frac{\partial e_{11}(\tau^G)}{\partial \tau^G} \\ \Psi^K(\tau^K) &= \frac{3}{p_0} \tau^K \frac{\partial \bar{\varepsilon}(\tau^K)}{\partial \tau^K}\end{aligned}\quad (4.85)$$

として、実験データの図から離散遅延時間 $\tau_1^G, \tau_2^G, \dots, \tau_1^K, \tau_2^K, \dots$ を求める。こうすると式(4.41)の離散形が

$$\begin{aligned}\bar{B}(t) &= \sum_i B_i (1 - e^{-t/\tau_i^G}), & B_i &= \Psi^G(\tau_i^G) \Delta \ln \tau_i^G \\ \bar{C}(t) &= \sum_i C_i (1 - e^{-t/\tau_i^K}), & C_i &= \Psi^K(\tau_i^K) \Delta \ln \tau_i^K\end{aligned}\quad (4.86)$$

となるから

$$\begin{aligned}e_{11}(t) &= \frac{1}{2} \left\{ B_\infty + \frac{t}{\eta_0^G} + \sum_i B_i (1 - e^{-t/\tau_i^G}) \right\} q_0 \\ \bar{\varepsilon}(t) &= \frac{1}{3} \left\{ C_\infty + \frac{t}{\eta_0^K} + \sum_i C_i (1 - e^{-t/\tau_i^K}) \right\} p_0\end{aligned}\quad (4.87)$$

と決定される。 η_0^G, η_0^K はクリープ終了時 t^* の傾きから、 $\tau_i^G, \tau_i^K \ll t^*$ なら

$$\begin{aligned}\frac{2}{q_0} \frac{de_{11}}{dt} \Big|_{t=t^*} &= \frac{1}{\eta_0^G} \\ \frac{3}{p_0} \frac{d\bar{\varepsilon}}{dt} \Big|_{t=t^*} &= \frac{1}{\eta_0^K}\end{aligned}\quad (4.88)$$

と求まる。

係数 $B_\infty, B_i (i=1, 2, \dots), C_\infty, C_i (i=1, 2, \dots)$ は、誤差関数を

$$\begin{aligned}\Pi^G &= \frac{1}{2} \left\{ e_{11}(t) - \frac{1}{2} q_0 \left(B_\infty + \frac{t}{\eta_0^G} + \sum_i B_i (1 - e^{-t/\tau_i^G}) \right) \right\}^2 \\ \Pi^K &= \frac{1}{2} \left\{ \bar{\varepsilon}(t) - \frac{1}{3} p_0 \left(C_\infty + \frac{t}{\eta_0^K} + \sum_i C_i (1 - e^{-t/\tau_i^K}) \right) \right\}^2\end{aligned}\quad (4.89)$$

として

$$\frac{\partial \Pi^G}{\partial B_\infty} = 0, \quad \frac{\partial \Pi^G}{\partial B_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots \quad (4.90)$$

および

$$\frac{\partial \Pi^K}{\partial C_\infty} = 0, \quad \frac{\partial \Pi^K}{\partial C_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots \quad (4.91)$$

から決定される。

4.5 逆解析による粘弾性定数の同定

粘弾性材料のモデル定数を決定するには、一般には前節で述べたようにクリープ試験、応力緩和試験等の材料試験を行なわなければならない。しかしながら、本章で取り扱っている線形粘弾性理論の範囲内では、解くべき方程式は増分形となるだけで、基本的には3章での理論がそのまま適用できる。したがって、あらためて材料試験を行わなくても、平板載荷試験などの原位置岩盤試験の結果や施工中の計測変位があれば、それらを用いて逆解析を行うことによって粘弾性定数を求めることが可能となる。

有限要素法によって得られる増分形の節点のつりあい方程式は、式(4.73)から明らかのように

$$\mathbf{K} \Delta \mathbf{U} = \Delta \mathbf{F} + \Delta \mathbf{F}' \quad (4.92)$$

となる。ただし、式(4.92)は、変位境界条件の処理を行なった後の縮約形であるものとする。

一方、微小時間 $(t, t + \Delta t)$ 内における計測データとして

(観測境界条件)

$$\Delta \mathbf{u} = \Delta \bar{\mathbf{u}} \quad \text{境界 } \partial \Omega_t \text{ 上で (} \Delta \bar{\mathbf{u}} \text{ : 観測変位)} \quad (4.93)$$

$$\Delta \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \Delta \bar{\mathbf{t}} \quad \text{境界 } \partial \Omega_u \text{ 上で (} \Delta \bar{\mathbf{t}} \text{ : 観測荷重)} \quad (4.94)$$

が与えられたとすると、観測境界条件は有限要素の節点値として

$$\mathbf{S}_u \Delta \mathbf{U} = \Delta \bar{\mathbf{U}} \quad (4.95)$$

$$\mathbf{S}_t \Delta \mathbf{F} = \int_{\partial \Omega_u} \mathbf{N}^t \Delta \bar{\mathbf{t}} dS = \Delta \bar{\mathbf{F}} \quad (4.96)$$

と表される。ここで $\Delta \bar{U}$, $\Delta \bar{F}$ は該当する節点の測定データであり, S_u と S_t はそれぞれ変位および荷重の測定データに対応する節点変位, 節点荷重をセレクトするマトリックスで, 該当する対角項が 1 で他はすべて 0 の要素から構成される。すなわち, いま i 節点の変位観測境界であり, j 節点が荷重観測境界であるとすると, S_u および S_t はそれぞれ次のようになる。

$$S_u = \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \dots i\text{-th row} \\ \\ \\ \\ \end{array} \quad (4.97)$$

$i\text{-th column}$

$$S_t = \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \dots j\text{-th row} \\ \\ \\ \\ \end{array} \quad (4.98)$$

$j\text{-th column}$

式(4.92), (4.95), (4.96) に対して前章での議論と同様に Newton の iteration scheme を適用すると, k 回目の計算ステップに対してそれぞれ

$$\begin{aligned} & \mathbf{K}(\mathbf{P}^k) d(\Delta \mathbf{U})^k + \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{P}}\right)^k d\mathbf{P}^k \Delta \mathbf{U}^k \\ & - \left(\frac{\partial \Delta \mathbf{F}^r}{\partial \mathbf{P}}\right)^k d\mathbf{P}^k - \left(\frac{\partial \Delta \mathbf{F}^r}{\partial \Delta \mathbf{U}}\right)^k d(\Delta \mathbf{U})^k - d(\Delta \mathbf{F})^k \end{aligned} \quad (4.99)$$

$$= [\Delta \mathbf{F} + \Delta \mathbf{F}^r - \mathbf{K} \Delta \mathbf{U}]^k$$

$$\begin{aligned} S_u d(\Delta \mathbf{U})^k &= [\Delta \bar{U} - S_u \Delta \mathbf{U}]^k \\ &= \Delta \bar{U} - S_u \Delta \mathbf{U}^k \end{aligned} \quad (4.100)$$

$$\begin{aligned} S_t d(\Delta \mathbf{F})^k &= [\Delta \bar{F} - S_t \Delta \mathbf{F}]^k \\ &= \Delta \bar{F} - S_t \Delta \mathbf{F}^k \end{aligned} \quad (4.101)$$

となる。ここに, \mathbf{P} は同定する粘弾性パラメータからなるベクトルであり,

$$\begin{aligned} d(\Delta \mathbf{U})^k &= \Delta \mathbf{U}^{k+1} - \Delta \mathbf{U}^k \\ d(\Delta \mathbf{F})^k &= \Delta \mathbf{F}^{k+1} - \Delta \mathbf{F}^k \\ d\mathbf{P}^k &= \mathbf{P}^{k+1} - \mathbf{P}^k \end{aligned} \quad (4.102)$$

である。

式(4.99), (4.100), (4.101) は 3 章での弾性モデルの式(3.16), (3.17), (3.18) に対応するもので, 粘弾性同定解析の基本式である。式(4.99), (4.100), (4.101) をマトリックス表示すれば

$$\mathbf{G} d\mathbf{x} = \mathbf{R} \quad (4.103)$$

ここに

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}(\mathbf{P}^k) - \left(\frac{\partial \Delta \mathbf{F}^r}{\partial \Delta \mathbf{U}}\right)^k & -\mathbf{I} & \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{P}} \Delta \mathbf{U}\right)^k - \left(\frac{\partial \Delta \mathbf{F}^r}{\partial \mathbf{P}}\right)^k \\ S_u & \mathbf{o} & \mathbf{o} \\ \mathbf{o} & S_t & \mathbf{o} \end{bmatrix}$$

$$d\mathbf{x} = \begin{bmatrix} d(\Delta \mathbf{U})^k \\ d(\Delta \mathbf{F})^k \\ d\mathbf{P}^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{U}^{k+1} - \Delta \mathbf{U}^k \\ \Delta \mathbf{F}^{k+1} - \Delta \mathbf{F}^k \\ \mathbf{P}^{k+1} - \mathbf{P}^k \end{bmatrix} \quad (4.104)$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{F} + \Delta \mathbf{F}^r - \mathbf{K}(\mathbf{P}^k) \Delta \mathbf{U}^k \\ \Delta \bar{\mathbf{U}} - \mathbf{S}_u(\Delta \mathbf{U})^k \\ \Delta \bar{\mathbf{F}} - \mathbf{S}_t(\Delta \mathbf{F})^k \end{bmatrix}$$

を得る。

以下に、式(4.99)の偏微分要素の詳細について述べる。簡単のために緩和関数 $K(t)$ および $G(t)$ は

$$G(t) = G_0 + \sum_i^m G_i e^{-t/\tau_i^G}, \quad \tau_i^G = \frac{\eta_i^G}{G_i}$$

$$K(t) = K_0 + \sum_i^m K_i e^{-t/\tau_i^K}, \quad \tau_i^K = \frac{\eta_i^K}{K_i} \quad (4.105)$$

で与えられるものとし、 $t=0$ における弾性定数については、3章での議論より既に同定値 (K_{el} , G_{el}) が得られているものとする。したがって同定すべきモデル定数は

$$\left. \begin{array}{l} K_0, G_0 \\ K_i, G_i, \eta_i^K, \eta_i^G \\ (i = 1, 2, \dots, m) \end{array} \right\} \equiv p_i \quad (i = 1, 2, \dots, 4m+2) \quad (4.106)$$

となり、満足すべき方程式を列挙すれば以下のようなになる。

$$(0) \quad t = t_0 = 0 \quad (\text{弾性})$$

$$G_0 + \sum_i^m G_i = G_{el}$$

$$K_0 + \sum_i^m K_i = K_{el} \quad (4.107)$$

$$(1) \quad t = t_1 = t_0 + \Delta t_1$$

$$\mathbf{K}_1 \Delta \mathbf{U}_1 = \Delta \mathbf{F}_1$$

$$= \int_{\Omega} \mathbf{B}^t \{ \Delta \boldsymbol{\sigma}^r(t_1) \} dv + \int_{\partial \Omega_t} \mathbf{N}^t \Delta \hat{\mathbf{t}}_1 dS \quad (4.108)$$

$$\mathbf{S}_u \Delta \mathbf{U}_1 = \Delta \bar{\mathbf{U}}_1 \quad (4.109)$$

$$\mathbf{S}_t \Delta \mathbf{F}_1 = \Delta \bar{\mathbf{F}}_1 \quad (4.110)$$

$$(2) \quad t = t_2 = t_1 + \Delta t_2 = t_0 + \sum_i^2 \Delta t_i$$

$$\mathbf{K}_2 \Delta \mathbf{U}_2 = \Delta \mathbf{F}_2$$

$$= \int_{\Omega} \mathbf{B}^t \{ \Delta \boldsymbol{\sigma}^r(t_2) \} dv + \int_{\partial \Omega_t} \mathbf{N}^t \Delta \hat{\mathbf{t}}_2 dS \quad (4.111)$$

$$\mathbf{S}_u \Delta \mathbf{U}_2 = \Delta \bar{\mathbf{U}}_2 \quad (4.112)$$

$$\mathbf{S}_t \Delta \mathbf{F}_2 = \Delta \bar{\mathbf{F}}_2 \quad (4.113)$$

⋮

$$(j) \quad t = t_j = t_{j-1} + \Delta t_j = t_0 + \sum_i^j \Delta t_i$$

$$\mathbf{K}_j \Delta \mathbf{U}_j = \Delta \mathbf{F}_j$$

$$= \int_{\Omega} \mathbf{B}^t \{ \Delta \boldsymbol{\sigma}^r(t_j) \} dv + \int_{\partial \Omega_t} \mathbf{N}^t \Delta \hat{\mathbf{t}}_j dS \quad (4.114)$$

$$\mathbf{S}_u \Delta \mathbf{U}_j = \Delta \bar{\mathbf{U}}_j \quad (4.115)$$

$$\mathbf{S}_t \Delta \mathbf{F}_j = \Delta \bar{\mathbf{F}}_j \quad (4.116)$$

ただし

$$\Delta \boldsymbol{\sigma}^r(t_j) = \sum_i^m \Delta \boldsymbol{\sigma}_i^r(t_j) \quad (4.117)$$

$$\Delta \boldsymbol{\sigma}_i^r(t_j) = \mathbf{D}_i^r \boldsymbol{\sigma}_i(t_{j-1}) \quad (4.118)$$

である。ここで、式(4.118)の右辺 $\boldsymbol{\sigma}_i(t_{j-1})$ が同定パラメータ \mathbf{P} の関数であるため、このままの形では同定解析の定式化を進めることができない。したがって、 $\boldsymbol{\sigma}_i(t_{j-1})$ を $\boldsymbol{\sigma}_i(t_0) = \text{const.}$ の項と $\Delta \mathbf{U}$ の項で表現し直すと、次のような漸化式を得る。

$$\sigma_i(t_j) = \begin{cases} \sigma_i(t_0) & (j=0) \\ (\mathbf{I} - \mathbf{D}_i^r)\sigma_i(t_{j-1}) + \hat{\mathbf{D}}_i \mathbf{B} \Delta \mathbf{U}_j & (j \geq 1) \end{cases} \quad (4.119)$$

\mathbf{I} : 単位マトリックス

(0) および (1) ~ (j) の各式に対して Newton 法を適用するために Taylor 展開すると次のようになる。

(0) に対して

$$\begin{aligned} dG_0 + \sum_i^m dG_i &= G_{ed} - G_0 - \sum_i^m G_i \\ dK_0 + \sum_i^m dK_i &= K_{ed} - K_0 - \sum_i^m K_i \end{aligned} \quad (4.120)$$

(1) ~ (j) に対して ($l=1, 2, \dots, j-1, j$)

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_l(\mathbf{P})d(\Delta \mathbf{U}_l) + \left(\frac{\partial \mathbf{K}_l}{\partial \mathbf{P}} \Delta \mathbf{U}_l\right)d\mathbf{P} \\ - \left(\frac{\partial \Delta \mathbf{F}_l}{\partial \mathbf{P}}\right)d\mathbf{P} - \left(\frac{\partial \Delta \mathbf{F}_l}{\partial \Delta \mathbf{U}}\right)d(\Delta \mathbf{U}) - d(\Delta \mathbf{F}_l) \\ = \Delta \mathbf{F}_l - \mathbf{K}_l \Delta \mathbf{U}_l \end{aligned} \quad (4.121)$$

$$\mathbf{S}_u d(\Delta \mathbf{U}_l) = \Delta \bar{\mathbf{U}}_l - \mathbf{S}_u \Delta \mathbf{U}_l \quad (4.122)$$

$$\mathbf{S}_l d(\Delta \mathbf{F}_l) = \Delta \bar{\mathbf{F}}_l - \mathbf{S}_l \Delta \mathbf{F}_l \quad (4.123)$$

ここで各項の具体形は次のようになる。

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \mathbf{K}_l}{\partial \mathbf{P}}\right) : \frac{\partial \mathbf{K}_l}{\partial K_0} &= \int_{\Omega} \mathbf{B}^t \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{D}}_0}{\partial K_0}\right) \mathbf{B} dv \\ \frac{\partial \mathbf{K}_l}{\partial G_0} &= \int_{\Omega} \mathbf{B}^t \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{D}}_0}{\partial G_0}\right) \mathbf{B} dv \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{K}_l}{\partial K_i} &= \int_{\Omega} \mathbf{B}^t \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{D}}_i}{\partial K_i}\right) \mathbf{B} dv \\ \frac{\partial \mathbf{K}_l}{\partial G_i} &= \int_{\Omega} \mathbf{B}^t \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{D}}_i}{\partial G_i}\right) \mathbf{B} dv \\ \frac{\partial \mathbf{K}_l}{\partial \eta_i^K} &= \int_{\Omega} \mathbf{B}^t \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{D}}_i}{\partial \eta_i^K}\right) \mathbf{B} dv \\ \frac{\partial \mathbf{K}_l}{\partial \eta_i^G} &= \int_{\Omega} \mathbf{B}^t \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{D}}_i}{\partial \eta_i^G}\right) \mathbf{B} dv \end{aligned} \quad (4.124)$$

$\left(\frac{\partial \Delta \mathbf{F}_l}{\partial \mathbf{P}}\right) :$

$l=1$ の場合

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta \mathbf{F}_l}{\partial K_0} &= 0, \quad \frac{\partial \Delta \mathbf{F}_l}{\partial G_0} = 0 \\ \frac{\partial \Delta \mathbf{F}_l}{\partial K_i} &= \int_{\Omega} \mathbf{B}^t \left(\frac{\partial \mathbf{D}_i^r}{\partial K_i}\right) \sigma_i(t_0) dv \\ \frac{\partial \Delta \mathbf{F}_l}{\partial G_i} &= \int_{\Omega} \mathbf{B}^t \left(\frac{\partial \mathbf{D}_i^r}{\partial G_i}\right) \sigma_i(t_0) dv \\ \frac{\partial \Delta \mathbf{F}_l}{\partial \eta_i^K} &= \int_{\Omega} \mathbf{B}^t \left(\frac{\partial \mathbf{D}_i^r}{\partial \eta_i^K}\right) \sigma_i(t_0) dv \\ \frac{\partial \Delta \mathbf{F}_l}{\partial \eta_i^G} &= \int_{\Omega} \mathbf{B}^t \left(\frac{\partial \mathbf{D}_i^r}{\partial \eta_i^G}\right) \sigma_i(t_0) dv \end{aligned} \quad (4.125)$$

$l > 1$ の場合

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta \mathbf{F}_l}{\partial K_0} &= 0, \quad \frac{\partial \Delta \mathbf{F}_l}{\partial G_0} = 0 \\ \frac{\partial \Delta \mathbf{F}_l}{\partial K_i} &= \int_{\Omega} \mathbf{B}^t \left(\frac{\partial \mathbf{D}_i^r}{\partial K_i}\right) \left\{ \prod_{q=1}^{l-1} (\mathbf{I} - \mathbf{D}_q^r) \right\} \sigma_i(t_0) \\ &\quad + \left\{ \prod_{q=1}^{l-2} (\mathbf{I} - \mathbf{D}_q^r) \right\} \hat{\mathbf{D}}_i \mathbf{B} \Delta \mathbf{U}_1 + \dots \end{aligned}$$

$$\left(\frac{\partial \Delta \mathbf{F}_l}{\partial \Delta \mathbf{U}}\right) d(\Delta \mathbf{U}) :$$

$l = 1$ の場合

$$\left(\frac{\partial \Delta \mathbf{F}_1}{\partial \Delta \mathbf{U}}\right) d(\Delta \mathbf{U}) = 0 \quad (4.127)$$

$l > 1$ の場合

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \Delta \mathbf{F}_l}{\partial \Delta \mathbf{U}}\right) d(\Delta \mathbf{U}) = & \int_{\Omega} \mathbf{B}^t \left\{ \sum_i^m \mathbf{D}_i^r \left[\left\{ \prod_{q=1}^{l-2} (\mathbf{I} - \mathbf{D}_i^r) \right\} \hat{\mathbf{D}}_i \mathbf{B} d(\Delta \mathbf{U}_1) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \left\{ \prod_{q=1}^{l-3} (\mathbf{I} - \mathbf{D}_i^r) \right\} \hat{\mathbf{D}}_i \mathbf{B} d(\Delta \mathbf{U}_2) + \dots \right. \right. \\ & \left. \left. + (\mathbf{I} - \mathbf{D}_i^r) \hat{\mathbf{D}}_i \mathbf{B} d(\Delta \mathbf{U}_{l-2}) + \hat{\mathbf{D}}_i \mathbf{B} d(\Delta \mathbf{U}_{l-1}) \right\} dv \end{aligned} \quad (4.128)$$

ただし、 \mathbf{I} は単位マトリックスであり、 $\prod(\cdot)$ はマトリックスの乗積を表す。

以下、弾性体の同定解析の場合と同様の定式化で、式(4.103)に対して最小二乗法、一次元探索法を適用することによって粘弾性材料の物性値が同定される。

4.6 本解析手法の適用例

4.6.1 一次元応力場の問題

本法の妥当性を検証するために、まず、簡単な一次元応力場の問題として、図4.4に示すような粘弾性棒の一端を荷重 \hat{i} で引張る問題について考える。

(注) 粘弾性体についての同定解析を行う場合には、当然のことながら粘性的性質を求めるために、ある時間範囲にわたっての観測境界の情報が必要となる。図4.4(a)の問題に対して図4.4(b)のように1個のトラス要素で離散化した場合について、このことについて考えてみる。

節点1を変位観測境界とし、求める緩和弾性率 E を

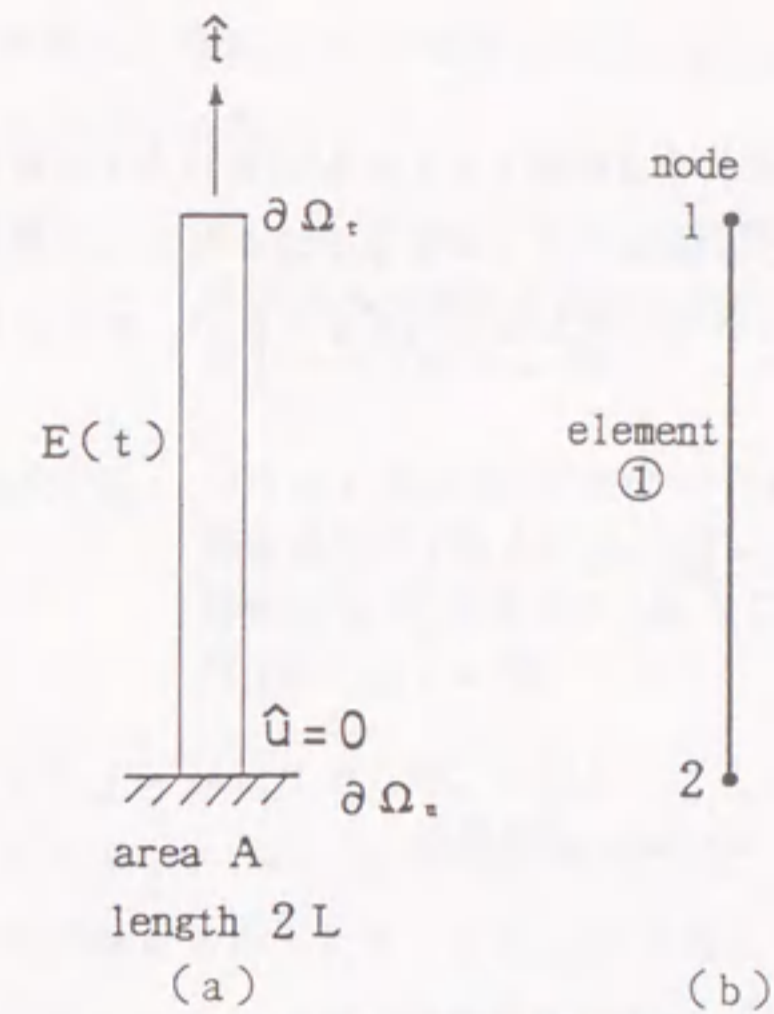


図4.4: 棒材の引張り問題

$$E(t) = E_0 + E_1 e^{-E_1 t / \eta_1}$$

と仮定したとすると、未知パラメーターと解くべき方程式は

$$t = t_0 = 0 \text{ (弾性)}$$

$$\frac{A}{2L} (E_0 + E_1) u_1^0 = \hat{i}$$

$$u_1^0 = \bar{u}_1^0$$

$$t_1 = t_0 + \Delta t_1$$

$$\frac{A}{2L} (E_0 + E_1 e^{-E_1 t_1 / \eta_1}) u_1^1 = \hat{i}$$

$$u_1^1 = \bar{u}_1^1$$

より、

未知数: $E_0, E_1, \eta_1, u_1^0, u_1^1$ の計5

方程式の数：4

となる。ただし、 u_i^j の添え字は時間 $t = t_j$ における節点 i の変位を意味する。したがって、 t_1 までの情報だけでは解は不定となることから、さらに $t_2 = t_1 + \Delta t_2$ の状態についても考えなければならない。すなわち

$$t_2 = t_1 + \Delta t_2$$

$$\frac{A}{2L}(E_0 + E_1 e^{-E_1 t_2/m})u_1^2 = \hat{t}$$

$$u_1^2 = \bar{u}_1^2$$

未知数： $E_0, E_1, \eta_1, u_1^0, u_1^1, u_1^2$ の計6

方程式の数：6

さらに

$$E(t) = E_0 + \sum_{i=1}^m E_i e^{-E_i t/\eta_i}$$

のモデルに対しては

未知数： E_0, E_i, η_i, u_1^j の計 $(1 + 2m + 1 + j)$ 個

方程式の数： $t_j = t_0 + \sum_{k=1}^j \Delta t_k$ の時間までについて $(2j + 2)$ 個

となることから、解を得るためには最低 $j \geq 2m$ を満たす時間 t_j までの観測境界の情報が必要となる。

一般に、異なる材料定数からなる複合材を自由度 x の有限要素法で同定解析する場合には、

$$\text{材料 1} : E^1(t) = E_0^1 + \sum_{i=1}^m E_i^1 e^{-E_i^1 t/\eta_i^1}$$

⋮

$$\text{材料 n} : E^n(t) = E_0^n + \sum_{i=1}^m E_i^n e^{-E_i^n t/\eta_i^n}$$

の材料特性に対し、時間 $t_0 = 0$ (弾性) $\sim t_j = t_{j-1} + \Delta t_j$ までについて同定解析を行うものとする

未知数： $E_0 + m(E_i, \eta_i) \dots n$ 種類
各時間増分間の変位増分 $\Delta \mathbf{U} \dots j$ 区間
計 $(2m + 1)n + jx$ 個

