回帰モデルにおける非線形推定値の研究

片岡佑作　著

①

©

回帰モデルにおける非線形推定値の研究

No. 11

片岡佑作著

はしがき

計量経済学の理論が精ち化され出したのは，1950年代前半のｺｰﾙｽﾞ委員会による同時方程式体系の推定理論の展開からであるが，そこで議論された内容のほとんどは，いわゆる漸近理論にもとづくものであったようである．ところが，計量経済学で扱われる経済ﾃﾞｰﾀといえば，標本ｻｲｽﾞがほとんどの場合 2 ｹﾀに限られるから，そうした漸近理論から導かれる結論の適用に限界があるのは当然であろう．こうした背景から，1960年代の後半に入ると，統計学の標本理論を積極的に取り入れた,finite sample の状況での econometric estimate の統計的性質を研究する分野 − finite sample econometrics が急速に推し進められた．

本ﾓﾉｸﾞﾗﾌは，著者がこれまで finite sample econometrics の分野で行ってきた研究成果をまとめたものであり，大きくは，2 つの問題をとりあげる．ひとつは，通常の回帰式を想定した場合の係数推定値の性質である．もうひとつは，いわゆる分布ﾗｸﾞﾓﾃﾞﾙにおいて，ﾓﾃﾞﾙが変換されたのち，ﾗｸﾞ付き従属変数が回帰式の右辺に入る回帰から導かれる OLS 推定値の性質である．全体にわたり，こうした問題について，finite sample に関する理論を展開するうえでのもっとも大きな障害の一つは，考える係数推定値が回帰式の従属変数について非線形 (nonlinear) の形をとるという点である．ﾗﾌな言い方をすると，finite sample econometrics での新たな展開とは，この非線形性をいかにして乗り越えるかということを意味する．非線形性という用語それ自体は，最近の Phillips の論文にも見られるが，係数推定値の性質を回帰式の従属変数に関する非線形性という観点から研究する試みは，著者のものの他はあまりなかったようである．

本ﾓﾉｸﾞﾗﾌは全体で 13 の章から構成されており，各章の内容を要約すると，次のようになる．第1章は本論文の序にあたるもので，第2章以下でとりあげる問題とそれに対する解，あるいは結果を簡単に述べている．

第2章は，誤差項がたがいにｺﾘﾚｲﾄする複数個の回帰式 (SUR) を考えた場合の有効(分散の小さい)推定を議論する．SUR 体系の研究は Zellner からはじめられたが，彼の得た結果は推定値の漸近的性質，また有限標本については，2-方程式体系に限られていた．ここで展開するのは，k-方程式体系における有限標本の結果である．推定値の精密分布，および精密 2 次ﾓｰﾒﾝﾄまでが正確に計算される．また，第3章は第2章の内容，結果を修正して

いる．

つづいて第4章では通常の単一回帰式を考え，ﾘｽｸ関数が OLS，あるいは最尤（ML）推定値よりも一様に小さくなる Stein の推定値を議論する．これまでの数多くの研究により，そうした推定値のﾘｽｸはよく知られていたが，精密分布については，もっとも単純な Stein 推定値がわかっていたにすぎない．ここでは実際の適用状況にてらして修正された (Lindley-like mean correction) Stein 推定値の分布も計算可能であることをはじめて示す．こうして第2 ～ 4章の 2 種の Zellner，Stein 推定値は通常の回帰式において基本的な非線形性を示すが，以上の考え方を同時に採用し，第5章では Zellner の推定値を Stein ﾀｲﾌﾟに変形することを考える．つまり，2 種類の回帰式の誤差項がｺﾘﾚｲﾄするとき，OLS 推定値よりも有効な不偏推定値 b の部分 b_1 をとり出し，b_1 を Stein 化させた $b_1(s, c)$ を構成する．そうして比較的ゆるやかな条件のもとで，$b_1(s, c)$ のﾘｽｸを b_1 のﾘｽｸよりも一様に小さくできることを示す．

第6章は Koyck の分布ﾗｸﾞﾓﾃﾞﾙを変換し，ﾗｸﾞ付従属変数が回帰式の右辺に入るようにしたﾓﾃﾞﾙの OLS 係数推定値の性質を述べる．まず，精密ﾓｰﾒﾝﾄを 2 次までについて正確に計算するが，ﾓｰﾒﾝﾄは，ﾎﾟｱｿﾝ変量に関する 1 次式の逆数の期待値によって簡単に表される．また，理解をより深めるために，"誤差分散 σ^2 が小さい" としてﾓｰﾒﾝﾄの近似式をみちびく．σ が小さければ，OLS 推定値はほとんど不偏になることがわかる．第7章では，精密ﾓｰﾒﾝﾄにあらわれるﾊﾟﾗﾒﾀ，および説明変数に適当な値を選び，ﾓｰﾒﾝﾄの数値表を用意した．

第8章は σ が小さいとき，OLS 推定値 c の近似分布を σ^2 のｵｰﾀﾞｰまでについて計算する．その方法は，c の特性関数の近似式を反転させる操作によっている．つづいて第9章は，第6 ～ 8章の理論的側面のみを議論した点を補完する意味で，分布ﾗｸﾞﾓﾃﾞﾙが適用される一つの例を示す．その内容は，ﾏｰｹﾃｨﾝｸﾞにおける広告ｲﾒｰｼﾞ，広告媒体とﾏｰｹｯﾄｼｪｱが，いかに結びつくかを定式化からはじめて変数の構成方法などを述べたものである．

第10章は 2 次元 Koyck 分布ﾗｸﾞﾓﾃﾞﾙの推定問題をとりあげるが，よく知られているようにこうしたﾌｫｰﾑを適当に変換すれば，ﾍﾞｸﾀ ARMAX とよばれるﾓﾃﾞﾙとなる．その係数推定には最尤法，操作変数法など反復計算による様々な提案があるが，考え方のねらいは，いずれも推定値の一致性である．しかしながら標本のｻｲｽﾞが 2 ｹﾀであれば，そうした性質はあまり意味をもたない．他方，ﾅｲｰﾌﾞな OLS 推定値が一致性をみたさないのはあきら

かだが，その精密 1 次ﾓｰﾒﾝﾄすら過去調べられたこともない．したがってまずこうした問題をあつかう．つづいて第11章ではﾓｰﾒﾝﾄの近似をとりあげる．近似の考え方は，第6章で採用する"small σ"に類似した接近方法である．つまり"回帰式のｼｽﾃｨﾏﾃｨｯｸﾊﾟｰﾄの方が誤差項より説明力が大きい"という想定により，精密ﾓｰﾒﾝﾄを構成する関数の近似をみちびく．そうして第12章では，1 次ﾓｰﾒﾝﾄの近似式を構成するﾊﾟﾗﾒﾀ，説明変数に適当な値を指定し，数値積分により近似ﾓｰﾒﾝﾄの数値表を用意する．最後に，第13章は第10章であたえる計算方法よりも早く解に到達する一つの考え方を述べる．

以上は著者がこれまでに専門誌，あるいは学内の紀要に発表した論文にもとづいているが，ﾓﾉｸﾞﾗﾌにするに際しては，理論的展開に順序をつけた．またﾉｰﾃｲｼｮﾝをできるだけ簡単にしたうえで，内容をかなりの部分書きかえた．それぞれの章に対応する論文の収録雑誌名等は以下のとおりである．

第1章　書き下ろし，1989.
第2章　Economic Studies Quarterly, Vol. 25, No. 2, 1974.
第3章　「季刊理論経済学」Vol. 27, No. 1, 1976.
第4章　「経済経営論叢」Vol. 22, 23, No. 4 ～ 1, 1988.
第5章　同 上 Vol. 14, No. 3, 1979.
第6章　同 上 Vol. 15, No. 3, 1980.
第7章　International Economic Review, Vol. 27, No. 1, 1986*.
第8章　「経済経営論叢」Vol. 18, No. 3, 1983.
第9章　同 上 Vol. 20, No. 1, 1985.
第10章　同 上 Vol. 19, No. 4, 1985.
第11章　同 上 Vol. 21, No. 2, 1986.
第12章　Economic Studies Quarterly, 近刊+.
第13章　「経済経営論叢」Vol. 21, No. 4, 1987.

ここで *, + はそれぞれ A. Hoque-H. Miyashita, H. Miyashita-K. Morimune との共著である．

このﾓﾉｸﾞﾗﾌを書き上げる過程で数多くの方々からｺﾒﾝﾄ，示唆を受けた．以下名前をあげ

ると，木下宗七（名古屋大），佐和隆光，森棟公夫（京都大），竹内啓（東京大），畠中道雄，大沢豊，中島望（大阪大），上條哲男（上智大），宮下洋，新田政則，田中寧，曽我見郁夫，森隆一（京都産業大），皆川正（名古屋大）の方々である．また，理論計量経済学会，日本統計学会，ﾏｰｹﾃｨﾝｸﾞｻｲｴﾝｽ研究部会における私の報告の討論者からもはかり知れない刺激を受けた．ここに記して厚くお礼申し上げたい．とくに木下宗七先生には，原稿の段階で目を通していただき，その結果全体としてのｽﾀｲﾙの統一，さらにはしがき，および第1章について修正を加えることになった．少しでも読み易くなっているとすれば，それは先生のおかげである．なお，第7 ～ 第10章までの研究は，吉田秀雄記念事業財団による助成（1983年度)を受けてなされた．

1991年1月

片岡佑作

記号の説明

$E(x)$	x の期待値
$E(x\mid\ )$	x の条件付期待値
$Var(x)$	x の分散
$Cov(x)$	x (ﾍﾞｸﾀ)の分散共分散行列
$tr(A)$	行列 A の対角要素の和
$det(A)$	A の行列式
A^t	A の転置行列
$diag(r_1, \ldots, r_k)$	要素が $r_1, \ldots, r_k$ の $k \times k$ 対角行列; r_i が部分行列となるｹｰｽもある
(a_{ij})	行列 A の要素表示
a_{ij}, $a(i, j)$	A の i,j 要素
$O(T^r)$	T について r 次のｵｰﾀﾞｰの項
$O_p(T^r)$	$O(T^r)$ が確率変数の場合
$o(T^r)$, $o_p(T^r)$	r 次のｵｰﾀﾞｰより小さい項
$x \sim N(m, \sigma^2)$	x は平均 m, 分散 σ^2 の正規分布にしたがう
$x \sim y$	x は近似的に y に等しい
$a_{p(1)}$	a_{p_1} を意味する場合がある
$\langle x, y\rangle$	x, y の内積, $x^t y$; 行列 X, Y についても用いる場合がある
$mod(x)$	x の絶対値
$J(x \to y)$	変数 x を y に移す場合のﾔｺﾋﾞｱﾝ
d_x	x に関する微分ｵﾍﾟﾚﾀ
q_x	ﾗﾌﾟﾗｼｱﾝｵﾍﾟﾚﾀの逆数, $q_x = (d_x^t d_x)^{-1}$

目次

第 1 章 従属変数について非線形となる係数推定値*

1. 1 はじめに

ここで第2章以下問題とされる内容，およびみちびかれる結果について大体のﾚﾋﾞｭｰをあたえておくことにしよう．1．2 では通常の回帰式を想定し，従属変数について非線形となる係数推定値をとりあげる．つづいて，1．3 で回帰式の右辺に 1 期遅れの従属変数が入る状況を考え，OLS 推定値を議論する．この場合 OLS 推定値はもちろん，従属変数の非線形関数となっている．またとくに指定がなければ，1．2，1．3 に共通して，ﾓﾃﾞﾙにあらわれる誤差項 u_t，$t = 1, 2, \ldots$ はたがいに独立，かつ平均 0，分散が constant の正規分布にしたがうものとする．

1. 2 単純回帰ﾓﾃﾞﾙ

いま次のような回帰式の組の推定を考える．つまり

(2．1)　　$y_i = X_i\beta_i + u_i \quad i = 1, \ldots, k$

と書く．ここで $y_i(T \times 1)$，$X_i(T \times l_i)$，$u_i(T \times 1)$，$\beta_i(l_i \times 1)$ はそれぞれ従属変数，説明変数 (fixed)，誤差項，未知係数とし，さらに

(2．2)　　$(u_1^t, \ldots, u_k^t)^t \sim N(0, \Sigma \otimes I_T)$，$\Sigma$: diagonal, unknown

としよう．こうした回帰ﾓﾃﾞﾙ (2．1) の特徴を

1° u_i，$u_j (i \neq j)$ はｺﾘﾚｲﾄする

2° y_i を説明する変数は X_i のみ

ととらえることができるが，Zellner [31]，[32] はこのような回帰式の組 (2．1) を想定する場合の重要性にいちはやく気づいた．表現 (2．1) は計量経済学，ﾏｰｹﾃｨﾝｸﾞの応用面を扱ううえでひんぱんにあらわれる（また，この分野のｻｰﾍﾞｲとして Srivastava-Dwivedi [24]，Srivastava-Giles [25] を見よ）．

---

* ﾓﾉｸﾞﾗﾌ全体を通して，もちいられる記号，notation などは "記号の説明" を参考にされたい．その他については Sargan [20, 21]，竹内 [36] のﾃｷｽﾄに見るものにあわせた．

ここで Zellner [31], [32] が問題にするのは β_i の推定である．さきのﾓﾃﾞﾙの性質 1° によって (2. 1) を個別に OLS 推定すれば，もちろん(推定値の)効率は低下する．こうした点から [31] は以下のようなﾌｫｰﾑをとる推定値を提案した．(2. 1) を

(2. 3) $(y_1^t, \ldots, y_k^t)^t = \{\mathrm{diag}(X_1, \ldots, X_k)\}(\beta_1^t, \ldots, \beta_k^t)^t + (u_1^t, \ldots, u_k^t)^t$

あるいは

(2. 4) $y = X\beta + u$

と書いて β の推定値として

(2. 5) $b = (X^t((\mathrm{est}\Sigma) \otimes I)^{-1}X)^{-1}X^t((\mathrm{est}\Sigma) \otimes I)^{-1}y$

とする．ここで Σ の推定値としては

(2. 6) $(\mathrm{est}\Sigma)_{ij} = s_{*ij} = e_{*i}^t e_{*j}/T$

e_{*i}: (2. 1) の OLS 残差

あるいは

(2. 7) $(\mathrm{est}\Sigma)_{ij} = s_{ij} = e_i^t e_j/T$

e_i: y_i に $X_1, \ldots, X_k$ をあてはめた場合の OLS 残差

b(1): s_{*ij} による β の推定値

b(2): s_{ij} に依存する β の推定値

が考えられるが，強調したいのは (2. 6), (2. 7) のどちらの推定値をもちいるにせよ，(2. 5) の推定値 b が従属変数 y について非線形になるという点である (β の最尤(ML) 推定はもちろん可能であって，推定値は非線形方程式の反復解として得られる．ML 推定値の近似理論については，ほぼ整理つくされているが，有限標本理論の展開はうまくいってはいない．Srivastava-Giles [25, ch. 5], Theil [27] 参照).

ところで，こうした推定値 b の y による非線形性は，T (標本数)が $+\infty$ の場合は問題にはならない．なぜなら変数 y, X, u に適当な正則条件を課せば (u の正規分布を仮定しなくてもよい), (2. 5) の $\mathrm{est}\Sigma$ は

$$(\mathrm{est}\Sigma)_{ij} \to \sigma_{ij} \text{ in probability,}$$

そうしてこの場合の $T^{1/2}(b - \beta)$ の極限分布は

$$b^* = (X^t(\Sigma \otimes I)^{-1}X)^{-1}X^t(\Sigma \otimes I)^{-1}y$$

とするとき，$T^{1/2}(b^* - \beta)$ の分布と同一となり，y に関する非線形性は除かれてしまう

. また, 分布は平均 0, 分散 $\lim T(X^t(\Sigma \otimes I)^{-1}X)^{-1}$ の正規分布にしたがう. しかしながら T ～ small で推定値 b の分布, あるいはﾓｰﾒﾝﾄのふるまいを調べようとするとき, この "y に関する非線形性" がもっとも大きな障害になる. 詳しくいえば, その内容は

1' b が $b = g((y^t H_1 y)^{-1}, H_2 y)$ のﾌｫｰﾑで書ける. ただし g(z): z の簡単な関数, H_1: 非負値定符号行列

2' 1' であたえられるような推定値の確率的性質を見るための統計理論(有限標本のｹｰｽ)を計量経済学にとり入れる場合の統一的な考え方そのものがほとんどない

この 2 点に整理されるだろう. こうして T ～ small の側面に光をあて, 第2, 3章に展開するのは

・ k = 2 で b(1) の精密ﾓｰﾒﾝﾄ, および分布

・ 任意の k に対する b(2) の精密ﾓｰﾒﾝﾄ, および分布

が, どのようなかたちをとるかということである. また, 議論をよりわかりやすくするためにﾓｰﾒﾝﾄについては数値表も用意した.

こうしたﾓﾃﾞﾙ (2. 1) を SUR 体系というが, 第2, 3章と関係するその後の研究結果を述べておくと, Kunitomo [12] は k = 2, $\langle X_1, X_2\rangle \neq 0$ で b(2) のﾓｰﾒﾝﾄを調べた. また Phillips [16] は任意の k について b(2) の近似分布をあたえる. Kariya-Maekawa [8] は k = 2 でこうした近似理論を精ち化した. つづいて Phillips [19] は任意の k, $\langle X_i, X_j\rangle \neq 0$ で b(2) の精密分布をみちびいた. ただし [19] の結果は, ｵﾍﾟﾚﾀを含む fractional calculus によるもので, 分布形は closed で書けるもののこうしたﾌｫｰﾑを解釈するのは, それほど容易ではない. SUR 体系をとりあげる最近のﾓﾉｸﾞﾗﾌとして, Srivastava-Giles [25], Phillips [17] がある.

ところで回帰式の組を考えることなく, 単一回帰式

(2. 8) $\quad y = X\beta + u$

に対象を限定しよう. ただし y(T x 1), X(m x 1), u, β は (2. 1) と同様に定めるものとする. また, u は $u \sim N(0, \sigma^2 I_T)$ を仮定しよう. こうした場合において, 推定値のよさの評価基準を

(2. 9) $\quad \min E\{\langle \text{estimate} - \beta, \text{estimate} - \beta\rangle\} = \min \text{risk}(\beta)$

とすると, 通常の最尤推定値 $b_{ML}(= (X^tX)^{-1}X^ty)$ よりも, Stein [26] の推定値の方が (2. 9) のﾘｽｸを小さくすることが知られている. ここで

$b_{ML} \sim N(\beta, \sigma^2(X^tX)^{-1})$,

s^2(σ^2 の推定値) = <e, e>/(T - m)

= <y - Xb_{ML}, y - Xb_{ML}>/(T - m)

となるが，いま一般性を失うことなく <X, X> = TI とすることができるから，以下 b_{ML} , β, σ^2/T を z (最尤推定値), θ, d と書きかえると Stein の推定値 δ は

(2. 10)　δ = (1 - cd/<z, z>)z

となる．ただし，d が未知のときは d をその推定値におきかえるものとする．この δ が z について非線形になっているのがすぐわかる．

Stein 自身の研究以外にも，こうしたﾀｲﾌﾟの推定値には様々なかたちのものが考えられ (Efron-Morris [2], 竹内 [36]), 最近の econometrics のﾃｷｽﾄ (Greenberg-Webster, Jr. [3]) も Stein estimation についてかなりのｽﾍﾟｰｽをとっている．しかしながらこれまでの議論は，ほとんど推定値のﾘｽｸ関数(つまりﾓｰﾒﾝﾄ)をあつかうものであって，精密分布の議論については Phillips [18] の研究を待たねばならなかった．[18] の結果は fractional calculus にたより，δ の分布を特定なｵﾍﾟﾚｰﾀで表現したことである．この解析的な表現はもちろん closed form をとるが，それは δ の分布がなぜ初等関数で表せないかをよく示している．δ の分布から δ のﾓｰﾒﾝﾄの初等的な表現をみちびくことは，もちろん可能である．いまのところ精密分布に関するかぎり，Phillips の貢献以外に新しい議論はない．こうした状況で第4章が示すのは，Stein 推定値にある種の修正を加えたかたち (Lindley-like mean correction) をとりあげ，その分布が Phillips の結果とほぼ同じﾌｫｰﾑをとるという点である．また，精密分布から 2 次ﾓｰﾒﾝﾄをみちびくﾌﾟﾛｾｽをあらたに追加した．これは fractional calculus が通常の計算といかに結びつくかをあきらかにすることにねらいがあり，Phillips の議論を補完するかたちになっている．

以上，従属変数 y について推定値が非線形になる 2 つの基本的な例を示したが，こうしたとき直観的に気づくのはつぎの点である．つまり回帰式の組 (2. 1) を想定し，はじめのｽﾃｯﾌﾟとして Zellner の提案する推定値 b_I を採用する．そうして，ここで推定値の不偏性の要請をはずしたうえで，評価基準として

min E<estimate - β_1, estimate - β_1>

を採用すれば，推定値 b_I を shrink させて β_1 の推定値として

(2. 11)　b_I(s, c) = (1 - cg( )/<b_I, b_I>)b_I

g( ): estΣ の関数

とすることが考えられる（ここで b_1 が y_1 について非線形，そうして $b_1(s, c)$ が b_1 の非線形関数となっている）．第5章はこうした $b_1(s, c)$ のﾘｽｸの計算結果をあたえる．