方程式の数：つりあい方程式 $(\mathbf{K}\Delta \mathbf{U} = \Delta \mathbf{F} + \Delta \mathbf{F}^r) \dots j$ 区間
観測条件式 $(\mathbf{S}_u \Delta \mathbf{U} = \Delta \bar{\mathbf{U}}) \dots$ 観測点数 $l \times j$ 区間
弾性 $(t = 0)$ の条件式 $(E_0 + \sum_{i=1}^m E_i = E_{elastic}) \dots n$ 種類
計 $j(l + x) + n$ 個

であることから $j \geq 2mn/l$ となる。ただし、ここでの観測境界は変位観測境界だけであるとしている。等方物体に対しては、体積成分 K と偏差成分 G に分けて同定解析を行うため $j \geq 4mn/l$ を満たす時間 t_j までの観測境界の情報が必要となる。なお、計算精度を高めるためには、計測結果から過渡的応答部分のデータを観測境界データとして与えれば良いことは言うまでもない。

図4.4(a)の問題に対し、ここでは2次元有限要素で離散化し、通常の順解析の結果を観測変位として与え、次の4種類の粘弾性特性を有するモデルを想定して同定解析を行った。

Type 1: 単一材料, 未知パラメータ E_0, E_1, η_1 の計3個

Type 2: 単一材料, 未知パラメータ $E_0, E_1, \eta_1, E_2, \eta_2$ の計5個

Type 3: 複合材料, 未知パラメータ $E_0^1, E_1^1, \eta_1^1, E_0^2, E_1^2, \eta_1^2$ の計6個

Type 4: 複合材料, 未知パラメータ $E_0^1, E_1^1, \eta_1^1, E_1^2, \eta_2^2,$

$E_0^2, E_1^2, \eta_1^2, E_2^2, \eta_2^2$ の計10個

それぞれのTypeのモデル図および解析結果を図4.5~図4.8および表4.1~表4.4に示す。図中●印は同定解析の観測データとして用いた節点変位で、順解析によって得られた各時間における計算変位を与えている。ただし、図4.5~図4.8には各観測節点に関する軸方向変位の時間推移を、瞬間変位に対する比として示している。なお、ここ

での計算では、時間増分 Δt の値は全時間範囲にわたってすべて同じ値を用いており、Type 1 および Type 2 では $\Delta t = 5$ (分) とし、Type 3, Type 4 では $\Delta t = 10$ (分) としている。表中 ε は計算結果に対する収束条件を示しており、本章での計算例では、変位観測境界の節点変位増分 ΔU_i に対して次の式を満足したとき、反復計算が収束したものとしている。

$$\left| \frac{\Delta \bar{U}_i - \Delta U_i^k}{\Delta \bar{U}_i} \right| < \varepsilon$$

解析結果の表から明らかなように、4種類のモデルすべてについて順解析において入力した値と良い精度で同定値が得られていることがわかる。さらに、同じ次元応力場の問題に対して、図 4.9 に示すように Type 1 ~ Type 4 とは異なった形状のモデル (Type 5) を設定し、観測変位データとして、順解析によって得られる変形の初期の段階だけの変位の値を用いる場合についても、精度よい同定解が得られるかどうかを検討した。この場合、時間増分は、 $\Delta t = 0.5$ (分) とし、同定すべき材料パラメータの正解値

$$\begin{aligned} E(t) &= E_0 + E_1 \exp(-E_1 t / \eta_1) \\ &= 360 + 55 \exp(-55t/110) \text{ MPa} \end{aligned}$$

に対する初期値としてつぎの 4 Case を設定して、それぞれについて同定解析を行った。

(初期値)

Case 1 : $E_0 = 250.0, E_1 = 150.0, \eta_1 = 300.0$

Case 2 : $E_0 = 100.0, E_1 = 200.0, \eta_1 = 300.0$

Case 3 : $E_0 = 100.0, E_1 = 100.0, \eta_1 = 100.0$

Case 4 : $E_0 = 1000.0, E_1 = 700.0, \eta_1 = 500.0$

解析結果を表 4.5 に示す。この場合も、初期値の与え方によって計算の反復回数は異なっているものの、すべての Case にわたって変形の初期の段階における観測変位データを用いるだけで、順解析において入力した物性値と良い精度で一致しており、提案した同定解析手法の妥当性が確認された。

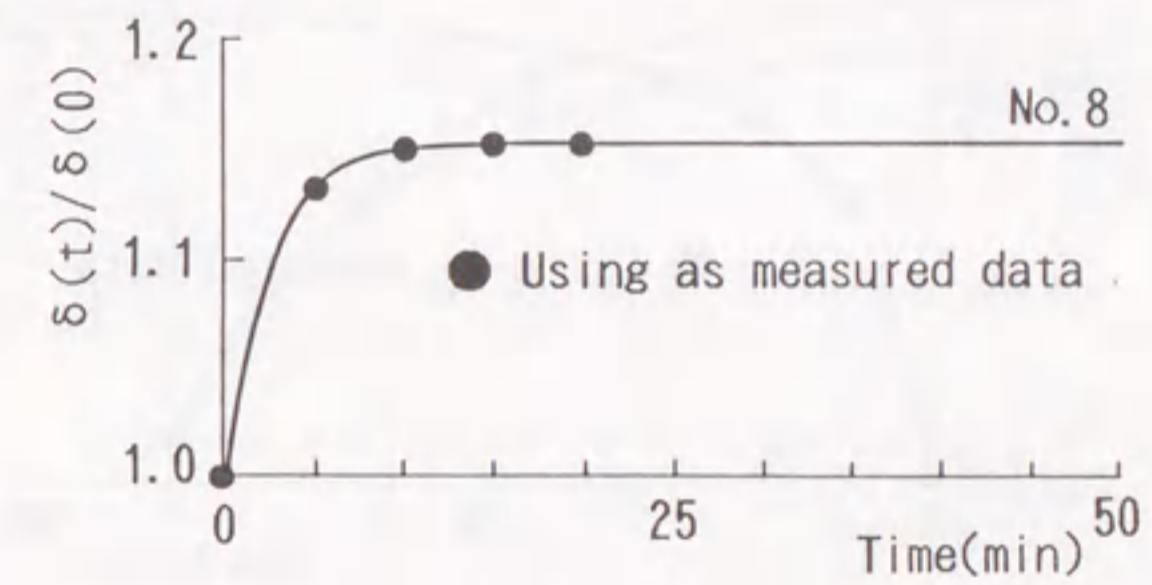
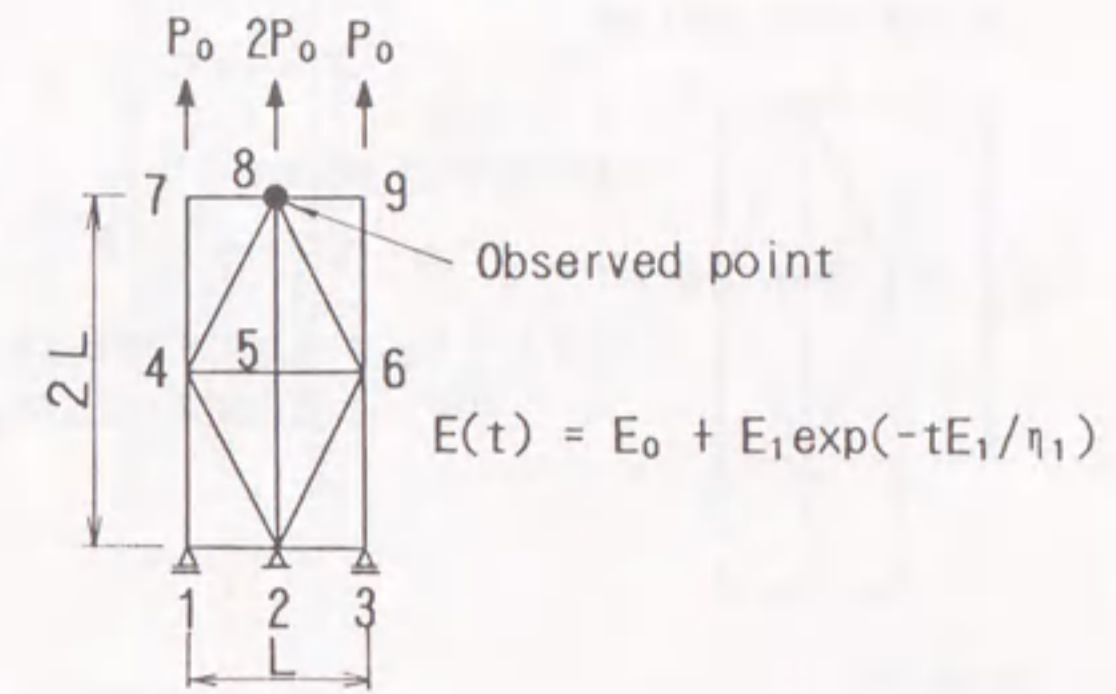


図 4.5: 引張り問題のモデル図 (Type 1)

表 4.1: 引張り問題の同定解析結果 (Type 1)

	E_0	E_1	η_1
True	360.00	55.00	110.00
Initial	250.00	150.00	300.00
Calculated	360.13	54.87	109.65
Iteration number	3		
	$\varepsilon = 0.05$		

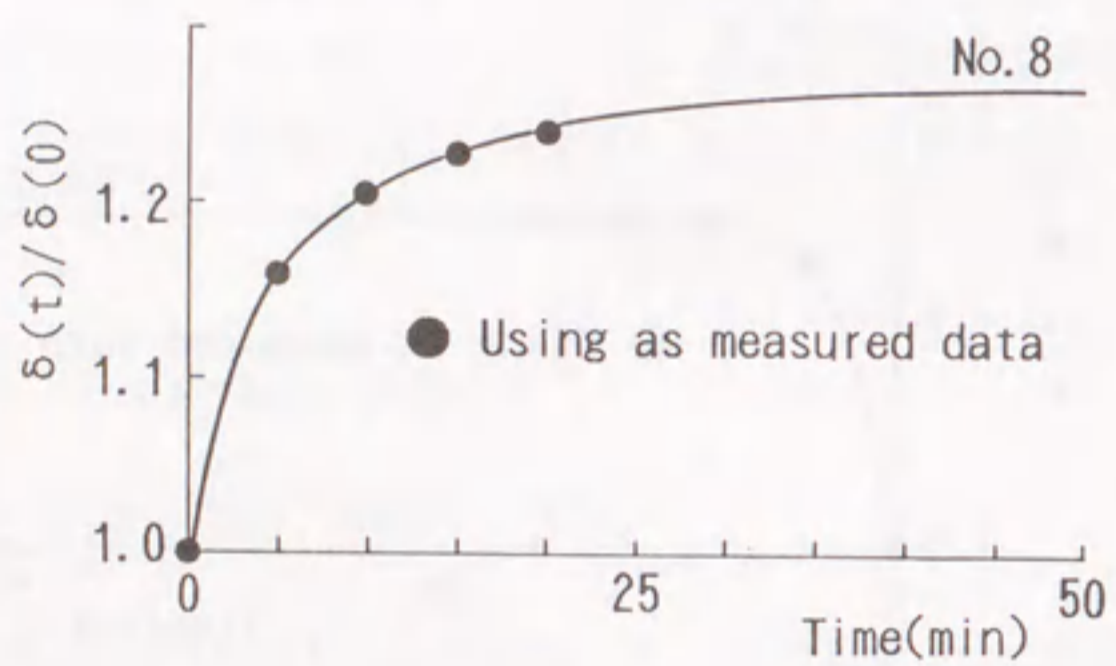
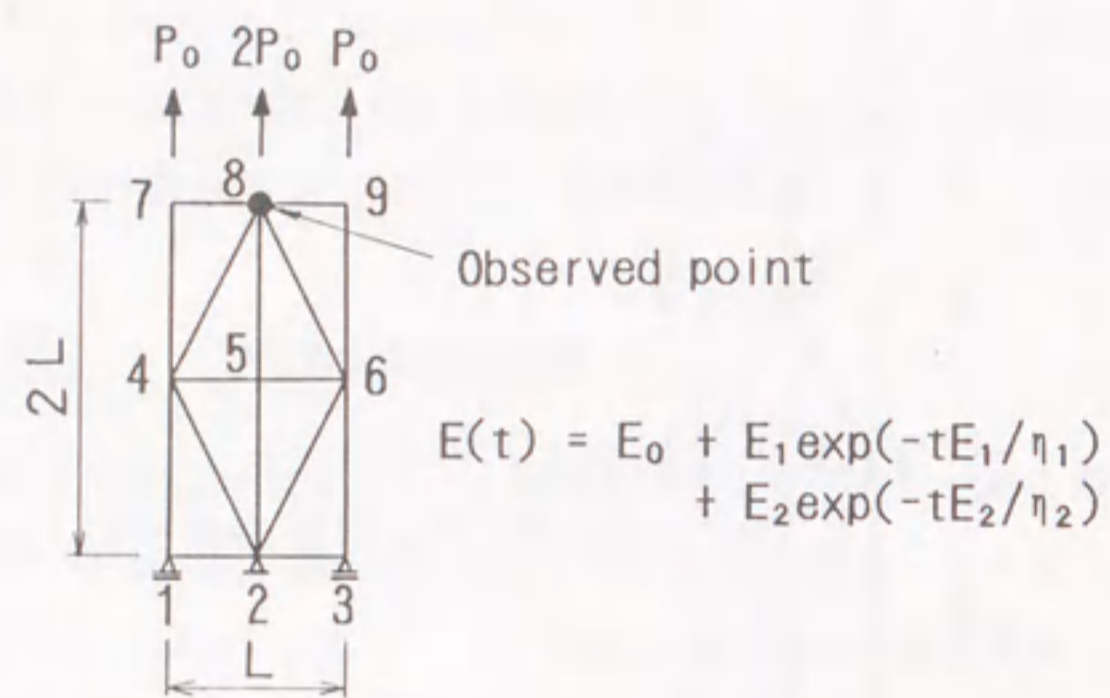


図 4.6: 引張り問題のモデル図 (Type 2)

表 4.2: 引張り問題の同定解析結果 (Type 2)

	E_0	E_1	η_1	E_2	η_2
True	360.00	55.00	110.00	40.00	400.00
Initial	300.00	150.00	300.00	70.00	700.00
Calculated	359.99	54.98	109.96	40.03	400.24
Iteration number	5				

$\epsilon = 0.05$

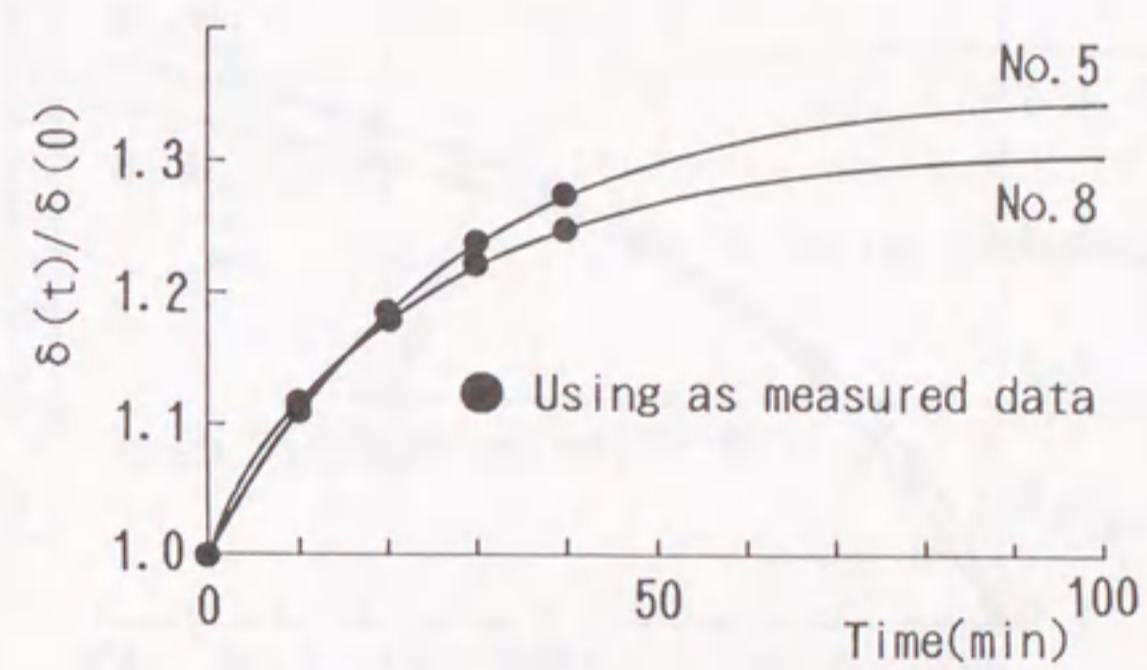
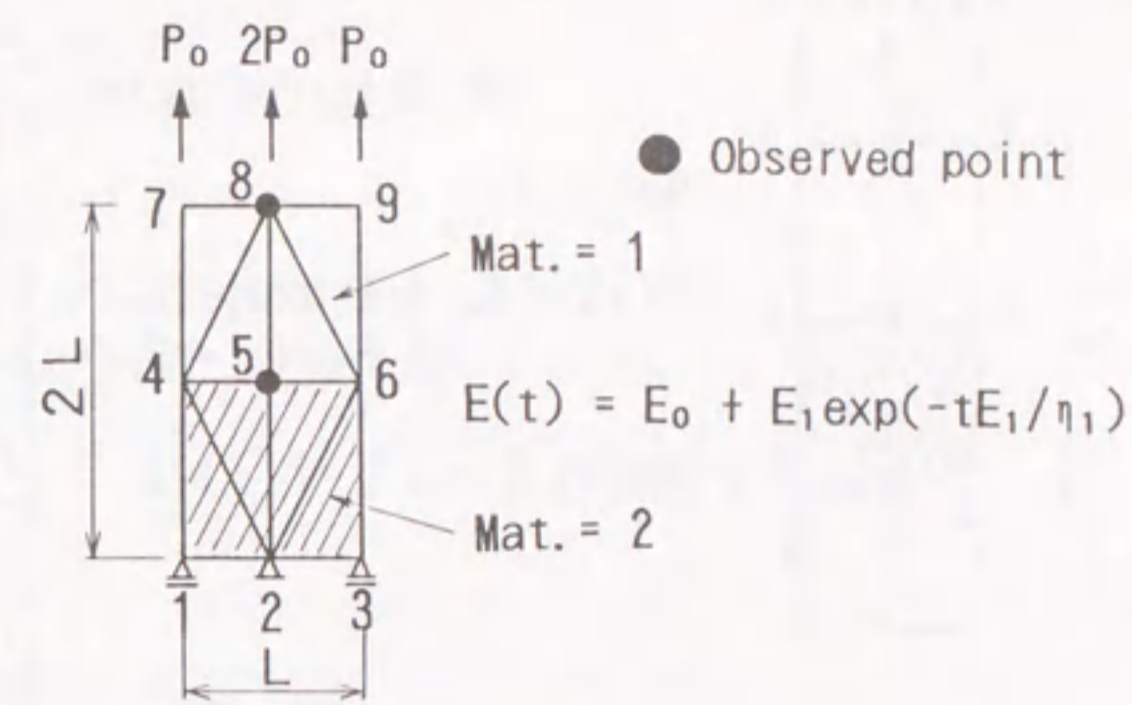


図 4.7: 引張り問題のモデル図 (Type 3)

表 4.3: 引張り問題の同定解析結果 (Type 3)

		E_0	E_1	η_1
Mat.1	True	360.00	55.00	110.00
	Initial	250.00	150.00	300.00
	Calculated	360.00	55.01	110.06
Mat.2	True	85.00	30.00	600.00
	Initial	60.00	50.00	1000.00
	Calculated	85.00	30.00	599.98
Iteration number	4			

$\epsilon = 0.05$

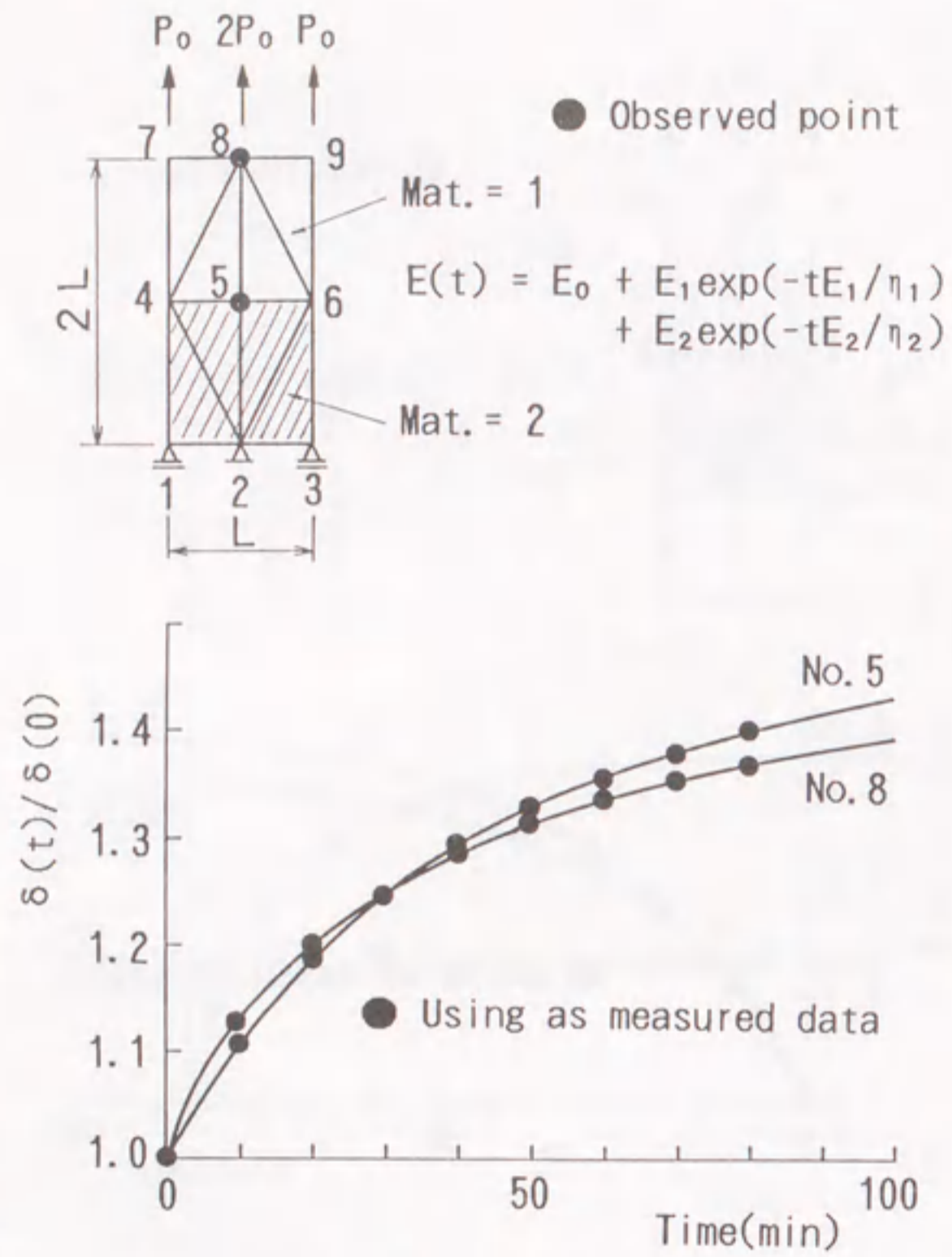


図 4.8: 引張り問題のモデル図 (Type 4)

表 4.4: 引張り問題の同定解析結果 (Type 4)

		E_0	E_1	η_1	E_2	η_2
Mat.1	True	360.00	55.00	110.00	40.00	400.00
	Initial	300.00	150.00	300.00	70.00	700.00
	Calculated	360.00	54.96	109.92	40.05	400.36
Mat.2	True	85.00	30.00	600.00	20.00	2000.00
	Initial	60.00	50.00	1000.00	30.00	3000.00
	Calculated	84.99	30.02	600.33	19.99	2000.10
Iteration number						6

$\epsilon = 0.05$

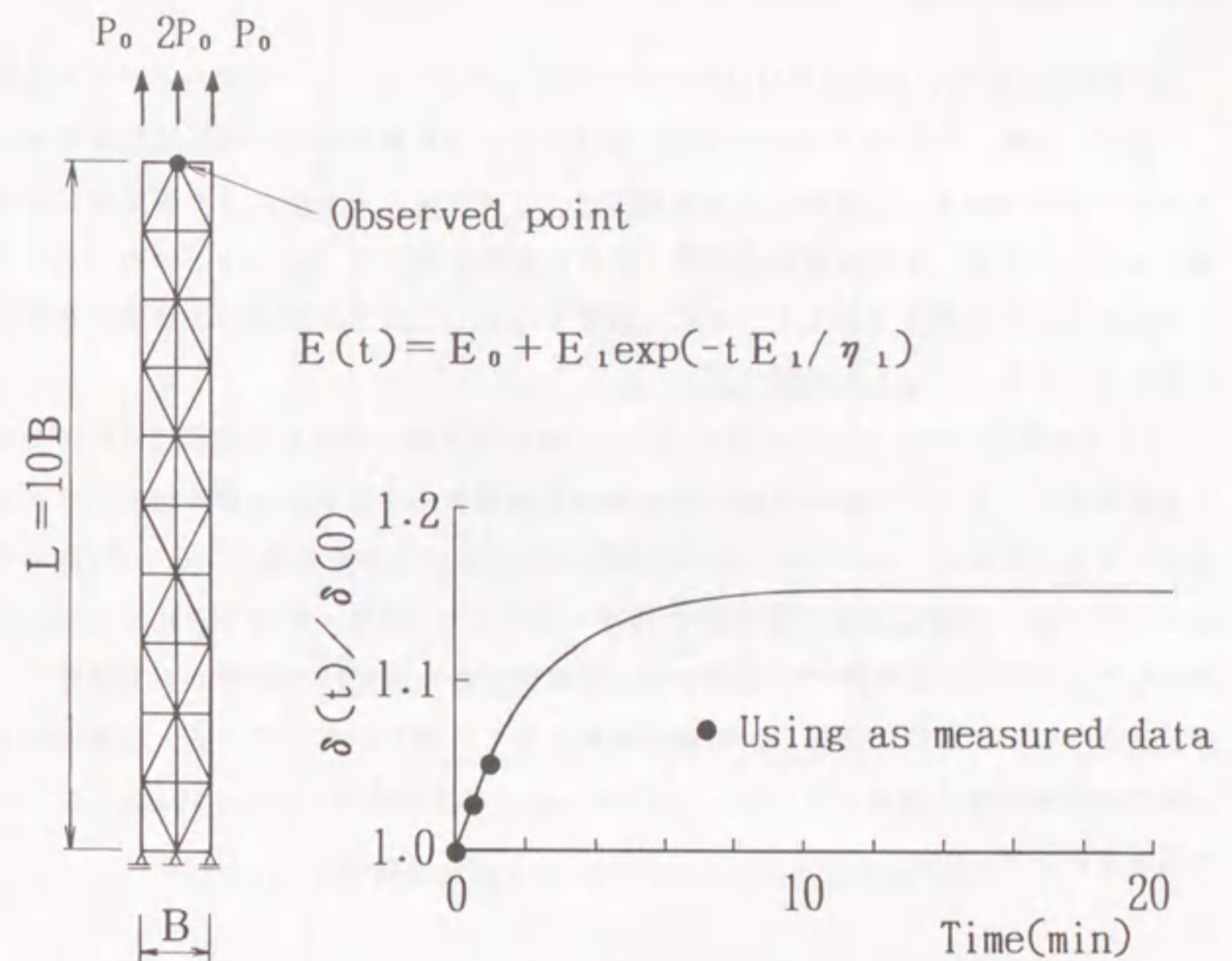


図 4.9: 引張り問題のモデル図 (Type 5)

表 4.5: 引張り問題の同定解析結果 (Type 5)

		E_0	E_1	η_1	Iterations
True		360.00	55.00	110.00	
(Case 1)	Initial	250.00	150.00	300.00	
	Identified	360.00	55.01	110.01	3
(Case 2)	Initial	100.00	200.00	300.00	
	Identified	359.99	54.94	109.94	8
(Case 3)	Initial	100.00	100.00	100.00	
	Identified	360.03	55.09	110.15	11
(Case 4)	Initial	1000.00	700.00	500.00	
	Identified	359.75	55.25	110.50	15

$\epsilon = 0.05$

4.6.2 平板載荷試験

時間依存性を有する粘弾性材料のモデル定数を決定するには、現場からコアを採取して来て、材料の定応力クリープ試験、定ひずみ応力緩和試験等の材料試験を実施するのが一般的である。試験機器の高度精密化、計測技術の進歩等により測定誤差が軽減されたとは言え、モデル定数を決定するのに材料試験を行うという一つのプロセスが介入することは事実であるし、また、実験室においてコアが現場の状態そのままを再現しているということも困難である。

ここでは数値シミュレーションによって、原位置試験の結果から粘弾性材料のモデル定数を決定できないかを試みる。図 4.10 は原位置での平板載荷試験を想定したモデル図である。粘弾性パラメーターの中で純粋に応力緩和を与える部分 $\bar{G}(t)$, $\bar{K}(t)$ の項数については、実際には 2 項まで定まれば十分である (色部・赤木 1973) ことより 2 項までとしている。このモデルに対する有限要素分割を図 4.11 に示すが、対称性より 1/2 部分について離散化を施し、軸対称問題として解析を行なっている。地表面の 2 つの節点を観測変位境界とし、 $\Delta t = 10$ (分) として計測時間 $t = 0 \sim 40$ (分) について同定解析を行った。

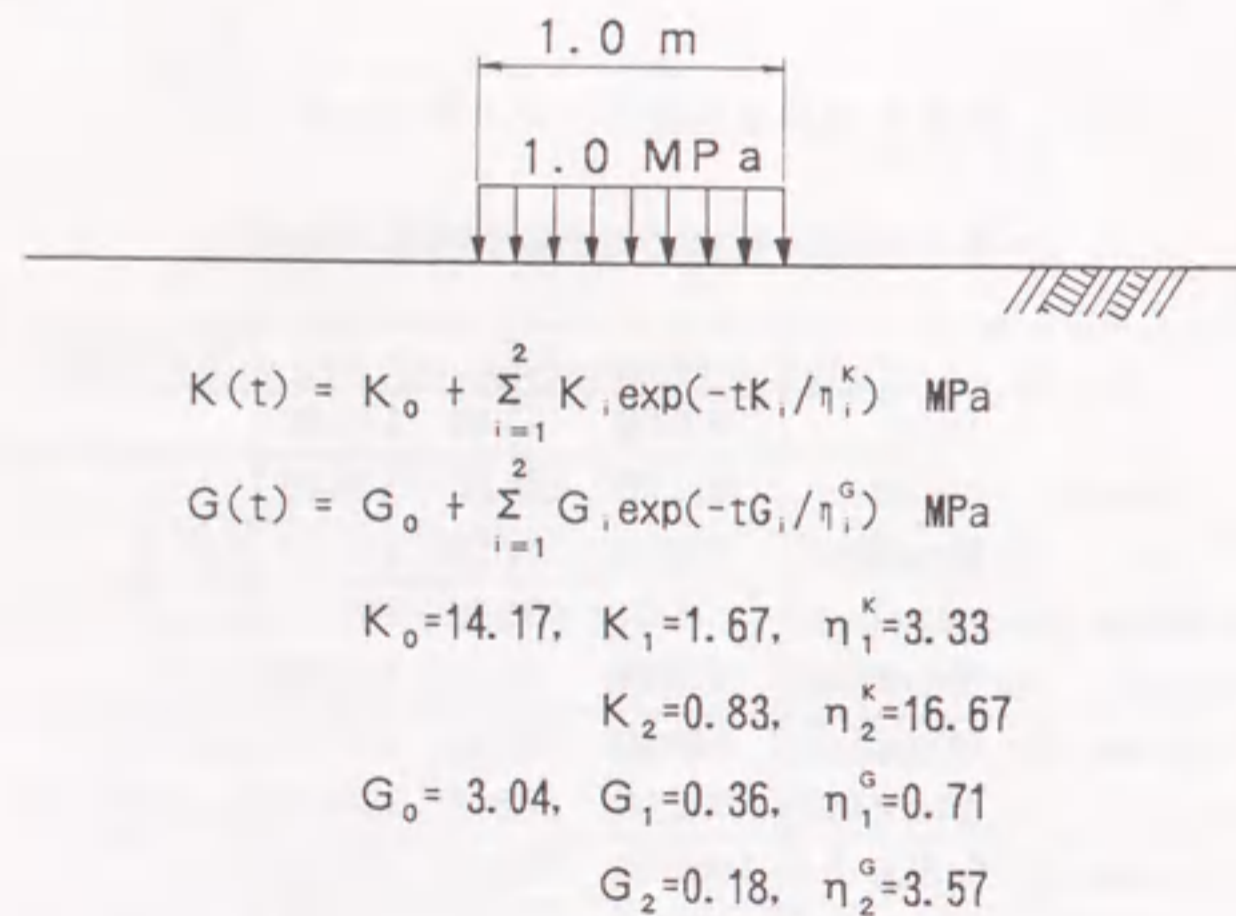


図 4.10: 平板載荷試験モデル

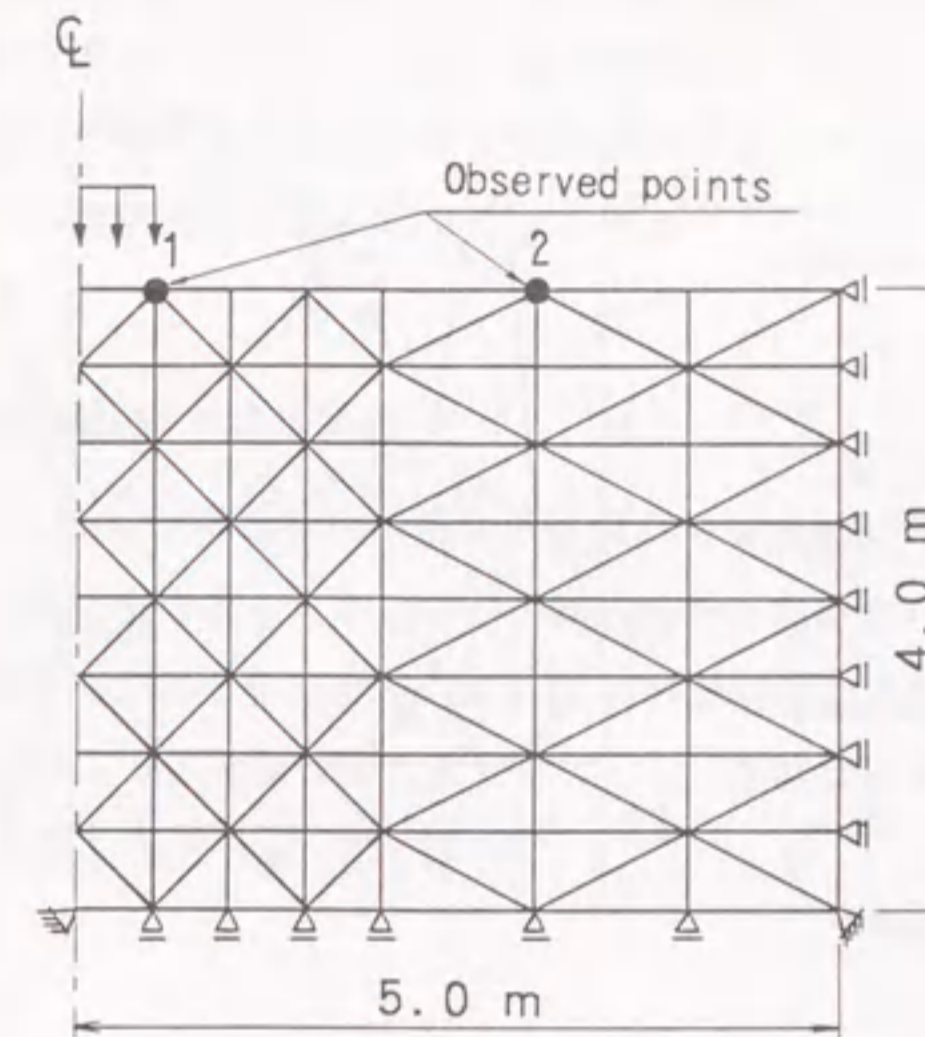


図 4.11: 平板載荷試験モデルの有限要素分割図 (軸対称)

表 4.6: 平板載荷試験モデルの同定解析結果

(Bulk components)	K_0	K_1	η_1^K	K_2	η_2^K
True	14.170	1.670	3.330	0.830	16.670
Initial	10.000	1.000	5.000	0.500	10.000
Calculated	14.170	1.670	3.330	0.830	16.679
(Shear components)	G_0	G_1	η_1^G	G_2	η_2^G
True	3.040	0.360	0.710	0.180	3.570
Initial	5.000	1.000	5.000	0.500	5.000
Calculated	3.040	0.360	0.710	0.1801	3.571
Iteration number					10
					$\epsilon = 0.05$

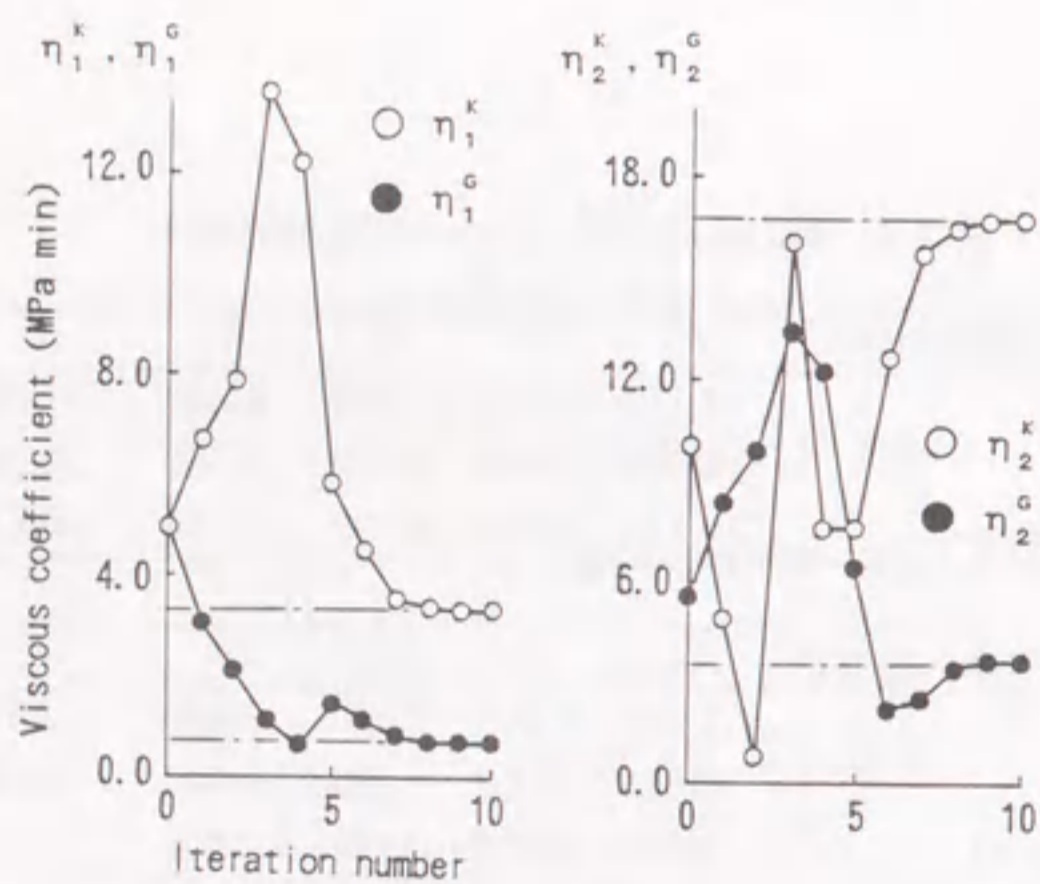
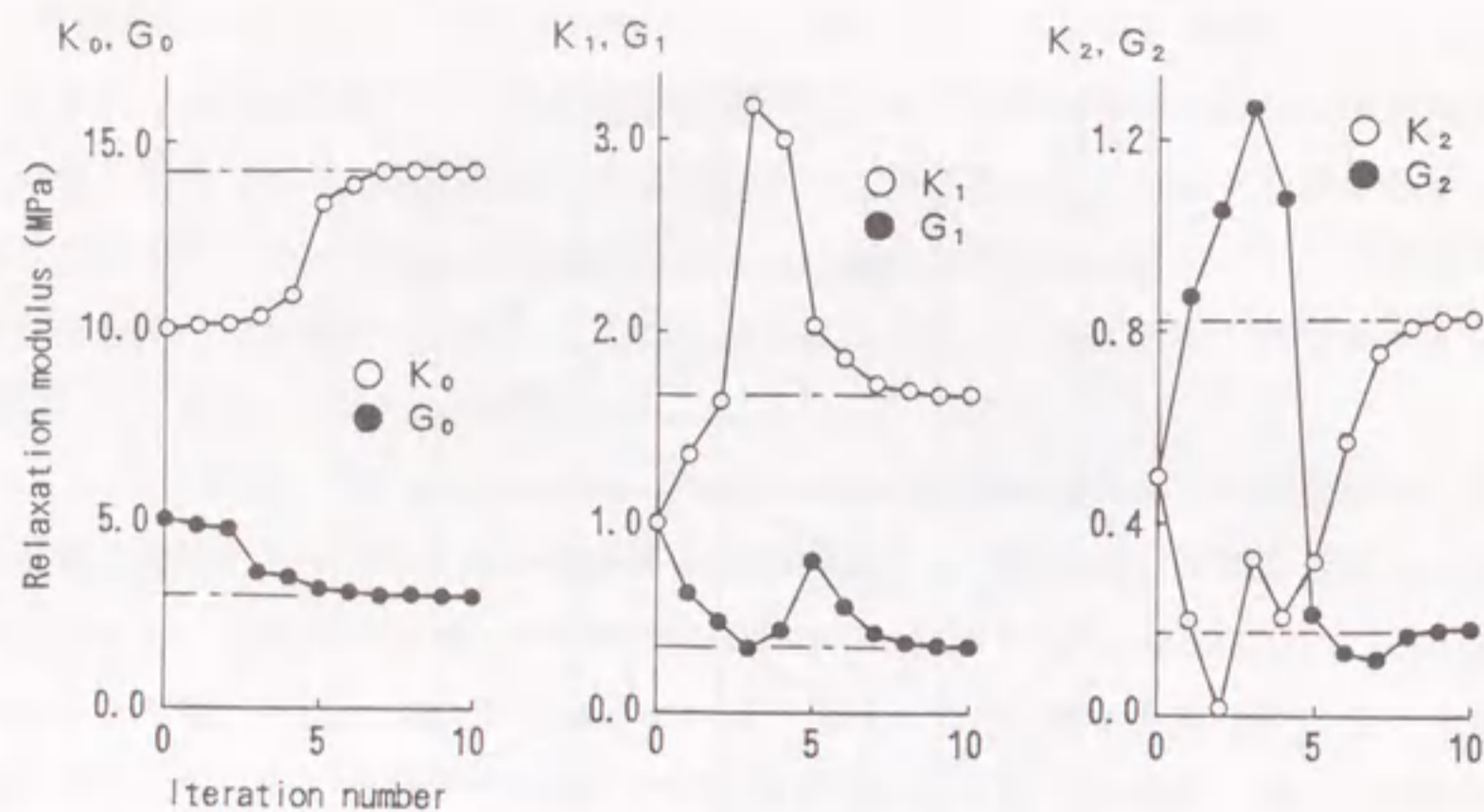


図 4.12: 未知パラメータ K , G , η の収束状況 (平板荷重試験モデル)

解析結果を表 4.6 に示すが、この場合、収束判定基準を $\epsilon = 0.05$ として 10 回の繰り返し計算で解が収束した。いずれも高い精度で同定値が得られており、原位置試験の観測データを用いて粘弾性的性質を直接特定できることの可能性を示している。各未知パラメータの収束状況を図 4.12 に示す。

4.6.3 線形粘弾性地山における斜面

図 4.13 に示すような粘弾性特性の異なる 2 層からなる傾斜角 45° 、高さ 10m の斜面の肩に $t = 0$ で等分布荷重 $q = 0.1\text{MPa}$ が荷重された場合の荷重による斜面の変形を平面ひずみ状態として同定解析する。図 4.13 の斜面形状ならびに有限要素分割は川本・林 (1972) を引用した。地盤は等方性であるとし、順解析において入力した緩和弾性率の体積成分 $K(t)$ 、偏差成分 $G(t)$ は

層 1:

$$K(t) = 2.08 + 0.33e^{-t/3} + 0.08e^{-t/30}$$

$$G(t) = 0.96 + 0.15e^{-t/3} + 0.04e^{-t/30}$$

層 2:

$$K(t) = 4.17 + 1.11e^{-t/5} + 0.28e^{-t/50}$$

$$G(t) = 3.13 + 0.83e^{-t/5} + 0.21e^{-t/50}$$

である。したがって同定すべき未知パラメータの数は 20 個となる。なお、時間 t は分単位で、時間増分 $\Delta t = 10$ として $t = 0 \sim 80$ (分) について同定計算を行なった。図中●印で示した 5 節点を観測変位境界とし、これらの節点に順解析によって得られた変位の値を測定値として与えた。

計算結果ならびにそれぞれの未知パラメータの収束状況を表 4.7 および図 4.14, 4.15 に示す。この計算例の場合、同定すべき未知パラメータの数が 20 個と大変多く、しかも、それぞれの値の大きさが、かなりばらついて異なっている。それにもかかわらず、すべての材料パラメータについて非常に良い精度で測定値と一致した同定解が得られており、提案する手法によって得られる解の安定性が極めて高いことがわかる。

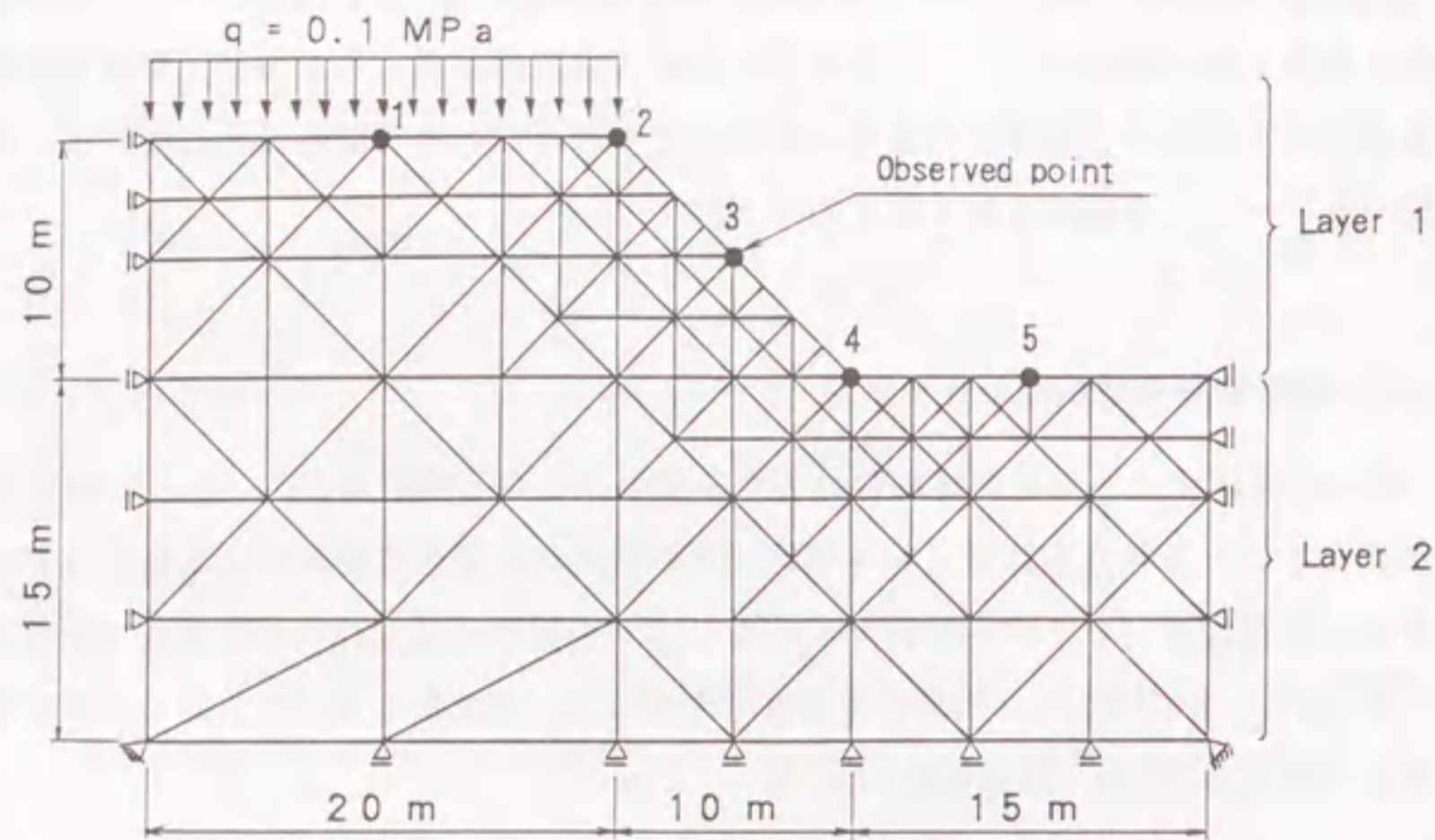
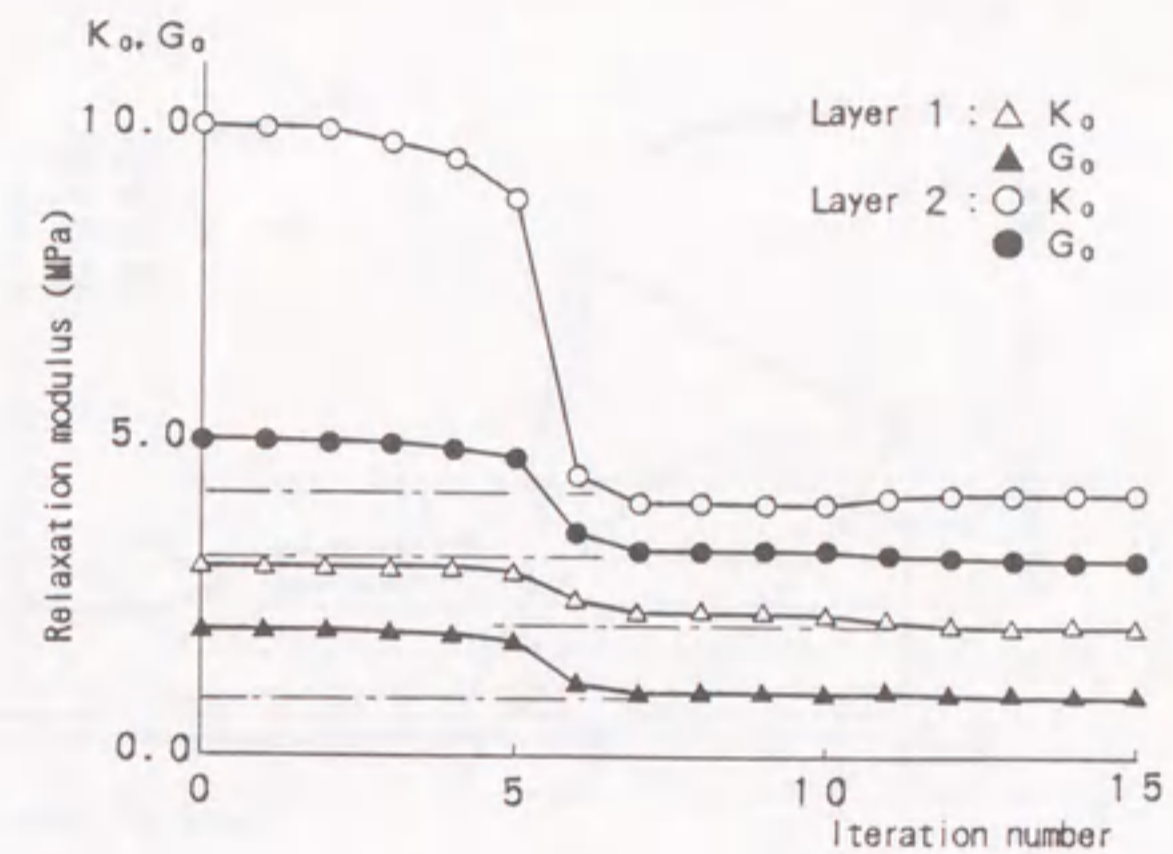