Zellner-Vandaele [33] は (2. 7) の推定値 b(1) の $\Sigma_{i=1}^{k} l_i$ 個からなるすべての要素を shrink させることを思いついたが，誤差分散の不均一性をうまく処理できないこともあって，近似理論でさえ彼らの結果は満足させるものとはいえない．Srivastava [23] も同一の内容を近似のｵｰﾀﾞｰをあげて計算した．[23] による到達点も Zellner-Vandaele [33] とあまり変わるものではない．留意すべき点は "背景にある推定値 b_1 が non-normal である"，またその結果として精密分布理論がかなり複雑になること，そうしてﾓﾃﾞﾙ (2. 1) の誤差分散の不均一性である．これらの事項を考慮して，第5章が議論する内容は次の点である．k = 2 で

1" 分散不均一をさけるために推定値の部分のみに注目し，こうした一部分を shrink させる（1 つの回帰式について説明変数の次数が 3, 4 をこえるｹｰｽはよくある）

2" $b_1(s, c)$(shrink させた推定値) と b_1 のﾘｽｸの比較においては精密分布理論を必要としない．実際 $b_1(s, c)$，b_1 の条件付分布を見ればよい

3" 問題の解としては，条件付でない 1, 2 次ﾓｰﾒﾝﾄが級数表示ではあるが，explicit に得られる

以上の 3 点であるが，2"，3" に共通して強調したいのは，Srivastava [23]，Zellner-Vandaele [33] とは異なり，第5章の展開は精密理論のかたちをとるという点である．現在のところ [23]，[33]，第5章の他，回帰式の組について shrinking を作用させる議論は，そのはん雑さもあってあまり見られないが，最近の 片岡 [39] は (2. 1) を想定して Lindley-like mean correction のｹｰｽを述べる．結果は第5章に展開する内容とほぼﾊﾟﾗﾚﾙとなっている．

1. 3 説明変数に遅れのある従属変数を含む場合

ある変数 y_t が遅れのある他の変数 x_t, x_{t-1}, ... によって説明される回帰ﾓﾃﾞﾙは，通常分布ﾗｸﾞﾓﾃﾞﾙとよばれ，以下のように定式化される．

(3. 1)　　$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_t + \beta_2 x_{t-1} + \ldots + \eta_t$

ここで $y_t(1 \times 1)$, $x_{t-s}(1 \times 1)$, $\eta_t(1 \times 1)$, $\beta_i(1 \times 1)$ はそれぞれ従属変数，説明変数（fixed)，誤差項，未知係数，さらに η_t については η_t, $\eta_s(t \neq s)$ は独立，

(3. 2) $\quad \eta_t \sim N(0, \sigma^2)$, σ^2: unknown

としよう．また直観的にすぐ気づくように，こうしたﾓﾃﾞﾙ (3. 1) は

1° 無限個の x_{t-s} $s = 0, 1, \ldots$ によって y_t が説明される

2° $\beta_i(i = 0, 1, \ldots)$ に制約がなければ，この数列 β_i も無限個

という 2 重の意味で推定不可能となっている．したがって

1' $\beta_i = \gamma^{i-1}\beta_1$, $\mathrm{mod}(\gamma) < 1$

2' (3. 1) の R.H.S. を y_{t-s} で表現する

という要請のもとにﾓﾃﾞﾙ (3. 1) を書きかえれば

(3. 3) $\quad y_t = \beta_0 + \beta_1 x_t + \gamma\beta_1 x_{t-1} + \ldots + \eta_t$

さらに

(3. 4) $\quad y_t = \gamma y_{t-1} + (1 - \gamma)\beta_0 + \beta_1 x_t + \eta_t - \gamma\eta_{t-1}$

となって，これは推定可能な表現をあたえる．ここで 1' は時間の経過とともに x_{t-s} の y_t への効果は，幾何的に小さくなるという点を意味している (Koyck [11])．また，x_{t-1} より x_{t-2} の影響が大きくなるような，つまり効果のﾋﾟｰｸが過去へ向けてｼﾌﾄするようなﾓﾃﾞﾙももちろん考えることができる．例えば 新開 et al. [35, pp. 371] のﾃｷｽﾄ(木下 [34] からの引用)に見るように，設備投資に及ぼす過去の需要の変化といった点に注目すると，ある一定期間をおいて効果のﾋﾟｰｸが現れる．こうしていく分複雑な分布ﾗｸﾞﾓﾃﾞﾙも通常のｴｺﾉﾒﾄﾘｯｸｽの範囲内でもちろん解析可能であって，Griliches [4] のｻｰﾍﾞｲ論文にはﾓﾃﾞﾙの定式化，推定等，多くの内容が含まれている．

ところがﾓﾃﾞﾙ (3. 1) に 1' を仮定したもっとも単純な場合に，OLS をとりあげたとしても，$T \sim$ small では研究が十分であったとは言えない（ここではあつかわないが，最尤 (ML) 推定の場合にはけっきょく 2 次方程式の解を探すことに帰着する．ML 推定値について状況はより困難であって，近似理論があるにすぎない)．こうした有限標本ｹｰｽの解析を進めて行くうえでの障害の大きなものは，やはり従属変数 y_t に関する推定値の非線形性である．つまりいま $\gamma(1 \times 1)$ の OLS 推定値 c は

(3. 5) $\quad c = \langle y, H_2 y\rangle / \langle y, H_1 y\rangle$

$\quad$ y: y_t の観測値ﾍﾞｸﾀ

H_1: 非負値定符号行列

と表され，(3. 5) は 1. 2 で考える推定値とよく似たかたちをとる．以上のような状況のもとで第6 ～ 8章がみちびくのは，c の 2 次までの精密ﾓｰﾒﾝﾄ，ﾓｰﾒﾝﾄ近似，およびある種の近似分布である．

近似理論には様々な考え方があるが，第6 ～ 8章で採用される方法は，いわゆる Kadane [7] の small sigma 近似とよばれるものであって，その内容は "説明変数の標本分散は誤差分散 (σ^2) よりも小さくはない" という主張からなる．簡単に言えばそれは「ﾃﾞｰﾀのｾｯﾄ (x_t, y_t)　$t = 1, ..., T$; y_t: 従属変数，で y_t の x_t への回帰を考えたとする．そうしたとき，x_t の変動が u_t (誤差項)のそれをうわ回っている」ということを意味し，回帰式のあてはまりがよければ，こうした近似の精度はよくなる．従って近似の表現は通常，

$$\text{"推定値のﾓｰﾒﾝﾄ(あるいは密度関数)"} = \Sigma_{s=0} A_s \sigma^{-s}$$

$$A_s:\ \sigma \text{ を含まない量}$$

となる．

以上の第6 ～ 8章と関係する有限標本理論の貢献を述べれば，まず Carter-Ullah [1] はﾓﾃﾞﾙ (3. 1) の再定式化にもとり組んだ．また，Carter-Ullah [1]，Ullah-Maasoumi [28] は，第6章とは異なるﾓｰﾒﾝﾄの計算例を示す．Maasoumi [13] は定式化にｴﾗｰがあった場合の OLS 推定値のふるまいを調べる．さらに数値積分のみにたよって，様々なｹｰｽを考えることももちろん可能である (Hoque [5])．Maekawa [14] は第8章とは異なる考え方 (T ～ large) の近似理論を展開した．

また，第9章は分布ﾗｸﾞﾓﾃﾞﾙがﾏｰｹﾃｨﾝｸﾞにおける実際問題にどのように適用されるか，第8章までの推定理論とは別に，主として定式化の面を議論した．ただ理解を深めるために，若干の漸近理論を加えている．

次に，ﾓﾃﾞﾙ (3. 1) の次元をあげることを考える．つまり

(3. 6)　$Y_t = \beta_1 X_t + \alpha\beta_1 X_{t-1} + \alpha^2\beta_1 X_{t-2} + ... + \varepsilon_t$

$$\text{mod}(\alpha \text{ の固有値}) < 1$$

と書く．ここで Y_t は 2 x 1 ﾍﾞｸﾀ，他の変数，ﾊﾟﾗﾒﾀについての仮定は (3. 1) で採用されたものとほぼ同一とするが，ε_t についてはもちろん ε_t，$\varepsilon_s (t \neq s)$ は独立，$\varepsilon_t \sim N(0, \Sigma)$，$\Sigma$: 正値定符号行列，としよう．また (3. 6) のﾗｸﾞ構造は，はじめから

geometric のかたちをとっている．こうしたﾓﾃﾞﾙの意味，あるいはﾏｰｹﾃｨﾝｸﾞにおける適用例を第10章に示すが，他の文献として Wahba [29] は (3. 6) をさらに一般化し multi-dimension としたうえで，α の推定値の漸近的な性質を調べる．Wilson [30] もまた T ～ large で最尤推定を述べたのち，(3. 6) のように定式化することの意味をとりあげる．

(3. 6) の係数推定を考えるには，1 次元のｹｰｽと同じように (3. 6) の右辺を Y_{t-1} で表し

(3. 7)　　$Y_t = \alpha Y_{t-1} + \beta_1 X_t + \varepsilon_t - \alpha \varepsilon_{t-1}$

と書く．こうしたﾌｫｰﾑのﾓﾃﾞﾙは一般には VARMAX ﾓﾃﾞﾙ (外生変数がある場合のﾍﾞｸﾀ ARMA ; Wilson [30]，山本 [37]) とよばれ，T ～ large で数多くの推定法が提案され，さきの Wilson [30] も (3. 7) の最尤推定を考える．最近の Spliid [22] は，操作変数推定に類似したﾓｰﾒﾝﾄ法とよばれる考え方をﾚﾎﾟｰﾄする．こうした推定による Spliid [22]，Wahba [29]，Wilson [30] のねらいは，正則条件のもとでの係数推定値の一致性であって，T ～ large の状況がもちろん大きなｳｪｲﾄをしめている．したがって T ～ small のとき，一致性は意味を持たないばかりか最尤推定(あるいはﾓｰﾒﾝﾄ推定)にともなう反復計算の回数，そうして計算のためのｺｽﾄが問題になる．他方，ﾅｲｰﾌﾞな OLS 推定値が一致性を持たないのはあきらかだが，1 次元のﾓﾃﾞﾙ (3. 1) と同様，こうした 2 次元ﾓﾃﾞﾙ(3. 7) について，精密 1 次ﾓｰﾒﾝﾄが過去調べられたこともない．第10 ～ 12章がまずﾚﾎﾟｰﾄするのは，ﾓﾃﾞﾙ (3. 7) における OLS 推定値の 1 次ﾓｰﾒﾝﾄに関する解析的な表現である．つづいて Kadane [7]，Mariano [15] の意味でのﾓｰﾒﾝﾄ近似をみちびき，そうしてえられる近似表現のﾊﾟﾗﾒﾀに plausible な値を指定し，近似ﾓｰﾒﾝﾄの数値表を用意する．また，第13章ではある特定なｵﾍﾟﾚｰﾀを導入し，第10章の結果に見通しのよい解釈をあたえた．

参考文献

[1] Carter, R. A. L. and A. Ullah, "The Finite Sample Properties of OLS and IV Estimators in Special Rational Distributed Lag Models," Sankhya, D, 41, 1979, pp. 1-18.

[2] Efron, B. and C. Morris, "Combining Possibly Related Estimation Problems," Journal of the Royal Statistical Society, Ser. B, 35, 1973, pp. 379-421.

[3] Greenberg, E and C. E. Webster, Jr., Advanced Econometrics: A Bridge to the Literature, New York: John Wiley & Sons, Inc., 1983.

[4] Griliches, Z., "Distributed Lags: A Survey," Econometrica, 35, 1967, pp. 16-49.

[5] Hoque, A., "Finite Sample Analysis of the General Dynamic Model," mineo, 1983.

[6] Hoque, A., Y. Kataoka and H. Miyashita, "The Exact Moments of Ordinary Least Squares Estimators for Koyck Distributed Lag Models," International Economic Review, 27, 1986, pp. 245-260.

[7] Kadane, J. B., "Comparison of k-class Estimators When the Disturbances Are Small," Econometrica, 39, 1971, pp. 723-737.

[8] Kariya, T. and K. Maekawa, "A Method for Approximations to the PDF's and CDF's of GLSE's and its Applicaton to the Seemingly Unrelated Regression Model," Annals of the Institute of Statistical Mathematics, A, 34, 1982, pp. 281-297.

[9] Kataoka, Y., "The Exact Finite Sample Distribution of Joint Least Squares Estimators for Seemingly Unrelated Regression Equations," Economic Studies Quarterly, 25, 1974, pp. 36-44.

[10] Kataoka, Y., H. Miyashita and K. Morimune, "The First Moment of an Ordinary Least Squares Estimate for Bivariate Koyck Distributed Lag Models," mineo, 1988.

[11] Koyck, L. M., Distributed Lags and Investment Analysis, Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1954.

[12] Kunitomo, N., "A Note on the Efficiency of Zellner's Estimator for the Case of Two Seemingly Unrelated Regression Equations," Economic Studies Quarterly, 28, 1977, pp. 73-77.

[13] Maasoumi, E., "Analytical Specification Analysis in Some Distributed Lag and Other Dynamic Economic Models," mineo, 1985.

[14] Maekawa, K., "Edgeworth Approximation to the Distribution of the Least Squares Estimator in ARMA (1, 1) Model with Exogenous Variables," manuscript, Department of Economics, Hiroshima University, 1984.

[15] Mariano, R. S., "Approximations to the Distribution Functions of Theil's k-class Estimators," Econometrica, 41, 1973, pp. 715-721.

[16] Phillips, P. C. B., "An Approximation to the Finite Sample Distribtion of Zellner's Seemingly Unrelated Regression Estimator," Journal of Econometrics, 6, 1977, pp. 147-164.

[17] ———, "Exact Small Sample Theory in the Simultaneous Equations Model," Ch. 8, in M. D. Intriligator and Z. Griliches (eds.) Handbook of Econometrics, Vol. 1, Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1983, pp. 449-516.

[18] ———, "The Exact Distribution of Stein-rule Estimator," Jounal of Econometrics, 25, 1984, pp. 123-131.

[19] ———, "The Exact Distribution the SUR Estimator," Econometrica, 53, 1985, pp. 745-756.

[20] Sargan, J. D., Contributions to Econometrics, Vol. 1, Cambridge: Cambridge University Press, 1988.

[21] ——, Contributions to Econometrics, Vol. 2, Cambridge: Cambridge University Press, 1988.

[22] Spliid, H., "A Fast Estimation Method for the Vector Autoregressive Moving Average Model with Exogenous Variables," Journal of the American Statistical Association, 78, 1983, pp. 843-849.

[23] Srivastava, V. K., "The Efficiency of an Improved Method of Estimating

Seemingly Unrelated Regression Equations," Journal of Econometrics, 1,1973 pp. 341-350.

[24] Srivastava, V. K. and T. D. Dwivedi, "Estimation of Seemingly Unrelated Regression Equations: A Brief Survey," Journal of Econometrics, 10, 1979, pp. 15-32.

[25] Srivastava, V. K. and D. E. A. Giles, Seemingly Unrelated Regression Equations Models: Estimation and Inference, New York: Marcel Dekker, 1987.

[26] Stein, C., "Inadmissibility of the Usual Estimator for the Mean of a Multivariate Normal Distribution," Proceedings of the Third Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Vol. 1, Berkeley and Los Angeles: University of California Press, 1956, pp. 197-206.

[27] Theil, H., Principles of Econometrics, New York: Wiley, 1971.

[28] Ullah, A. and E. Maasoumi, "Moments of OLS Estimators in an Autoregressive Moving Average Model with Explanatory Variables," Economics Letters, 21, 1986, pp. 265-269.

[29] Wahba, G., "Estimation of the Coefficients in a Multidimensional Distributed Lag Model," Econometrica, 31, 1969, pp. 398-407.

[30] Wilson, G. T., "The Estimation of Parameters in Multivariate Time Series Models," Journal of the Royal Statistical Society, Series B, 35, 1973, pp. 76-85.

[31] Zellner, A., "An Efficient Method of Estimating Seemingly Unrelated Regressions and Tests of Aggregation Bias," Journal of the American Statistical Association, 57, 1962, pp. 348-368.

[32] ——— , "Estimators for Seemingly Unrelated Regression Equations: Some Exact Finite Sample Results," Journal of the American Statistical Association, 58, 1963, pp. 977-992.

[33] Zellner, A. and W. Vandaele, "Bayes-Stein Estimators for k-Means, Regression and Simultaneous Equation Models," in S. E. Fienberg and A. Zellner, eds., Studies in Bayesian Econometrics and Statistics in Honor of Leonard

J. Savage, Amsterdam: North-Holland, 1975, pp. 627-653.

[34] 木下宗七「日本の製造業の設備投資行動」「調査と資料」第44号，名古屋大学経済学部，1970年.

[35] 新開陽一・新飯田宏・根岸隆「近代経済学」新版，有斐閣，1987年.

[36] 竹内啓「計量経済学の研究」東洋経済新報社，1972年.

[37] 山本拓「経済の時系列分析」創文社，1988年.

[38] 片岡佑作「結合最小2乗推定量についてのﾉｰﾄ」「季刊理論経済学」第27巻，第1号，1976年，pp. 68-73.

[39] ――― 「複数個の回帰式に対するｽﾀｲﾝ推定値：II」mineo，1989年.

第 2 章　見かけ上無関係となる回帰 (SUR) における結合最小2乗推定値

2. 1　問題の所在

複数の線形回帰式を考えたとき，個々の回帰式の誤差項のあいだに相関があるとしよう．たとえば

(1. 1)　　$y_{it} = \Sigma_{s=1}^{l(i)} x_{ist}\beta_{i(s)} + u_{it}$, $i = 1, \ldots, k$; $t = 1, \ldots, T$

と書いて

y_{it}: t 期における第 i 産業の産出量，

x_{ist}: t 期，第 i 産業における s 番目の生産要素投入量

とすれば (1. 1) は線形に移しかえたのちの生産関数を意味している．こうした回帰式全体の特徴を

1° x_{ist} は第 i 番目の回帰式に固有な説明変数である

2° u_{it}, u_{jt}($i \neq j$) に相関がある

としてとらえることができるが，Zellner [7] は 1°，2° にいち早く気づいたうえで，(1. 1) に関してきわめて効率のよい係数推定法をあみ出した．

これまでよく知られているように，2° がみとめられるとき，回帰式の全体に一般化最小2乗 (GLS) をあてはめれば，個々の回帰式に別個に通常の最小2乗法を適用してえられる推定値より有効な(分散のより小さい)推定値がみちびかれる．しかしながら，より精密に言えば GLS は u_{it}, u_{js} の分散共分散 σ_{ij} が，既知の定数である場合にのみ適用可能な考え方である．つまりこの場合 GLS 推定値は，未知の σ_{ij} に依存してしまう．したがって，通常 σ_{ij} を σ_{ij} の何らかの推定値でおきかえることが考えられる．
Zellner の提案する σ_{ij} の 2 つの推定値には s_{*ij}, s_{ij} があって，s_{*ij} は個々の回帰式に OLS をひとつひとつあてはめた場合の残差から計算される．この場合第 i 回帰式をとりあげるのであれば，もちろん第 j 回帰式係数 $\beta_{j(s)}$ は 0 であるという情報をもちいている．

他方，s_{ij} は第 i 回帰式において $\beta_{j(s)} = 0$ という情報をもちいることなく，OLS を形式的にあてはめて計算される残差からみちびかれる．こうして以上の状況を整理したうえで，s_{*ij} にもとづく $\beta_{i(s)}$ の係数推定値を Type 1 の結合最小2乗推定値

(JLSE(1))とよび，s_{ij} から計算される推定値を Type 2 の結合最小2乗推定値(JLSE(2))と区分しておくことにしよう．これまでのところ，こうした GLS から計算された JLSE の有限標本に関する性質のうち，あきらかになっているのは以下のような内容である．

(1) 1 次ﾓｰﾒﾝﾄが存在すれば JLSE(1) は不偏となる (Kakwani [1])．

(2) Kmenta-Gilbert [3] のﾓﾝﾃｶﾙﾛ実験の結果は "u_{it}，u_{jt} のあいだの相関があきらかに高いｹｰｽでは，JLSE(1) の分散 $\leqq$ OLSE の分散，となる" 点をﾚﾎﾟｰﾄする ([3] の実験はおおまかに言って，次のような想定にもとづいている．$\sigma_{ii} = \sigma^2$(すべての i)，$\sigma_{ij} = \sigma^2 \rho^*(i \neq j)$，$\rho^* = 0.$，.600，.640，.925，.941)．

(3) 回帰式数が 2，つまり k = 2 のとき，Zellner [8, 9] は JLSE(2) が不偏となる点を示したうえで，JLSE(2) の精密分布，および精密分散を示す．

(4) また，Zellner [8, 9] は次の点を指摘する．つまり，JLSE(1) は JLSE(2) より多くの先験情報をもちいているので，Var(JLSE(1)) $\leqq$ Var(JLSE(2)) だろう．他方 [8] で見るように，誤差項 u_{it}，u_{jt} の相関係数 ρ_{ij} のほとんどの値について Var(JLSE(2)) $\leqq$ Var(OLSE) だから，したがって JLSE(1) の分散は OLSE のそれより小さい．

以下ここでの目的は 2 通りある．はじめに k = 2 の ｹｰｽで JLSE(1) の 2 次までの精密ﾓｰﾒﾝﾄをみちびく．このもっとも単純な場合でさえ，問題が解かれているわけではない．つづいて k が任意($\geqq$ 2) のとき，JLSE(2) の精密分布，および精密分散を計算する．結果を 2. 2 で述べ，証明は 2. 3 であたえる．