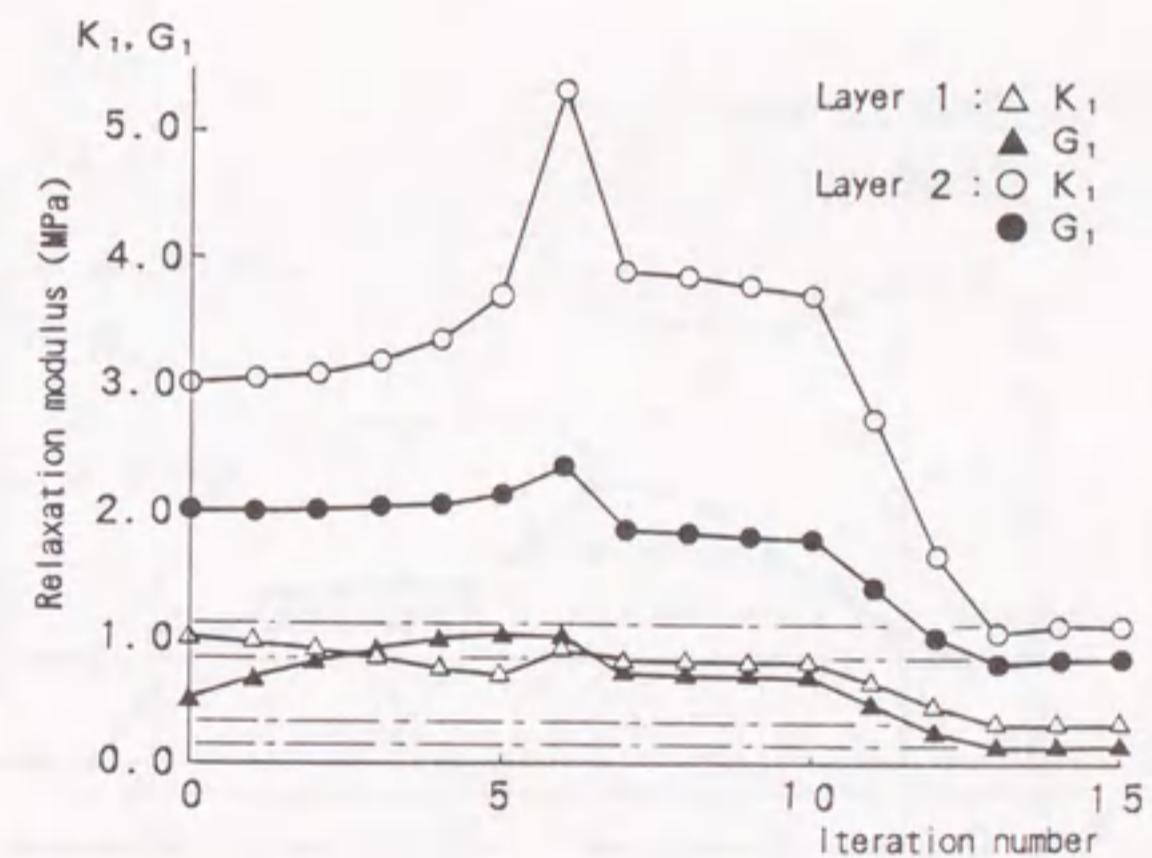
図 4.13: 二層からなる粘弾性斜面

表 4.7: 粘弾性斜面の同定解析結果

(Bulk components)		K_0	K_1	η_1^K	K_2	η_2^K
Layer 1	True	2.080	0.330	1.000	0.080	2.500
	Initial	3.000	1.000	3.000	0.500	5.000
	Calculated	2.080	0.330	1.000	0.080	2.501
Layer 2	True	4.170	1.110	5.560	0.280	13.890
	Initial	10.000	3.000	10.000	0.500	10.000
	Calculated	4.170	1.110	5.561	0.280	13.891
(Shear components)		G_0	G_1	η_1^G	G_2	η_2^G
Layer 1	True	0.960	0.150	0.460	0.040	1.150
	Initial	2.000	0.500	1.000	0.500	2.000
	Calculated	0.960	0.150	0.460	0.040	1.150
Layer 2	True	3.130	0.830	4.160	0.210	10.420
	Initial	5.000	2.000	5.000	1.000	20.000
	Calculated	3.130	0.830	4.160	0.210	10.420
Iteration number		16				
		$\varepsilon = 0.05$				

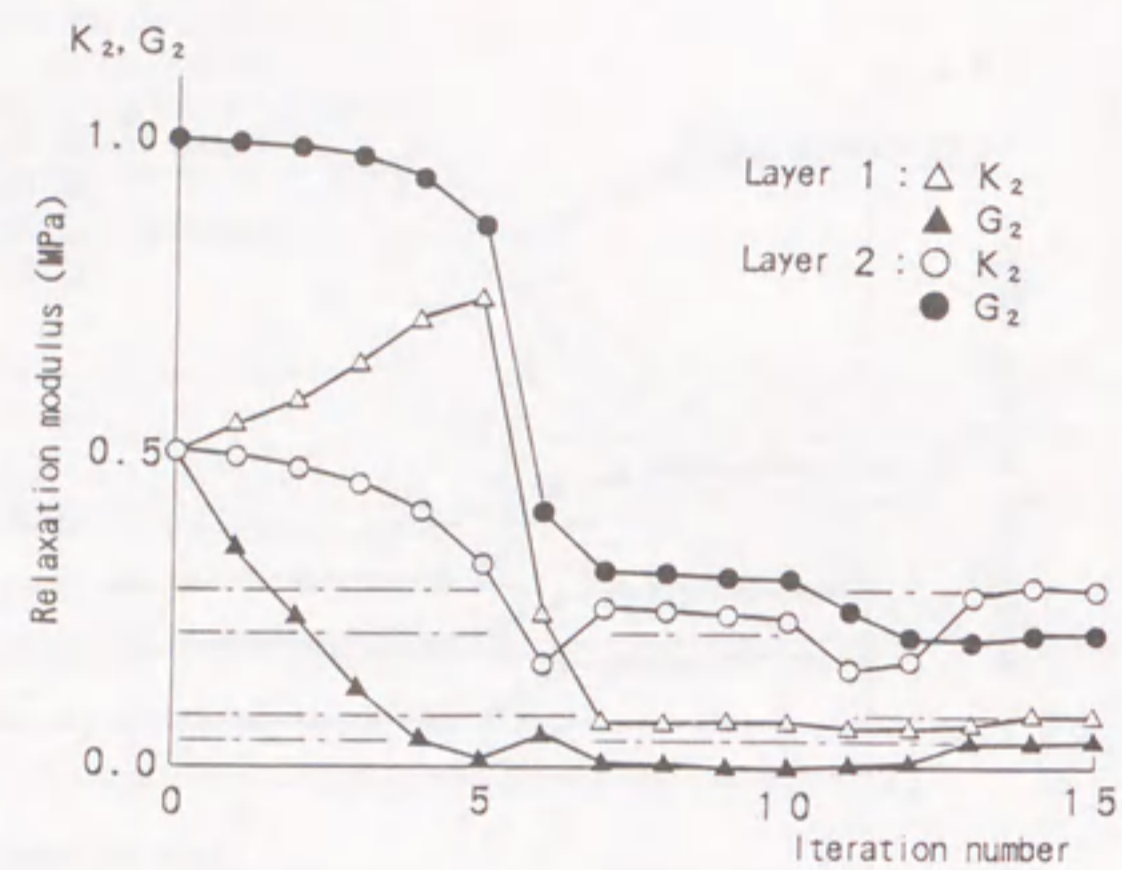


(a)



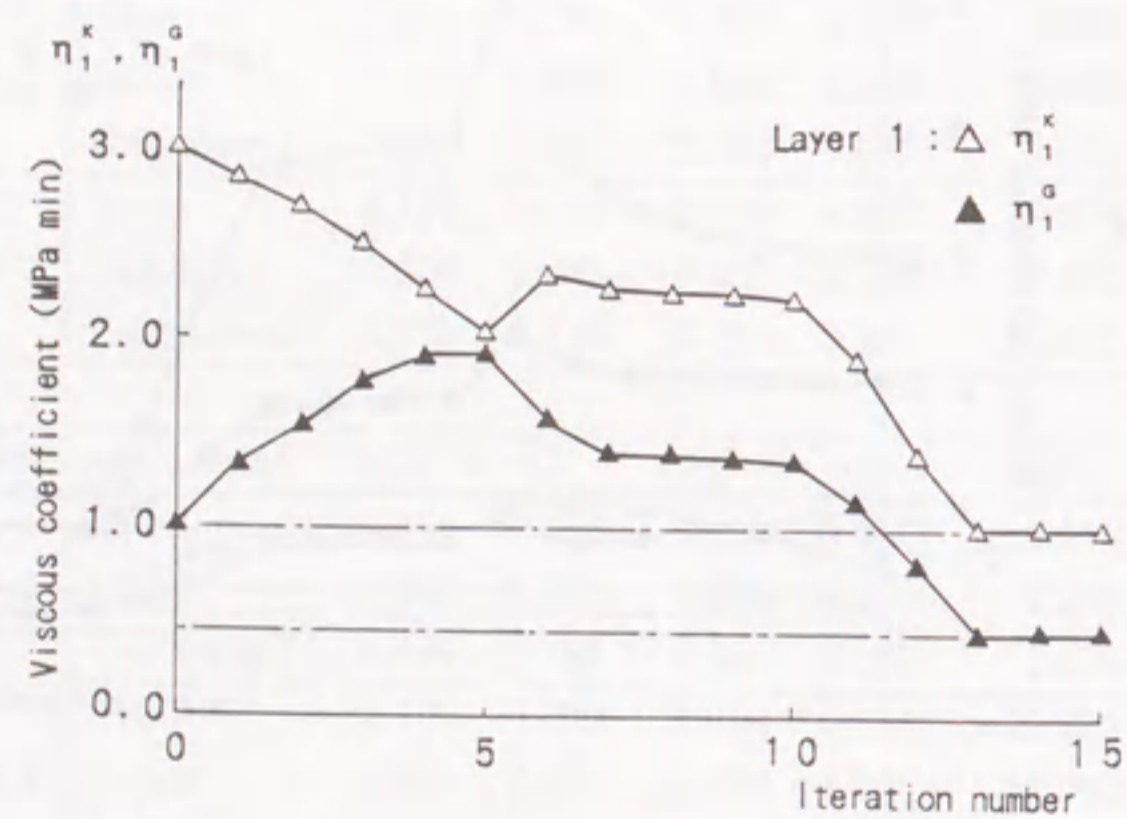
(b)

図 4.14: 未知パラメーター K , G の収束状況 (粘弾性斜面問題)

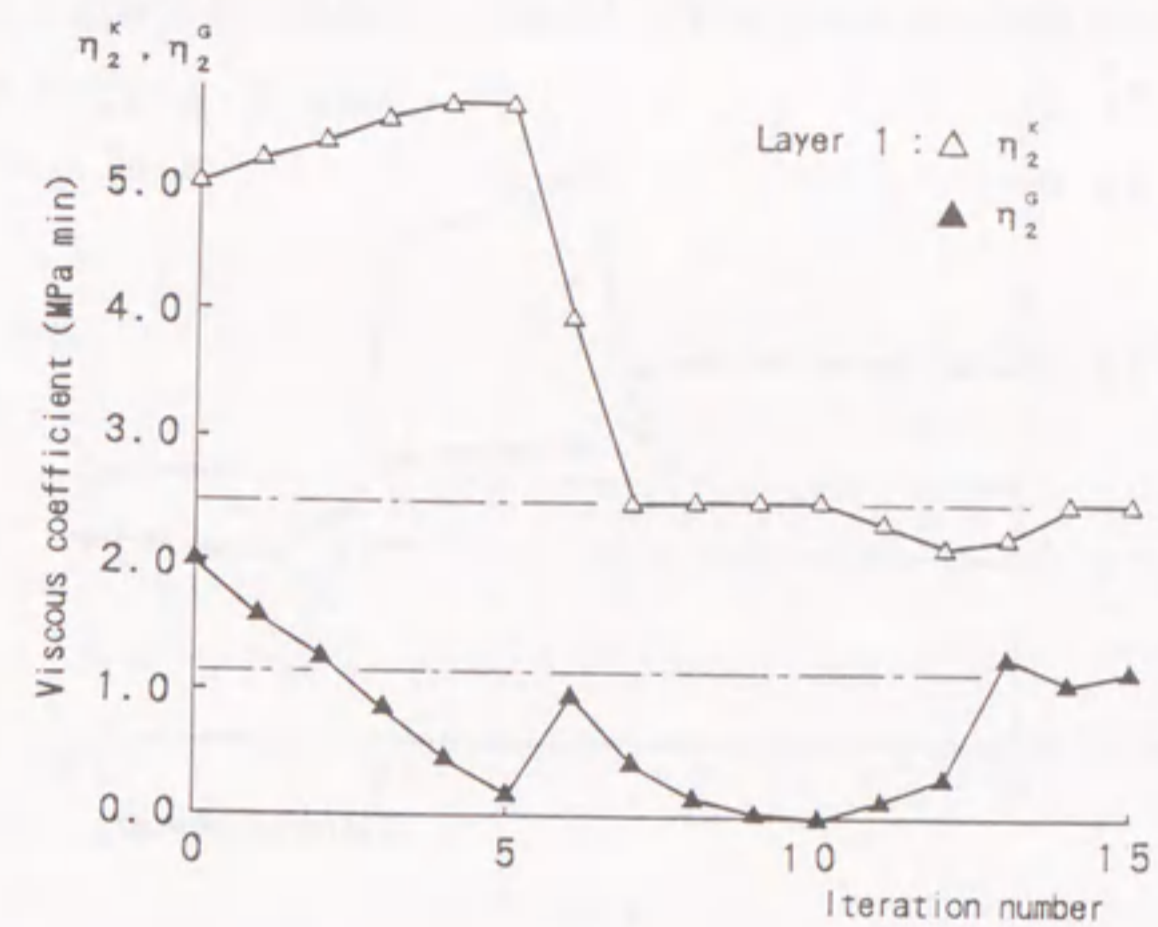


(c)

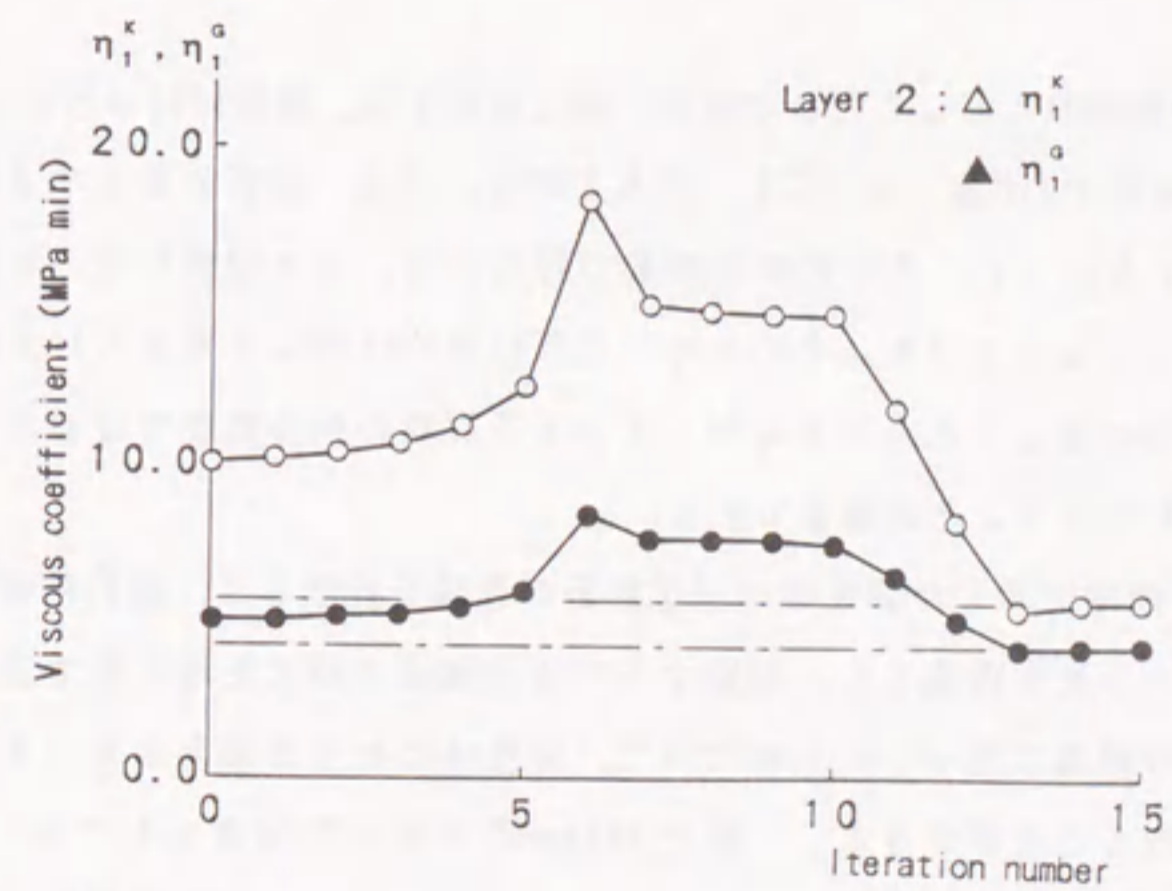
図 4.14: (続き)



(a)

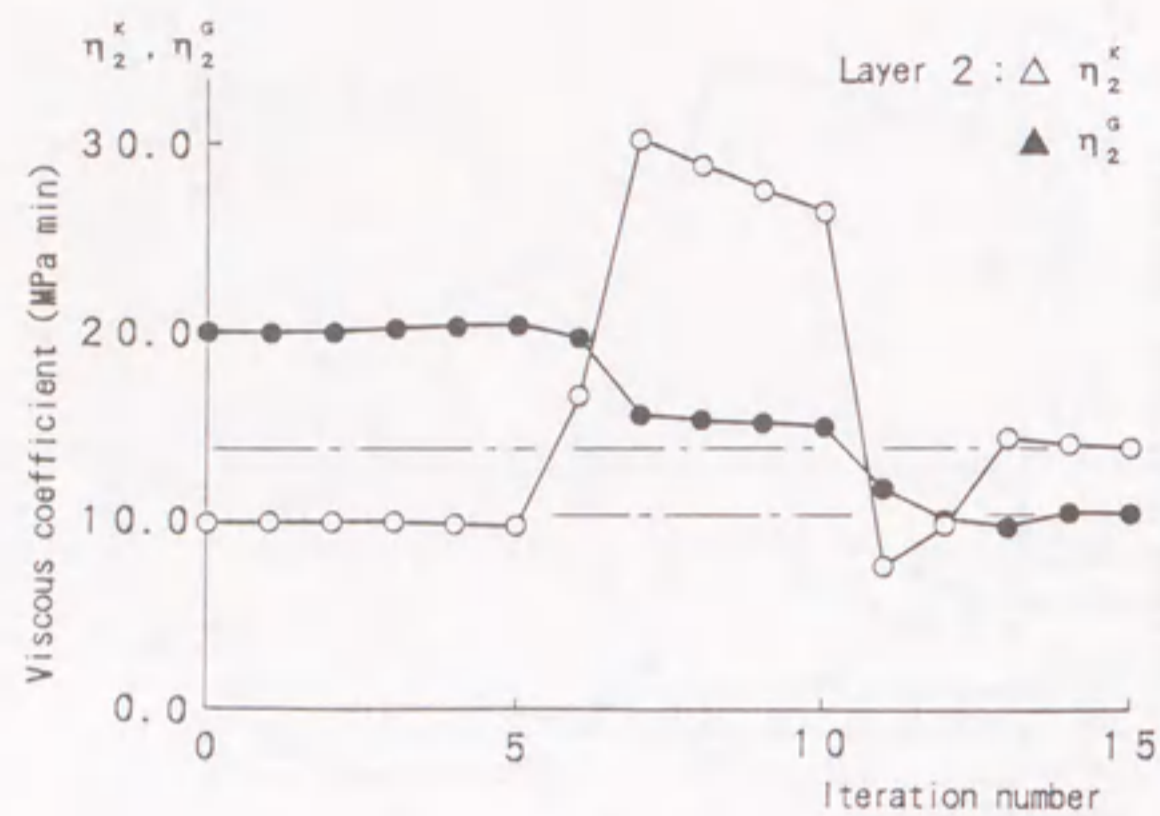
図 4.15: 未知パラメーター η^K , η^G の収束状況 (粘弾性斜面問題)

(b)



(c)

図 4.15: (続き)



(d)

図 4.15: (続き)

4.7 まとめ

トンネルの掘削中に起こる大きな変形、盛土の沈下等、地盤材料は多かれ少なかれ、粘弾性的挙動を示す(川本・林 1972, 赤木 1976)。近年、解析対象とする構造系が大型化、複雑化するにつれ、その力学的挙動の解析には、より現実に近い状態での解が要求されるようになってきている。そのためには原位置の状態にできるだけ忠実な解析モデルを設定するのはもちろんであるが、入力する材料の物性値をできるだけ精度良くかつ容易に与えられることが重要である。

本章では、前章で示した弾性体の同定解析の理論を拡張して、線形粘弾性体に対する同定解析の一手法を提案した。提案する手法は構成方程式を増分形で表現する線形粘弾性体の増分理論に基づいたものであり、弾性体に対する場合とほとんど同様の手順で定式化を行うことができる。一般化 Maxwell モデルを対象としており、したがって、モデルの等価性から本章において提案する手法は、すべての粘弾性モデルに対して適用可能である。順解析によって得られた変位を観測変位データとして見なして逆解析を行い、順解析において入力値とした粘弾性材料パラメータを同定する数値シミュレーションを行なった結果、すべて良い精度で同定値が得られ、本法が妥当であ

ることが確認できた。したがって、提案する手法によれば、従来のように材料試験を行わなくても原位置試験の観測データを用いて粘弾性的性質を直接特定できることの可能性が示された。

5.1 概説

岩盤には断層、節理、破碎帯といった大小様々の不連続面が存在しており、しかも、それらの位置や大きさを明確に特定できないことが、岩盤の力学挙動を複雑で予測し難いものになっている。岩盤のこうした不連続性を評価するために、例えば、ジョイント要素 (Goodman, Taylor and Brekke 1968) やクラック要素 (Kawamoto et al. 1982) を導入した有限要素解析、ステレオ投影図を利用する方法 (川本・藤川 1984)、個別剛体要素法 (Cundall 1971)、剛体ばねモデル (川井 1981) を用いた解析などがなされている。

京谷らは、金属材料を対象とした損傷理論の考え方 (村上・大野 1979, 村上・大野 1980) を岩盤に適用して、岩盤中に分布する節理等の中間的規模の不連続面を岩盤の損傷として扱う損傷理論を提案し (京谷・市川・川本 1985, Kyoya, Ichikawa and Kawamoto 1985, Kawamoto, Ichikawa and Kyoya 1988)、地下空洞の掘削解析 (京谷・大橋・川本 1986, 京谷・市川・川本 1987) や、不連続性岩盤の動的力学特性の評価 (韓他 1988)、さらに損傷場の発展式を導入した弾塑性損傷解析 (京谷 1990) を行なっている。損傷力学理論においては、岩盤内部に分布する無数の不連続面を損傷テンソルと呼ばれる2階の対称テンソルで定量化することによって、不連続性岩盤の力学挙動を連続体力学の枠内で取り扱うものである。岩盤の損傷テンソルを決定するためには、岩盤に存在する不連続面群を見出し、各不連続面群に対して、その方向、存在密度、不連続面の平均的大きさなどの情報が必要であり、そのために、京谷らは原位置岩盤露头壁面の写真、あるいはそれから作成したクラックパターン図などから不連続面の分布状態を把握し、岩盤の損傷テンソルを決定する方法を提案している (Ichikawa et al. 1987, Kawamoto, Ichikawa and Kyoya 1988, 京谷 1990)。

損傷理論が連続体力学の範囲で取り扱われるものであるならば、前の章までの議論から、3章で示した同定解析手法を拡張することによって、損傷テンソルを決定できることが十分期待できる。本章では、母岩材料は線形弾性体であると仮定して、不連続性岩盤に対する損傷場の同定解析を試みる。

5.2節では、不連続性岩盤に対する損傷力学理論について概説する。5.3節においては、仮想仕事の原理からみた損傷力学理論の構造について考察し、それを基に有限要素法による数値解析法の定式化を示す。5.4節では、5.3節に対応する境界制御問題としての損傷場の逆問題を考え、原位置試験の結果を利用して損傷テンソルを決定する同定解析手法を提案する。5.5節では、5.4節で提案した手法を数値モデル実験および実際の地下空洞の掘削解析に適用して提案手法の妥当性、適用性について検討する。

5.1 損傷テンソルと実質応力

京谷・市川・川本 (1985) は、金属のクリープ損傷理論 (村上・大野 1979, 村上・大野 1980) を不連続性岩盤に適用して、岩盤中に分布する不連続面を定量化する方法として岩盤に対する損傷理論を提案している。

金属のクリープ損傷理論では、材料内部に分布する不連続面の損傷効果は、材料内部の有効断面積を減少させることにありと、その幾何学的効果は次式で表される (図 5.1)。

$$S^* = (I - \Omega) S \tag{5.1}$$

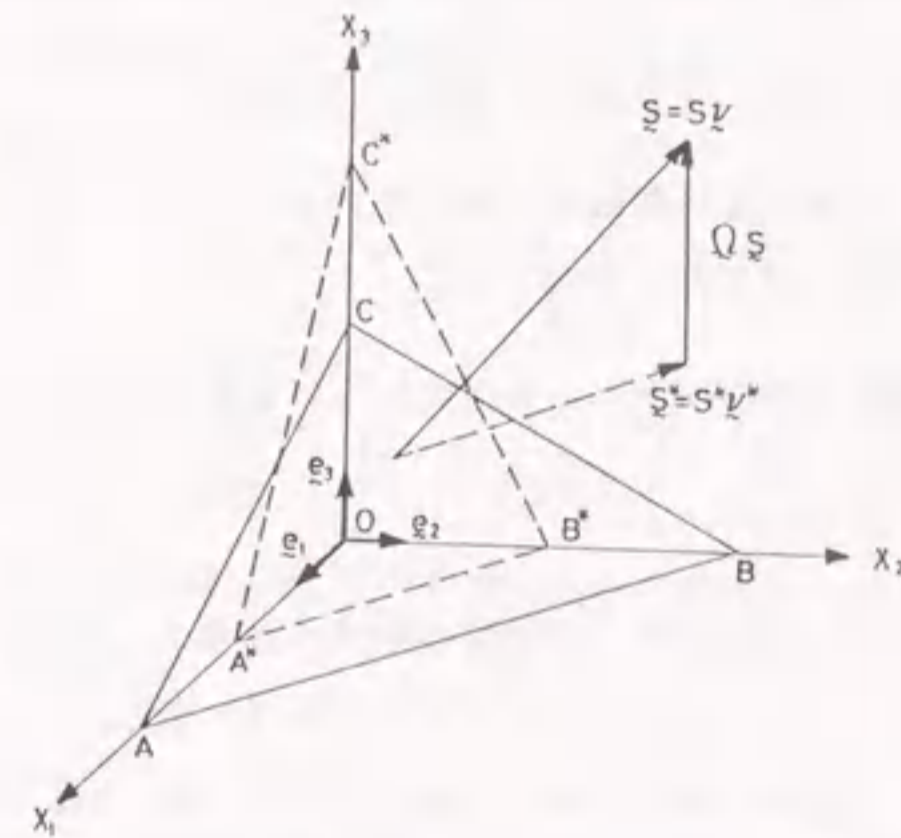


図 5.1: 損傷による有効断面の欠損効果 (京谷他 1985)