2. 2 理論的考察

ここで回帰式の組を

$$(y_1^t, \ldots, y_k^t)^t = \{\mathrm{diag}(X_1, \ldots, X_k)\}(\beta_1^t, \ldots, \beta_k^t)^t + (u_1^t, \ldots, u_k^t)^t$$

と書く．ただし，$\beta_i(l_i \times 1)$ は未知の回帰係数，$X_i(T \times l_i)$ は標本数が T の場合に l_i 種類からなる説明変数行列，そのﾗﾝｸは l_i，$y_i(T \times 1)$ は i 番目の回帰式の従属変数，$u_i(T \times 1)$ は第 i 回帰式の誤差項をあらわす．また以下全体を通して 1°，2° の仮定をおく．

1° 説明変数はﾍﾟｱﾜｲｽﾞに直交する．すなわち $i \neq j$ のとき，$\langle X_i, X_j \rangle = 0$．これは Zellner [8] の仮定に対応する．

2° $(u_{1t}, \ldots, u_{kt})^t$ は t についてたがいに独立，かつ平均 0，分散 $\Sigma = (\sigma_{ij})$ の正規分布にしたがう．さらに Σ は正値定符号．

こうして一般性を失うことなく，i = 1 の回帰式をとりあげると，まず 1°，2° のもとで β_1 の GLSE b_1^* を

$$(2.\ 1)\qquad b_1^* = (X_1^tX_1)^{-1}X_1^ty_1 + \Sigma_{i=2}^{k}(X_1^tX_1)^{-1}X_1^ty_i\sigma^{1i}/\sigma^{11}$$

と書くことができる．ただし $(\sigma^{ij}) = \Sigma^{-1}$．Zellner [7, pp. 351] を見よ．さらに JLSE(1) を考えるには

3° $k = 2,\ l_i = 1,\ \langle X_i, X_i\rangle = 1,\ i = 1, 2;\ T > 2$ を仮定する．

そうすると b_1^* は

$$(2.\ 2)\qquad b_1^* = X_1^ty_1 - X_1^ty_2\sigma_{12}/\sigma_{22}$$

と簡単に書ける．ここで JLSE(1) については，σ_{ij} の推定値として

$$s_{*ij} = \langle e_{*i}, e_{*j}\rangle/T = \langle y_i - X_ib_i(0), y_j - X_jb_j(0)\rangle/T$$

を採用する．ただし $b_i(0)$, i = 1, 2 は β_i の OLSE を表す．あらためて書けば $b_i(0) = \langle X_i, y_i\rangle$ となっている．そうして β_1 の JLSE(1) は (2. 2) の R.H.S. の σ_{ij} を s_{*ij} におきかえることによって計算される．つまり

$$b_1(1) = X_1^ty_1 - X_1^ty_2s_{*12}/s_{*22}$$

となる．

つづいて JLSE(2) の議論に移る．そのためには 3° にかえて 3' $T - l_1 - \ldots - l_k - k > 0$ とする．仮定の 1°，2° はそのままもちいるものとする．ここで若干の計算から (2. 1) の R.H.S. の部分について

$$-(\sigma^{12}, \ldots, \sigma^{1k})/\sigma^{11} = \sigma_1^t\Sigma_{22}^{-1},$$

$$\sigma_1^t = (\sigma_{12}, \ldots, \sigma_{1k})$$

となっている点に気づくとよい．さらにこの R.H.S. の σ_{ij} を s_{ij} に置き換えれば JLSE $b_1(2)$ がみちびかれる．s_{ij} は

$$s_{ij} = \langle e_i, e_j\rangle/T,\ i,j = 1, \ldots, k$$

$$e_i = y_i - \Sigma_{s=1}X_sb_{is}(0)$$

である．ただし，$b_{is}(0)(l_s \times 1) = \langle X_s, X_s\rangle^{-1}\langle X_s, y_i\rangle$; $i, s = 1, \ldots, k$ ($b_{is}(0)$ は y_i が $X_1, \ldots, X_k$ によって説明された場合の OLS 係数推定値になっている)．さらに $b_1(2)$ のﾌｫｰﾑを書くには，$\sigma_1^t \Sigma_{22}^{-1}(1 \times (k-1))$ をその推定値 $s_1^t S_{22}^{-1} = q = (q_2, \ldots, q_k)$ におきかえればよい．そうすると $b_1(2)$ は

$$b_1(2) = (X_1^t X_1)^{-1} X_1^t y_1 - \Sigma_{i=2}^{k} q_i (X_1^t X_1)^{-1} X_1^t y_i$$
$$= b_1(0) - (q^t \otimes I(l_1)) b_0(0)$$

と表現される．ここで $b_0^t(0) = (b_{21}(0), \ldots, b_{k1}^t(0))$，また記号 $q^t \otimes I(l_1)$ は q^t，$I(l_1)$ のｸﾛﾈｯｶｰ積を表す．

いま JLSE $b_1(1)$ は以下の性質を示す．

(1) $b_1(1)(1 \times 1)$ は β_1 の不偏推定値，かつその精密分散は

$$\mathrm{Var}(b_1(1)) = 15\sigma_{11}\rho^2\{(n+5)(n+3)\}^{-1}$$
$$+ \sigma_{11}(1-\rho^2)\{1 + n\{(n+3)(n+1)\}^{-1}\}$$

によってあたえられる．ここで $n = T - 2$，$\rho = \sigma_{12}(\sigma_{11}\sigma_{22})^{-1/2}$ となっている (性質 (1) はより拡張された表現が可能である．第3章を見よ)．すぐ気づくように β_1 の最小2乗推定値 (OLSE) $b_1(0)$ もまた不偏であって，その分散は σ_{11} だから 表 1 でその比，つまり $\mathrm{Var}(b_1(1))/\mathrm{Var}(b_1(0))$ を示す．n，$\mathrm{mod}(\rho)$ の適当な数値を用意し，このﾍﾟｱに対応する分散比を計算した．表 1 から読み取れるのは，だいたい $\mathrm{mod}(\rho) \geqq .3$，$n \geqq 8$ であれば，$b_1(1)$ の分散は $b_1(0)$ のそれより小さくなるという点である (表 1 ～ 4 はまとめて pp. 19 以下にあたえられる)．

つづいて $b_1(2)$ の性質に移る．

(2) いま $n_k = T - l_1 - \ldots - l_k$，$\sigma(k) = \sigma_{11} - \sigma_1^t \Sigma_{22}^{-1} \sigma_1 = \mathrm{Var}(u_{1t} | (u_{2t}, \ldots, u_{kt}))$ としよう．そのとき，$b_1(2)$ の密度 $f(\ )$ は

$$f(b_1(2)) = (2\pi\sigma(k))^{-l(1)/2}(\det X_1^t X_1)^{1/2}\Gamma((n_k+1)/2)\Gamma^{-1}((n_k-k)/2+1)$$
$$\times \Sigma_{i=0}^{\infty}\{-(b_1(2)-\beta_1)^t X_1^t X_1 (b_1(2)-\beta_1)/2\sigma(k)\}^i/i!$$
$$\times \Gamma((n_k+l_1-k)/2+1+i)\Gamma^{-1}((n_k+l_1+1)/2+i)$$

によってあたえられる．

(3) JLSE $b_1(2)$ もまた β_1 の不偏推定値となり，その精密分散共分散を

$$\mathrm{Cov}(b_1(2)) = \sigma(k)(n_k - 1)(n_k - k)^{-1}(X_1^t X_1)^{-1}$$
$$= (\sigma(k)/\sigma_{11})(n_k - 1)(n_k - k)^{-1}\mathrm{Cov}(b_1(0))$$

と書くことができる．ただし $b_1(0)$ は β_1 の OLSE である．$k = 2$ とするとき，性質 (2)，(3) は Zellner [8, pp. 985, pp. 987, pp. 980, 9, pp. 255]の結果に一致する．

ここで $r = (\sigma(k)/\sigma_{11})(n_k - 1)(n_k - k)^{-1}$ によって $b_1(2)$，$b_1(0)$ の分散を比較することができる．Sawa [5] にしたがって $r \leqq 1$ のとき，そのときにのみ $b_1(2)$ は $b_1(0)$ を dominate するという．すぐ気づくように任意の k, l_i, $i = 1, \ldots, k$, $T(< +\infty)$ について，JLSE $b_1(2)$ は OLSE $b_1(0)$ をつねに dominate するとはかぎらない．ただし k, l_i を固定しておいて $T \to +\infty$ とすれば，$r \to \sigma(k)/\sigma_{11}(\leqq 1)$ となる．$k = 2$ のとき，r は $r = (1 - \rho^2)(n_2 - 1)(n_2 - 2)^{-1} = r(2)$ となる．ただし ρ は u_{1t}，u_{2t} の相関係数である．n_2，$\mathrm{mod}(\rho)$ を適当に選んでおいて $r(2)$ の数値を 表 2 に示した．おおまかに言えば，n_2 に無関係に $\mathrm{mod}(\rho) > .3$ のとき，$b_1(2)$ は $b_1(0)$ を dominate する．

つづいて回帰式数 k が大きくなる場合，r がどのように変化するかを見る．ただし l_i，$T(> k + \Sigma_i l_i)$ の値はとめておくものとする．こうしたとき，一般に任意の $j \geqq 2$ について

$$(n_j - 1)/(n_j - j) < (n_{j+1} - 1)/(n_{j+1} - j - 1)$$
$$\sigma(j) \geqq \sigma(j + 1)$$

$\sigma(j)$: $u_{2t}, \ldots, u_{jt}$ をあたえたときの u_{1t} の条件つき分散

が成立する．したがって T, l_i を固定したとしても，σ_{ij} に何らかの制約をおかないかぎり，k の r に対する効果を見ることはできない．こうした点を見るためにたとえば $\sigma_{ii} = \sigma^2 (i = 1, \ldots, k)$，$\sigma_{ij} = \sigma^2\rho^*(i \neq j)$，$l_i = 2\ (i = 1, \ldots, k)$，そうして $T = 30$ とすれば，そのとき r は

$$r^* = (1 - \rho^*)(1 + \rho^*(k - 1))(1 + \rho^*(k - 2))^{-1}$$
$$\times (29 - 2k)(30 - 3k)^{-1}$$

となる（すぐわかるが ρ^* には制約がつく．つまり $\rho^* = \sigma_{ij}(\sigma_{ii}\sigma_{jj})^{-1/2}$ から $\mathrm{mod}(\rho^*) < 1$）．ここで 表 3 は k, ρ^* のいくつかの値に対して r^* の数値をﾘﾎﾟｰﾄする．$\rho^* > .4$ であれば，k が大きくなるとき，r^* の値は小さくなることが読みとれる．こ

こで k は $k \leqq 4$ としてある．ただし，T が十分に大きければもちろん r は$\sigma(k)/\sigma_{11}$だから，この場合は r は k の単調非増加関数となる．最後に $k = 2$, $l_i = 1$, $i = 1, 2$ として，分散比 $Var(b_1(1))/Var(b_1(2))$ の数値を 表 4 で示す．n, mod(ρ) に対応する数値をのせてある．表 4 からすぐわかるように，mod(ρ) < .6 であればほぼ n に関係なく，分散比は 1 より小さくなる．この点は，解析的な側面からは予想されなかったことである．つまり，$b_1(2)$ は Σ の推定において情報の一部分を捨象しているにもかかわらず，$b_1(1)$ より望ましい性質を示す場合もある．

表 1 分散比 $Var(b_1(1))/Var(b_1(0))$

	mod(ρ)									
n	0.	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9
3	1.1250	1.1169	1.0925	1.0519	.9950	.9219	.8325	.7269	.6050	.4669
4	1.1142	1.1055	1.0792	1.0354	.9741	.8952	.7988	.6849	.5535	.4045
5	1.1041	1.0950	1.0675	1.0217	.9575	.8750	.7742	.6550	.5175	.3617
6	1.0952	1.0858	1.0575	1.0103	.9443	.8593	.7555	.6328	.4913	.3309
7	1.0875	1.0779	1.0490	1.0009	.9335	.8469	.7410	.6159	.4715	.3079
8	1.0808	1.0711	1.0418	.9930	.9247	.8368	.7295	.6026	.4562	.2903
9	1.0750	1.0652	1.0356	.9863	.9173	.8286	.7202	.5920	.4441	.2766
10	1.0699	1.0600	1.0302	.9806	.9111	.8217	.7125	.5834	.4344	.2656
11	1.0654	1.0555	1.0255	.9756	.9057	.8158	.7060	.5762	.4264	.2567
12	1.0615	1.0515	1.0214	.9713	.9011	.8109	.7006	.5702	.4198	.2494
13	1.0580	1.0480	1.0178	.9675	.8971	.8065	.6959	.5651	.4142	.2432
14	1.0549	1.0449	1.0146	.9642	.8936	.8028	.6919	.5608	.4095	.2381
15	1.0520	1.0419	1.0116	.9611	.8904	.7994	.6883	.5570	.4054	.2336
16	1.0495	1.0394	1.0091	.9585	.8876	.7965	.6852	.5537	.4019	.2298
17	1.0472	1.0371	1.0067	.9561	.8851	.7939	.6825	.5508	.3988	.2266
18	1.0451	1.0350	1.0046	.9539	.8829	.7916	.6801	.5482	.3961	.2237
19	1.0431	1.0330	1.0026	.9518	.8808	.7895	.6779	.5459	.3937	.2212
20	1.0414	1.0313	1.0008	.9501	.8790	.7876	.6759	.5439	.3916	.2190
25	1.0343	1.0242	.9937	.9429	.8717	.7802	.6684	.5363	.3838	.2110
30	1.0293	1.0192	.9887	.9379	.8667	.7752	.6634	.5313	.3789	.2061
35	1.0255	1.0154	.9849	.9341	.8630	.7716	.6599	.5279	.3755	.2028
40	1.0226	1.0125	.9821	.9313	.8603	.7689	.6573	.5253	.3731	.2006
45	1.0203	1.0102	.9798	.9291	.8581	.7668	.6553	.5234	.3713	.1989

表 2　r(2) の数値

n_2	mod(ρ) 0.	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9
10	1.1250	1.1137	1.0800	1.0237	.9450	.8437	.7200	.5737	.4050	.2137
15	1.0769	1.0661	1.0338	.9799	.9045	.8076	.6892	.5492	.3876	.2046
20	1.0555	1.0449	1.0132	.9605	.8866	.7916	.6755	.5383	.3799	.2005
25	1.0434	1.0329	1.0016	.9494	.8764	.7825	.6677	.5321	.3756	.1982
30	1.0357	1.0253	.9942	.9424	.8699	.7767	.6628	.5282	.3728	.1967
35	1.0303	1.0199	.9890	.9375	.8654	.7727	.6593	.5254	.3709	.1957

表 3 r^* の数値

k	ρ^* 0.	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9
2	1.0416	1.0311	.9999	.9478	.8749	.7812	.6666	.5312	.3749	.1979
3	1.0952	1.0752	1.0220	.9434	.8448	.7300	.6023	.4638	.3162	.1613
4	1.1666	1.1373	1.0665	.9696	.8554	.7291	.5937	.4519	.3050	.1541

表 4 Var(b_1(1))/Var(b_1(2)) の数値

	mod(ρ)									
n	0.	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9
10	.9510	.9517	.9538	.9578	.9641	.9739	.9895	1.0169	1.0725	1.2428
15	.9768	.9773	.9785	.9808	.9844	.9898	.9986	1.0142	1.0459	1.1417
20	.9866	.9869	.9877	.9891	.9914	.9949	1.0005	1.0104	1.0307	1.0922

2. 3　精密ﾓｰﾒﾝﾄおよび分布の計算

ここでさきに述べた結果を証明する. 2. 2 の性質 (1) を言うために, すべての t について

$$w_t = u_{1t} - \rho^* u_{2t},\ u_{2t} = u_{2t},\ \rho^* = \sigma_{12}/\sigma_{22}$$

とすると

$$(w_t,\ u_{2t})^t \sim N((0,\ 0)^t,\ \mathrm{diag}(\tau^2,\ \sigma_{22}))$$

となる. ただし, $\tau^2 = \sigma_{11} - \sigma_{12}^2/\sigma_{22} = \sigma(2)$, そうすると JLSE $b_1(1)$ は $w^t = (w_1,\ \ldots,\ w_T)$, $u_2^t = (u_{21},\ \ldots,\ u_{2T})$ によって

$$b_1(1) = \beta_1 + \rho^*(u_2^t X_1)^3\{u_2^t(I_T - X_2X_2^t)u_2\}^{-1} + X_1^t w - w^t(I_T - X_1X_1^t - X_2X_2^t)u_2 \times X_1^t u_2\{u_2^t(I_T - X_2X_2^t)u_2\}^{-1} \tag{3. 1}$$

と書ける. この (3. 1) の R.H.S. をよく見ると, 第2項以下の 3 種の確率変数は, すべて w, u_2 の odd function となっているのに気づく. また, 3 種それぞれの絶対値の期待値は, T > 2 のときすべて有界である. したがって $E(\mathrm{mod}(b_1(1) - \beta_1)) < +\infty$, そうして $E(b_1(1) - \beta_1) = 0$, つまり $b_1(1)$ は β_1 の不偏推定値となる (この部分の主張はすべてﾚﾌｪﾘｰの指示によっている).

つづいて $b_1(1)$ の分散については以下のように考える. まず

$$\mathrm{Var}(b_1(1)) = \mathrm{Var}_{u(2)}E(b_1(1)|u_2) + E_{u(2)}\mathrm{Var}(b_1(1)|u_2) \tag{3. 2}$$

と書く. ここで $\mathrm{Var}_{u(2)}$ は u_2 に関する分散を意味する. また, $E_{u(2)}$ は u_2 についての期待値を示している. (3. 2) の R.H.S. の第1項を計算するために

$$z = X_1^t u_2 \sigma_{22}^{-1/2},\ W = u_2^t(I_T - X_1X_1^t - X_2X_2^t)u_2\sigma_{22}^{-1}$$

とする. そうして $z \sim N(0,\ 1)$, $W \sim \chi^2(T - 2)$ はたがいに独立となる点に気づくとよい. 例えば, Sawa [4] を見よ.

そのとき u_2 についての $b_1(1)$ の条件付期待値は

$$\begin{aligned} E(b_1(1)|u_2) &= \beta_1 + \rho^*(u_2^t X_1)^3\{u_2^t(I_T - X_2X_2^t)u_2\}^{-1} \\ &= \beta_1 + \rho^*(\sigma_{22})^{1/2}z^3(W + z^2)^{-1} \end{aligned}$$

となる．そうすると Takeuchi [6, pp. 144] の結果によって

(3. 3) $\quad \mathrm{Var}_{u(2)} E(b_1(1) | u_2)$

$$= \rho^{*2} \sigma_{22} E\{z^6 (W + z^2)^{-2}\}$$

$$= \rho^{*2} \sigma_{22} \int_0^\infty s \Gamma^{-1}(2)(1 + 2s)^{-T/2+1}$$

$$\times E\{z^6 \exp(-z^2 s)\} \, ds$$

$$= \rho^{*2} \sigma_{22} \int_0^\infty 15 s (1 + 2s)^{-(T+5)/2} ds$$

$$= \rho^{*2} \sigma_{22} \{15(T + 3)^{-1}(T + 1)^{-1}\}$$

となる．つづいて (3. 2) の R.H.S. の第2項を計算する．はじめに

$$\mathrm{Var}(b_1(1) | u_2)$$

$$= E[\{X_1^t - u_2^t X_1 u_2^t (I_T - X_1 X_1^t - X_2 X_2^t)(u_2^t (I_T - X_2 X_2^t) u_2)^{-1}\}$$

$$\times ww^t \{X_1^t - u_2^t X_1 u_2^t (I_T - X_1 X_1^t - X_2 X_2^t)(u_2^t (I_T - X_2 X_2^t) u_2)^{-1}\} | u_2]$$

$$= \tau^2 (1 + z^2 W (W + z^2)^{-2})$$

ここで $v = z^2/W$ とおき，$\mathrm{Var}(b_1(1)|u_2)$ の u_2 について期待値をとれば

(3. 4) $\quad E_{u(2)} \mathrm{Var}(b_1(1) | u_2)$

$$= \tau^2 (1 + E(v(1 + v)^{-2}))$$

$$= \tau^2 (1 + \int_0^\infty v(1 + v)^{-2} f(v) \, dv)$$

$$= \tau^2 (1 + (T - 2)(T^2 - 1)^{-1})$$

となる．ただし $f(v)$ は v の密度を表し

$$f(v) = \{\Gamma(T/2 - 1/2)\Gamma^{-1}(1/2)\Gamma^{-1}(T/2 - 1)\} v^{-1/2} (1 + v)^{-T/2+1/2}$$

である．したがって (3. 2), (3. 3), (3. 4) から 2. 2 の (1) がみちびかれる．ついでに言っておくと $b_1(1)$ の 3, 4 次ﾓｰﾒﾝﾄは以下のようになる．

$$E(b_1(1) - \beta_1)^3 = 0$$

$$E(b_1(1) - \beta_1)^4 = 3\sigma_{11}^2 \rho^4 \Pi_{j=2}^5 \{(2j + 1)(n + 2j + 1)^{-1}\}$$

$$+ 6\sigma_{11}^2 \rho^2 (1 - \rho^2)\{15 \Pi_{j=1}^2 (n + 2j + 1)^{-1}$$

$$+ n(n + 9)^{-1} \Pi_{j=1}^3 \{(2j + 1)(n + 2j + 1)^{-1}\}\}$$

$$+ 3\sigma_{11}^2 (1 - \rho^2)^2 \{1 + 2n \Pi_{j=0}^1 (n + 2j + 1)^{-1}$$

$$+ 3n(n+2)\Pi_{j=0}^{3}(n+2j+1)^{-1}\}.$$

つぎに性質 (2) の証明に移る．はじめに

$$(b_1^t(0),\ b_0^t(0))^t \sim N((\beta_1^t,\ 0^t)^t,\ \Sigma \otimes (X_1^t X_1)^{-1})$$