ここに、 S^* は実質面積ベクトル、 S は見かけの面積ベクトル、 I は2階の恒等テンソルである。 Ω は不連続面の面積密度 Ω と単位法線ベクトル n を用いた2階の対称テンソル

$$\Omega = \Omega(n \otimes n) \quad (5.2)$$

で与えられ、損傷テンソルと呼ばれる。ただし、 \otimes はテンソル積である。この損傷テンソルは、材料内部の全有効断面面積が材料内部に分布する不連続面によって失われる減少率を、3次元的方向性をもって表現するものである。

分布不連続面を有する材料に荷重が作用すると、材料内部において実質部分が受け持つ応力は、材料が不連続面を含んでいない完全な連続体であるとして算定される Cauchy 応力とは異なったものになる。この応力は実質応力と呼ばれる。金属のクリープ損傷理論では、この不連続面は全く力を受け持たないとして、クリープ損傷を受けた材料内の実質応力テンソル σ^* は Cauchy 応力テンソル σ と損傷テンソル Ω を用いて

$$\sigma^* = \sigma(I - \Omega)^{-1} \quad (5.3)$$

と定義されている。式(5.3)は、有効断面の減少効果(損傷テンソル)を通して見かけの Cauchy 応力が拡大されるという不連続面の損傷としての力学的効果を表している。

これに対し、京谷らは、不連続性岩盤に対し

- (1) 不連続面は平面であり、その厚みは無視できる。
- (2) 岩盤はそれ以上は壊れない構造最小単位で構成されていて、不連続面は、その境界面上に存在あるいは発生・進展する。

と仮定して、岩盤に対する損傷テンソルを次のように定義した(京谷・市川・川本 1987)。

$$\Omega = \frac{l}{V} \sum_{k=1}^N a^k (n^k \otimes n^k) \quad (5.4)$$

ここに、 V は N 個の不連続面を含んだ岩盤の領域の体積であり、 a^k は V 中の k 番目の不連続面の面積、 n^k はその単位法線ベクトルである。また、 l は、この岩盤の構造最小単位の体積を v として $l = v^{1/3}$ である。上式において $\Omega = I$ は全有効断面面積がすべて不連続面となる状態、すなわち岩盤が構造最小単位の大きさの岩石ブロックまで破砕された極限状態に対応する。

実際の岩盤においては、すべての不連続面の面積 a^k 、およびその単位法線ベクトル n^k を知ることは不可能であるため、これら不連続面の集合としての不連続面群(節理群)の損傷テンソルから岩盤の損傷テンソルを求めている。節理群の損傷テンソルは、互いに直交するような3つの面の亀裂を観察することによって次のように定めることができる(京谷・市川・川本 1985)。

$$\Omega^k = \Omega^k(\bar{n}^k \otimes \bar{n}^k) \quad (5.5)$$

ここに Ω^k は k 番目の節理群の面積密度、 \bar{n}^k は節理群卓越方向に対する単位法線ベクトルであり、これらは、各観察面上に現れる亀裂の長さ、方向角を測定し、データを整理することによって決定される。岩盤全体の損傷テンソルは、各節理群の損傷テンソルの重ね合わせによって

$$\Omega = \sum_{k=1}^N \Omega^k \quad (5.6)$$

と与えられる。ここに N は節理群の数である。

式(5.3)の実質応力は、主として引っ張り応力下での金属材料のクリープ損傷を対象としており、不連続部分は全く力を受け持たないとしている。しかしながら、岩盤の不連続面においては、面の開閉や閉じた不連続面における圧縮応力の伝達性、面に沿うすべり抵抗などを考慮する必要がある。そこで、岩盤の不連続面は引っ張り応力には抵抗しないが圧縮応力には幾分か抵抗すること、および壁面の粗さに応じたせん断抵抗を有することを仮定すると、岩盤における実質応力が次のように与えられる(京谷・市川・川本 1987)。

$$\sigma^* = T^t [\sigma'_t \phi_t + H < \sigma'_n > \phi - H < -\sigma'_n > \phi_n] T \quad (5.7)$$

ここに

$$\phi = (I - \Omega')^{-1}, \quad \phi_n = (I - C_n \Omega')^{-1}, \quad \phi_t = (I - C_t \Omega')^{-1} \quad (5.8)$$

である。 Ω' は損傷テンソル Ω の固有ベクトルからなる直交テンソル T によって

$$\Omega' = T \Omega T^t \quad (5.9)$$

のように対角化されたもので、 Ω で表わされている分布不連続面と等価な互いに直交する3つの規則的な不連続面群を表わす損傷テンソルである。また、 σ' は、この T によって同様に

$$\sigma' = T\sigma T^t \quad (5.10)$$

と対角化された Cauchy 応力テンソルで、 σ'_n 、 σ'_t はそれぞれ σ' の対角成分および非対角成分

$$\sigma' = \sigma'_n + \sigma'_t \quad (5.11)$$

である。この σ'_n は Ω で表された不連続面群に垂直な応力、 σ'_t は不連続面群に沿うせん断応力表す。一方、 $\mathbf{H} \langle \cdot \rangle$ は 2 階のテンソル \mathbf{x} に対し、その i, j 成分が

$$(\mathbf{H} \langle \mathbf{x} \rangle)_{ij} = H_{ij} \langle x_{ij} \rangle = \begin{cases} 0 & \text{if } x_{ij} \leq 0 \\ x_{ij} & \text{if } x_{ij} > 0 \end{cases} \quad (i, j; \text{ not summed}) \quad (5.12)$$

となる変換作用素を表す。 C_t 、 C_n は 0 から 1 の間の値を取る係数で、 σ'_t と σ'_n の伝達性を通じて不連続面の損傷効果を表すものである。これらの値は、不連続面群の平均的な面の粗さや噛み合わせの程度によって決定される。

実質応力の定義式 (5.7) を

$$\sigma^* = \sigma + \psi \quad (5.13)$$

と書き換えれば、右辺第 2 項が不連続面群の損傷としての力学的効果を表現していることがわかる。ただし

$$\begin{aligned} \psi = & \mathbf{T}^t [\sigma'_t (\phi_t - \mathbf{I}) \\ & + \mathbf{H} \langle \sigma'_n \rangle (\phi - \mathbf{I}) - \mathbf{H} \langle -\sigma'_n \rangle (\phi_n - \mathbf{I})] \mathbf{T} \end{aligned} \quad (5.14)$$

である。 $C_n = 1.0$ 、 $C_t = 1.0$ の場合には ψ は

$$\psi = \sigma^* \Omega = \sigma (\mathbf{I} - \Omega)^{-1} \Omega \quad (5.15)$$

となり、実質応力式 (5.13) は式 (5.3) に一致する。

損傷力学理論では、実質応力が岩盤の実質部分に働いて不連続面を含んだ岩盤全体の变形・破壊挙動を支配すると考えられる。したがって、損傷理論における構成則は実質部分の材料特性、すなわち母岩の材料特性であり、岩石供試体を用いた室内試験から一般に

$$\sigma^* = \Phi(\epsilon) \quad , \quad \epsilon = \Phi^{-1}(\sigma^*) \quad (5.16)$$

と与えられる。供試体の大きさは岩盤の構造最小単位より小さいので、供試体には注目している損傷は存在せず $\Omega = \mathbf{0}$ である。したがって、式 (5.3) から明らかなように $\sigma^* = \sigma$ となる。すなわち、損傷理論においては構成則として供試体から得られた材料特性をそのまま用いればよく、岩盤の特性を岩石の物性値と岩盤の状態から推定するという作業を必要としない。

弾性問題の場合には、構成則はフック則により岩石供試体の弾性定数からなる弾性係数テンソル \mathbf{D} 、あるいはその逆関係 $\mathbf{C} = \mathbf{D}^{-1}$ を用いて

$$\sigma^* = \mathbf{D}\epsilon \quad , \quad \epsilon = \mathbf{C}\sigma^* \quad (5.17)$$

となる。

5.2 損傷材料に対する仮想仕事式と有限要素解析

前節での理論より、静的な変位場における不連続性岩盤の損傷理論解析は、岩盤の損傷状態を表す損傷テンソル Ω および Cauchy 応力 σ を通じて決まる実質応力 σ^* と不連続面を含んだ岩盤の变形状態を記述するひずみ ϵ との構成則、および境界条件の下で Cauchy 応力 σ に対するつりあい方程式を解くことであると記述できる。母岩を等方性の線形弾性体として取り扱う場合の解くべき方程式を列挙すれば以下のようである。

(つりあい方程式)

$$\nabla \cdot \sigma = \mathbf{0} \quad \text{領域 } V \text{ 内で} \quad (5.18)$$

(構成則 : Hooke 則)

$$\sigma^* = \mathbf{D}\epsilon \quad (5.19)$$

(実質応力変換則)

$$\sigma^* = \sigma + \psi(\sigma, \Omega) \quad (5.20)$$

(境界条件)

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}} \quad \text{境界}\partial\Omega_u\text{上で (変位境界条件)} \quad (5.21)$$

$$\mathbf{t} = \sigma\mathbf{n} = \hat{\mathbf{t}} \quad \text{境界}\partial\Omega_t\text{上で (荷重境界条件)} \quad (5.22)$$

(変位ひずみ関係式)

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}[\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T] \quad \text{領域}V\text{内で} \quad (5.23)$$

ここに、 σ は応力テンソル、 \mathbf{u} は変位ベクトル、 \mathbf{t} は表面力ベクトルであり、 \mathbf{n} は境界 $\partial\Omega$ 上の外向き単位法線ベクトルである。ただし、ここでは物体力の項は無視している。

Cauchy 応力についてのつりあい方程式 (5.18) に対する仮想仕事の式は、通常の連続物体の場合と同様に

$$\int_V \sigma \cdot \delta\boldsymbol{\varepsilon} dv = \int_{\partial\Omega_t} \hat{\mathbf{t}} \cdot \delta\mathbf{u} dS \quad (5.24)$$

と書かれる。ここに、 $\delta\mathbf{u}$ は変位境界 $\partial\Omega_u$ 上で $\delta\mathbf{u} = \mathbf{0}$ となる仮想変位であり、 $\delta\boldsymbol{\varepsilon}$ は仮想ひずみである。

この式中の Cauchy 応力を、実質応力変換則 (5.20) を用いて実質応力に書き換えると、損傷材料に対する仮想仕事の式

$$\int_V \sigma^* \cdot \delta\boldsymbol{\varepsilon} dv = \int_{\partial\Omega_t} \hat{\mathbf{t}} \cdot \delta\mathbf{u} dS + \int_V \boldsymbol{\psi} \cdot \delta\boldsymbol{\varepsilon} dv \quad (5.25)$$

が得られる。

適当な形状関数 \mathbf{N} を用いて、要素内の変位 \mathbf{u} を要素の節点変位 \mathbf{U} によって

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{U} \quad (5.26)$$

と離散化すれば、ひずみ $\boldsymbol{\varepsilon}$ および実質応力 σ^* は、節点変位 \mathbf{U} を用いてそれぞれ

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{U} \quad (5.27)$$

$$\sigma = \mathbf{D}\mathbf{B}\mathbf{U} \quad (5.28)$$

と表される。ただし、 \mathbf{B} は変位・ひずみ関係マトリックスである。したがって、式 (5.26), (5.27), (5.28) を仮想仕事式 (5.25) に代入して各要素ごとに重ね合わせれば、節点に関する剛性方程式

$$\mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F} + \mathbf{F}^* \quad (5.29)$$

を得る。ここに

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \int_V \mathbf{B}^t \mathbf{D} \mathbf{B} dv \\ \mathbf{F} &= \int_{\partial\Omega_t} \mathbf{N}^t \hat{\mathbf{t}} dS \\ \mathbf{F}^* &= \int_V \mathbf{B}^t \boldsymbol{\psi} dv \end{aligned} \quad (5.30)$$

である。剛性マトリックス \mathbf{K} は実質部分の材料特性だけに依存し、不連続面には無関係に定まる。こうして、分布不連続面の損傷効果は付加的な節点荷重ベクトル \mathbf{F}^* で表現される。

実質応力の定義式 (5.13) において $C_t = 1.0, C_n = 1.0$ とすると、式 (5.13) は式 (5.3) に一致する。この場合、 \mathbf{F}^* は

$$\mathbf{F}^* = \left(\int_V \mathbf{B}^t \boldsymbol{\Gamma} \mathbf{D} \mathbf{B} dv \right) \mathbf{U} \quad (5.31)$$

と書ける (京谷 1990)。ここに $\boldsymbol{\Gamma}$ は

$$\boldsymbol{\Gamma} = \begin{bmatrix} \Omega_{11} & 0 & 0 & \Omega_{12} & 0 & \Omega_{13} \\ 0 & \Omega_{22} & 0 & \Omega_{12} & \Omega_{23} & 0 \\ 0 & 0 & \Omega_{33} & 0 & \Omega_{23} & \Omega_{13} \\ \frac{1}{2}\Omega_{12} & \frac{1}{2}\Omega_{12} & 0 & \frac{1}{2}(\Omega_{11} + \Omega_{22}) & \frac{1}{2}\Omega_{13} & \frac{1}{2}\Omega_{23} \\ 0 & \frac{1}{2}\Omega_{23} & \frac{1}{2}\Omega_{23} & \frac{1}{2}\Omega_{13} & \frac{1}{2}(\Omega_{22} + \Omega_{33}) & \frac{1}{2}\Omega_{12} \\ \frac{1}{2}\Omega_{13} & 0 & \frac{1}{2}\Omega_{13} & \frac{1}{2}\Omega_{23} & \frac{1}{2}\Omega_{12} & \frac{1}{2}(\Omega_{33} + \Omega_{11}) \end{bmatrix} \quad (5.32)$$

となるマトリックスである。

5.4 逆解析による損傷テンソルの同定

岩盤の母岩材を線形弾性体として取扱い、不連続面がすべて有効断面の欠損として働いている ($C_n = C_t = 1.0$) とすると、式 (5.31) から有限要素法のつりあい方程式は

$$(\mathbf{K} - \mathbf{L})\mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (5.33)$$

となる。ここに

$$\mathbf{L} = \int_V \mathbf{B}^t \mathbf{F} \mathbf{D} \mathbf{B} dv \quad (5.34)$$

である。したがって、母岩の材料特性 \mathbf{D} が室内試験から決定されているのであれば、第3章で提案している同定解析理論を拡張して、式 (5.33) に適用することによって損傷テンソルを決定できることが可能である。

ここで、境界条件 (5.21), (5.22) と双対な観測境界条件を次のように導入する。

(観測境界条件)

$$\mathbf{t} = \sigma \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}} \quad \text{境界 } \partial\Omega_u \text{ 上で } (\bar{\mathbf{t}}: \text{観測荷重}) \quad (5.35)$$

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad \text{境界 } \partial\Omega_t \text{ 上で } (\bar{\mathbf{u}}: \text{観測変位}) \quad (5.36)$$

こうして問題は、変位あるいは外力の一部が境界上で観測データとして得られたとき、つりあい方程式 (5.18), 構成則 (5.19), 境界条件 (5.21), (5.22) を満足しながら、すなわち、式 (5.33) を満足しながら、観測境界条件 (5.35), (5.36) を満たす $\mathbf{F}(\Omega_{ij})$ を決定するという問題になる。

未知パラメーター Ω_{ij} をベクトル \mathbf{P} で表記すれば、節点のつりあい方程式 (5.33) は

$$(\mathbf{K} - \mathbf{L}(\mathbf{P}))\mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (5.37)$$

と表現できる。ただし、この段階ではすでに変位境界条件に対する処理が施されているものとする。観測境界条件に対しても離散化した方程式が次のように得られる。

$$\mathbf{S}_u \mathbf{U} = \bar{\mathbf{U}} \quad (5.38)$$

$$\mathbf{S}_t \mathbf{F} = \int_{\partial\Omega_u} \mathbf{N}^t \bar{\mathbf{t}} dS = \bar{\mathbf{F}} \quad (5.39)$$

ここで $\bar{\mathbf{U}}, \bar{\mathbf{F}}$ は該当する節点の測定データであり、 \mathbf{S}_u と \mathbf{S}_t は、3章で定義したようにそれぞれ変位および荷重の測定データに対応する節点変位、節点荷重をセレクトするマトリックスで、該当する対角項が1で他はすべて0の要素から構成されている。

未知ベクトル \mathbf{P} を決定するために式 (5.37), (5.38), (5.39) に対して Newton の iteration scheme を適用すると k 回目の計算ステップに対してそれぞれ

$$-d\mathbf{F}^k + [\mathbf{K} - \mathbf{L}(\mathbf{P}^k)]d\mathbf{U}^k - \left(\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \mathbf{P}}\right)^k d\mathbf{P}^k \mathbf{U}^k = [\mathbf{F} - \mathbf{K}\mathbf{U} + \mathbf{L}\mathbf{U}]^k \quad (5.40)$$

$$\mathbf{S}_u d\mathbf{U}^k = [\bar{\mathbf{U}} - \mathbf{S}_u \mathbf{U}^k] = \bar{\mathbf{U}} - \mathbf{S}_u \mathbf{U}^k \quad (5.41)$$

$$\mathbf{S}_t d\mathbf{F}^k = [\bar{\mathbf{F}} - \mathbf{S}_t \mathbf{F}^k] = \bar{\mathbf{F}} - \mathbf{S}_t \mathbf{F}^k \quad (5.42)$$

となる。ここに

$$\begin{aligned} d\mathbf{U}^k &= \mathbf{U}^{k+1} - \mathbf{U}^k \\ d\mathbf{F}^k &= \mathbf{F}^{k+1} - \mathbf{F}^k \end{aligned} \quad (5.43)$$

$$d\mathbf{P}^k = \mathbf{P}^{k+1} - \mathbf{P}^k$$

である。式 (5.32) から明らかなように、 $\partial \mathbf{L} / \partial \mathbf{P}$ の項は容易に評価できて、例えば

$$\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \Omega_{11}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \Omega_{12}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}, \dots$$

のように、 $\partial \mathbf{L} / \partial \Omega_{ij}$ に対して 当該の Ω_{ij} にかかる係数だけを残して得られるマトリックスとなる。

式 (5.40), (5.41), (5.42) をマトリックス表示すれば、 k 回目の計算ステップに対して

$$\mathbf{G} d\mathbf{x} = \mathbf{R} \quad (5.44)$$

ここに

$$G = \begin{bmatrix} \mathbf{K} - \mathbf{L}(\mathbf{P}^k) & -\mathbf{I} & \left(\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \mathbf{P}} \mathbf{U}\right)^k \\ \mathbf{S}_u & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_t & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$d\mathbf{x} = \begin{bmatrix} d\mathbf{U}^k \\ d\mathbf{F}^k \\ d\mathbf{P}^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}^{k+1} - \mathbf{U}^k \\ \mathbf{F}^{k+1} - \mathbf{F}^k \\ \mathbf{P}^{k+1} - \mathbf{P}^k \end{bmatrix} \quad (5.45)$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}^k - (\mathbf{K} - \mathbf{L}(\mathbf{P}^k))\mathbf{U}^k \\ \bar{\mathbf{U}} - \mathbf{S}_u \mathbf{U}^k \\ \bar{\mathbf{F}} - \mathbf{S}_t \mathbf{F}^k \end{bmatrix}$$

を得る。

以下、弾性体の物性値 E, ν を推定する同定解析の場合と同様の定式化で、式 (5.44) に対して最小二乗法、一次元探索法を適用することによって不連続性岩盤の損傷テンソルが同定される。ただし、損傷テンソルの同定解析の場合、未知パラメーターに対する制約条件

$$-1 \leq \Omega_{ij} \leq 1 \quad (5.46)$$

を導入した誤差関数 $W(\mathbf{P})$ は

$$W(\mathbf{P}) = \frac{1-\omega}{2} (\mathbf{U} - \bar{\mathbf{U}}) \cdot (\mathbf{U} - \bar{\mathbf{U}}) + \frac{\omega}{2} (\mathbf{F} - \bar{\mathbf{F}}) \cdot (\mathbf{F} - \bar{\mathbf{F}}) - \sum_{i \leq j}^3 \frac{1}{\varepsilon} (\Omega_{ij} + 1.0)^- + \sum_{i \leq j}^3 \frac{1}{\varepsilon} (\Omega_{ij} - 1.0)^+ \quad (5.47)$$

と定義されることに注意する。

5.5 本手法の適用例

5.5.1 円形トンネル問題

まず最初に、本章で提案した損傷テンソルに対する同定解析法の妥当性を検証するために、通常の順解析によって得られた変位を測定変位と見なして逆解析を行い、順解析において入力した損傷テンソルの値が同定できるか検討する。用いた解析モデルの有限要素分割図を図 5.2 に示す。なお、ここでは 2 次元平面ひずみ問題として解析を行っている。

順解析においては、母岩材は弾性体とし、岩盤には、図 5.3 に示すような 2 つの節理群が存在するとし、母岩材の材料定数、節理群の面密度およびその法線ベクトルは次の値を入力データとして与えた。

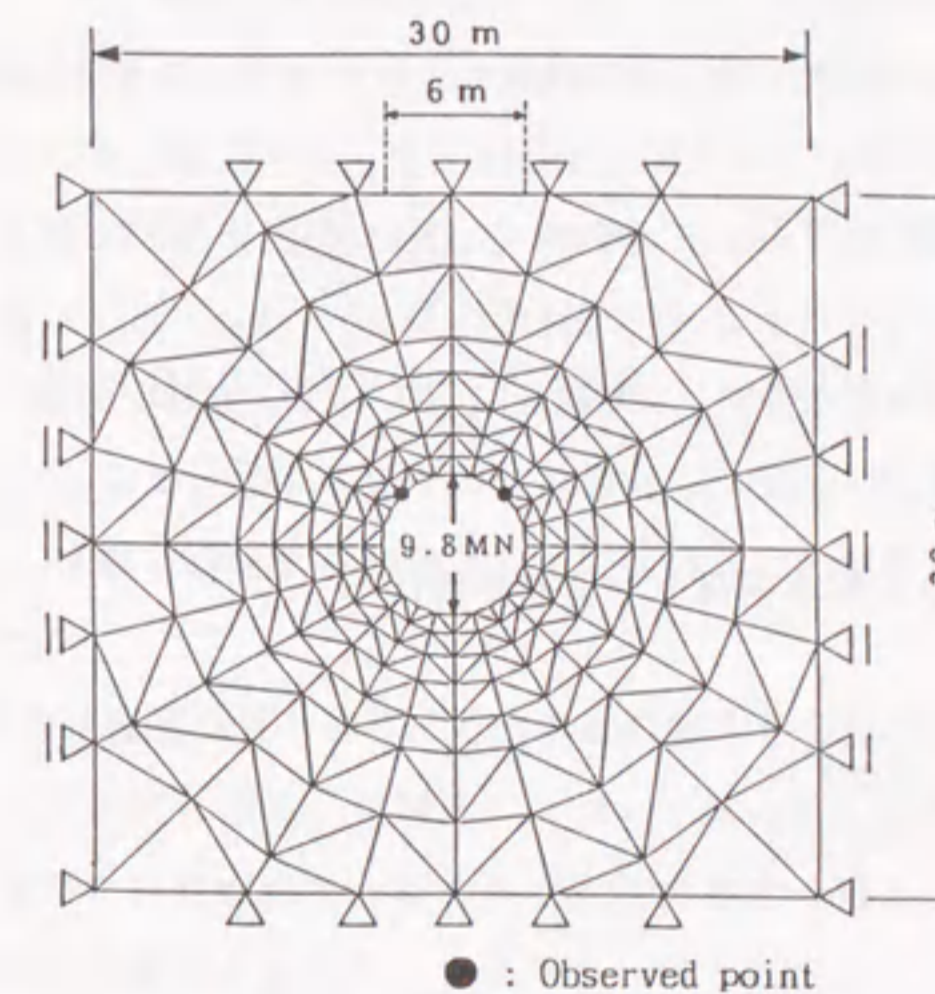


図 5.2: 解析モデルの有限要素分割図

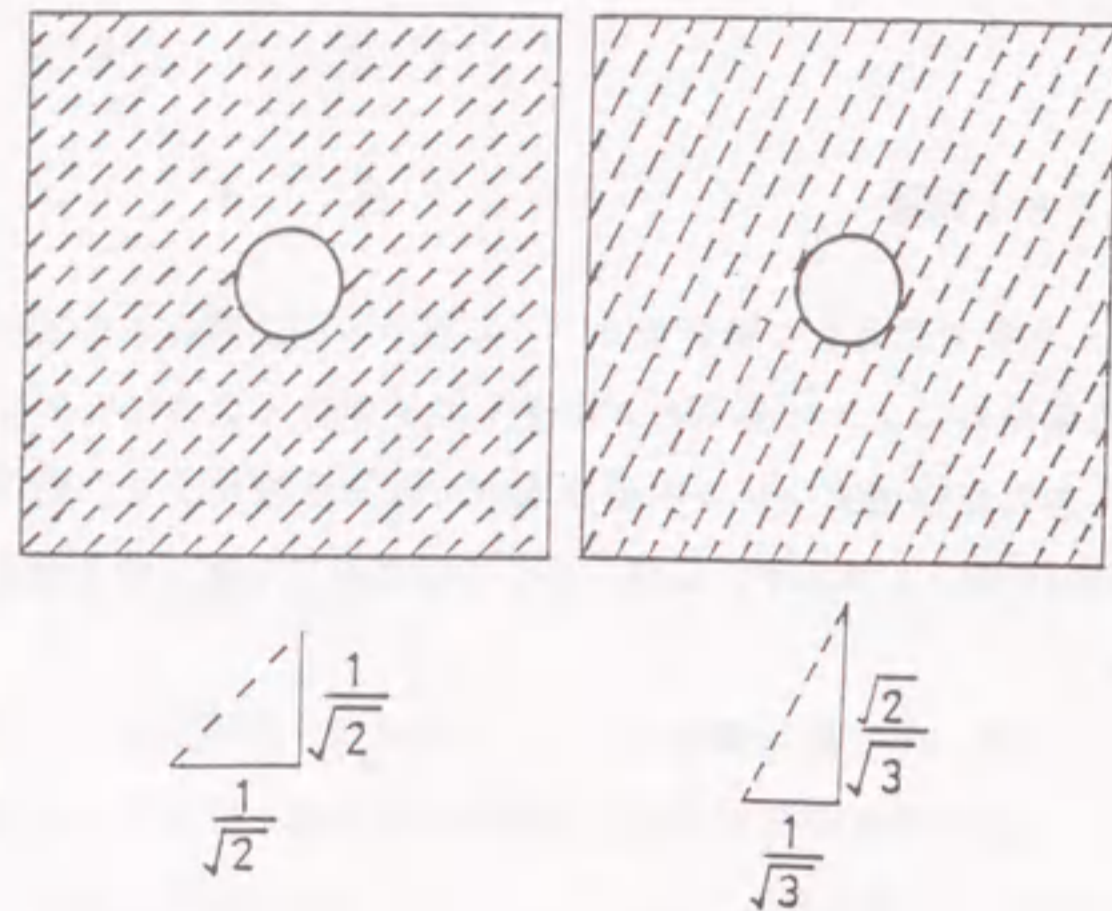


図 5.3: 想定した節理群の方向

母岩材 : ヤング率 $E = 100(\text{MPa})$, ポアソン比 $\nu = 0.25$

節理群1 : $\Omega_1 = 0.3$, $\mathbf{n}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right)$

節理群2 : $\Omega_2 = 0.4$, $\mathbf{n}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}}{3}, 0 \right)$

これより同定すべき岩盤の損傷テンソルの値は

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Omega} &= \begin{bmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} \\ \Omega_{12} & \Omega_{22} \end{bmatrix} \\ &= \Omega_1 \mathbf{n}_1 \otimes \mathbf{n}_1 + \Omega_2 \mathbf{n}_2 \otimes \mathbf{n}_2 = \begin{bmatrix} 0.283 & 0.339 \\ 0.339 & 0.417 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

となる。

未知パラメーターが Ω_{11} , Ω_{22} , Ω_{12} の 3 個であるため、これに対応して観測境界条件の式も 3 個以上必要となる。ここでは、図 5.2 中、●印で示す 2 つの節点のそれぞれ x 方向および y 方向の順解析によって得られた変位の値を観測データとして入力した。初期値をすべて $\Omega_{11} = \Omega_{22} = \Omega_{12} = 0.1$ として損傷テンソルの同定解析を行なった結果、3 回の繰り返し計算で

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} 0.28300 & 0.33899 \\ 0.33899 & 0.41703 \end{bmatrix}$$

が得られた。同定された値は、順解析において入力した値と良い精度で一致しており、提案した損傷テンソルに対する同定解析手法の妥当性が検証された。

5.5.2 地下空洞掘削問題

本項では、損傷テンソルの同定解析手法を実際の地下空洞掘削問題に適用することを試みる。この空洞は被り約 360m の地下に建設される地下発電所に掘削されているものであり、発電所空洞（幅 20.5m、高さ 44.1m、奥行き 129.0m）と主要変圧器を設置する主変室空洞（幅 17.0m、高さ 12.8m、奥行き 54.0m）が掘削される。図 5.4 に示すように、空洞周辺には C_M 級、 C_H 級の岩盤が分布しており、アーチ肩部からアーチ中央部に向かって断層が存在している。したがって、同定解析の実施に際しては、岩盤の物性を C_M 級と C_H 級の分布を考慮して非均質とし、解析は実際の施工に合わせて 10 段階の掘削ステップの平面ひずみ問題として取り扱った。解析に用いた有限要素モデルを図 5.5 に示す。

この問題での外力は掘削荷重であり、地山の初期応力から掘削による等価節点力を計算することによって決定される。初期応力については、地山形状をモデル化して自重計算を行なって求めた掘削前のアーチクラウン部の応力の値と、試掘坑で実施した初期地圧測定の結果から推定されたアーチクラウン部での値

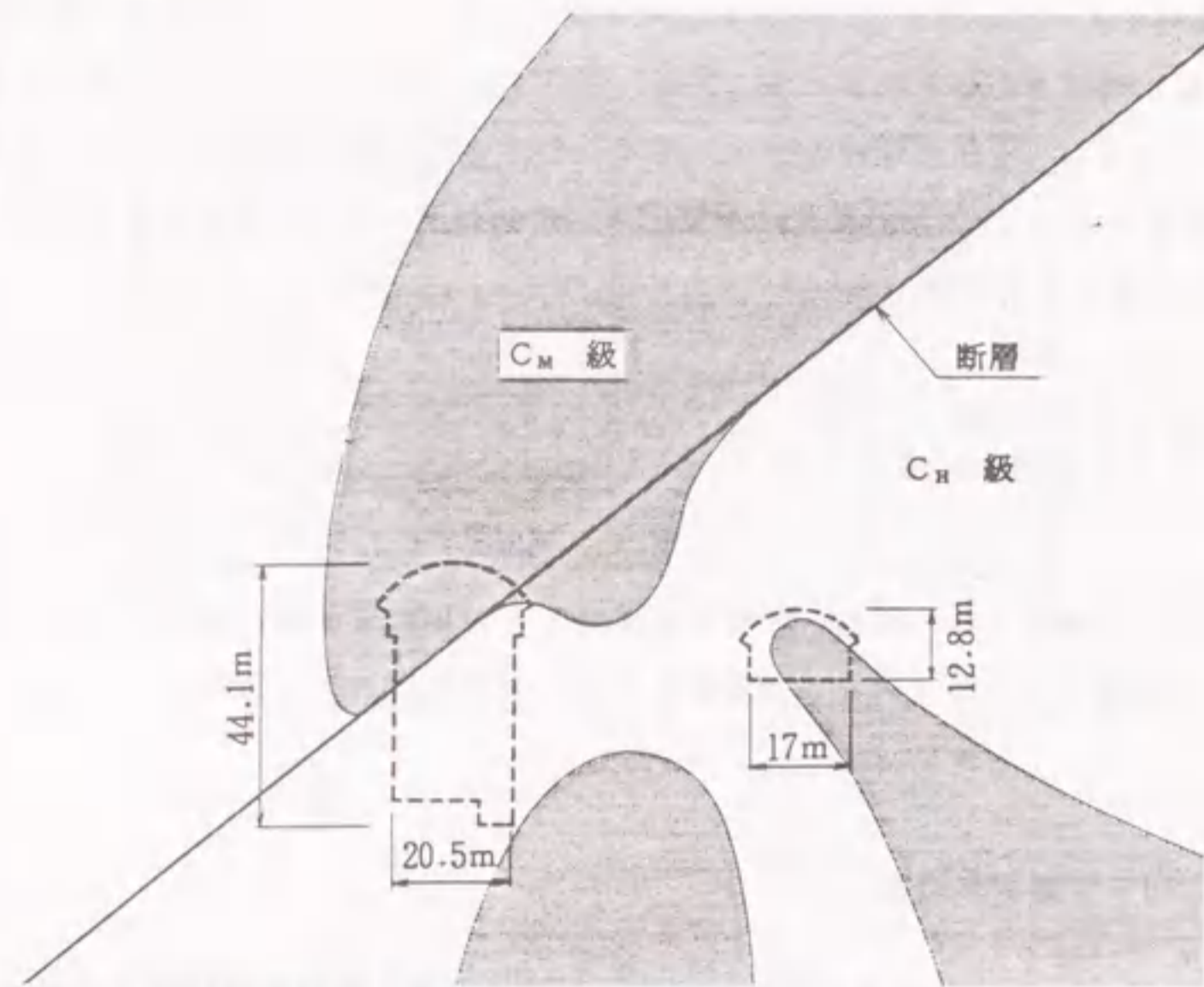


図 5.4: 発電用地下空洞およびその周辺の地質分布の概観図

(アーチクラウン部の初期地圧)

水平応力成分 σ_{x0} -97.5 (kgf/cm^2)

鉛直応力成分 σ_{y0} -71.2 (kgf/cm^2)

せん断応力成分 τ_{xy0} -2.80 (kgf/cm^2)

σ_{x0}/σ_{y0} 1.37

鉛直よりの傾き $\theta(^{\circ})$ 6.00 (反時計)

とが一致するように、計算によって得られた各要素の値を補正して地山の初期応力としている。なお、空洞周辺部の初期応力の分布状態を図 5.6 に示す。

母岩材の材料物性については、岩盤の変形挙動から推定される変形係数、および岩石の室内試験の結果からつぎの値を入力データとした。

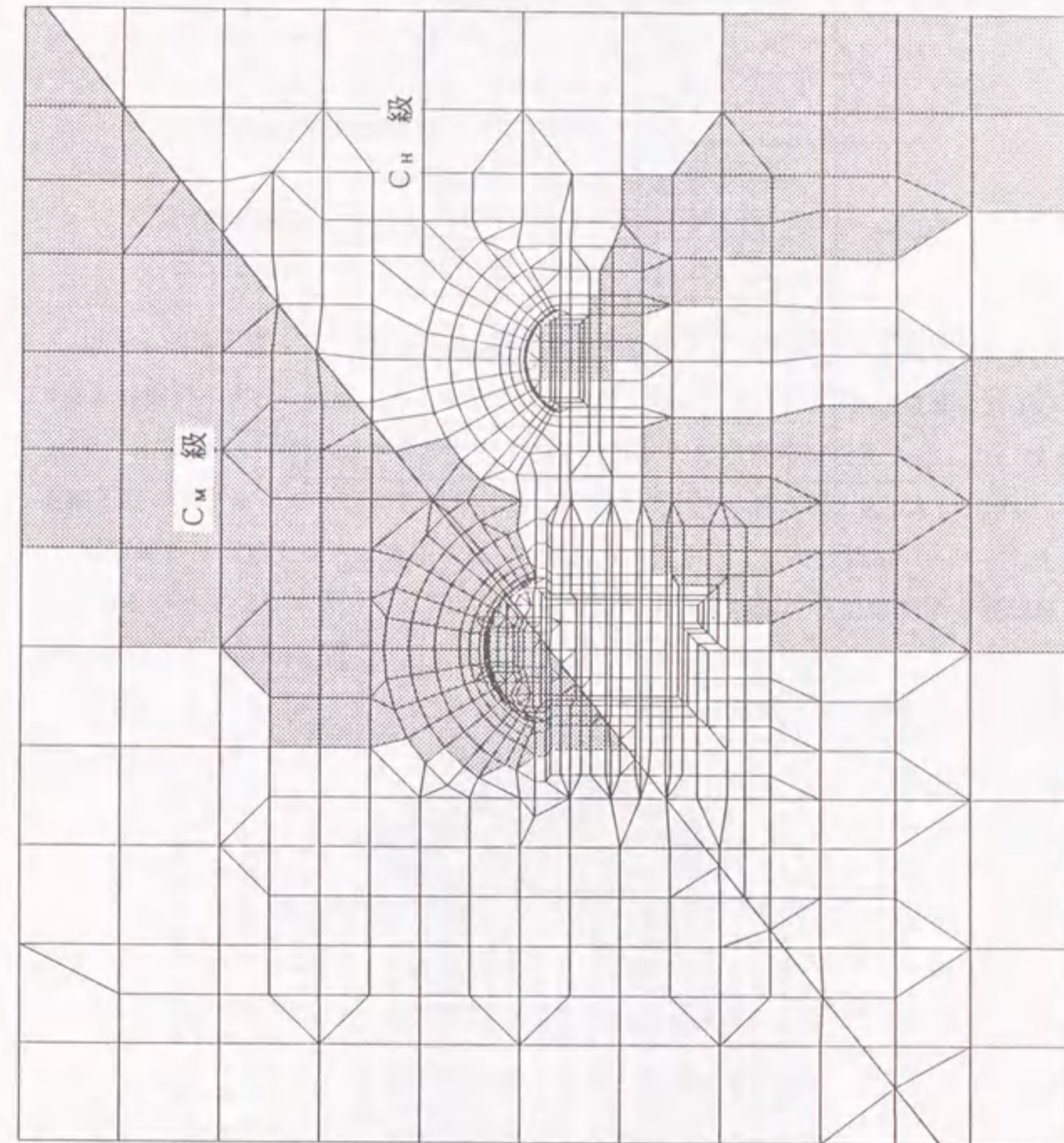
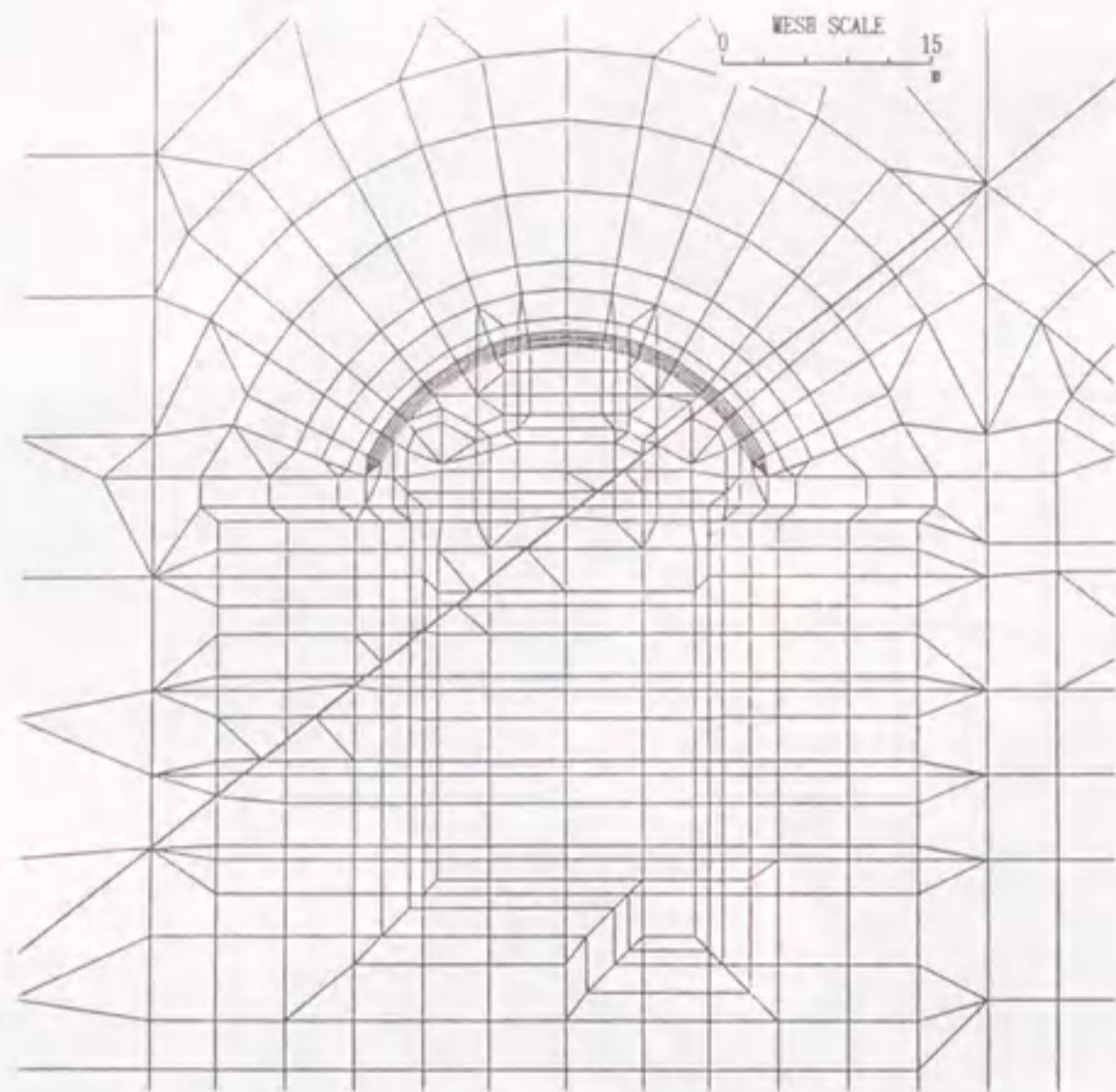
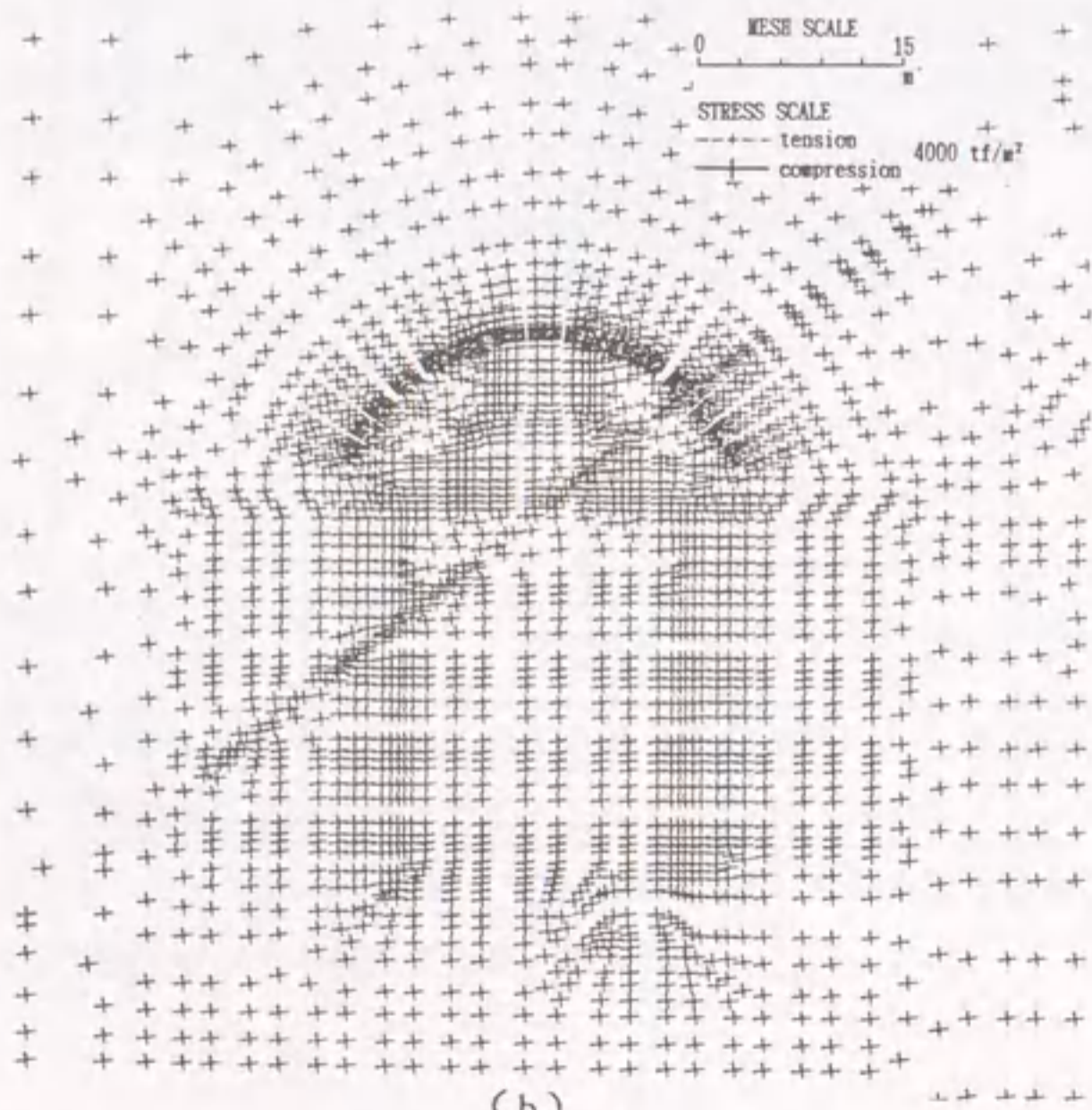


図 5.5: 空洞掘削問題の有限要素分割図



(a)



(b)

図 5.6: 空洞周辺部の初期応力分布図;(a)有限要素分割図;(b)主応力分布図

(母岩材の材料物性値)

	C_H 級	C_M 級	断層破碎帯
ヤング率 (kgf/cm ²)	4.0×10^5	2.0×10^5	2.0×10^4
ポアソン比	0.25	0.25	0.4

一方、空洞掘削に先だって実施された原位置岩盤試験から、岩盤の材料物性値が
ぎのように定められた。

(原位置岩盤試験による材料物性値)

	C_H 級	C_M 級	断層破碎帯
ヤング率 (kgf/cm ²)	1.0×10^5	5.0×10^4	5.0×10^3
ポアソン比	0.25	0.25	0.4

以上の準備のもとに、 C_H 級、 C_M 級岩盤の損傷テンソルを推定する同定解析を実行
する。観測データとしては、アーチ切下げ終了後(掘削ステップ3)に岩盤変位計 RO3、
RO4、RO5 によって実測されたアーチコンクリート打設前の変位を入力した。なお、
掘削工程のステップならびに岩盤変位計の配置をそれぞれ図 5.7、図 5.8 に示す。

同定解析は前節で述べた方法に従って実行されるが、ここでは観測データとして与
えられるのは変位計によって測定される相対変位であるので、変位に関する観測境界
条件式 (5.36) を相対変位に対する式として表さなければならない。

測点 1, 2 の 2 点間の相対変位 $\{\Delta u_{12}\}$ は、図 5.9 を参照して、次のように絶対変
位と関係づけられる。

$$\begin{aligned} \{\Delta u_{12}\} &\equiv \begin{Bmatrix} u'_2 - u'_1 \\ v'_2 - v'_1 \end{Bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\cos\theta & -\sin\theta & \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (5.48)$$

したがって、観測データが、内空変位測定、あるいは地中変位測定などによって相
対変位として与えられる場合には、変位に関する観測境界条件式 (5.36) は

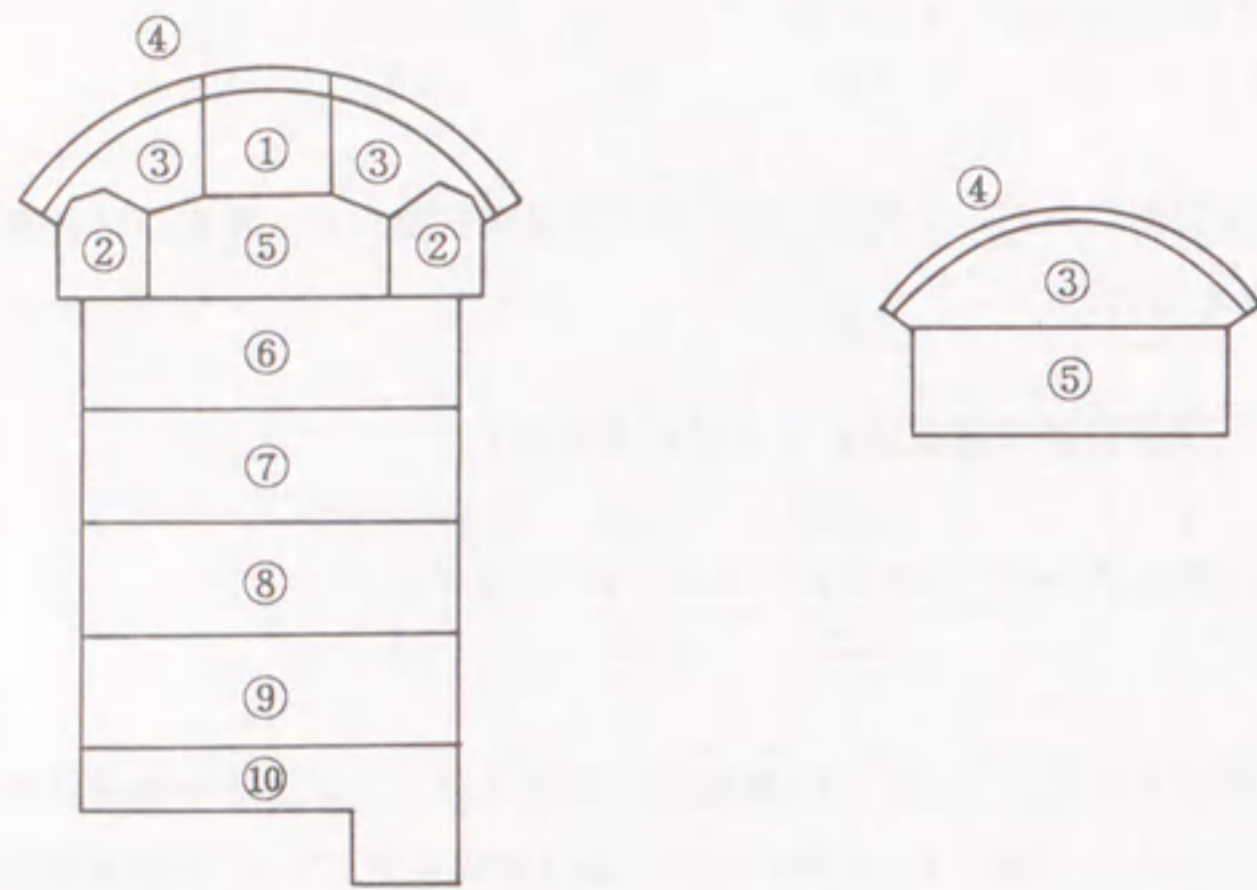


図 5.7: 掘削ステップ図

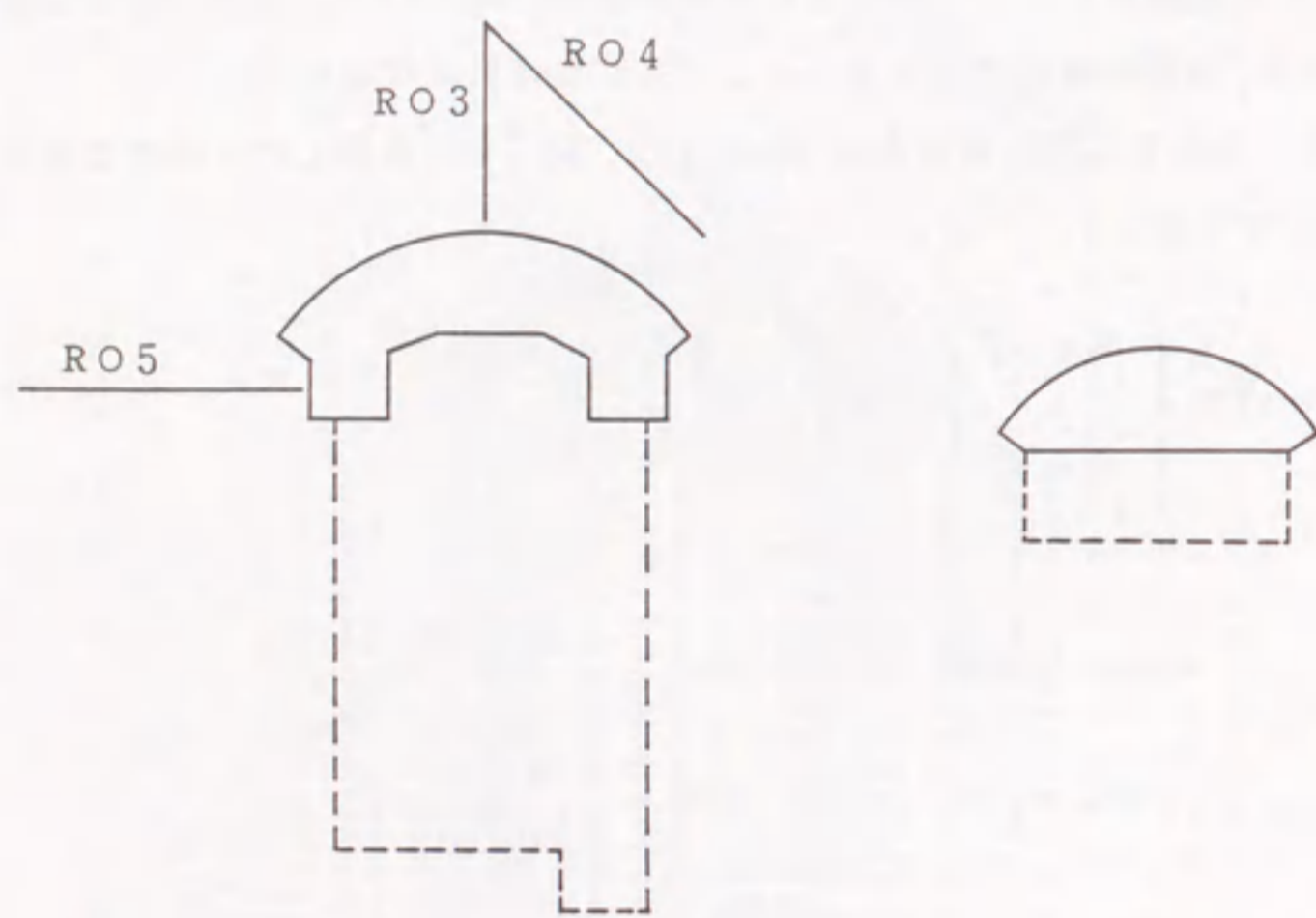


図 5.8: 岩盤変位計の配置図 (掘削ステップ 3)