と $A = TS \sim W(k,\ \Sigma,\ n_k)$ がたがいに独立となる点を見る．さらに $q^t = s_1^t S_{22}^{-1}$ は Student，かつ $(b_1(0),\ b_0(0))$ とは独立である（ここで $A \sim W(k,\ \Sigma,\ n_k)$ は，$k \times k$ の対称行列 A が分散共分散 Σ，自由度 $n_k(>k)$ の Wishart 分布にしたがうことを意味する．また，$1 \times (k-1)$ の Student 分布については，Kaufman [2] の詳しい議論を見るとよい)．つづいて $b_1(2)$ の密度をみちびくには，以下のような変数変換がのちの展開を容易にする．つまり，$C\Sigma C^t = I_k$ となるような三角行列 C ($c_{ij} = 0,\ i > j;\ c_{ii} > 0$) を導入する．そうすると

$$(b_{*1}^t(0),\ b_{*0}^t(0))^t = (C \otimes I(l_1))(b_1^t(0),\ b_0^t(0))^t$$

$$\sim N((c_{11}\beta_1^t,\ 0^t)^t,\ I_k \otimes (X_1^t X_1)^{-1})$$

$$A_* = CAC^t \sim W(k,\ I_k,\ n_k)$$

となる．さらに

a_{*1}^t, c_1, c^1: A_*, C, C^{-1} の $1 \times (k-1)$ upper-right ﾍﾞｸﾀ

A_{*22}, C_2, C^2: A_*, C, C^{-1} の $(k-1) \times (k-1)$ lower-right 部分行列

とする．そうしておいて $r = A_{*22}^{-1}a_{*1}$ と定めれば，さきの q は

$$q^t = c^{11}r^t(C^2)^{-1} + c^1(C^2)^{-1}$$

と表せる．こうして $b_1(2)$ を $b_{*1}(0)$, $b_{*0}(0)$, r によって以下のように書く．

$$\begin{aligned} b_1(2) &= b_1(0) - (q^t \otimes I(l_1))b_0(0) \\ &= c^{11}b_{*1}(0) + (c^1 \otimes I(l_1))b_{*0}(0) \\ &\quad - \{(c^{11}r^t(C^2)^{-1} + c^1(C^2)^{-1}) \otimes I(l_1)\}(C^2 \otimes I(l_1))\}b_{*0}(0) \\ &= c^{11}b_{*1}(0) - c^{11}(r^t \otimes I(l_1))b_{*0}(0) \end{aligned}$$

ここで $(b_{\square 1},\ r)$ の同時密度を r について積分することにより，$b_{\square 1} = b_1(2)/c^{11}$ の密度をみちびく．いま $(b_{*1}(0),\ b_{*0}(0))$，r もまた，たがいに独立だから，r を固定したときの $b_{\square 1}$ の条件付分布は

$$b_{\square 1} | r \sim N(c_{11}\beta_{11},\ (1 + r^t r)\langle X_1,\ X_1\rangle^{-1})$$

となる．他方 r の条件付でない密度は $\mathrm{const.}(1 + r^t r)^{-(n(k)-1)/2}$，ただし

$$\mathrm{const.} = \Gamma(n_k/2 + 1/2)\pi^{-(k-1)/2}\Gamma^{-1}(n_k/2 + 1 - k/2)$$

である．したがって，$(b_{\square 1},\ r)$ の同時密度は

$$c'(1 + r^t r)^{-(n(k)+l(1)+1)/2},$$

$$\times \exp\{-2^{-1}(1 + r^t r)^{-1}(b_{\square 1} - c_{11}\beta_1)^t\langle X_1,\ X_1\rangle(b_{\square 1} - c_{11}\beta_1)\}$$

となる．ただし $c' = \mathrm{const.}(2\pi)^{-l(1)/2}(\det\langle X_1,\ X_1\rangle)^{1/2}$，ここで指数部分を展開し，Student 分布の性質をもちいれば，$b_{\square 1}$ の密度がみちびかれる．すなわち

$$c'\sum_{i=0}^{\infty}\{-2^{-1}(b_{\square 1} - c_{11}\beta_1)^t\langle X_1,\ X_1\rangle(b_{\square 1} - c_{11}\beta_1)\}^i$$

$$\times (i!)^{-1}\int_R (1 + r^t r)^{-(n(k)+l(1)+2i+1)/2}dr$$

$$= c'\sum_{i=0}\{-2^{-1}(b_{\square 1} - c_{11}\beta_1)^t\langle X_1,\ X_1\rangle(b_{\square 1} - c_{11}\beta_1)\}^i$$

$$\times (i!)^{-1}\pi^{k/2-1/2}\Gamma(2^{-1}(n_k + l_1 - k) + i + 1)$$

$$\times \Gamma^{-1}(2^{-1}(n_k + l_1 + 1) + i)$$

となる．ただし，R はこの場合の積分域を表す．つづいて変数 $b_{\square 1}$ を $b_1(2)$ に移せば，$b_1(2)$ の密度がえられる．ﾔｺﾋﾞｱﾝの絶対値は

$$\mathrm{mod}(J(b_{\square 1} \rightarrow b_1(2))) = (c^{11})^{-l(1)} = \sigma(k)^{-l(1)/2}$$

となっている．

性質 (3) を見るには，$b_1(2) = b_1(0) - (q^t \otimes I(l_1))b_0(0)$ と書いて

$$(b_1^t(0),\ b_0^t(0))^t \sim N((\beta_1^t,\ 0^t)^t,\ \cdot)$$

かつ $(b_1(0),\ b_0(0))$ が q と独立，すべての i について $E(\mathrm{mod}(q_i)) < +\infty$ となる点に気づくとよい．したがって $b_1(2)$ は不偏となる．$b_1(2)$ の分散共分散はまず

(3. 5) $$\mathrm{Cov}(b_1(2)) = (c^{11})^2\mathrm{Cov}(b_{\square 1}) = \sigma(k)\mathrm{Cov}(b_{\square 1})$$

と書ける．さらに r を固定したときの $b_{\square 1}$ の条件付期待値が，r に依存しないことから

(3. 6) $$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(b_{\square 1}) &= E_r\mathrm{Cov}(b_{\square 1}|r)\\ &= E\{(1 + r^t r)\langle X_1,\ X_1\rangle^{-1}\}\\ &= \langle X_1,\ X_1\rangle^{-1}\int_R \mathrm{const.}(1 + r^t r)^{-(n(k)-1)/2}dr\\ &= \langle X_1,\ X_1\rangle^{-1}(n_k - 1)(n_k - k)^{-1}\end{aligned}$$

となる．こうして性質 (3) の後半の部分は，(3. 5)，(3. 6) からすぐわかる．

参考文献

[1] Kakwani, N. C., "The Unbiasedness of Zellner's Seemingly Unrelated Regression Equations Estimators," Journal of the American Statistical Association , 62, 1967, pp. 141-142.

[2] Kaufman, G. M., "Conditional Prediction and Unbiasedness in Structural Equations," Econometrica, 37, 1969, pp. 44-49.

[3] Kmenta, J. and R. F. Gilbert, "Small Sample Properties of Alternative Estimators of Seemingly Unrelated Regressions," Journal of the American Statistical Association, 63, 1968, pp. 1180-1200.

[4] Sawa, T., Foundations of Econometrics, Tokyo, Toyo Keizai Shinposha, 1970 (In Japanese).「計量経済学の基礎」東洋経済新報社.

[5] ——, "Almost Unbiased Estimator in Simultaneous Equations Systems," International Economic Review, 14, 1973, pp. 97-106.

[6] Takeuchi, K., Contributions to the Theory of Statistical Inference in Econometrics, Tokyo, Toyo Keizai Shinposha, 1972(In Japanese).「計量経済学の研究」東洋経済新報社.

[7] Zellner, A., "An Efficient Method of Estimating Seemingly Unrelated Regressions and Tests for Aggregation Bias," Journal of the American Statistical Association, 57, 1962, pp. 348-368.

[8] ——, "Estimators for Seemingly Unrelated Regression Equations: Some Exact Finite Sample Results,"Journal of the American Statistical Association, 58, 1963, pp. 977-992.

[9] ——, Corrigenda, Journal of the American Statistical Association, 67, 1972, pp. 255.

第 3 章　zero 制約を組み入れる結合最小2乗推定値

3．1　問題の再検討

たがいにｺﾘﾚｲﾄするような誤差項をもつ次の 2-方程式体系を考える．

$$(y_1^t,\ y_2^t)^t = \{\mathrm{diag}(X_1,\ X_2)\}(\beta_1^t,\ \beta_2^t)^t + (u_1^t,\ u_2^t)^t$$

ただし，$i = 1,\ 2$ に対して β_i は $l_i \times 1$ の係数ﾍﾞｸﾀ; X_i は $T \times l_i$, rank が l_i の説明変数行列; y_i, u_i はそれぞれ $T \times 1$ の従属変数ﾍﾞｸﾀ，誤差項ﾍﾞｸﾀとする．さらに以下のことを仮定する．

1' $(u_{1t},\ u_{2t})^t$, $t = 1, \ldots, T$ はたがいに独立，平均 $(0,\ 0)^t$，分散共分散 (σ_{ij})の正規分布にしたがう; (σ_{ij}) は正値定符号かつ未知

2' $\langle X_1,\ X_2\rangle = 0$，そうして $T - l_1 - l_2 > 0$ (2' は以下で議論される推定値のﾓｰﾒﾝﾄ，密度の derivation を容易にするための仮定である)．

このような場合に Zellner [4, pp. 351-352] は，β_i $i = 1,\ 2$ の推定値として一致性をみたし，さらにその漸近分散(漸近分布の分散)が，通常の最小2乗推定値 (OLSE) の分散より小さくなるような推定値を提案する (この推定値を Type 1 の結合最小2乗推定値とよび，β_1 については JLSE $b_1(1)$ と表すことにする)．

標本数 T が有限のとき，JLSE $b_1(1)$ の性質あまりわかっていないように思われる．Srivastava [2] は T^{-2} のｵｰﾀﾞｰまでをとって，JLSE $b_1(1)$ の分散共分散行列の近似式をあたえている (Srivastava の公式は，近似しようとする $b_1(1)$ の exact な分散共分散が存在するとき，初めてその意味を持つ)．第2章では，1'，2' の仮定に $l_i = 1$, $\langle X_i,\ X_i\rangle = 1$, $i = 1,\ 2$ を加えて，JLSE $b_1(1)$ の 4 次までの exact なﾓｰﾒﾝﾄをあたえた (β_1 のまわりの奇数次のﾓｰﾒﾝﾄが存在すればそれが 0 となることは，すでに知られている．なお 4 次ﾓｰﾒﾝﾄについての証明は，explicit にはあたえられなかった)．さらに，任意の l_i, $\langle X_i,\ X_i\rangle$, $i = 1,\ 2$ に対して，$b_1(1)(l_1 \times 1)$ の分散共分散を証明することなくあたえておいた (Kataoka [1] を参照)．

以下では $b_1(1)$ を含むような推定値のあるｸﾗｽを考え，そのﾓｰﾒﾝﾄを正確に計算することによって，$T < +\infty$ のとき，このようなｸﾗｽに入る推定値の性質を調べる．つづいて，$l_i = 1$, $\langle X_i,\ X_i\rangle = 1$, $i = 1,\ 2$ において，このｸﾗｽのﾒﾝﾊﾞｰである $b_1(1)$ の標本分布を

explicit にあたえることにする．

3．2 主要な結果

一般性を失うことなく，1 番目の方程式の係数 β_1 の推定に関心があるものとすれば，1'，2' を仮定するとき，β_1 の JLSE $b_1(1)$ を次のように表すことができる (Srivastava [2, pp. 484-485], Zellner [4, pp. 352])．

$$b_1(1) = (X_1^t X_1)^{-1} X_1^t y_1 - s_{*12} s_{*22}^{-1} (X_1^t X_1)^{-1} X_1^t y_2$$

ただし，

$$s_{*ij} = \langle e_{*i},\ e_{*j} \rangle / T = \langle y_i - X_i b_i(0),\ y_j - X_j b_j(0) \rangle / T \quad i, j = 1,\ 2$$

ここで $b_s(0)$，$s = i,\ j$ は β_s の OLSE を表し，$b_s(0) = \langle X_s,\ X_s \rangle^{-1} \langle X_s,\ y_s \rangle$である．

いま，第2章あるいは Kataoka [1, pp. 39-41] をもう一度振り返ってみると，T と $\mathrm{mod}(\rho) = \mathrm{mod}(\sigma_{12})(\sigma_{11}\sigma_{22})^{-1/2}$ のほとんどの値に対して，$b_1(1)$ の分散は，OLSE $b_1(0)$ の分散より小さくなるけれども，$\mathrm{mod}(\rho)$ が大きいとき，それは期待したほど小さくない．さらに $b_1(1)$ の方が直観的に考えて，Type 2 の結合最小2乗推定値 $b_1(2)$ の方より良さそうに思われるにもかかわらず，かならずしもつねにそうはならなかった．
$b_1(2)$ は，σ_{ij} の推定値に s_{*ij} のかわりに，回帰式についての情報を一部無視した s_{ij} を選ぶ．いま，2' を仮定すれば，$s_{*ij} = s_{ij}$，

$$s_{ii} = T^{-1} y_i^t (I - X_1 (X_1^t X_1)^{-1} X_1^t - X_2 (X_2^t X_2)^{-1} X_2^t) y_i, \quad i = 1,\ 2$$

そうして

$$b_1(2) = (X_1^t X_1)^{-1} X_1^t y_1 - s_{12} s_{22}^{-1} (X_1^t X_1)^{-1} X_1^t y_2$$

である．$\mathrm{mod}(\rho)$ が 1 に近く，T が小さいときには，$b_1(1)$ の分散は $b_1(2)$ のそれより大きくなった．その 1 つの理由は，$b_1(2)$ においては，s_{12}/s_{22} が $\sigma_{12}/\sigma_{22} = \rho^*$ の不偏推定値になるのに対して，$b_1(1)$ の s_{*12}/s_{*22} は ρ^* の不偏推定値にはならないという事実によるものと思われる．実際，

$$E(s_{*12} s_{*22}^{-1}) = \rho^* [1 - E\{u_2^t X_1 (X_1^t X_1)^{-1} X_1^t u_2 (u_2^t (I_T - X_2 (X_2^t X_2)^{-1} X_2^t) u_2)^{-1}\}]$$
$$= \rho^* (T - l_1 - l_2)(T - l_2)^{-1} (< \rho^*)$$

となるから，s_{*12}/s_{*22} のかわりに $(T - l_1 - l_2)^{-1}(T - l_2) s_{*12}/s_{*22}$ とすれば，それ

は ρ^* の不偏推定値となる．さらにより一般的には，ある定数 $c(>0)$ を選んで，$c \times s_{*12}/s_{*22}$ としてもよい．言いかえればそれは，$b_1(1)$ を含む推定値のあるクラス，

$$b_1(1(c)) = (X_1^t X_1)^{-1} X_1^t y_1 - c s_{*12} s_{*22}^{-1} (X_1^t X_1)^{-1} X_1^t y_2$$

を考えることに等しい．$c = 1$ のとき，$b_1(1(1)) = b_1(1)$ となる．このことは，s_{*ij}，$i, j = 1, 2$ の推定値につねに $\langle e_{*i}, e_{*j}\rangle/T$ を選ぶのではなく，$\langle e_{*i}, e_{*j}\rangle/T$ の T のかわりに，T, l_1, l_2, X_1, X_2 の 1 次関数をもって来ると考えてもよい．

いま，このような推定値のクラス $b_1(1(c))$ は次の性質を持つ（証明は 3．3 であたえられる）．

(1) $b_1(1(c))$ は β_1 の不偏推定値となり，その分散共分散は，

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}\{b_1(1(c))\} = \{&(1-c)^2\rho^2 + 2c(1-c)\rho^2(l_1+2)(T-l_2+2)^{-1} \\
&+ c^2\rho^2(l_1+2)(l_1+4)(T-l_2+4)^{-1}(T-l_2+2)^{-1} \\
&+ \{1 + c^2(T-l_1-l_2)(T-l_2+2)^{-1}(T-l_2)^{-1}\} \\
&\times (1-\rho^2)\}\sigma_{11}(X_1^t X_1)^{-1} \\
= \{&g(c)\}\mathrm{Cov}(b_1(0)) \\
= \{&g(c, 1) + g(c, 2)\}\mathrm{Cov}(b_1(0))
\end{aligned}$$

となる．ただし，$\rho = \sigma_{12}(\sigma_{11}\sigma_{22})^{-1/2}$，$b_1(0)$ は β_1 の OLSE，$g(c)$ ははじめの式の右辺のカッコ｛ ｝のなかの係数を，$g(c, 2)$ はカッコ｛ ｝のなかの第4項を表す．そして，$g(c, 1) = g(c) - g(c, 2)$ である．

ここで $\mathrm{Cov}\{b_1(1(c))\}$ を小さくするには，$g(c)$ ができるだけ小さくなるように，c を選べばよい．いま，$g(c)$ を最小にする c を，ρ に無関係に選ぶことはできないが（$g(c)$ を最小にする c の値は，$\mathrm{mod}(\rho)$ が大きくなれば大きくなる），$g(c, 1)$ を最小にする c は，$1 + (l_1+2)(T-l_1-l_2+2)^{-1} = c^*$ となる．一方，$g(c, 2)$ を最小にするには，c をできるだけ小さくとればよいから，考えられる c の範囲は，$0 < c \leqq c^*$ となる．一応簡単な値として，$c = 1$ を選べば，

$$b_1(1(1)) = b_1(1)$$

$$\begin{aligned}
g(1) = &\rho^2(l_1+2)(l_1+4)(T-l_2+4)^{-1}(T-l_2+2)^{-1} \\
&+ (1-\rho^2)(1 + (T-l_1-l_2)(T-l_2+2)^{-1}(T-l_2)^{-1})
\end{aligned}$$

となる（Kataoka [1, pp. 38]）．$\mathrm{mod}(\rho) = 0.(0.1)0.9$; $T = 10, 20$; $l_i = 1, 2$, $i =$

1, 2 に対する $g(1)$ の値を，表 1 であたえておく（$l_1 = l_2 = 1$ のときの $g(1)$ は，すでに [1, pp. 39] であたえられている）．大まかにいって，$\mathrm{mod}(\rho) \geqq .3$ に対して $g(1)$ は 1 より小さくなる．すなわち，JLSE $b_1(1(1))$ は OLSE $b_1(0)$ を dominate する．

mod(ρ) が 1 に近いときには，$c = c^*$ を選ぶことによって，$g(c)$ の値を $g(1)$ よりもう少し小さくすることができる．$c = c^*$ に対して

$$
\begin{aligned}
g(c^*) = {} & 2\rho^2(l_1 + 2)(T - l_1 - l_2 + 2)^{-1}(T - l_2 + 2)^{-1} \\
& + (1 - \rho^2)\{1 + (T - l_1 - l_2)(T - l_2 + 2)^{-1}(T - l_2)^{-1} \\
& \times (T - l_2 + 4)^2(T - l_1 - l_2 + 2)^{-2}\}
\end{aligned}
$$

となる．ここで $g(1)$ のときと同じ mod(ρ)，T，l_i の値を選んで，$g(c^*)$ の値をあたえる（表 2）．mod(ρ) の大きい値に対して，たしかに $g(1) > g(c^*)$ となっていることがわかる．表 2 で * の付いている $g(c^*)$ の値は，$g(1) > g(c^*)$ となるような値である．$c \times s_{\cdot 12}/s_{\cdot 22}$ が σ_{12}/σ_{22} の不偏推定値になるように，c に $1 + l_1/(T - l_1 - l_2) = c^*$ をとれば，$T - 2l_1 - l_2 \geqq 0$ のとき，$c^* \geqq c^*$ であることから，1 に近い mod(ρ) の値に対しては，$g(c^*) < g(c^*)$ となるけれども，mod(ρ) が小さければ，$g(c^*) > g(c^*)$ となる．いずれにせよ，mod(ρ) が大きければ，$c = 1$ より $c = c^*$，c^* を選んだほうがよいように思われる．

(2) 3' $l_i = 1$，$\langle X_i, X_i \rangle = 1$，$i = 1, 2$ を仮定するとき，β_1 のまわりの $b_1(1(c))$ の 2r 次，r = 0, 1, ... のﾓｰﾒﾝﾄは次のようになる．

$$
\begin{aligned}
E(b_1(1(c)) - \beta_1)^{2r} = {} & \Sigma_{j=0}^{r}\,{}_{2r}C_{2j}\, a^{2r-2j}\, \tau^{2j}\, \pi^{-1}\, 2^{r}\, \Gamma(j + 1/2) \\
& \times \Gamma^{-1}(n/2)\,\Gamma(r - j + n/2 + 1/2) \\
& \times \Sigma_{t=0}^{j}\,{}_{j}C_{t}\{\Sigma_{s=0}^{2r-2j}\,{}_{2r-2j}C_{s} \\
& \times B(r - j + s + t + 1/2,\ t + n/2) \\
& \times (1 - c)^{2r-2j-s} c^{s+2t}\}
\end{aligned}
$$

ただし，$a = \rho(\sigma_{11})^{1/2}$，$\tau^2 = \sigma_{11}(1 - \rho^2)$，$n = T - 2$，B( ) はﾍﾞｰﾀ関数である．$c = 1$ のとき，上のｶｯｺ { } の部分は $B(3(r - j) + t + 1/2,\ t + n/2)$ となる．$c = 1$ で $r = 1, 2$ とすれば，このﾓｰﾒﾝﾄは Kataoka [1, pp. 38, pp. 42] であたえられる表現に一致する．

(3) 3' において $c = 1$ のとき，$b_1(1(1))(= b_1(1))$ の密度は

$$(2\pi\tau^2)^{-1/2}\exp\{-(b_1(1) - \beta_1)^2/2\tau^2\}$$

$$\times \sum_{j,k=0}^{\infty}(-1)^k(-a^2/\tau^2)^j(k!j!)^{-1}$$

$$\times (n/2)_k(j + 1/2)_k(1/2)_{k+3j}/(j + n/2 + 1/2)_{2k+2j}$$

$$\times \sum_{s=0}^{j+k}\{(1/2)_s\}^{-1}(-j - k)^s((b_1(1) - \beta_1)/2\tau^2)^s(s!)^{-1}$$

となる．ただし，$(z)_s = z(z + 1) \ldots (z + s - 1)$，$(z)_0 = 1$．$1 \neq c(> 0)$ のとき，$b_1(1(c))$ の密度を (3) と同じような形式に表すことができるが，それは見通しのよいものではないので省略する．

表 1　g(1) の値

	mod(ρ)									
	0.	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9
$l_1=1, l_2=2$; T=10	1.0875	1.0778	1.0490	1.0008	.9335	.8468	.7410	.6158	.4715	.3078
T=20	1.0472	1.0370	1.0066	.9560	.8850	.7939	.6824	.5507	.3987	.2342
$l_1=2, l_2=1$; T=10	1.0707	1.0615	1.0345	.9894	.9262	.8449	.7456	.6282	.4928	.3393
T=20	1.0426	1.0326	1.0028	.9532	.8837	.7943	.6851	.5560	.4070	.2382
$l_1=l_2=2$; T=20	1.0444	1.0344	1.0047	.9553	.8860	.7969	.6880	.5593	.4108	.2425

表 2 $g(c^*)$ の値

		mod(ρ)									
		0.	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9
$l_1=l_2=1$;	T=10	1.1365	1.1257	1.0932	1.0391	.9634	.8660	.7470	.6063	.4440*	.2601*
	T=20	1.0596	1.0491	1.0178	.9655	.8923	.7983	.6833	.5474*	.3906*	.2129*
$l_1=1, l_2=2$;	T=10	1.1555	1.1446	1.1119	1.0575	.9813	.8833	.7635	.6219	.4586*	.2735*
	T=20	1.0633	1.0528	1.0214	.9690	.8957	.8014	.6861	.5500*	.3928*	.2148*
$l_1=2, l_2=1$;	T=10	1.1475	1.1368	1.1048	1.0514	.9768	.8808	.7634	.6248*	.4648*	.2834*
	T=20	1.0624	1.0519	1.0207	.9686	.8956	.8018	.6871	.5516*	.3953*	.2180*
$l_1=l_2=2$;	T=20	1.0663	1.0559	1.0246	.9723	.8993	.8053	.6904	.5547*	.3981*	.2206*

3. 3 計算手続き

ここで 3. 2 に述べた結果を証明する.

$$w_t = u_{1t} - \rho^* u_{2t},\ u_{2t} = u_{2t},\ t = 1, \ldots, T$$

$$\rho^* = \sigma_{12}/\sigma_{22}$$

とすれば,

$$(w_t,\ u_{2t})^t \sim N((0,\ 0)^t,\ \mathrm{diag}(\tau^2,\ \sigma_{22}))$$

となる. ただし, $\tau^2 = \sigma_{11} - \sigma_{12}^2/\sigma_{22}$ である. $b_1(1(c))$ を $w^t = (w_1, \ldots, w_T)$, $u_2^t = (u_{21}, \ldots, u_{2T})$ によって表せば,

$$(3.\ 1) \qquad b_1(1(c)) = \beta_1 + \rho^*(1 - c)SS^tX_1^tu_2 + h^t(u_2)w$$
$$+ c\rho^* SS^tX_1^tu_2u_2^tX_1SS^tX_1^tu_2\{u_2^t(I_T - X_2(X_2^tX_2)^{-1}X_2^t)u_2\}^{-1}$$

となる. ただし, S は $\langle X_1,\ X_1\rangle^{-1} = SS^t$ となるような $l_1 \times l_1$ の非特異行列, $h^t(u_2)$ は

$$(3.\ 2) \qquad h^t(u_2) = SS^tX_1^t - cSS^tX_1^tu_2u_2^t$$
$$\times \{I - X_1SS^tX_1^t - X_2(X_2X_2^t)^{-1}X_2^t\}\{u_2^t\{I_T - X_2(X_2^tX_2)^{-1}X_2^t\}u_2\}^{-1}$$

である. いま, $E(b_1(1(c))) = \beta_1$ となることは容易にわかる. $b_1(1(c))$ の分散共分散は次のようにして求めることができる.

$$(3.\ 3) \qquad \mathrm{Cov}(b_1(1(c))) = \mathrm{Cov}_{u(2)}E(b_1(1(c))|u_2) + E_{u(2)}\mathrm{Cov}(b_1(1(c))|u_2),$$

(3. 3) の R.H.S. の第1項を計算するために,

$$z = S^tX_1^tu_2\sigma_{22}^{-1/2}$$

$$W = u_2^t\{I - X_1SS^tX_1^t - X_2(X_2^tX_2)^{-1}X_2^t\}u_2^t\sigma_{22}^{-1}$$

とすれば, $z \sim N(0,\ I_{l(1)}) \perp W \sim \chi^2(T - l_1 - l_2)$ となる. ただし, 記号 $\perp$ は z と W が独立に分布することを意味する. いま, $l_1 = p$, $T - l_1 - l_2 = n'$ としておく. そうすると, u_2 をあたえたときの $b_1(1(c))$ の期待値は, z と W によって

$$E(b_1(1(c))|u_2) = \beta_1 + (1 - c)\rho^*\sigma_{22}^{1/2}Sz + c\rho^*\sigma_{22}^{1/2}Szz^tz(W + z^tz)^{-1}$$

と表すことができる. したがって, (3. 3) の R.H.S. の第1項は,

$$(3.\ 4) \qquad \mathrm{Cov}_{u(2)}E(b_1(1(c))|u_2) = (1 - c)^2\rho^{*2}\sigma_{22}SE(zz^t)S^t$$

$$+ 2c(1 - c)\rho^{*2}\sigma_{22}SE\{zz^tzz^t(W + z^tz)^{-1}\}S^t$$

$$+ c^2\rho^{*2}\sigma_{22}SE\{z(z^tz)^2z^t(W + z^tz)^{-2}\}S^t$$

となる．いま，(3. 4)，第3項の E{ } の i, j 要素を evaluate するために，次の公式をもちいる．これは，竹内 [3, pp. 144] のﾚﾝﾏの系としてみちびかれる．すなわち，

(3. 5) $$E\{z_i(z^tz)^2z_j(W + z^tz)^{-2}\} = \int_0^\infty r(1 + 2r)^{-n'/2} \times E\{z_i(z^tz)^2z_j\exp(-z^tzr)\}\, dr$$

ここで R.H.S. の期待値 E{ } の部分は，

$$(1 + 2r)^{-3-p/2}\delta_{ij}(p + 2)(p + 4).$$

したがって，(3. 5) の R.H.S. は，

(3. 6) $$\delta_{ij}(p + 2)(p + 4)(n' + p + 4)^{-1}(n' + p + 2)^{-1}$$

となる．ただし，$\delta_{ij} = 1$, $(i = j)$; $\delta_{ij} = 0$, $(i \neq j)$ である．

同様にして，(3. 4) の第2項の期待値の部分を計算することができる．その i, j 要素は

(3. 7) $$E\{z_i(z^tz)z_j(W + z^tz)^{-1}\} = \int_0^\infty (1 + 2r)^{-n'/2} \times E\{z_iz^tzz_j\exp(-z^tzr)\}\, dr = \delta_{ij}(p + 2)(n' + p + 2)^{-1}$$

となる．

次に，(3. 3) の R.H.S. の第2項を計算する．

(3. 8) $$E_{u(2)}Cov(b_1(1(c))|u_2) = E_{u(2)}(h^t(u_2)ww^th(u_2)|u_2) = \tau^2\{SS^t + c^2SE\{zz^tW(W + z^tz)^{-2}\}S^t\}$$

となる．ここで，$h^t(u_2)$ は (3. 2) で定義される u_2 の関数である．いま，$zW^{-1/2} = y$ とすると，y の密度は $c(n')(1 + y^ty)^{-n'/2-p/2} = f_{n'}(y)$,

$$c(n') = \Gamma(n'/2 + p/2)\Gamma^{-1}(n'/2)\pi^{-p/2},$$

そうして，(3. 8) の E{ } の部分は $E\{yy^t(1 + y^ty)^{-2}\}$ となり，その i, j 要素は

(3. 9) $$\int (yy^t)_{ij}c(n')(1 + y^ty)^{-(n'+p)/2-2}dy = (1/c(n' + 4))\int (yy^t)_{ij}f_{(n'+4)}(y)\, dy$$

となる．ここで，(3. 9) の最後の積分の部分は，y が密度 $f_{n'+4}$ を持つときの y(p x 1) の分散共分散(= $\delta_{ij}(n' + 2)^{-1}$) となる．ゆえに，このことと (3. 3) から(3. 9)

までをあわせて，3. 2 の (1) を得る．

次に，(2)，(3) を示すために，仮定 3' をみたす $h^t(u_2)$ を $h'^t(u_2)$ とする．3' のもとで，

$$X_1^t u_2 \sigma_{22}^{-1/2} = z \sim N(0,\ 1)$$

$$u_2^t(I - X_1X_1^t - X_2X_2^t)u_2/\sigma_{22} = W \sim \chi^2(n),\ n = T - 2$$

$$z \perp W$$

となる．そうすると，(3. 1) から $E(b_1(1(c)) - \beta_1)^{2r}$，$r = 0,\ 1,\ \ldots$ は z，W，h'，w によって，次のように表される．

$$E(b_1(1(c)) - \beta_1)^{2r}$$

$$= E\{(1 - c)\rho^* \sigma_{22}^{1/2} z + c\rho^* \sigma_{22}^{1/2} z^3 (W + z^2)^{-1} + h'^t(u_2)w\}^{2r}$$

ここで，R.H.S. の期待値のなかを 2 項展開し，$E\{(h'^t(u_2)w)^i | u_2\}$，$i = 0,\ \ldots,\ 2r$ を evaluate して整理すれば，求めるﾓｰﾒﾝﾄは

(3. 10) $$\Sigma_{j=0}^{r}\ {}_{2r}C_{2j}(\rho^{*2}\sigma_{22})^{r-j}(2\tau^2)^j \pi^{-1/2}$$

$$\times\ E\{((1 - c)z + cz^3(W + z^2)^{-1})^{2r-2j}(1 + c^2z^2W(W + z^2)^{-2})^j\}$$

となる．(3. 10) の E{ } は

(3. 11) $$\Sigma_{s=0}^{2r-2j} \Sigma_{t=0}^{j}\ {}_{2r-2j}C_s\ {}_jC_t (1 - c)^{2r-2j-s} c^{s+2t}$$

$$\times\ E\{z^{2(r-j+s+t)}W^t(W + z^2)^{-s-2t}\}$$

となり，これは次のﾚﾝﾏによって計算することができる．

〈ﾚﾝﾏ〉 $W \sim \chi^2(n) \perp v \sim \chi^2(m)$; $a, b, c = 0,\ 1,\ \ldots$ のとき，

$$E\{W^a v^b (W + v)^{-c}\} = 2^{a+b-c}(m/2)_b(n/2)_a\{(a + b - c + n/2 + m/2)_c\}^{-1}$$

ただし，$a + b + n/2 + m/2 > c$ である．

〈証明〉 上の L.H.S. は const. x ($W \sim \chi^2(2a + n) \perp v \sim \chi^2(2b + m)$ のときの $(W + v)^{-c}$ の期待値) となる． Q.E.D.

したがって，ﾚﾝﾏの (n, m, a, b, c) を (n, 1, t, r - j + s + t, s + 2t) に置きかえて，(3. 11) の期待値の部分を計算することができる．このことと (3. 10)，(3. 11) から (2) を得る．

いま，c = 1 のとき (3' を仮定する)，$b_1(1(c)) - \beta_1 = b$ として b の密度は

$$\int\int f_1(b|(z, W)) f_2(z) f_3(W)\, dzdW$$

となる．f_i $i = 1, 2, 3$ はそれぞれ b (z, W について条件付きの)，z, W の密度関数を表すものとする．ここで若干の計算により，b の密度は

$$(3.12)\quad c^* \sum_{t=0}^{\infty} (-1/2\tau^2)^t (t!)^{-1}$$

$$\times \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{t} (t + 1/2)_k (-1)^k (k!)^{-1} {}_{2t}C_{2j}\, b^{2t-2j} a^{2j}$$

$$\times \int\int z^{2k+6j} W^k (W + z^2)^{-2k-2j} f_2(z) f_3(W)\, dzdW$$

となる．ただし，$c^* = (2\pi\tau^2)^{-1/2}$, $a = \rho^*(\sigma_{22})^{1/2}$ である．(3. 12) の積分の部分は，さきのﾚﾝﾏによって計算することができる．そうして，得られた b の密度の power series expression の suffix を書きかえ，${}_1F_1(c - a, c; -z) = \exp(-z)\,{}_1F_1(a, c; z)$ によって整理すれば，(3) がみちびかれる．ただし，

$${}_1F_1(a, c; z) = \sum_{s=0}^{\infty} (a)_s (c)_s^{-1} (s!)^{-1} z^s,\quad c \neq 0, -1, \ldots .$$

参考文献

[1] Kataoka, Y., "The Exact Finite Sample Distribution of Joint Least Squares Estimators for Seemingly Unrelated Regression Equations," Economic Studies Quarterly, 25, 1974, pp. 36-44.

[2] Srivastava, V. K., "The Efficiency of Estimating Seemingly Unrelated Regression Equations," Annals of the Institute of Statistical Mathematics, 22, 1970, pp. 483-493.

[3] 竹内啓「計量経済学の研究」東洋経済新報社, 1972年.

[4] Zellner, A., "An Efficient Method of Estimating Seemingly Unrelated Regressions and Tests for Aggregation Bias," Journal of the American Statistical Association, 57, 1962, pp. 348-368.

第 4 章　平均に近接するような調整をともなう Stein 推定値

4. 1　問題および仮定

最尤推定値 $z^t(1 \times k) = (z_1, \ldots, z_k)$ が $N(\theta, sI)$, $s(1 \times 1) > 0$ にしたがうものとしよう．このとき Stein の提案する推定値 $\delta_i = \{1 - (k - 2)s/\langle z, z\rangle\}z_i$ は risk function $\Sigma_i E(\mathrm{estimate}(i) - \theta_i)^2$ のもとで，z_i より一様によくなることが知られていたが (uniformly better)，Stein 推定値の有限標本分布そのものが，計算されたわけではなかった．

ところが最近，Phillips [4] は fractional calculus の導入によって，Stein 推定値の密度をみちびくことに成功した．この pdf そのものはｵﾍﾟﾚｰﾀを含む級数の形をとるので，実用の点から見ればおどろくにはあたらない．とはいえ，推定値の密度の関数形を整理してみたり，形そのものに適当な解釈をあたえることを可能にした，という点において Phillips のｱﾌﾟﾛｰﾁは評価されてよい．したがっていま，以上をふまえて，ここでは次のような内容を展開する．つまり，Stein 推定値とよばれるものには数多くの variation が存在するが，その 1 つとして，Efron-Morris [1] のﾚﾎﾟｰﾄする Stein 推定値は，

(1. 1)　　$\iota_i = z^* + \{1 - (k - 3)s/S^*\}(z_i - z^*)$, s: stochastic でもよい

z^*: z_i　$i = 1, \ldots, k$ の標本平均

$S^* = \Sigma_i(z_i - z^*)^2$

と書ける．こうした推定値は $\mathrm{mod}(\theta_i)$ が大きい場合でさえも，θ_i, θ_j があまりちがわなければ，よい性質を保持するのがわかっている．したがって，4. 3 〜 4 で ι_i の特性関数，2 次ﾓｰﾒﾝﾄ，密度をみちびく．なお，話の順序として，1° s が nonstochastic でまず δ_i の分布を考える．つづいて，s: stochastic に移り，次に 2° s: nonstochastic のときの ι_i，そうして stochastic s についての ι_i の議論で話の全体をおえることにしてある．以上で新しくわかった点は，s: stochastic, nonstochastic いずれにせよ，δ_i, ι_i の特性関数 cf( ) の形にあきらかなちがいは見られるが，この 2 つの cf(t) とも，closed form で表現することが可能であるという点にある (正確に言えば，Phillips [4] は s: stochastic で δ_i の cf, pdf を考えた．また，以下ですぐわかるが，s: nonstochastic の状況の方が，よりあつかいにくいときもある．さらに今後のﾘｻｰﾁの方向として，ι_i の S^* を S^* + const. x s というように，変形の変形を考

えることも，もちろん可能である)．

4．2　通常の Stein 推定値

いま，$z_i \sim N(\theta_i, s)$ として $\delta_i = (1 - (k - 2)sS^{-1})z_i$ の分布を考える．ただし，$S = \langle z, z\rangle$，そうして，z_i $i = 1, \ldots, k$ はたがいに independent とする．まず δ_i の特性関数は

(2．1)　$cf(t) = E\{\exp(it\delta_i)\}$

$$= \int \exp(itz_i - ictz_i/S)pdf(z)\,dz$$

となる．ただし $c = (k - 2)s$，ここで (2．1) において

$$\exp(itz_i - itcz_i/S) = \exp(itl_i^t d_x - ictq_x l_i^t d_x)\exp\langle x, x\rangle|x=0$$

と書く．この d_x は微分ｵﾍﾟﾚﾀ，q_x は $q_x = \langle d_x, d_x\rangle^{-1}$ を表し，以下 suffix の x を省略することもある．さらに，$l_i(k \times 1)$ は i 番目の要素のみが 1，それ以外はすべて 0 となっている．いま，積分

(2．1.1)　$\int \exp\langle x, z\rangle pdf(z)\,dz$

は

$$x^t z - (z - \theta)^t(z - \theta)/2s = -\{z - (\theta + sx)\}^t\{z - (\theta + sx)\}/2s$$
$$- m/2s + (\theta + sx)^t(\theta + sx)/2s$$

，$m = \langle\theta, \theta\rangle$，から

$$(2.\ 1.1) = \exp((x^t xs + 2x^t\theta)/2).$$

したがって $cf(t)$ は

(2．2)　$cf(t) = \exp(itl_i^t d_x - ictq_x l_i^t d_x)\exp(sx^t x/2 + x^t\theta)|x=0,$

もう少し整理すれば

(2．3)　$cf(t) = \exp(itl_i^t d_x(1 - cq_x))\exp(sx^t x/2 + x^t\theta)|x=0$

となる．いま，この $cf(t)$ から δ_i の期待値を計算すれば，

$$d_t cf(t) = il_i^t d_x(1 - cq_x)\exp(\quad)\exp(\quad)|x=0,$$

d_t は微分ｵﾍﾟﾚﾀ，ここで $t = 0$ とおいて，

(2．4)　$i^{-1}d_t cf(t)|(t=0) = l_i^t d_x(1 - cq_x)\exp(\theta^t x + sx^t x/2)|x=0.$

いま必要とされる計算は，

(2. 5) $d_x q_x \exp(\theta^t x + s x^t x/2)|x=0$

$d_x \exp(\theta^t x + s x^t x/2)|x=0$

である．Phillips [4] と同様に (2. 5) の前半は，$w = x + \theta/s$ と書いて，

(2. 6) $\exp(-m/2s) d_x q_x \exp\{2^{-1} s(x + \theta/s)^t (x + \theta/s)\}|x=0$

$= \exp(-m/2s) d_w q_w \exp(2^{-1} s w^t w)|w=\theta/s$

$= \exp(-m/2s)\ x\ sw \Sigma_{h=0} (2^{-1} s w^t w)^h (h!)^{-1} (ks + 2hs)^{-1}|w=\theta/s$

$= \theta (2s)^{-1} E(k/2 + H)^{-1}$

となる．ただし，H ～ Poisson(m/2s)．つづいて (2. 5) の 2 番目に関しては，

(2. 7) $\exp(-m/2s) d_w \exp(2^{-1} s w^t w)|w=\theta/s$

ここで $d_{w(i)}$ を d_i と書いて，

$d_i \Sigma_{h=0} (2^{-1} s w^t w)^h (h!)^{-1}$

$= \Sigma_{h=1} (2^{-1} s w^t w)^{h-1} ((h-1)!)^{-1} s w_i$

$= s w_i \exp(2^{-1} s w^t w)$.