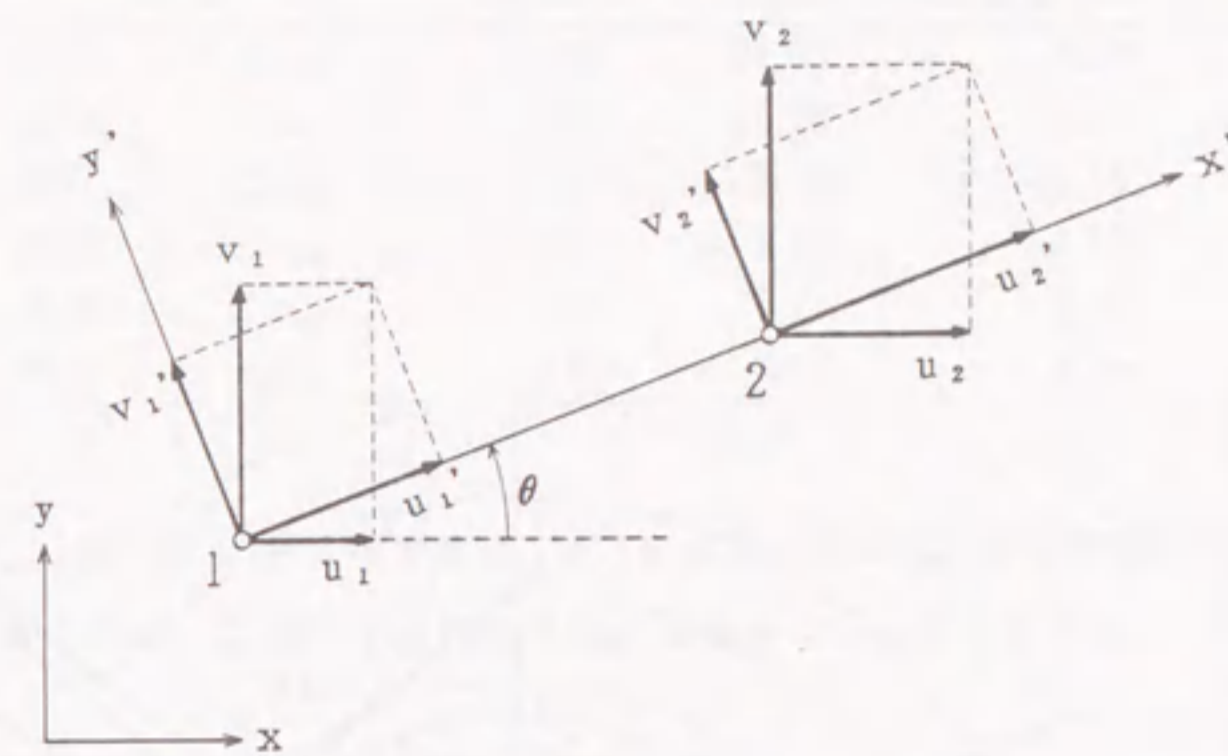


図 5.9: 2点間の相対変位

$$\mathbf{T}\mathbf{u} = \Delta\bar{\mathbf{u}} \quad \text{境界}\partial\Omega_t\text{上で}(\Delta\bar{\mathbf{u}}:\text{観測変位}) \quad (5.49)$$

となる。ここで、 \mathbf{T} は式(5.48)によって求められる変換マトリックスである。

同定すべき未知パラメーターは、それぞれ C_H 級、 C_M 級の岩盤についての Ω_{11} , Ω_{22} , Ω_{12} であり、計 6 個となる。したがって、岩盤変位計の位置を、図 5.10 に示すように有限要素の節点に対応づけて、実測された変位の値を各節点間の観測相対変位として入力した。与えた観測変位は次のとおりである。

変位計	変位データ	相対変位量 (mm)
RO3	Δu_{31}	22.32
RO3	Δu_{32}	10.40
RO4	Δu_{34}	-6.32
RO5	Δu_{85}	9.07
RO5	Δu_{86}	8.00
RO5	Δu_{87}	5.00

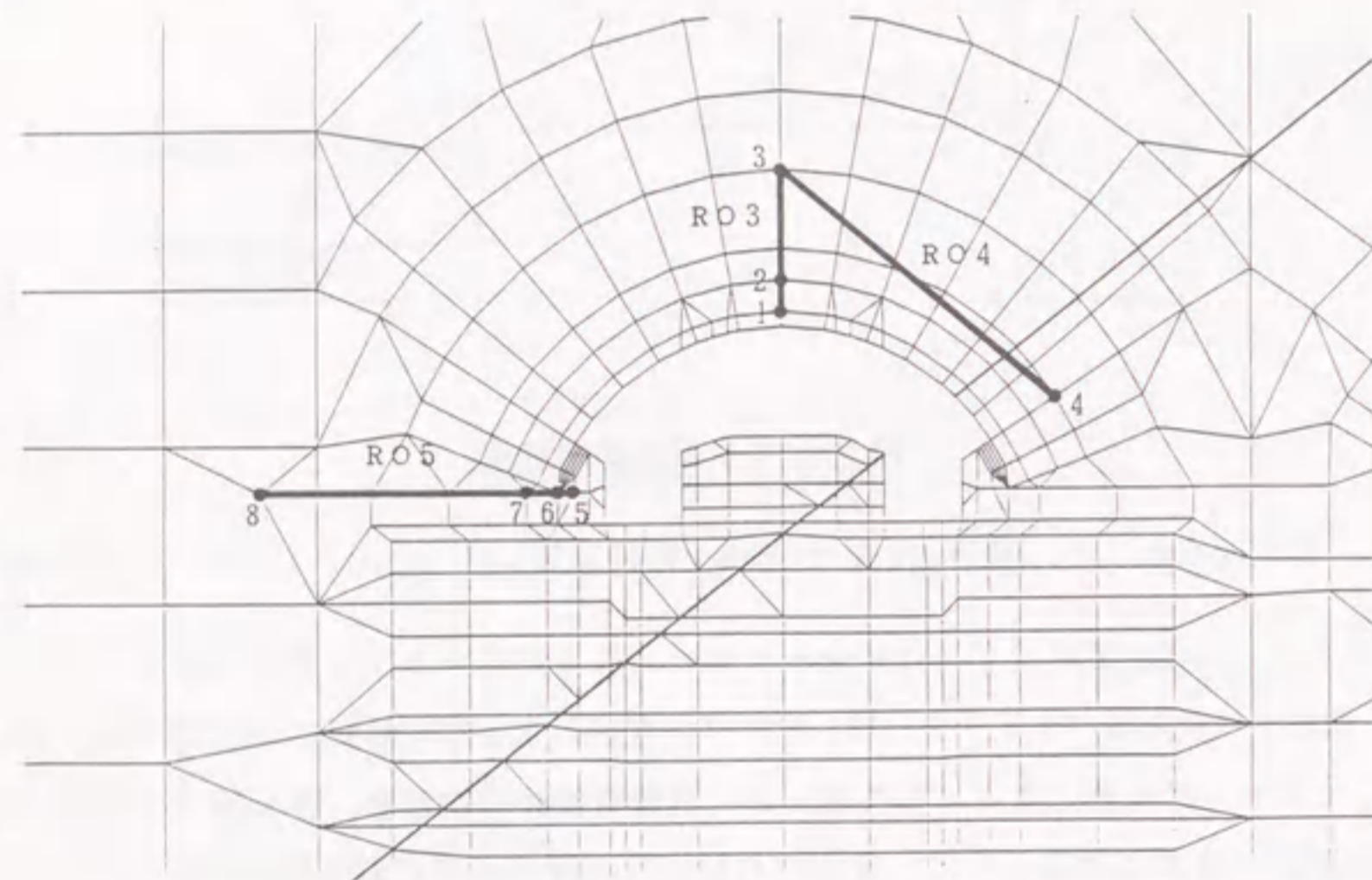


図 5.10: 有限要素解析における岩盤変位計の配置図

表 5.1: 実測相対変位と解析結果の比較

変位計	変位データ	実測変位 (mm)	損傷解析 (mm)	岩盤物性値を用いた 有限要素解析 (mm)
RO3	Δu_{31}	22.32	21.03	8.53
RO3	Δu_{32}	10.40	12.70	5.94
RO4	Δu_{34}	-6.32	-5.73	-12.55
RO5	Δu_{85}	9.07	8.68	8.25
RO5	Δu_{86}	8.00	7.74	6.94
RO5	Δu_{87}	5.00	5.64	4.54

ただし、 Δu_{ij} は、図 5.10 に示す節点 i と j の 2 節点間の相対変位を表している。

同定解析の結果、 C_H 級、 C_M 級の岩盤の損傷テンソルがそれぞれ

$$C_H \text{ 級岩盤 : } \Omega = \begin{bmatrix} 0.936 & 0.102 \\ 0.102 & 0.670 \end{bmatrix}$$

$$C_M \text{ 級岩盤 : } \Omega = \begin{bmatrix} 0.209 & 0.000 \\ 0.000 & 0.943 \end{bmatrix}$$

と得られた。

表 5.1 は変位計による実測相対変位について、同定解析で得られた値を用いた損傷解析の結果と、原位置岩盤試験による岩盤物性を用いた慣用的な有限要素解析の結果とを比較したものである。損傷解析の方が、慣用的な有限要素解析よりもほとんどすべての変位について実測値に近い値を示している。実測値に対する相対誤差は、岩盤物性を用いた有限要素解析による場合、最大 98% を超えるのに対し、損傷解析による結果では最大 22% であった。

同定解析の解析対象時期とした掘削ステップ 3，および掘削完了時ステップ 10 における空洞壁面の変形状態を、それぞれ図 5.11，図 5.12 に示す。また、表 5.2 は、掘削ステップ 10 における側壁部（節点 1）と天端頂部（節点 2）での水平および鉛直変位を示したものであり、表中の u_1/v_2 は側壁中央のはらみ出し量の天端頂部沈下量に対する比を表している。これらの図および表を見ると、同定解析で得られた損傷テンソルを用いた損傷解析の方が慣用的な有限要素モデルによる解析結果よりも、頂部沈

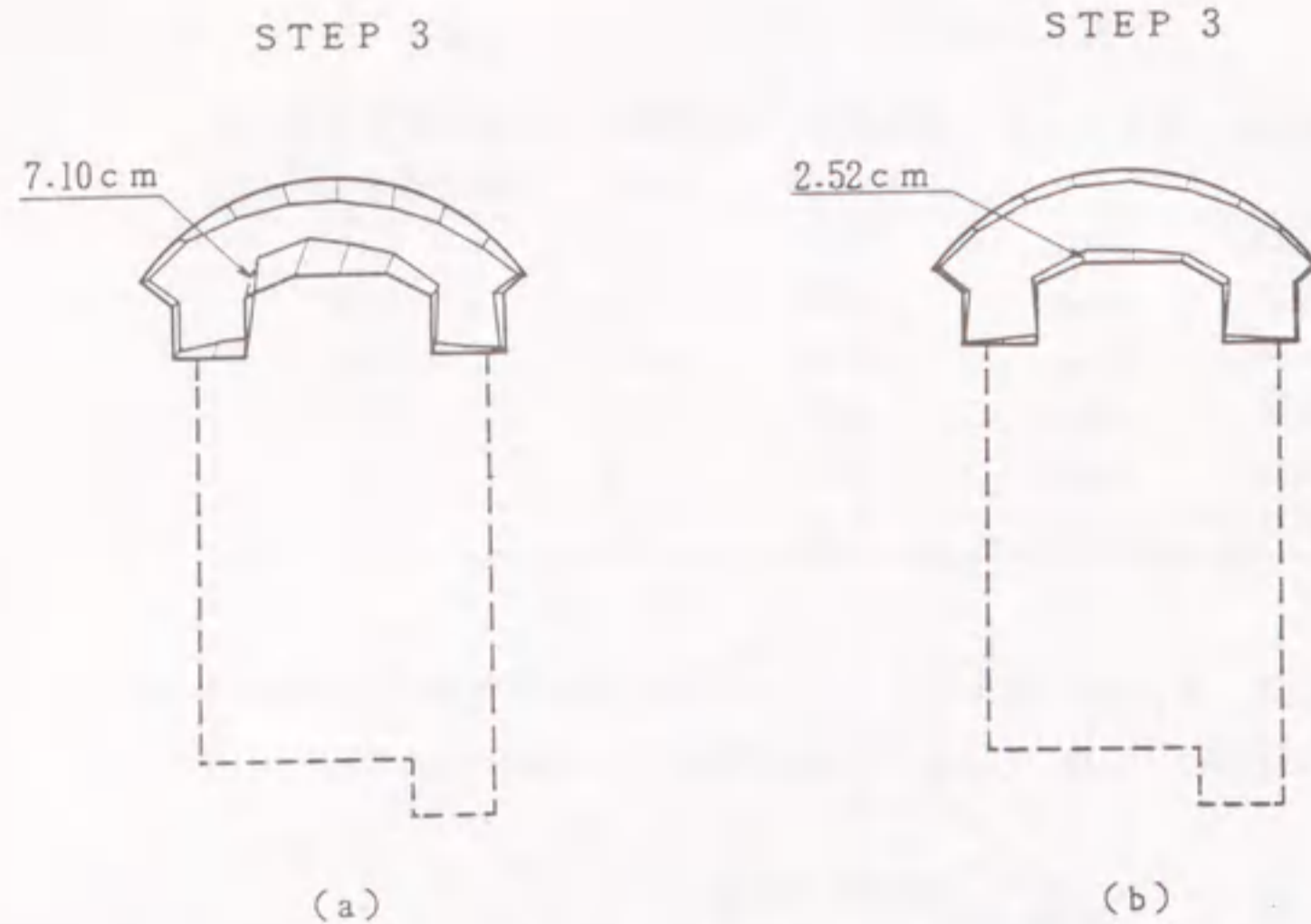


図 5.11: 掘削ステップ 3 における空洞壁面変位: (a) 損傷解析; (b) 岩盤物性値を用いた有限要素解析の結果

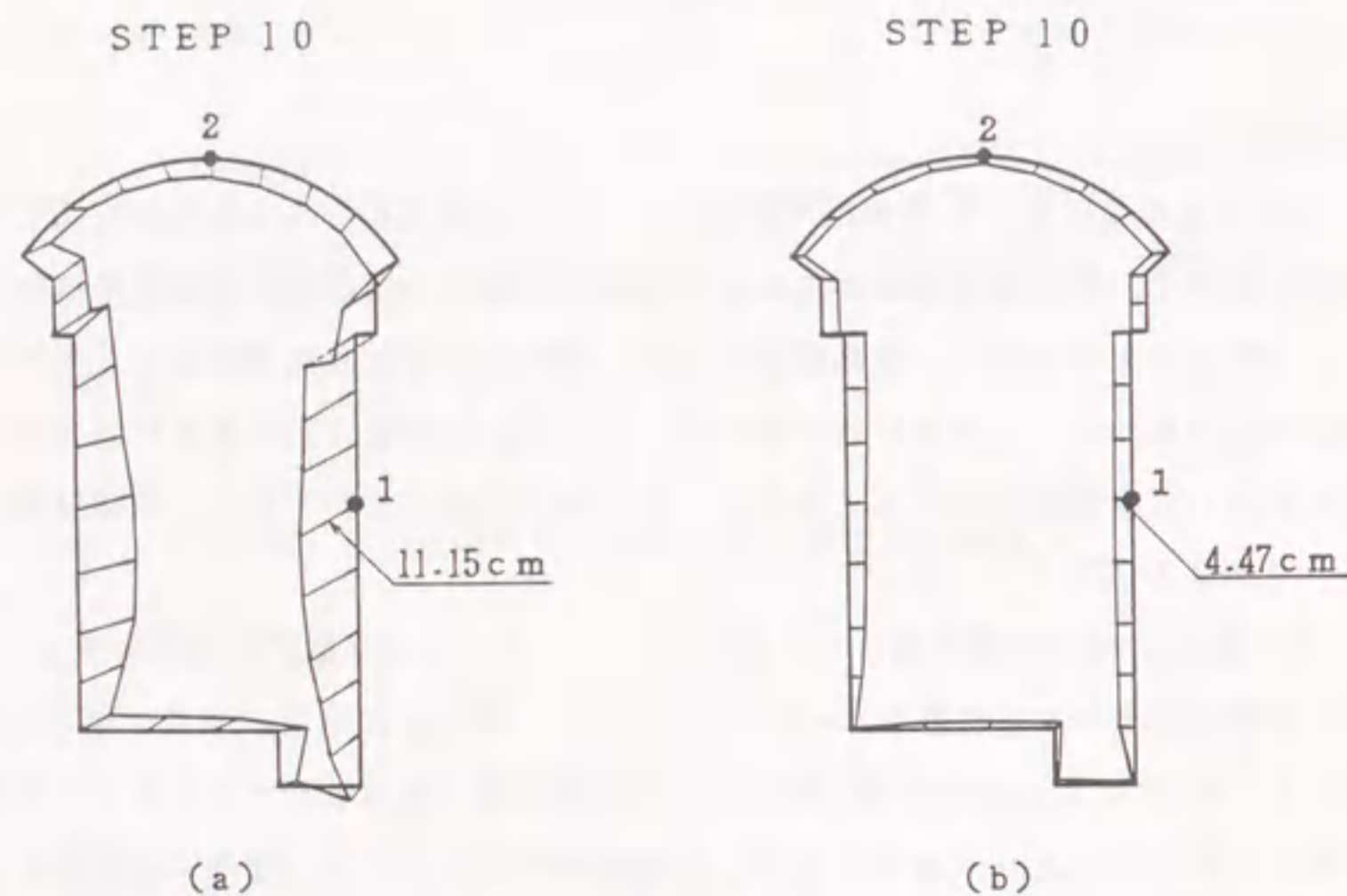


図 5.12: 全断面掘削終了後の空洞壁面変位: (a) 損傷解析; (b) 岩盤物性値を用いた有限要素解析の結果

表 5.2: 側壁および天端頂部における変位量

解析	方向	側壁部 (節点 1)	天端頂部 (節点 2)	$ u_1/v_2 $
損傷解析	水平変位 u (cm)	-9.96	0.15	4.02
	鉛直変位 v (cm)	-5.01	-2.48	
岩盤物性値を用いた 有限要素解析	水平変位 u (cm)	-4.48	-0.41	2.24
	鉛直変位 v (cm)	0.06	-2.00	

下量に対してかなり大きな側壁のはらみ出しを予測しており、損傷解析では側壁にはほぼ平行な節理群が卓越している (本島 1990) ことによる構造的異方性が評価されていることがわかる。

なお、本項での同定解析では断層破碎帯の損傷については考慮していない。チェックのために、断層破碎帯では $\Omega_{11} = \Omega_{22} = \Omega_{12} = 0.5$ の損傷を受けているものとして損傷解析を行ってみたところ、損傷を考慮しない場合の解析結果と比較して、各節点の絶対変位の差がおおよそ 0.1% 以下であり、破碎帯の損傷テンソルは解析結果の値に影響を与えなかったことを付け加えておく。

5.6 まとめ

本章では、不連続性岩盤に対する損傷力学モデルに逆解析の手法を適用して、原位置岩盤試験の結果から岩盤の損傷テンソルを同定する方法を提案した。提案した手法を用いて、順解析によって得られた変位から損傷テンソルを同定した結果、非常に良い精度で損傷テンソルを求めることができ、本手法が妥当であることを確認した。

さらに、提案した手法を実際の地下空洞掘削問題に適用し、空洞掘削時の実測データから岩盤の損傷テンソルを同定することを試みた。その結果、同定解析で得られた値を用いた損傷解析の方が、原位置岩盤試験による岩盤物性を用いた有限要素解析の結果よりもほとんどすべての変位について実測結果と良い一致を示し、本手法が不連続性岩盤に対する変形予測解析の一手法となり得ることが示された。

第6章 結論

本論文では、境界制御問題としての材料定数の同定解析（逆解析）の一手法を提案し、既往の逆定式化法、直接定式化法と比較しながら、提案手法の適用性を検討した。得られた結論を各章ごとに要約すると、以下のとおりである。

第1章では、まず、地盤工学における逆解析手法の従来の研究について述べ、本研究の目的、内容を明らかにした。

第2章では、線形弾性問題を対象に、逆解析の代表的な定式化法である逆定式化法と直接定式化法についてその概要を述べた。逆定式化法では桜井の方法とGiodaの方法について両手法の比較・検討を行なった。なお、逆定式化法に基づく方法は、測定データを通常の順解析における支配方程式に取り入れてその逆をとる定式化であるが、この場合、応力とひずみの関係が線形ならば、逆定式化の過程で未知パラメータに関して陽な式を誘導でき、未知量を直接的に求めることができる。続いて、直接定式化法に基づく逆解析法の定式化の過程を示し、その後、直交異方性体の弾性定数を推定する同定解析の具体例を示した。直接定式化法は、測定値と解析値との差を最小化するように同定する方法であるが、この手法では、有限要素法や境界要素法などにより解析値を得る過程と、その解析値の一部と測定値との差を最小化するように未知パラメータの値を探索する過程とが独立しているため、逆解析のための特別な定式化を必要とせず、非線形問題にも適用できる利点を有している。しかしながら、繰り返し計算を必要とするために計算時間に問題がある。直接定式化法を用いて境界要素法による直交異方性体モデルの同定解析を行なった結果、ヤング率やポアソン比のようにオーダーが大きく異なる材料定数に対して同時に同定計算を行うと、解が収束しないため、それに対して特別な考慮が必要であることを明らかにした。

第3章では、線形弾性問題の枠組みの中で、順解析に対して解くべき方程式系について整理した後、あらためて境界制御問題としての逆解析について考察を行ない、逆解析の一般的な構造を示した。続いて観測境界において得られる計測データから逆に岩盤の材料定数を推定する同定解析の一手法を提案した。提案する手法は、有限要素法の剛性方程式あるいは境界要素法の係数方程式と観測条件式に対してNewton法を適用し、最小二乗法を用いて線形連立方程式を繰り返し解くという手法で、簡潔なアルゴリズムで問題を取り扱えるようになっている。また、一次元探索法を適用することによって、制約条件付きの問題も容易に処理でき、解の収束性を高めることができる

ことを示した。解析例として簡単なトラス問題を取り上げ、提案する手法による具体的な同定解析手順を紹介するとともに、さらに、有限要素法および境界要素法を用いた数値計算例により本手法の有効性を検討した。これまでは、ヤング率やポアソン比のようにオーダーが大きく異なる材料定数に対して同時に同定しようとする場合には、精度よい結果が得られない等の問題があったが、ここで提案した手法による数値シミュレーションの結果、均質岩盤だけでなく複合材料からなる岩盤に対しても、少ない繰り返し計算でヤング率およびポアソン比ともに正確に同定でき、本手法による解の安定性ならびに収束性がよいことが確かめられた。半無限領域あるいは無限領域問題に対して、有限要素法を用いて逆解析を行う場合、材料物性値を精度よく同定するためには、どのくらいの範囲まで要素の離散化を施せばよいか問題となる。本文では、半無限地盤上の平板載荷試験モデルについて、荷重幅と領域の離散化幅の比を変化させて軸対称問題として同定解析を行ない、その影響を検討した。その結果、半無限領域問題に対して有限要素を用いて同定解析を行うには、およそ荷重幅の10倍以上の領域にわたって離散化する必要があることを示した。