ゆえに

(2. 8) (2. 7) $= \theta$

となる．したがって (2. 4) は

(2. 9) $E(\delta_i) = \theta_i - c\theta_i (2s)^{-1} E(k/2 + H)^{-1}$.

他方，fractional calculus によることなく，1 次ﾓｰﾒﾝﾄを直接計算すれば，以下のとおり．

(2. 10) $E(\delta_i) = E\{(1 - c/S) z_i\}$

$= \theta_i - c\theta_i s^{-1} E\{\chi'^2(k + 2,\ m/s)\}^{-1}$

$= \theta_i - c\theta_i s^{-1} E\{\chi^2(k + 2 + 2H)\}^{-1}$

$= \theta_i - c\theta_i s^{-1} E(k + 2H)^{-1}$

ただし，H ～ Poisson(m/2s)，こうして (2. 9)，(2. 10) は同一の結果をあたえるのがわかる．(2. 10) については，Greenberg-Webster, Jr. [2] を見よ（ここで δ_i の pdf であるが，(2. 3) の exp( ) の $it\langle l_i,\ d_x - c q_x d_x\rangle$ が t について 1 次式であるため，inversion には注意する必要がある)．

つづいて (k - 2)s/S の s が unknown のとき，$\delta_{*i} = \{1 - (k - 2)s_*/S\} z_i$ となる

ような $\delta_{\cdot i}$ を考える．ただし，$s_{\cdot} = A/n = sB/n$, A は z_i とは independent，かつ B $= A/s \sim \chi^2(n)$，そうするとこうした場合 $\delta_{\cdot i}$ の cf(t) はまず

(2. 11) $\quad cf(t)|s_{\cdot} = \exp\{itl_i^t(d_x - (k-2)s_{\cdot}q_x d_x)\}\exp(sx^t x/2 + x^t\theta)|x=0$

と書く．つづいて

$$cf(t) = \int (cf(t)|B)pdf(B)\,dB$$

を計算すればよい．

(2. 12)
$$cf(t) = \int_0^\infty \exp\{itl_i^t(d_x - (k-2)n^{-1}sBq_x d_x)\}$$
$$\times\ 2^{-n/2}\Gamma^{-1}(n/2)B^{n/2-1}\exp(-B/2)$$
$$\times\ \exp(sx^t x/2 + x^t\theta)|x=0\ dB$$
$$= 2^{-n/2}\Gamma^{-1}(n/2)\exp(it\langle l_i,\ d_x\rangle)[\int_0^\infty \exp\{-(itl_i^t c'' q_x d_x + 1/2)B\}$$
$$\times\ B^{n/2-1}dB]\exp(sx^t x/2 + x^t\theta)|x=0$$
$$= 2^{-n/2}\exp(it\langle l_i,\ d_x\rangle)(itl_i^t c'' q_x d_x + 1/2)^{-n/2}$$
$$\times\ \exp(sx^t x/2 + x^t\theta)|x=0$$

となる．ただし，$c'' = (k-2)s/n$，この (2. 12) の最後の表現は Phillips [4] にある．したがって $\delta_{\cdot i}$ の pdf，ﾓｰﾒﾝﾄについてはこれ以上ﾚﾎﾟｰﾄする必要はない．

4. 3 調整をともなう Stein 推定値

ここで $\iota_i = z^{\cdot} + \{1 - (k-3)s/S'\}(z_i - z^{\cdot})$ となるような ι_i を考える．ただし，$S' = \Sigma_i(z_i - z^{\cdot})^2$ である．いま，この ι_i, S' を $z(k \times 1)$ によって書くと，まず，$z^{\cdot} = 1^t z/k$，ただし，$1^t = (1, \ldots, 1)$, $\dim(1) = k \times 1$, $z_i = \langle l_i,\ z\rangle$,

$$S' = z^t z - 2z^{\cdot}1^t z + kz^{\cdot 2}$$
$$= z^t\{I - 1(1^t 1)^{-1}1^t\}z$$
$$= z^t Mz.$$

そうすると ι_i は

(3. 1) $\quad \iota_i = 1^t z/k + \{1 - (k-3)s(z^t Mz)^{-1}\}\langle l_i - 1/k,\ z\rangle$

となる．いま，s が given で ι_i の特性関数 cf(t) を計算すると

(3. 2) $\quad cf(t) = E\{\exp(it\iota_i)\}$

$$= \int \exp\{it(1_i^t z + c(z^t Mz)^{-1}(1_i^t - 1^t/k)z)\}pdf(z)\ dz$$

ただし $c = (k - 3)s$ である．さらに M は idempotent，そのランクは $k - 1$ だから

$$QMQ^t = D = \mathrm{diag}(1,\ \ldots,\ 1,\ 0) = \mathrm{diag}(1_{k-1}^t,\ 0)$$

となる orthogonal な Q がある．ただし $\dim(1_{k-1}) = (k - 1) \times 1$，そうすると

$$z^t Mz = z^t Q^t QMQ^t Qz$$

$$= z^t Q^t\{\mathrm{diag}(I_{k-1},\ 0)\}Qz,\quad Qz = y$$

$$= z^t Q_1^t Q_1 z,\quad \dim(Q_1) = (k - 1) \times k$$

$$= y_1^t y_1,\quad y_1 = Q_1 z.$$

ここで $z \sim N(\theta,\ sI)$ だから $y_i \sim N(\eta_i,\ sI)$ となる．ただし $\eta_i = Q_i\theta$，こうして (3. 2) の $cf(t)$ は

(3. 3) $$cf(t) = \int \exp\{it1_i^t Q^t y - cit(y_1^t y_1)^{-1}(1_i^t - 1^t/k)Q^t y\}pdf(y)\ dy.$$

ここでこの { } を d_x によって表現すると

(3. 4) $$\exp\{\ \} = \exp\{it1_i^t Q^t(d_x^t,\ y_2^t)^t - citq_x(1_i^t - 1^t/k)Q^t(d_x^t,\ y_2^t)^t\}$$
$$\times \exp(x^t y_1)|x=0,\ \dim(x) = (k - 1) \times 1,$$

したがって $cf(t)|s$ は

(3. 5) $$cf(t)|s = \int \exp\{it(1_i^t - cq_x 1_i^t - cq_x 1^t/k)(Q_1^t d_x + Q_2^t y_2)\}$$
$$\times \exp(x^t y_1)|x=0\ pdf(y)\ dy$$

と書ける．ここで y_2 に関する integral は

$$\int \exp(-itc^* y_2)pdf(y_2)\ dy$$
$$= \int \exp(-(y_2 - \eta_2)^2/2s - itc^* y_2) \times \mathrm{const.}\ dy_2$$
$$= \exp(-\eta_2 c^* it + s(itc^*)^2/2),$$

そうすると

(3. 6) $$cf(t)|s = \int \exp\{it(1_i^t - cq_x 1_i^t + cq_x 1^t/k)Q_1^t d_x\}$$
$$\times \exp(-\eta_2 c^* it - s(tc^*)^2/2)\exp(x^t y_1)|x=0\ pdf(y_1)\ dy_1.$$

y_1 についての integral は (2. 1.1) と同様に

(3. 7) $$\int \exp(x^t y_1)pdf(y_1)\ dy_1 = \exp(sx^t x/2 + x^t \eta_1)$$

となるのがすぐわかる．したがって，(3. 6) と (3. 7) より

(3. 8) $$cf(t)|s = \exp\{-\eta_2 c^* it - s(tc^*)^2/2\}\exp\{it(1_i^t - cq_x 1_i^t + cq_x 1^t/k)Q_1^t d_x\}$$
$$\times \exp(sx^t x/2 + x^t \eta_1)|x=0$$

と書くことができる．ただしこの c^* は

$$c^* = -1_i^t Q_2^t + cq_x(1_i^t - 1^t/k)Q_2^t = c^*(q_x)$$

である．ここで $Q^t = (Q_1^t,\ Q_2^t)$, $\dim(Q_1) = (k - 1) \times k$, $\dim(Q_2) = 1 \times k$ となっている．いま (3. 8) のｵﾍﾟﾚﾀを含む部分を見ると

$$c^{*2} = (-1_i^t Q_2^t + c_1 q_x)^2$$
$$= (c_0 + c_1 q_x)^2$$

と書けて，(3. 8) の exp{ }exp{ } は

$$-\eta_2(c_0 + c_1 q_x)it - t^2(c_0 + c_1 q_x)^2 s/2$$
$$+ itl_i^t Q_1^t d_x - cit(1_i^t - 1^t/k)Q_1^t d_x q_x,$$

こうしてそれは q_x, $(q_x)^2$, d_x, $d_x q_x$ によって表現されるのがわかる．これは (2. 3) と比較すれば，複雑なかたちをとる．(3. 8) をもう一度整理して，$cf(t)|s$ を以下のように書く．

(3. 9) $$cf(t)|s = \exp\{-\eta_2 c_0 it - t^2 c_0^2 s/2 - q_x(\eta_2 c_1 it + t^2 c_0 c_1 s)$$
$$- q_x^2 t^2 c_1^2 s/2 + itl_i^t Q_1^t d_x - cit(1_i^t - 1^t/k)Q_1^t d_x q_x\}$$
$$\times \exp(sx^t x/2 + x^t \eta_1)|x=0.$$

つづいてこの (3. 9) から ι_i の 1 次ﾓｰﾒﾝﾄを計算することを考えれば，

(3. 10) $$i^{-1} d_t cf(t)|s|(t=0) = \{-\eta_2 c_0 - q_x \eta_2 c_1 + 1_i^t Q_1^t q_x$$
$$- c(1_i^t - 1^t/k)Q_1^t d_x q_x\}$$
$$\times \exp(sx^t x/2 + x^t \eta_1)|x=0$$

となる．いま $q_x \exp(sx^t x/2 + x^t \eta_1)|x=0$ のみを考えればよい．他の部分については，(2. 6)，(2. 7) を適用する．以下のようになる．

(3. 11) $$q_x \exp(sx^t x/2 + x^t \eta_1)|x=0$$

$$= \exp(-\eta_1^t \eta_1/2s) q_w \exp(s w^t w/2) |_{w=\eta_1/s}.$$

この $q_w\exp(\ )$ は

(3. 12) $q_w \exp(s w^t w/2)$

$$= \int_0^\infty \Sigma_{r,u=0}^\infty (-a)^r (r!)^{-1} (s/2)^{r+u} \{(r + u)!\}^{-1} 2^{2r} (w^t w)^u (u + 1)_r$$
$$\times\ (u + k/2 - 1/2)_r da$$

(ここで $\dim(w) = (k - 1) \times 1$ である). Phillips [4] を見よ. また (3. 12) を書きかえて,

(3. 13) (3. 12) の R.H.S.

$$= \int_0^\infty \Sigma_{r,u=0}^\infty \{2(-sa)\}^r (r!)^{-1} (w^t w s/2)^u (u!)^{-1}$$
$$\times\ (u + k/2 - 1/2)_r da$$
$$= \Sigma_{u=0}^\infty (s w^t w/2)^u (u!)^{-1} \int_0^\infty (1 + 2sa)^{-(k-1)/2-u} da.$$

ここでこの integral は

(3. 14) $\int_0^\infty (1 + x)^{-(k-1)/2-u} (1/2s)\ dx$

$$= \{(k/2 - 1/2 + u - 1)_1\}^{-1} (1/2s)$$

となる. したがって

(3. 15) $q_w \exp(s w^t w/2)$

$$= \Sigma_{u=0}^\infty (s w^t w/2)^u (u!)^{-1} (k/2 - 1/2 + u - 1)^{-1} (1/2s).$$

そうすると (3. 11) は

(3. 16) $q_x \exp(s x^t x/2 + x^t \eta_1) |_{x=0}$

$$= (1/2s) \exp(-m_1/2s) \Sigma_{u=0}^\infty (m_1/2s)^u (u!)^{-1} (k/2 - 1/2 + u - 1)^{-1}$$
$$= (1/2s) E(k/2 - 1/2 + U - 1)^{-1}$$

ただし, $U \sim \mathrm{Poisson}(m_1/2s)$, $m_1 = \langle \eta_1, \eta_1 \rangle$ となる. あと (3. 10) のｵﾍﾟﾚﾀに関する部分は, 次のようになる.

(3. 17) $d_x \exp(s x^t x/2 + x^t \eta_1) |_{x=0}$

$$= sw\ \exp(-\langle \eta_1, \eta_1 \rangle /2s) \exp(s w^t w/2) |_{(w=\eta_1/s)} = \eta_1$$

(3. 18) $d_x q_x \exp(s x^t x/2 + x^t \eta_1) |_{x=0}$

$$= (1/2s)\eta_1 E(k/2 - 1/2 + U)^{-1}.$$

したがって (3. 16), (3. 17), (3. 18) から ι_i の 1 次モーメントは

(3. 19) $$E(\iota_i|s) = -\eta_2 c_0 - \eta_2 c_1 (1/2s)E(k/2 - 3/2 + U)^{-1}$$
$$+ 1_i^t Q_1^t \eta_1 - c(1_i^t - 1^t/k)Q_1^t \eta_1 (1/2s)E(k/2 - 1/2 + U)^{-1}.$$

ここで $k/2 - 1/2 > 1$ としておく．ただし $c_1 = c(1_i^t - 1^t/k)Q_2^t$, $c = (k - 3)s$, $c_0 = - 1_i^t Q_2^t$, $\eta = Q\theta$, $\eta_i = Q_i\theta$, $(i = 1, 2)$ となっている．こうして (3. 19) の R.H.S. を θ で表せば，

$$\langle \eta_1, \eta_1 \rangle = \langle Q_1\theta, Q_1\theta \rangle = \langle \theta, M\theta \rangle$$

$$\langle Q_1 1_i, \eta_1 \rangle = \langle Q_1 1_i, Q_1\theta \rangle = \theta_i - \theta^*, \quad \theta^* = \Sigma_i \theta_i/k$$

$$\langle Q_1 1, \eta_1 \rangle = \langle Q_1 1, Q_1\theta \rangle = 0.$$

つづいて

$$c_1 \eta_2 = c(1_i^t - 1^t/k)Q_2^t \eta_2,$$

ここで

$$\langle Q_2 1_i, \eta_2 \rangle = \langle Q_2 1_i, Q_2\theta \rangle = \langle 1_i, (I - M)\theta \rangle = \theta^*$$

$$\langle Q_2 1, \eta_2 \rangle = \langle Q_2 1, Q_2\theta \rangle = \langle 1, \theta \rangle.$$

こうして (3. 19) を θ によって

(3. 20) $$E(\iota_i|s) = \theta_i - c(1/2s)(\theta_i - \theta^*)E(k/2 - 1/2 + U)^{-1}$$

と書くことができる．いま fractional calculus によることなく，1 次モーメントを直接計算すると，

(3. 21) $$E(\iota_i|s) = \theta_i - cE\{(z_i - z^*)/S'\},\quad c = (k - 3)s$$

ここで $S' = \langle z, Mz \rangle = \langle y_1, y_1 \rangle$, $y \sim N(\eta, sI)$, $y^t = (y_1^t, y_2^t)$, $\dim(y_1) = (k - 1) \times 1$, $Qz = y$, $z = Q^t y$. そうすると，$E(y\langle y_1, y_1\rangle^{-1})$ を計算すればよいのがわかる．いま

$$E(y_1\langle y_1, y_1\rangle^{-1}) = \eta_1 s^{-1}E(k - 1 + 2U)^{-1},\quad U \sim \text{Poisson}(m_1/2s)$$

$$E(y_2\langle y_1, y_1\rangle^{-1}) = \eta_2 s^{-1}E(k - 3 + 2U)^{-1}$$

したがって，

(3. 22) $$E\{(z_i - z^*)/S'\} = E\{(1_i^t - 1^t/k)Q^t y(y_1^t y_1)^{-1}\}$$

$$= E\{(1_i^t - 1^t/k)Q_1^t y_1 (y_1^t y_1)^{-1}\}$$

$$+ E\{(1_i^t - 1^t/k)Q_2^t y_2 (y_1^t y_1)^{-1}\}.$$

ここで $\langle Q_2 1_i,\ \eta_2\rangle = \theta^*$, $\langle Q_2 1/k,\ \eta_2\rangle = \theta^*$, ゆえに

(3. 23)　$E(\iota_i|s) = \theta_i - c(\theta_i - \theta^*)(1/s)E(k - 1 + 2U)^{-1}$

ただし, $U \sim \mathrm{Poisson}(m_1/2s)$, $\theta^* = \Sigma_i \theta_i/k$ となって, (3. 23) は fractional calculus による結果と正確に一致する.

次に ι_i の pdf を考えるために, $cf(t)|s$ の exp( )exp( ) を t について整理すれば,

(3. 24)　$cf(t)|s = \exp(-t^2 b_2/2 - itb_1)\exp(x^t xs/2 + x^t \eta_1)|x=0.$

ここで $pdf(\iota_i)|s$ は

(3. 25)　$pdf(\iota_i)|s = (2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-it\iota_i)\exp(-t^2 b_2/2 - itb_1)$

$$\times\ \exp(x^t xs/2 + x^t \eta_1)|x=0\ dt$$

によって計算される. ただし

$$b_2 = (c_0 + q_x c_1)^2 s$$

$$b_1 = \eta_2 c_0 + q_x \eta_2 c_1 - 1_i^t Q_1^t d_x + cq_x(1_i^t - 1^t/k)Q_1^t d_x,$$

また (3. 25) で

(3. 26)　$\exp\{-t^2 b_2/2 - it(b_1 + \iota_i)\}$

$$= \exp\{-(b_1 + \iota_i)^2/2b_2\}\exp\{-b_2(t + (b_1 + \iota_i)i/b_2)^2/2\},$$

ゆえに

(3. 27)　$pdf(\iota_i)|s = (2\pi)^{-1/2}(b_2)^{-1/2}$

$$\times\ \exp\{-(b_1 + \iota_i)^2/2b_2\}\exp(x^t xs/2 + x^t \eta_1)|x=0$$

となる. この b_2 については $b_2 = (c_0 + q_x c_1)^2 s$, したがって (3. 27) の表現は許される. また, R.H.S. のはじめの部分は $N(-b_1,\ b_2)$ と見ることができる. (3. 27) から ι_i の 1 次ﾓｰﾒﾝﾄを計算すれば,

(3. 28)　$E(\iota_i|s) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\iota_i)n(-b_1,\ b_2)\exp(x^t xs/2 + x^t \eta_1)|x=0\ d\iota_i$

$$= -b_1 \exp(x^t xs/2 + x^t \eta_1)|x=0$$

ただし，$n(-b_1,\ b_2)$ は $N(-b_1,\ b_2)$ の pdf を表すものとする．したがって

(3. 29) $$E(\iota_i|s) = -\{\eta_2(c_0 + q_x c_1) - 1_i^t Q_1 d_x + c(1_i - 1/k)^t Q_1^t d_x q_x\}$$

$$\times\ \exp(x^t x s/2 + x^t \eta_1)|x=0$$

がみちびかれるが，これはさきの表現 (3. 10) に正確に一致している．以上は b_1，b_2 の reduction をしていないが，さらに先の計算を続けると次のようになっている．

$$c_1 = c(1_i - 1/k)^t Q_2^t = cc_2,$$

いま $(c_2)^2$ を計算すれば，

$$c_2^2 = \{(1_i - 1/k)^t Q_2^t\}^2 = 1_i^t Q_2^t Q_2 1_i - 2 1_i^t Q_2^t Q_2 1/k + k^{-2} 1^t Q_2^t Q_2 1$$

ここで

$$\langle Q_2 1_i,\ Q_2 1_i\rangle = \langle 1_i,\ (I - M)1_i\rangle = 1/k$$

$$\langle Q_2 1_i,\ Q_2 1/k\rangle = \langle 1_i,\ (I - M)1/k\rangle = 1/k$$

$$\langle Q_2 1,\ Q_2 1\rangle = k.$$

ゆえに $(c_2)^2 = 0$，したがって，$c_2 = 0$ となる．こうして $cf(t)|s$，$pdf(\iota_i)|s$ はそれぞれ以下のようになる．

(3. 29.1) $$cf(t)|s = \exp\{-\eta_2 c_0 it - t^2 c_0^2 s/2 + it 1_i^t Q_1^t d_x$$

$$- cit(1_i - 1/k)^t Q_1^t d_x q_x\}\exp(sx^t x/2 + x^t \eta_1)|x=0$$

(3. 29.2) $$pdf(\iota_i)|s = (2\pi)^{-1/2}(c_0^2 s)^{-1/2}\exp\{(c_0^2 s)^{-1}(\iota_i + b_1)^2/2\}$$

$$\times\ \exp(x^t x s/2 + x^t \eta_1)|x=0$$

ここで

$$c_0^2 = (-1_i^t Q_2^t)^2 = 1_i^t Q_2^t Q_2 1_i = 1/k$$

$$b_1 = \eta_2 c_0 - 1_i^t Q_1^t d_x + c(1_i - 1/k)^t Q_1 d_x q_x.$$

つぎに s: unknown のときは s を s_* に置き換えて次のような推定値を構成する．つまり，

(3. 30) $$\iota_{*i} = z^* + \{1 - (k - 3)s_*/S^*\}(z_i - z^*)$$

$s_* = A/n^* = sB/n^*$；s_*，z_i は independent，A が計算可能．

いま s_*: given で ι_{*i} の $cf(t)|s_*$ は

(3. 31) $cf(t)|s_* = \int \exp\{itl_i^t z - c_* it(z^t Mz)^{-1}(l_i - 1/k)^t z\} pdf(z)\, dz$

となる．ただし $c_* = (k - 3)s_*$，さらに計算を続ければ

(3. 32) $cf(t)|c_* = \int \exp\{itl_i^t Q_1^t d_x - c_* itq_x(l_i - 1/k)^t Q_1 d_x\}$

$$\times \exp(-\eta_2 c_{*\square} it - t^2(c_{*\square})^2 s/2)\exp(x^t y_1)|x{=}0\ pdf(y_1)\, dy_1$$

ただし

$$c_{*\square} = -l_i^t Q_2^t + c_* q_x(l_i - 1/k)^t Q_2^t = c_0 + c_* q_x c_2,$$

そうすると $cf(t)|c_*$ は最終的に $c_1 = c_* c_2$ と書いて，

(3. 33) $cf(t)|c_* = \exp(itl_i^t Q_1^t d_x)\exp\{-\eta_0 c_0 it - t^2 c_0^2/2 - c_*^2 t^2 c_2^2 q_x^2/2$

$$- c_*(\eta_2 q_x c_2 it + t^2 c_0 c_2 q_x + itq_x c_3 d_x)\}$$

$$\times \exp(sx^t x/2 + x^t \eta_1)|x{=}0$$

ここで $c_3 = (l_i - 1/k)^t Q_1^t$，$\eta_2 c_0$ は $\eta_2 c_0 = -l_i^t Q_2^t \eta_2 = -l_i^t Q_2^t Q_2 \theta = -\theta^*$，$c_0^2 = 1/k$，$c_2 = 0$．したがって (3. 33) はより簡単になって以下のように書ける．

$$cf(t)|c_* = \exp(itl_i^t Q_1^t d_x)\exp(\theta^* it - t^2 s/2k - c_* itq_x c_3 d_x)$$

$$\times \exp(sx^t x/2 + x^t \eta_1)|x{=}0.$$

いま c_* は

$$c_* = (k - 3)s_* = (k - 3)A/n' = (k - 3)sB/n' = c_4 B,$$

$$B \sim \chi^2(n')$$

となる．B の密度は

$$pdf(B) = 2^{-n'/2}\Gamma^{-1}(n'/2)B^{n'/2-1}\exp(-B/2).$$

そこで以下のような積分を考える．

(3. 34) $J = \int_0^\infty B^{n'/2-1}\exp(-(c_4 c_5 + 1/2)B)\, dB$

ただし $c_5 = itq_x c_3 d_x$，こうして s_* について unconditional な $cf(t)$ は以下のように書ける．

(3. 35) $cf(t) = \exp(itl_i^t Q_1^t d_x)\exp(it\theta^* - t^2 s/2k)$

$$\times \{\int_0^\infty B^{n'/2-1}\exp(-(c_4 c_5 + 1/2)B)\, dB\}$$

$$\times 2^{-n'/2}\Gamma^{-1}(n'/2)\exp(sx^t x/2 + x^t \eta_1)|x{=}0$$

$$= \exp(it l_i^t Q_1^t d_x)\exp(it\theta^* - t^2 s/2k)$$

$$\times\ (c_4 c_5 + 1/2)^{-n'/2} 2^{-n'/2} \exp(s x^t x/2 + x^t \eta_1)|x=0$$

$$= \exp(it\theta^* - t^2 s/2k)\ \times\ (1 + 2(k - 3)sitq_x c_3 d_x/n')^{-n'/2}$$

$$\times\ \exp(\langle x + Q_1 l_i it,\ x + Q_1 l_i it\rangle s/2 + \langle x + Q_1 l_i it,\ \eta_1\rangle)|x=0,$$

これが cf(t) の最終的なかたちである.

いま cf(t) を t について微分し, t = 0 とおけば,

(3. 36) $$i^{-1} d_t cf(t)|(t=0) = \{\theta^* - (k - 3)sq_x c_3 d_x + s x^t Q_1 l_i + l_i^t Q_1^t \eta_1\}$$

$$\times\ \exp(s x^t x/2 + x^t \eta_1)|x=0$$

$$= \theta^* + \langle Q_1 l_i,\ \eta_1\rangle - (k - 3)sq_x c_3 d_x$$

$$\times\ \exp(s x^t x/2 + x^t \eta_1)|x=0$$

ここでｵﾍﾟﾚｰﾀを含む部分は

$$q_x c_3 d_x \exp(s x^t x/2 + x^t \eta_1)|(x=0) = c_3 \eta_1 (1/2s)E(k/2 - 1/2 + U)^{-1},$$

$U \sim$ Poisson($m_1/2s$). ゆえに $E(\iota_{\cdot i})$ は

(3. 37) $E(\iota_{\cdot i}) = \theta^* - (k - 3)sc_3\eta_1(1/2s)E(k/2 - 1/2 + U)^{-1}$.

いま $c_3\eta_1 = \langle Q_1(l_i - 1/k),\ \eta_1\rangle = \theta_i - \theta^*$, したがって (3. 37) は

(3. 38) $E(\iota_{\cdot i}) = \theta_i - (k - 3)(\theta_i - \theta^*)E(k - 1 + 2U)^{-1}$

と書ける. 以上の手続きを確かめるために, ﾓｰﾒﾝﾄを直接計算すれば, (3. 21) から

(3. 39) $E(\iota_{\cdot i}) = \theta_i - (E(c_\cdot))E\{(z_i - z^*)/S^*\},$

$$= \theta_i - (E(c_\cdot))(\theta_i - \theta^*)(1/s)E(k - 1 + 2U)^{-1},$$

ここで $c_\cdot = (k - 3)sB/n'$, $B \sim \chi^2(n')$, ゆえに $E(c_\cdot) = (k - 3)s$, したがって (3. 39) の R.H.S. は (3. 38) の R.H.S. と同一の表現をとる.

4. 4 精密分布

特性関数は 4. 3 から

(4. 1) $$cf(t) = \exp(it\theta^* - t^2 s/2k)\ \times\ (1 + 2(k - 3)sitq_x c_3 d_x/n')^{-n'/2}$$

$$\times\ \exp(\langle x + Q_1 l_i it,\ x + Q_1 l_i it\rangle s/2 + \langle x + Q_1 l_i it,\ \eta_1\rangle)|x=0,$$

となっている. ここで pdf をみちびくには

(4. 2)　$$\mathrm{pdf}(\iota_{\cdot i}) = (1/2\pi)\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-it\iota_{\cdot i})\mathrm{cf}(t)\,dt$$

を計算すればよい．いま，$2(k-3)sitc_3d_xq_x/n' = 2itr_x$ と書いて（c_3 は行ベクタ，r_x は d_xq_x を含むオペレタ），

$$\mathrm{pdf}(\iota_{\cdot i}) = \Gamma^{-1}(n'/2)\int_0^{\infty} w^{n'/2-1}\exp(-w) \times (1/2\pi)\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-2itr_xw)$$

$$\times \exp\{it\theta^* - t^2s/2k - it\iota_{\cdot i} - st^2 l_i^t Q_1^t Q_1 l_i/2$$

$$+ itl_i^t Q_1^t(\eta_1 + sx)\}dtdw \exp(sx^tx/2 + x^t\eta_1)|x=0$$

ここで $\exp\{\ \}$ から t を含む項のみをとり出して整理すれば，

(4. 3)　$$\exp\{-t^2s(1/k + l_i^tQ_1^tQ_1l_i)/2 - it(-\theta^* - sx^tQ_1l_i - l_i^tQ_1^t\eta_1 + \iota_{\cdot i})\}$$

となっている．いま，$\langle Q_1l_i,\ Q_1l_i\rangle = 1 - 1/k$，ゆえに (4. 3) は

(4. 4)　$$\exp\{-t^2s/2 - itk_*(x,\ \iota_{\cdot i})\}$$

となる．そうして pdf は

$$\mathrm{pdf}(\iota_{\cdot i}) = \Gamma^{-1}(n'/2)\Sigma_{j=0}^{\infty}(j!)^{-1}\int_0^{\infty} w^{n'/2-1+j}\exp(-w)\,dw$$

$$\times (2\pi)^{-1}(-2r_x)^j\int_{-\infty}^{+\infty}(it)^j$$

$$\times \exp\{-t^2s/2 - itk_*(x,\ \iota_{\cdot i})\}dt \exp(sx^tx/2 + x^t\eta_1)|x=0$$

$$= \Sigma_{j=0}^{\infty}(n'/2)_j(j!)^{-1}[(-2r_x)^j[(d_z)^j(2\pi)^{-1}$$

$$\times \int_{-\infty}^{+\infty}\exp\{-it(k_*(x,\ \iota_{\cdot i}) - z) - t^2s/2\}\,dt]z=0$$

$$\times \exp(sx^tx/2 + x^t\eta_1)]x=0$$

ここで，上の t についての積分は

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-it\square - st^2/2)\,dt = (2\pi/s)^{1/2}\exp\{(i\square)^2/2s\}$$

となる．したがって $\iota_{\cdot i}$ の pdf は

(4. 5)　$$\mathrm{pdf}(\iota_{\cdot i}) = \Sigma_{j=0}(n'/2)_j(j!)^{-1}[(-2r_x)^j[(d_z)^j(2\pi s)^{-1/2}$$

$$\times \exp(-\square^2/2s)]z=0 \exp(sx^tx/2 + x^t\eta_1)]x=0$$

$$= (1 + 2r_xd_z)^{-n'/2}(2\pi s)^{-1/2}$$

$$\times \exp\{-(k_*(x,\ \iota_{\cdot i}) - z)^2/2s\}$$

$$\times \exp(sx^t x/2 + x^t \eta_1)|z=0, x=0$$

と書ける．ただし

$$r_x = (k-3)sc_3 d_x q_x/n'$$

$$\square = k_*(x, \iota_{*i}) - z$$

$$= -\theta^* - sx^t Q_1 l_i - l_i^t Q_1^t \eta_1 + \iota_{*i} - z$$

$$= \phi(x, z) + \iota_{*i},$$

(4. 5) の 2 番目の表現については Knight [3] にしたがった．つづいて pdf(ι_{*i}) から ι_{*i} の 1 次ﾓｰﾒﾝﾄを計算することを考える．

$$E(\iota_{*i}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \iota_{*i}\,\mathrm{pdf}(\iota_{*i})\, d\iota_{*i}$$

となるが，必要な integral は

$$(2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{+\infty} \iota_{*i}\exp\{-(\phi(x, z) + \iota_{*i})^2/2s\}\, d\iota_{*i} = -\phi s^{1/2}.$$

ゆえに

(4. 6) $$E(\iota_{*i}) = \Sigma_{j=0}(n'/2)_j (j!)^{-1}[(-2r_x)^j[(d_z)^j(-\phi(x, z))]z=0$$

$$\times \exp(sx^t x/2 + x^t \eta_1)]x=0$$

ここで

$$d_z\phi(x, z) = -1,$$

そうして 2 階以上の微分が zero となるから，

(4. 7) $$E(\iota_{*i}) = \{(-\phi(x, z))|(z=0) - n'r_x\}$$

$$\times \exp(sx^t x/2 + x^t \eta_1)|x=0$$

$$= \theta^* + l_i^t Q_1^t \eta_1 - n'r_x \exp(sx^t x/2 + x^t \eta_1)|x=0,$$

$$r_x = (k-3)sc_3 d_x q_x/n',$$

したがって

(4. 8) $$q_x d_x \exp(sx^t x/2 + x^t \eta_1)|x=0$$

を考えればよい．ただし d_x は列ﾍﾞｸﾀとなっている．Phillps [4] と同様に (4. 8) は

$$\exp(-m_1/2s) \times d_w q_w \exp(sw^t w/2)|w=\eta_1/s,$$

$$\langle\eta_1, \eta_1\rangle = m_1, \dim(w) = (k-1) \times 1 = k' \times 1$$

となる．さらにこの表現は

(4. 8.a) $(\eta_1/2s)\{(k'/2)_1\}^{-1}\exp(-\lambda)\,{}_1F_1(k'/2,\ k'/2 + 1;\ \lambda)$

と書くことができる．ただし，$\lambda = m_1/2s$，${}_1F_1(\ )$ は confluent hypergeometric function を表す．(4. 8.a) への別の表現は

$$\exp(-\lambda)\Sigma_{i=0}^{\infty}(k'/2 + i)^{-1}\lambda^{i}(i!)^{-1}$$

$$= E(k'/2 + I)^{-1},\ I \sim \mathrm{Poisson}(\lambda)$$

となる．ゆえに $E(\iota_{\cdot i})$ は

(4. 9) $E(\iota_{\cdot i}) = \theta^{\cdot} + 1_i^{t}Q_1^{t}\eta_1 - 2^{-1}(k - 3)c_3\eta_1 E(k'/2 + I)^{-1}$

と書ける．ここで

$$\theta^{\cdot} = \Sigma_i \theta_i/k$$

$$\langle Q_1 1_i,\ \eta_1\rangle = \langle Q_1 1_i,\ Q_1\theta\rangle = \theta_i - \theta^{\cdot}$$

$$c_3\eta_1 = \langle Q_1(1_i - 1/k),\ \eta_1\rangle$$

$$= \langle Q_1(1_i - 1/k),\ Q_1\theta\rangle$$

$$= \theta_i - \theta^{\cdot},$$

したがって (4. 9) は

(4. 10) $E(\iota_{\cdot i}) = \theta_i - (k - 3)(\theta_i - \theta^{\cdot})E(k' + 2I)^{-1}$

となって，通常の計算方法による結果に一致する．ただし $k' = k - 1$，4. 3 を見よ．

さらに estimate $\iota_{\cdot i}$ のﾘｽｸを考えるために，2 次ﾓｰﾒﾝﾄを fractional calculus によって計算すれば以下のようになる．まず，

(4. 11) $(2\pi s)^{-1/2}\int_{-\infty}^{+\infty}\iota^{2}_{\cdot i}\exp\{-(\phi(x,\ z) + \iota_{\cdot i})^{2}/2s\}\,d\iota_{\cdot i}$

は $\iota_{\cdot i} \sim N(-\phi,\ s)$ のときの 2 次ﾓｰﾒﾝﾄを表すから，

$$E^{*}(\iota_{\cdot i} + \phi)^{2} = s,$$

ゆえに $E^{*}(\iota_{\cdot i})^{2} = s + \phi^{2}$，記号 $E^{*}(\ )$ は $\iota_{\cdot i} \sim N(-\phi,\ s)$ のときの ( ) の期待値を表す．したがって，

(4. 12) $E(\iota^{2}_{\cdot i}) = \Sigma_{j=0}^{\infty}(n'/2)_j(j!)^{-1}[(-2r_x)^{j}[(d_z)^{j}(s + \phi^{2})|z=0]$

$$x\ \exp(sx^{t}x/2 + x^{t}\eta_1)]x=0$$

となる．ただし $\phi = -\theta^{\cdot} - s\langle x,\ Q_1 1_i\rangle - \langle\eta_1,\ Q_1 1_i\rangle - z$，そうすると

$$d_z\phi^{2} = -2\phi$$

$$d_z^2 \phi^2 = -2d_z \phi = 2,$$

こうして

(4. 13) $E(\iota_{\cdot i}^2) = [[(s + \phi^2) - n' r_x d_z(s + \phi^2) + 2(n'/2)_2 r_x^2 d_z^2 (s + \phi^2)]|z=0$

$$\times \exp(sx^t x/2 + x^t \eta_1)]x=0$$

$$= s + (-\theta^* - 1_i^t Q_1^t \eta_1)^2$$

$$+ \{2n' r_x(-\theta^* - 1_i^t Q_1^t \eta_1 - sx^t Q_1 1_i) + 4(n'/2)_2 r_x^2\}$$

$$\times \exp(sx^t x/2 + x^t \eta_1)|x=0$$

ただし $r_x = (k - 3)sc_3 d_x q_x/n'$, c_3 は行ベクタ, 必要な計算は

(4. 14) $c_3 d_x q_x \exp(\ )$

(4. 15) $c_3 d_x q_x x^t Q_1 1_i \exp(\ )$

(4. 16) $(c_3 d_x q_x)^2 \exp(\ )$

である. まず最後の (4. 16) は

(4. 17) $(q_x)^2 \exp(sx^t x/2 + x^t \eta_1)|(x=0) = \exp(-\lambda)(q_w)^2 \exp(sw^t w/2)|w=\eta_1/s$

ここで $(q_w)^2 \exp(\ )$ は

(4. 18) $q_w^2 \exp(sw^t w/2) = \int_0^\infty \{\exp(-aq_w^{-1})\exp(sw^t w/2)\} a\, da$

$$= \int_0^\infty (-1)\Sigma_{p=0}^\infty (-a)^{p+1}(p!)^{-1} q_w^{-p} \exp(sw^t w/2)\, ds$$

$$= \int_0^\infty (-1)\Sigma_{p=0}^\infty (-a)^{p+1}(p!)^{-1}$$

$$\times \Sigma_{u=0}^\infty (s/2)^{p+u} 4^p (w^t w)^u (u!)^{-1}(k'/2 + u)_p da.$$

いま (4. 18) を w で微分すると

(4. 19) $c_3 d_w q_w^2 \exp(sw^t w/2) = \int_0^\infty (-1)\Sigma_{p=0}(-a)^{p+1}(p!)^{-1}$

$$\times \Sigma_{u=0}^\infty (s/2)^{p+u} 4^p u (w^t w)^{u-1}(u!)^{-1}(2c_3 w)$$

$$\times (k'/2 + u)_p da$$

$$= \int_0^\infty (-1)\Sigma_{p=0}(-a)^{p+1}(p!)^{-1}$$

$$\times \Sigma_{u=0}^\infty (s/2)^{p+u+1} 4^p (w^t w)^u (u!)^{-1}(2c_3 w)$$

$$\times (k'/2 + u + 1)_p da.$$

さらに微分すれば,

$$(4.\ 20)\quad c_3 d_w\{2c_3 w(w^t w)^u\} = (2c_3 w)^2 u(w^t w)^{u-1} + 2c_3 c_3^t (w^t w)^u.$$

したがって

$$(4.\ 21)\quad (c_3 d_w)^2 q_w^2 \exp(sw^t w/2) = \int_0^\infty (-1)\Sigma_{p=0}(-a)^{p+1}(p!)^{-1}$$

$$\times\ \Sigma_{u=0}^{\infty}(s/2)^{p+u+1}4^p(u!)^{-1}(k'/2 + u + 1)_p$$

$$\times\ \{u(w^t w)^{u-1}(2c_3 w)^2 + 2(w^t w)^u c_3 c_3^t\}\ da$$

$$= A_1 + A_2$$

ただし A_2, A_1 は以下のようになる. $c_3 c_3^t = c_6$ と書いて

$$(4.\ 22)\quad A_2 = 2c_6\int_0^\infty a\Sigma_{u=0}\Sigma_{p=0}(-as/2)^p 4^p(u!)^{-1}(p!)^{-1}$$

$$\times\ (k'/2 + u + 1)_p(s/2)^{u+1}(w^t w)^u da$$

$$= 2c_6\int_0^\infty a\Sigma_{u=0}(1 + 2as)^{-k'/2-u-1}(u!)^{-1}(s/2)^{u+1}(w^t w)^u da$$

$$= 2c_6\Sigma_{u=0}^{\infty}(w^t w)^u(u!)^{-1}(s/2)^{u+1}(2s)^{-1}$$

$$\times\ \int_0^\infty \mathrm{mod}(J(a \to x))(1 + x)^{-k'/2-u-1}x\ dx$$

$$= 2^{-2}(s)^{-1}c_6\Sigma_{u=0}(sw^t w/2)^u(u!)^{-1}\{(k'/2 + u - 1)_2\}^{-1}$$

ここで c_6 は

$$c_6 = \langle Q_1(1_i - 1/k),\ Q_1(1_i - 1/k)\rangle$$

$$= 1 - 1/k,$$

つづいて A_1 は

$$(4.\ 23)\quad A_1 = (2c_3 w)^2\int_0^\infty \Sigma_{u=1}\Sigma_{p=0}(-1)(-a)^{p+1}((u - 1)!)^{-1}(p!)^{-1}$$

$$\times\ (s/2)^{p+u+1}2^{2p}(k'/2 + u + 1)_p(w^t w)^{u-1}da$$

$$= (2c_3 w)^2\int_0^\infty \Sigma_{u=0}\Sigma_{p=0}(-1)(-a)^{p+1}(u!)^{-1}(p!)^{-1}$$

$$\times\ (s/2)^{p+u+2}2^{2p}(k'/2 + u + 2)_p(w^t w)^u da$$

$$= (2c_3 w)^2\int_0^\infty \Sigma_{u=0}(u!)^{-1}(s/2)^{u+2}a(1 + 2sa)^{-k'/2-u-2}(w^t w)^u da,$$

この integral は $2sa = x$ とおいて

$$\mathrm{mod}(J(a \to x)) \int_0^\infty x(1+x)^{-k'/2-u-2}dx(2s)^{-1} = (2s)^{-2}\{(k'/2+u)_2\}^{-1}.$$

ゆえに A_1 は

(4. 24) $$A_1 = (c_3 w/2)^2 \Sigma_{u=0}^{\infty}\{(k'/2+u)_2\}^{-1}(u!)^{-1}(sw^t w/2)^u$$