第4章では第3章で展開した弾性体の同定解析の理論を拡張して、線形粘弾性体の材料パラメータを同定することを試みた。提案する手法は、構成方程式を増分形で表現する線形粘弾性体の増分理論の解析に基づいたものであり、一般化Maxwellモデルを対象としてその定式化を示した。粘弾性体に対する同定解析では弾性問題の場合と異なって、時間依存性の特性を表現する粘性係数も未知パラメータに含んでいる。本章では、具体的に粘弾性棒材の引っ張り問題を例として、粘弾性体の材料特性を同定するためには、どこまでの時間範囲にわたっての観測境界の情報が必要であることを明らかにした。本手法の妥当性を検証するために、順解析によって得られた変位を観測変位データとして見なして逆解析を行い、順解析において入力値とした粘弾性材料パラメータを同定する数値実験を行なった。その結果、一次元応力場の問題、平板載荷試験モデルおよび2層からなる粘弾性斜面問題の適用例すべてについて非常に良い精度で同定値が得られた。材料の粘弾性的性質を特定するには、定応力クリープ試験、定ひずみ応力緩和試験などの材料試験を実施することによって、その材料パラメータ値を評価するのが一般的である。しかしながら、本章で提案した同定解析法によれば、従来のように材料試験を行わなくても、平板載荷試験などの原位置試験によって得られた測定データを用いて、直接、粘弾性的性質を特定できることを示した。

第5章では、不連続性岩盤に対する損傷力学モデルに逆解析の手法を適用して、原位置岩盤試験の結果から岩盤の損傷テンソルを同定する方法を提案した。不連続性岩盤の母岩材は線形弾性体であり、また、不連続面に沿うすべり抵抗や圧縮による不連続面の閉合を考慮しないとすると、第3章で示した同定解析の手法を拡張することによって、容易に損傷力学モデルに対する同定解析が可能となることを示した。提案した手法を用いて、順解析によって得られた変位から損傷テンソルを同定する問題を解析した結果、非常に良い精度で同定することができた。さらに、提案した手法を実際の地下空洞掘削問題に適用し、空洞掘削時の実測データから岩盤の損傷テンソルを同定することを試みた。その結果、同定解析で得られた値を用いた損傷解析の方が、原位置岩盤試験による岩盤物性を用いた慣用的な有限要素解析の結果よりも、ほとんどすべての変位について実測結果と良い一致を示し、本手法が不連続性岩盤に対する変形予測解析の一手法となり得ることが示された。

本論文で提案した同定解析の基本的考え方は、有限要素法や境界要素法等の解析手法も含め、特定の問題だけに限定されるものではなく、線形あるいは区分線形関係で表現できるものであれば、他の種々の問題、例えば、弾塑性パラメータの同定問題や動的問題に対しても、同様な定式化で容易に拡張できることが期待できる。これらについては今後の課題であると考えている。

謝 辞

本研究を遂行するにあたって、名古屋大学工学部地盤工学科教授川本眺万先生、同助教授市川康明先生には、終始、懇切丁寧なる御指導ならびに御鞭撻を賜りました。ここに、衷心より深く感謝の意を表するとともに、厚く御礼申し上げます。

また、本論文をまとめるにあたり、貴重な御助言と御教示を戴きました名古屋大学工学部土木工学科教授浅岡顕先生に心より感謝いたします。

信州大学工学部社会開発工学科教授草間孝志先生、同教授三井康司先生には、論文をまとめるうえでの御助言をいただくとともに、学生時代から今日にいたるまで、御懇篤なる御指導、激励を賜りました。両先生に深甚なる感謝の意を表します。

さらに、本研究を進めるにあたり、有益な御助言、御討議、多くの暖かい励ましの言葉をいただいた名古屋大学工学部地盤工学科京谷孝史助手、同じくÖmer Aydan 助手、宮崎大学工学部土木工学科瀬崎満弘助手に感謝の意を表するとともに、さまざまなかたちで御援助ならびに御支援をいただいた信州大学工学部社会開発工学科の関係者の皆様に感謝いたします。

なお、本研究における数値計算には、東京大学大型計算機センター、名古屋大学大型計算機センターおよび信州大学情報処理センターを利用したことを付記する。

参考文献

- 赤木知之, 大野大明, 色部誠 (1973): “有限要素法によるP C格納容器の粘弾性解析”, 土木学会論文報告集, 第214号, pp.1-8.
- 赤木知之 (1976): “土木構造物の粘弾性的挙動に関する解析的研究”, 名古屋大学学位論文.
- 青木一男, 嘉門雅史 (1987): “不均質地盤における帯水層定数の同定について”, 土木学会論文集, 第382号/III-7, pp.91-99.
- K. Arai, H. Ohta and T. Yasui (1983): “Simple optimization techniques for excavating deformation moduli from field observations”, *Soils and Foundations*, Vol.23, No.1, pp.108-114.
- 荒井克彦, 片瀬貴文 (1984): “トンネル内空変位計測に基づく地盤変形・強度定数の推定”, 土質工学会論文報告集, Vol.24, No.2, pp.171-179.
- 荒井克彦, 片瀬貴文, 谷本親伯 (1984): “トンネル工事における情報化施工の適用”, 土質工学会論文報告集, Vol.24, No.4, pp.211-217.
- K. Arai, H. Ohta and K. Kojima (1984): “Estimation of soil parameters based on monitored movement of subsoil under consolidation”, *Soils and Foundations*, Vol.24, No.4, pp.95-108.
- K. Arai, Y. Ohnishi and M. Kasagawa (1985): “Parameter estimation of unconfined aquifer by measuring change of groundwater level”, *Soils and Foundations*, Vol.25, No.4, pp.129-134.
- K. Arai, H. Ohta, K. Kojima and M. Wakasugi (1986): “Application of back-analysis to several test embankments on soft clay deposits”, *Soils and Foundations*, Vol.26, No.2, pp.60-72.
- K. Arai, H. Ohta and K. Kojima (1987): “Estimation of nonlinear constitutive parameters based on monitored movement of subsoil under consolidation”, *Soils and Foundations*, Vol.27, No.1, pp.35-49.
- A. Asaoka (1978): “Observational procedure of settlement prediction”, *Soils and Foundations*, Vol.18, No.4, pp.87-101.
- A. Asaoka and M. Matsuo (1979): “Bayesian approach to inverse problem in consolidation and its application to settlement prediction”, *Proc. 3rd. Int. Conf. Num. Methods Geomech.*, Aachen, Vol.1, pp.115-123.
- A. Asaoka and M. Matsuo (1980): “An inverse problem approach to settlement prediction”, *Soils and Foundations*, Vol.20, No.4, pp.53-66.
- A. Asaoka and M. Matsuo (1984): “An inverse problem approach to the prediction of multi-dimensional consolidation behavior”, *Soils and Foundations*, Vol.24, No.1, pp.49-62.
- C. Beer (1983): “Finite element, boundary element and coupled analysis of unbounded problems in elastostatics”, *Int. J. Numer. Methods in Engng.*, Vol.19, pp.567-580.
- C. A. Brebbia (1978): “The boundary element method for engineers”, Pentech Press Ltd.
- C. A. Brebbia, J. C. F. Telles and L. C. Wrobel (1984): “Boundary Element Techniques”, Springer-Verlag.
- A. Cividini, L. Jurina and G. Gioda (1981): “Some aspects of characterization problem in geomechanics”, *Int. J. Rock Mech. Min. Sci. and Geomech. Abstr.*, Vol.18, pp.487-503.
- A. Cividini, G. Maier and A. Nappi (1983): “Parameter estimation of a static geotechnical model using Bayes' approach”, *Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr.*, Aachen, Vol.20, No.5, pp.215-226.
- S. L. Crouch and A. M. Starfield (1983): “Boundary element methods in solid mechanics”, George Allen & Unwin.
- P. A. Cundall (1971): “A computer model for simulating progressive large-scale movements in blocky rock systems”, *Proc. Symp. ISRM, Nancy*, pp.8-11.
- P. C. Dumir and A. K. Mehta (1987): “Boundary element solution for elastic orthotropic half-plane problems”, *Computers and Structures*, Vol.26, No.3, pp.431-438.
- 遠藤典男, 大上俊之, 三井康司, 草間孝志 (1988): “境界—有限要素を用いた凍結地盤の解析”, 境界要素法論文集, Vol.5, 221-226.
- Z. L. Feng and R. W. Lewis (1987): “Optimal estimation of in-situ ground stresses from displacement measurements”, *Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech.*, Vol.11, pp.391-408.
- J. I. Folayan, K. Hoeg and J. R. Benjamin (1979): “Decision theory applied to settlement predictions”, *J. Soil Mechanics and Foundation Division, ASCE*, Vol.96, No.SM4, pp.1127-1141.

- G. Gioda and G. Maier (1980): "Direct search solution of an inverse problem in elastoplasticity : identification of cohesion, friction angle, and *in situ* stress by pressure tunnel tests", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol.15, pp.1823-1848.
- G. Gioda and L. Jurina (1981): "Numerical identification of soil-structure interaction pressures", *Int. J. Num. Anal. Methods Geomech.*, Vol.5, pp.33-56.
- G. Gioda (1985): "Some remarks on back analysis and characterization problems", *Proc. 5th Int. Conf. Num. Meth. in Geomech.*, Nagoya, Vol.1, pp.47-61.
- G. Gioda and S. Sakurai (1987): "Back analysis procedures for the interpretation of field measurements in geomechanics", *Int. J. Num. Anal. Methods Geomech.*, Vol.11, pp.555-583.
- R. E. Goodman, R. L. Taylor and T. L. Brekke (1968): "A model for the mechanics of jointed rock", *ASCE*, SM3, pp.637-659.
- G. グーデフス編, 川本桃万, 桜井俊輔, 足立紀尚共訳 (1982): "岩盤力学の有限要素解析 1, 2", 森北出版.
- 久武勝保, 伊藤富雄, 大田哲也 (1984): "トンネル問題における三次元逆解析法", 第16回岩盤力学に関するシンポジウム, pp.185-189.
- M. Hisatake and T. Ito (1985): "Back analysis for tunnels by optimization method", *Proc. 5th Int. Conf. Num. Meth. Geomech.*, Nagoya, Vol.2, pp.1301-1307.
- 久武勝保 (1986): "トンネルにおける三次元逆解析法の開発", 土木学会論文集, 第327号/III-6, pp.259-265.
- 本城勇介, 森嶋章 (1988): "地下水浸透流解析モデルのパラメータ推定: 推定の不確実性とその予測への影響", 土木学会論文集, 第400号/III-10, pp.215-224.
- 星谷勝, 齊藤悦郎 (1983): "液状化を伴う地盤の等価線形化", 土木学会論文報告集, 第340号, pp.59-65.
- 市川康明 (1985): "粘弾性, 弾塑性問題とプログラミング", 第3回地盤工学における数値解析法入門セミナー, 日本科学技術連盟, pp.25-96.
- 市川康明, 井田宏正, 京谷孝史, 川本桃万 (1986): "境界値制御問題としての岩質材料の弾塑性パラメータの同定", 第1回地盤工学における数値解析法シンポジウム論文集, 日本科学技術連盟, pp.23-34.
- Y. Ichikawa, T. Kyoya and T. Kawamoto (1987): "Determination of elasto-plastic parameters by an inverse analysis method as a boundary control problem", *Proc. 2nd Int. Symp. Field Measurement*, Vol.2, A. A. Balkema., pp.1097-1104.

- Y. Ichikawa, Y. Nakamura, T. Kyoya and T. Kawamoto (1987): "Identification of damage field of rock mass", *Proc. Int. Conf. Education, Practice and Promotion of Comp. Meth. Eng. Using Small Computers*, Vol.3., pp.537-540.
- 市川康明 (1990): "地盤力学における有限要素法入門", 日本科学技術連盟.
- Y. Ichikawa and T. Ohkami (1991): "Parameter identification as a boundary control problem for linear elastic materials", paper submitted to *Soils and Foundations*.
- Y. Ichikawa and T. Ohkami (1991): "A generalized inverse analysis identifying viscoelastic material parameters", paper submitted to *the 6th Int. Conf. on Mechanical Behaviour of Materials*.
- R. H. Iding, K. S. Pister and R. L. Taylor (1974): "Identification of nonlinear elastic solids by a finite element method", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engng.*, Vol.4, pp.471-476.
- 井伊谷綱一, 堀田和之 (1972): "最適化計画入門", 日刊工業新聞社.
- 色部誠, 赤木知之 (1973): "Maxwell 材料における粘弾性定数の一決定法", 土木学会論文報告集, 第213号, pp.1-6.
- 伊藤富雄, 久武勝保 (1981): "粘弾性地山内の任意形状トンネル覆工に作用する地圧", 土木学会論文報告集, 第307号, pp.51-57.
- S. L. S. ジャコビ他著, 関根智明訳 (1976): "非線形最適化問題の反復解法", 培風館.
- 門田俊一, 齊藤悦郎, 和久昭正, 鎌田正孝 (1987): "拡張カルマンフィルターを用いた異方性岩盤物性の同定", 第7回岩の力学国内シンポジウム講演概要集, pp.379-384.
- 門田俊一, 齊藤悦郎, 和久昭正, 鎌田正孝 (1988): "拡張カルマンフィルターを用いた不均質岩盤の物性同定", 第20回岩盤力学に関するシンポジウム講演論文集, pp.299-303.
- 韓思雄, 京谷孝史, 市川康明, 川本桃万 (1988): "損傷力学モデルによる不連続性材料の動的力学特性の評価について", 土木学会論文集, 第400号/III-10, pp.65-73.
- K. T. Kavanagh and R. W. Clough (1971): "Finite element applications in the characterization of elastic solids", *Int. J. Solids Structures*, Vol.7, pp.11-23.
- K. T. Kavanagh (1973): "Experiment versus analysis : computational techniques for the description of static material response", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol.5, pp.503-515.

- 川井忠彦 (1981): “新離散化モデルとその土質工学への応用”, 土と基礎, Vol.29, No.6, pp.1-6.
- 川本桃万, 林正夫 (1972): “地盤工学における有限要素解析”, 培風館.
- 川本桃万, 林義信 (1974): “成層体の応力, 変形状態について”, 第9回土質工学研究会, pp.757-760.
- T. Kawamoto, Y. Yamabe, Y. Ichikawa, and Y. Shimizu (1982): “Elastoplastic analysis by cracked triangle element”, *Proc. Int. Conf. FEM*, Science Press, Beijing, China, pp.756-760.
- 川本桃万, 藤川富夫 (1984): “岩盤掘削面におけるキープロック安定解析のシステム化について”, 土木学会論文集, 第346号/III-1, pp.47-55.
- 川本桃万, 吉中龍之進, 日比野敏 (1985): “岩盤力学”, 技報堂出版.
- T. Kawamoto, Y. Ichikawa, and T. Kyoya (1988): “Deformation and fracturing behaviour of discontinuous rock mass and damage mechanics theory”, *Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech.*, Vol.12(1), pp.1-30.
- H. A. D. Kirsten (1976): “Determination of rock mass elastic moduli by back analysis of deformation measurements”, Z. T. Bieniawski(ed.), *Proc. of Sympo. on Exploration for rock engng.*, Johannesburg, Vol.1, pp.165-172.
- J. コワリック, M. R. オスボーン著, 山本善之, 小山健夫共訳 (1972): “非線形最適化問題”, 培風館.
- 久保司郎 (1987): “逆問題的アプローチとは何か, 何ができるか”, 材料, Vol.36, No.406, pp.771-772.
- 久保司郎, 大路清嗣 (1987): “逆問題解析への応用”, 境界要素法の応用 (境界要素法研究会編), コロナ社, pp.181-198.
- 工藤洋三, 橋本堅一, 佐野修, 中川浩二 (1987): “瀬戸内地方の花崗岩採石場における花崗岩質岩石の異方性”, 土木学会論文集, 第382号/III-7, pp.45-53.
- 工藤洋三 (1989): “花崗岩内の微小欠陥の配向と力学的異方性”, 名古屋大学学位論文.
- 草間孝志, 三井康司, 吉田俊弥 (1979): “数値ラプラス逆変換法による線形粘弾性解析”, 土木学会論文報告集, 第292号, pp.41-52.
- T. Kusama and Y. Mitsui (1982): “Boundary element method applied to linear viscoelastic analysis”, *Appl. Math. Modelling*, Vol.6, pp.285-290.

- T. Kusama, T. Ohkami and Y. Mitsui (1989): “Application of the finite fourier series to the boundary element method”, *Computers and Structures*, Vol.32, No.6, pp.1267-1273.
- 草間孝志, 大上俊之, 三井康司, (1990): “有限フーリエ級数を用いた内挿関数と二次元境界要素への応用”, 土木学会論文集, 第416号/I-13, pp.205-213.
- T. Kyoya, Y. Ichikawa, and T. Kawamoto (1985): “A damage mechanics theory for discontinuous rock mass”, *Proc. 5th Int. Conf. Num. Meth. Geomech.*, Nagoya, Vol.1, Balkema, Rotterdam, pp.469-480.
- 京谷孝史, 市川康明, 川本桃万 (1985): “岩盤の力学特性評価における損傷テンソルの適用について”, 土木学会論文集, 第358号/III-3, pp.27-35.
- 京谷孝史, 大橋敏行, 川本桃万 (1986): “損傷力学理論による節理性岩盤内地下空洞掘削解析”, 材料, Vol.35, No.392, pp.472-477.
- 京谷孝史, 市川康明, 川本桃万 (1987): “岩盤の力学特性評価における損傷力学的アプローチ”, 土と基礎, Vol.35, No.3, pp.23-28.
- T. Kyoya, Y. Ichikawa, O. Aydan and T. Kawamoto (1988): “Identification of the damage tensor for jointed rock mass by an Inverse Analysis”, *Proc. 6th Int. Conf. Numer. Meth. Geomech.*, Innsbruck, Vol.3, pp.2017-2022.
- 京谷孝史 (1990): “不連続性岩盤の力学特性評価における損傷力学の適用に関する基礎的研究”, 名古屋大学学位論文.
- E. H. Lee (1955): “Stress analysis in visco-elastic bodies”, *Quarterly of Applied Mathematics*, Vol.13, No.2, pp.183-190.
- G. Maier and G. Gioda (1982): “Optimization methods for parametric identification of geotechnical systems”, J. B. Martins(ed.), *Numerical Methods in Geomechanics*, pp.273-304.
- M. Matsuo and A. Asaoka (1978): “Dynamic design philosophy of soils based on the Bayesian reliability prediction”, *Soils and Foundations*, Vol.18, No.4, pp.1-17.
- 三井康司 (1984): “構造解析における境界要素法の適用に関する基礎的研究”, 名古屋大学学位論文.
- Y. Mitsui, Y. Ichikawa, Y. Obara and T. Kawamoto (1985): “A coupling scheme of boundary and finite elements using joint element”, *Int. J. Num. Anal. Methods Geomech.*, Vol.9, pp.161-172.

- 本島睦 (1990): “奥美濃水力発電所地下空洞の安定解析 (その1)”, 電力中央研究所報告 (U89521), pp.1-39.
- A. Murakami and T. Hasegawa (1985): “Observational prediction of settlement using Kalman filter theory”, *Proc. 5th Int. Conf. Num. Meth. Geomech., Nagoya*, pp.1637-1643.
- 村上章, 長谷川高士 (1987): “Kalman フィルター有限要素法による逆解析と観測点配置”, 土木学会論文集, 第 388 号 / III-8, pp.227-235.
- 村上章 (1989): “農業土木技術者のための最新土質工学 (その4) -逆解析-”, 農業土木学会誌, Vol.57, No.10, pp.127-132.
- 村上澄男, 大野信忠 (1979): “損傷を伴う有限クリープ変形の構成式とその応用”, 日本機械学会論文集 (A 編), Vol.45, 392, pp.318-326.
- 村上澄男, 大野信忠 (1980): “微視的空げきによる有効面積の減少を陽に表した多軸クリープ損傷変形”, 日本機械学会論文集 (A 編), Vol.46, 409, pp.940-946.
- D. J. ネイラー他著, 稲田倍穂, 赤石勝監訳 (1987): “地盤工学における有限要素法”, 鹿島出版会.
- V. U. Nguyen (1984): “Back calculations of slope failures by the secant method”, *Geotechnique*, Vol.34, No.3, pp.423-427.
- T. Ohkami, Y. Mitsui and T. Kusama (1985): “Coupled boundary element/finite element analysis in geomechanics including body forces”, *Computers and Geotechnics*, Vol.1, No.4, pp.263-278.
- T. Ohkami and Y. Mitsui (1986): “Thermo-elastic analysis by coupling procedure using boundary and finite elements”, *Boundary Elements VIII, Proc. 8th Int. Conf.*, Vol.1, pp.3-15.
- 大上俊之, 楠英人, 三井康司, 草間孝志 (1988): “直交異方性弾性体に対する同定問題の境界要素解析”, 境界要素法論文集, Vol.5, pp.107-112.
- T. Ohkami, Y. Ichikawa, and T. Kawamoto (1991): “A boundary element method for identifying orthotropic material parameters”, *Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech.* (to appear)
- 大西有三, 東出明宏 (1983): “逆問題の考え方と岩盤工学への適用”, 第 15 回岩盤力学に関するシンポジウム講演論文集, pp.131-135.
- 大西有三, 東出明宏 (1985): “不均質岩盤の弾性定数と幾何学的特性の同定に関する基礎的研究”, 土木学会論文集, 第 358 号 / III-3, pp.93-101.

- 大西有三, 井尻裕二 (1986): “不均質地盤における浸透流の逆問題解析手法に関する基礎的研究”, 土木学会論文集, 第 376 号 / III-6, pp.121-130.
- H. G. Poulos and E. H. Davis (1974): “Elastic solutions for soil and rock mechanics”, John Wiley & Sons.
- F. J. Rizzo and D. J. Shippy (1971): “An application of the correspondence principle of linear viscoelasticity theory”, *Applied Mathematics*, Vol.21, No.2, pp.321-330.
- 齊藤悦郎, 古賀重利, 鎌田正孝 (1988): “拡張カルマンフィルター支援による山留め工事の計測管理手法”, 土木学会論文集, 第 391 号 / III-8, pp.115-124.
- S. Sakurai and S. Abe (1979): “A design approach to dimensioning underground openings”, *Proc. 3rd. Int. Conf. Num. Meths. Geomech., Aachen*, Vol.2, pp.649-661.
- 桜井春輔 (1982): “トンネル工事における変位計測結果の評価法”, 土木学会論文報告集, 第 317 号, pp.93-100.
- 桜井春輔, 武内邦文 (1983): “トンネル掘削時における変位計測結果の逆解析法”, 土木学会論文報告集, 第 337 号, pp.137-145.
- S. Sakurai and K. Takeuchi (1983): “Back analysis of measured displacements of tunnels”, *Rock Mech. and Rock Engng.*, Vol.16, pp.173-180.
- S. Sakurai and M. Shinji (1984): “A monitoring system for the excavation of underground openings based on microcomputers”, *Proc. ISRM Symp. on Design and Performance of Underground Excavations*, Cambridge, U.K., pp.471-476.
- 桜井春輔, 進士正人 (1985): “マイクロコンピュータによる地下空洞掘削時の安定性の評価”, 土木学会論文集, 第 358 号 / III-3, pp.37-46.
- S. Sakurai, N. Shimizu and K. Matsumuro (1985): “Evaluation of plastic zone around underground openings by means of displacement measurements”, *Proc. 5th Int. Conf. Num. Meth. Geomech., Nagoya*, pp.111-118.
- 桜井春輔, 清水則一 (1987): “現場計測結果の逆解析による岩盤の力学定数の推定”, 土と基礎, 35-3(350), pp.17-21.
- 桜井春輔, 清水則一, 壺内達也 (1987): “地下空洞における計測変位の境界要素法による三次元逆解析法”, 土木学会論文集, 第 382 号 / III-7, pp.55-61.
- 桜井春輔, 清水則一, 松室圭介 (1988): “計測変位に基づく地下空洞周辺地山に発生する塑性領域の推定法”, 土木学会論文集, 第 394 号 / III-9, pp.89-96.

- R. A. Schapery (1961): "Approximate methods of transform inversion for viscoelastic stress analysis", *Proc. 4th U.S. National Cong. Appl. Mech.*, Vol.2, pp.1075-1085.
- 瀬口靖幸, 多田幸生 (1978): "逆変分原理による構造物の形状決定問題", *機械学会論文*集, 44 卷第 381 号, pp.1469-1477.
- N. Shimizu and S. Sakurai (1983): "Application of boundary element method for back analysis associated with tunneling problems", *Proc. 5th Int. Conf. on Boundary Elements*, Hiroshima, pp.645-654.
- 数理科学 (1986): "特集 逆問題", No.274, サイエンス社, pp.5-79.
- 鈴木誠, 石井清 (1989): "拡張カルマン・フィルターによる土質定数の空間分布推定", *土木学会論文*集, 第 406 号 / III-11, pp.71-78.
- J. C. Telles and C. A. Brebbia (1981): "Boundary element solution for half-plane problems", *Int. J. Solids Structures*, Vol.17, No.12, pp.1149-1158.
- J. C. Telles (1983): "The boundary element method applied to inelastic problems", C. A. Brebbia and S. A. Orszag (ed.), *Lecture Notes in Engng.*, Vol.1, Springer-Verlag.
- W. S. Venturini (1983): "Boundary element method in geomechanics", C. A. Brebbia and S. A. Orszag (ed.), *Lecture Notes in Engng.*, Vol.4, Springer-Verlag.
- L. J. Wardle and C. M. Gerrard (1972): "The equivalent anisotropic properties of layered rock and soil masses", *Rock Mech.*, Vol.4, pp.155-175.
- 鷺津久一郎 (1972): "弾性学の変分原理概論", 培風館.
- 矢川元基, 宮崎則幸 (1976): "有限要素法によるクリープ解析の現状", *日本機械学会誌*, 第 79 卷, 第 691 号, pp.42-48.
- 山田嘉昭 (1980): "塑性・粘弾性", 培風館.
- 山本三三三 (1972): "物体の変形学", 誠文堂新光社.
- L. Yang and R. L. Sterling (1989): "Back analysis of rock tunnel using boundary element method", *J. Soil Mechanics and Foundation Division, ASCE*, Vol.115, No.8, pp.1163-1169.
- W. W-G. Yeh (1986): "Review of parameter identification procedures in groundwater hydrology: the inverse problem", *Water Resources Research*, Vol.22, No.2, pp.95-108.

- O. C. Zienkiewicz, M. Watson and I. P. King (1968): "A numerical method of viscoelastic stress analysis", *Int. J. Mech. Sci., Pergamon Pr.*, Vol.10, pp.807-827.
- O. C. Zienkiewicz (1977): "The finite element method (3rd edition)", McGraw-Hill.
- O. C. Zienkiewicz, D. W. Kelly and P. Bettles (1977): "The coupling of finite element method and boundary solution procedures", *Int. J. Num. Methods Engng.*, Vol.11, pp.355-375.