となる．A_1，A_2 は通常の計算方法，Greenberg-Webster, Jr. [2, pp. 185] に一致する．つぎに

(4. 25) $$c_3 d_x q_x x^t Q_1 l_i \exp(sx^t x/2 + x^t \eta_1)$$

を考える．

$$l_i^t Q_1^t d_x \exp(sx^t x/2 + x^t \eta_1) = (l_i^t Q_1^t sx + l_i^t Q_1^t \eta_1)\exp(sx^t x/2 + x^t \eta_1)$$

から

$$l_i^t Q_1^t x \exp(sx^t x/2 + x^t \eta_1) = (l_i^t Q_1^t d_x/s - l_i^t Q_1^t \eta_1/s)\exp(sx^t x/2 + x^t \eta_1)$$

，ゆえに (4. 25) は

(4. 26) $$q_x c_3 d_x s^{-1}(l_i^t Q_1^t d_x - l_i^t Q_1^t \eta_1)\exp(sx^t x/2 + x^t \eta_1)$$

ここで (4. 26) の d_x に関する 1 次の項は，すでに計算してある．4. 3 を見るとよい．したがって第1項のみを考える．Phillips [4] から $(c_4)^t = Q_1 l_i$ と書いて

(4. 27) $$c_4 d_x q_x c_3 d_x \exp(sx^t x/2 + x^t \eta_1)|x=0$$

$$= c_4 d_w \exp(-m_1/2s) \ x \ c_3 d_w q_w \exp(sw^t w/2)|w=\eta_1/s$$

$$= 2^{-1} c_4 d_w \exp(-m_1/2s)\Sigma_{u=0}^{\infty} c_3 w(sw^t w/2)^u (u!)^{-1}(k'/2+u)^{-1}|w=\eta_1/s$$

$$= c_4 c_3^t \exp(-m_1/2s) \ x \ \Sigma_{u=0}^{\infty}(sw^t w/2)u(u!)^{-1}(k'/2+u)^{-1}$$
$$x \ (2)^{-1}|w=\eta_1/s$$

$$+ \exp(-m_1/2s) \ x \ \Sigma_{u=0}^{\infty} c_3 w c_4 w us(sw^t w/2)^{u-1}(u!)^{-1}(k'/2+u)^{-1}$$
$$x \ (2)^{-1}|w=\eta_1/s.$$

この第2項の $\Sigma_{u=0}(\ )$ は

$$\Sigma_{u=0}(sw^t w/2)^u(u!)^{-1}(k'/2+u+1)^{-1},$$

ゆえに (4. 27) は

(4. 28) $$(4.\ 27) \text{ の L.H.S.} = 2^{-1}\exp(-\lambda)\{c_4 c_3^t \Sigma_{u=0}\lambda^u(u!)^{-1}(k'/2+u)^{-1}$$
$$+ c_4\eta_1 c_3\eta_1 s^{-1}\Sigma_{u=0}\lambda^u(u!)^{-1}(k'/2+u+1)^{-1}\}$$

となる．ただし，$\lambda = m_1/2s$ である．そうすると (4. 22), (4. 24), (4. 28) から 2 次モーメントは

(4. 29) $$E(\iota_{\cdot i})^2 = s + (-\theta_i)^2 - 2n' r_x (sx^t Q_1 1_i + \theta_i)\exp(sx^t x/2 + x^t \eta_1)|x=0$$
$$+ n'(n' + 2)(r_x)^2 \exp(sx^t x/2 + x^t \eta_1)|x=0$$

ただし $r_x = (k - 3)n'^{-1} s c_3 d_x q_x$，いま

(4. 30) $$d_x q_x \exp(sx^t x/2 + x^t \eta_1)|x=0$$
$$= (2s)^{-1}\eta_1 (k'/2)^{-1}\{\exp(-\lambda)\}{}_1F_1(k'/2,\ k'/2 + 1;\ \lambda)$$
$$= (2s)^{-1}\eta_1 E(k'/2 + I)^{-1}.$$

したがって，$c_3 d_x q_x \exp(sx^t x/2 + x^t \eta_1)|(x=0) = (2s)^{-1}(\theta_i - \theta^{\circ})E(k'/2 + I)^{-1}$，ただし $I \sim \mathrm{Poisson}(\lambda)$, $\lambda = m_1/2s$. また r_x について 2 次の項は，

(4. 31) $$(c_3 d_x q_x)^2 \exp(sx^t x/2 + x^t \eta_1)|x=0$$
$$= \{\exp(-\lambda)\}(A_2 + A_1)$$
$$= 2^{-2}s^{-1}(1 - 1/k)\exp(-\lambda)\Sigma_{u=0}^{\infty}\lambda^u (u!)^{-1}\{(k'/2 + u - 1)_2\}^{-1}$$
$$+ 2^{-2}(c_3\eta_1/s)^2\exp(-\lambda)\Sigma_{u=0}^{\infty}\lambda^u (u!)^{-1}\{(k'/2 + u)_2\}^{-1}$$

ここで，

$$\exp(-\lambda)\Sigma_{u=0}^{\infty}\lambda^u (u!)^{-1}\{(k'/2 + u)_2\}^{-1}$$
$$= E\{(k'/2 + I + 1)^{-1}(k'/2 + I)^{-1}\}$$

$$\exp(-\lambda)\Sigma_{u=0}^{\infty}\lambda^{u}(u!)^{-1}\{(k'/2 + u - 1)_2\}^{-1}$$

$$= E\{(k'/2 + I)^{-1}(k'/2 + I - 1)^{-1}\}.$$

ゆえに (4. 31) は

(4. 32) $$(c_3 d_x q_x)^2 \exp(sx^t x/2 + x^t \eta_1)|x=0$$

$$= 2^{-2}s^{-1}(1 - 1/k)E\{(k'/2 + I)^{-1}(k'/2 + I - 1)^{-1}\}$$

$$+ (2s)^{-2}(\theta_i - \theta^*)^2 E\{(k'/2 + I)^{-1}(k'/2 + I + 1)^{-1}\}$$

と書ける. さらに (4. 26) の第1項 x s は

(4. 33) $$c_4 d_x q_x c_3 d_x \exp(sx^t x/2 + x^t \eta_1)|x=0$$

$$= 2^{-1}c_4 c_3^t E(k'/2 + I)^{-1} + (2s)^{-1}c_4\eta_1 c_3\eta_1 E(k'/2 + I + 1)^{-1}$$

ただし $c_4\eta_1$ は

$$c_4\eta_1 = \langle Q_1 1_i,\ \eta_1\rangle$$

$$= \langle Q_1 1_i,\ Q_1\theta\rangle$$

$$= \theta_i - \theta^*$$

$$= c_3\eta_1.$$

そうすると (4. 29) を以下のように表現できる.

(4. 34) $$E(\iota_{\cdot i}^2) = s + \theta_i^2 - 2(k - 3)s$$

$$\times \{c_3 d_x q_x 1_i^t Q_1^t d_x - q_x c_3 d_x 1_i^t Q_1^t \eta_1$$

$$+ \theta_i c_3 d_x q_x - n'^{-1}(n'/2 + 1)(k - 3)s(c_3 d_x q_x)^2\}$$

$$\times \exp(sx^t x/2 + x^t \eta_1)|x=0$$

$$= s + \theta_i^2 - (k - 3)c_4\eta_1 c_3\eta_1 E(k'/2 + I + 1)^{-1}$$

$$- (k - 3)(sc_4 c_3^t + \theta^* c_3\eta_1)E(k'/2 + I)^{-1}$$

$$+ 2^{-1}n'^{-1}(n'/2 + 1)(k - 3)^2 s(1 - 1/k)$$

$$\times E\{(k'/2 + I)^{-1}(k'/2 + I - 1)^{-1}\}$$

$$+ 2^{-1}n'^{-1}(n'/2 + 1)(k - 3)^2(\theta_i - \theta^*)^2$$

$$\times E\{(k'/2 + I)^{-1}(k'/2 + I + 1)^{-1}\}$$

ここで

$$k' = k - 1$$

$$c_4 c_3^t = \langle Q_1 l_i,\ Q_1(l_i - 1/k)\rangle = 1 - 1/k$$

$$c_3 \eta_1 = \theta_i - \theta^*$$

$$I \sim \mathrm{Poisson}(\langle \eta_1,\ \eta_1\rangle / 2s)$$

となっている．また，(4. 34) はすべて $E(k'/2 + I)^{-1}$, $E(k'/2 + I - 1)^{-1}$ によって表現可能である．

参考文献

[1] Efron, B. and C. Morris, "Combining Possibly Related Estimation Problems," Journal of the Royal Statistical Society, Ser. B, 35, 1973, pp. 379-421.

[2] Greenberg, E and C. E. Webster, Jr., Advanced Econometrics: A Bridge to the Literature, New York: John Wiley & Sons, Inc., 1983.

[3] Knight, J. L., "The Distribution of the Stein-rule Estimator in a Model with Non-Normal Disturbances," Econometric Theory, 2, 1986, pp. 202-219.

[4] Phillips, P. C. B., "The Exact Distribution of Stein-rule Estimator," Journal of Econometrics, 25, 1984, pp. 123-131.

第 5 章　SUR 体系の Stein 推定値

5. 1　Stein 推定値の適用

複数個の単一方程式をひとまとめにして扱うと，「よい推定値」が得られることがある．左辺に入る従属変数に高い相関があれば，こうした考え方には理論的根拠がある．いま観測数を T として，第 i 番目の回帰式を

$$y_i = X_i\beta_i + u_i,\ i = 1, \ldots, m$$

と表現しよう．ここで $y_i(T \times 1)$，$X_i(T \times l_i)$，$\beta_i(l_i \times 1)$，$u_i(T \times 1)$ は従属変数，説明変数 (nonstochastic)，係数値，誤差項であり，そうして

$$(u_1^t, \ldots, u_m^t)^t$$

が，平均 0，分散共分散 $\sigma_{ij}I_T$ $i,j = 1, \ldots, m$ の正規分布にしたがうものとする．I_T の T は I の次数を表す．

こうした場合，$\sigma_{ij} \neq 0$，つまり y_i，y_j がｺﾘﾚｲﾄすれば，OLS 推定値(通常の最小2乗推定値)はそれほどよい性質を持たない．相関係数の絶対値

$$\mathrm{mod}(\rho_{ij}) = (\sigma_{ii}\sigma_{jj})^{-1/2}\mathrm{mod}(\sigma_{ij})$$

がある程度大きいとき，OLS 推定値の効率は低下する．Zellner [7] はそうした点に気づいて β_i $i = 1, \ldots, m$ の推定値

$$b = (X^t(S \otimes I)^{-1}X)^{-1}X^t(S \otimes I)^{-1}y$$

を提案した．b は $\mathrm{mod}(\rho_{ij})$ が大きいほど，OLS 推定値に対する効率が高くなる．ただしここで

$$b = (b_1^t, \ldots, b_m^t)^t$$

$$y = (y_1^t, \ldots, y_m^t)^t$$

$$X = \mathrm{diag}(X_1, \ldots, X_m),$$

そうして $S \otimes I$ は $(s_{ij}I)$ $i,j = 1, \ldots, m$ を表し，S は $\Sigma = (\sigma_{ij})$ の適当な推定値となっている．T が十分に大きいとき，b の性質はすでによく分かっている．また，分散共分散 $\sigma_{ij}I_T$ がもう少し複雑な形をとった場合，あるいは回帰式の 1 つ 1 つについて観測個数が異なる場合(たとえば $T_1, \ldots, T_m$ となる)においても，標本実験 (Monte Carlo experiments) などがひんぱんに報告され，こうしたときの b の漸近的な性質につ

いても，ほぼ整理つくされていると言ってよい．このような回帰式の組を言い表すために，最近になって SUR 体系 (Seemingly Unrelated Regression) という用語がよく用いられている．Srivastava et al. [6] による論文は，このﾄﾋﾟｯｸｽについての展望を述べたものであり，うまくまとめられているように思われる．

ただ，Zellner 推定値 b のいわゆる finite sample properties (標本特性)については，まだ分からないことがある．Phillips [3] は，ほぼ一般的な仮定のもとで，b の分布の漸近展開をあたえている．またある種の制約的な仮定のもとで，Zellner [8]，Revankar [4]，[5]，Kataoka [1] は b_i の分布とﾓｰﾒﾝﾄを計算した．それは，これまでの標本実験によって知られている結果を，ほぼうらづけるものとなっている．つまり，T が小さくても $\mathrm{mod}(\rho_{ij})$ が大きいとき，b は OLS 推定値よりも「よい性質」を持つ．刈屋 [10] による研究も，SUR 体系についてより多くの新しい結果をあたえている．その contribution の 1 つは，$\mathrm{mod}(\rho_{ij})$ がどの程度高いかを，まえもって調べるための統計量を提案し，その分布と性質を詳しく議論したことだろう．

また，説明変数 X_i のあり方によって $\mathrm{mod}(\rho_{ij})$ に無関係に b が OLS 推定値と同一のものになることがあるが，そうした場合についての話題，あるいは推定値 b の効率を高めるために，estimation procedure を反復させることがあるが，ある場合にはそうした操作がまったく意味をなさないことも分かってきている (Srivastava et al. [6])．

推定値 b の finite sample についての研究がまだまだ不十分であり，計算を反復させ b を改善しても「よい推定値」は多分得られないということから，ここでは見方を少し変えて，推定値 $b_i(l_i \times 1)$ を shrink (短縮)させて biased になったとしても，

$$\mathrm{risk} = \Sigma_j(\text{ﾊﾞｲｱｽ})_j^2 + \Sigma_j(\text{分散})_j$$

がなるべく小さくなるような推定値を探し，その finite sample properties を考えてみる．こうしたときの基本的な形は，Zellner-Vandaele [9] が提案し，Srivastava et al. [6] が推定値の moment のﾗﾌな近似式をあたえているが，それはあまり満足できるものではないし，いまここで扱う推定値はそれとは異なる．shrink させて構成される推定値は (推定値ﾍﾞｸﾀの長さを短縮させることから shrink と言われる)，Stein のｱｲﾃﾞｱにもとづくものであるが，一般にそうした推定値のﾘｽｸが，他のもう 1 つの推定値のﾘｽｸより小さくなるためには，ﾍﾞｸﾀ b_i の次数が適当に大きくなければならない．いまとりあげる推定

値の次数は l_i となっているが，l_i が大きい実際の回帰式として，たとえば Kuroda-Yotopoulos [2] のﾓﾃﾞﾙはﾀﾞﾐｰ変数と定数部分を除いて，$l_i = 8$ となっている（係数に 1 次式で表せる制約があるとすれば，少し問題がある）．また，Stein 自身が取り上げた問題は，推定値が normal variable であったが，それはいまの場合あてはまらなくてもよい．条件付きで推定値が normal になっていさえすればよい．

ここで新しく得られている結果は以下のとおり．

1° $l_i > 2$ のとき，SUR-Stein 推定値はもともとの推定値よりも確かにそのﾘｽｸが小さくなる．

2° SUR-Stein 推定値のﾊﾞｲｱｽ，2 次の moment も比較的簡単な形であたえられる．

主要な結果を述べ，また，他にさまざまな問題が残されていることを示しておいた．計算のﾌﾟﾛｾｽはなるべく省略した．

5．2 直交条件がある場合の SUR-Stein 推定値

いま，$m = 2$ で従属変数 y_1，y_2，$t = 1, \ldots, T$ が correlate するとき，2 つの回帰式

$$y_i = X_i \beta_i + u_i$$

の parameter β_i $i = 1, 2$ を同時推定することを考える．5．1 で述べた仮定に加え，説明変数 X_i について

$$\mathrm{rank}(X_i) = l_i < T,$$

$$l_1 + l_2 < T$$

としておく．$\rho \sim 0$ では上の回帰式を個々に考えてもよいが，$\mathrm{mod}(\rho)$ が大きいときには，同時に扱う方がよい．Zellner の推定値は

$$b = (X^t (S \otimes I)^{-1} X)^{-1} X^t (S \otimes I)^{-1} y$$

となっている．ただし

$$S = Y_*^t (I - X_* (X_*^t X_*)^{-1} X_*^t) Y_* / T$$

$$X_* = (X_1, X_2)$$

$$Y_* = (y_1, y_2)$$

とする．さらに Zellner-Vandaele [9] は推定値ﾍﾞｸﾀ b を shrink させて，SUR-Stein

推定値

(2. 1)　　$b(s) = (1 - tr(\Theta S_*)/b^t\Theta b)b$

を提案した．ここで tr( ) は ( ) の対角要素の和であり，Θ (known) は損失関数，$S_* = (X_*^t S^{-1} X_*)^{-1}$ となっている．T が十分に大きいとき，b は normal となるから，b(s) の risk，つまり

$$E\{(b(s) - \beta)^t \Theta (b(s) - \beta)\}$$

は b の risk より小さくなると予想されているが，証明されてはいない．exact な形では不可能だと思う．かなりﾗﾌではあるが，Srivastava et al. [6] はこうした命題が近似的に成立することを示した．

推定値の risk を正確に計算しようとする場合，(2. 1) の形はかなりはん雑になって見通しがよくないし，shrink のさせ方にも少し問題があるように思われる．そこでいま，m = 2 のとき b_1，b_2 に注目するのではなく，b_1，あるいは b_2 のみをとり出し，

$$b_1(s,\ c) = (1 - c\,tr(\Theta S_*)(b_1^t \Theta b_1)^{-1})b_1$$

のような形の推定値を考える．$b_1(s,\ c)$ は ρ についての情報は組み込んだうえで，短縮させる場合については，係数値を 1 つ 1 つ別に考えたものと解釈することができる．また，c は正の定数であって，のちに示すように c を適当にとれば，どのような場合にでも，はじめの推定値 b_1 の risk より小さい risk を持つ $b_1(s,\ c)$ をつねに構成できる．Zellner-Vandaele [9] ははじめから c = 1 としたが，T が十分に大きいときは，多分それでよいと思う．ところで，損失関数 Θ を $\Theta = TI(l_i)$ としよう．いま，$I(l_i)$ は単位行列を表す．

そうすると $b_1(s,\ c)$ は

$$b_1(s,\ c) = \{1 - cl_1(s^{11} T b_1^t b_1)^{-1}\}b_1$$

となる．s^{11} は S^{-1} の (1,1) 要素を意味する．また，計算の簡単のために，

$$\langle X_1,\ X_2\rangle = 0$$

$$\langle X_i,\ X_i\rangle = TI(l_i) \quad i = 1,\ 2$$

としよう ($\langle X_i,\ X_i\rangle$ についての仮定は，あまり本質的なものではない．$X_i X_i \neq TI(l_i)$ としても，そうしてみちびかれる結果は，ここにあたえるものとさほど変わるものではない)．

ところで，Σ の推定値 S をあたえたときの b_1 の分布は

$$b_1|S \sim N(\beta_1,\ c^{*2}(1 + r^2)I(l_1)/T)$$

となる．ただし，

$$c^{*2} = (c^{11})^2 = \sigma_{11} - \sigma_{12}^2/\sigma_{22} = 1/\sigma^{11}$$

σ^{11}: Σ^{-1} の (1,1) 要素

$$r = a_{*12}/a_{*22}$$

$$A_* = CAC^t$$

$$I_2 = C\Sigma C^t$$

$$A = TS$$

である (Kataoka [1] による．以下，とくにことわらないかぎり，分布についての re-duction は [1] からとる)．そうして

$$\tau = c^{*2}(1 + r^2)/T$$

$$z = \tau^{-1/2}b_1$$

とおき，

$$1/s^{11} = s_{11.2} = a_{11.2}/T = c^{*2}a_{*11.2}/T$$

$$= c^{*2}(a_{*11} - a_{*12}^2/a_{*22})/T = c^{*2}a^*/T$$

に気づけば，$b_1(s,\ c)$ は

$$b_1(s,\ c) = \tau^{1/2}\{1 - cl_1c^{*2}a^*T^{-2}(\tau z^tz)^{-1}\}z$$

と表され，$z|\tau \sim N(\tau^{-1/2}\beta_1,\ I(l_1))$ となる．いま $b_1(s,\ c)$ の risk を計算する．ここで

"ﾓﾃﾞﾙの risk" = "定数 x 単位行列"

とすれば，推定値の risk を比較するとき，定数部分は推定値の risk とは無関係になるから，はじめから 定数 = 1 としてよい．したがって

(2. 2)　$b_1(s,\ c)$ の risk

$$= E\{b_1^t(s,\ c)b_1(s,\ c)\} - 2\beta_1^tE\{b_1(s,\ c)\} + \beta_1^t\beta_1$$

$$= E(\tau z^tz) - 2cl_1T^{-2}c^{*2}E(a^*) + c^2(l_1)^2T^{-4}c^{*4}E\{a^{*2}(\tau z^tz)^{-1}\}$$

$$- \beta_1^t\beta_1 + 2\beta_1^tcl_1T^{-2}c^{*2}E\{a^*z(\tau^{1/2}z^tz)^{-1}\}$$

となる．以下で b_1，β_1 の添字を省略することもある．

上の第1項については

$$I = Cov(z|\tau) = E(zz^t|\tau) - \beta_1\beta_1^t/\tau$$

から

$$E(\tau zz^t) = IE(\tau) + \beta_1\beta_1^t$$

となる．また，

$$E(\tau) = T^{-1}c^{*2}E(1 + r^2) = T^{-1}c^{*2}(n - 1)(n - 2)^{-1}$$

ただしここで $n = T - l_1 - l_2$，r の密度は $f(r) = const.(1 + r^2)^{-n/2-1/2}$ である．

したがって

$$E(\tau z^t z) = c^{*2}T^{-1}(n - 1)(n - 2)^{-1}l_1 + \beta_1^t\beta_1 = \text{"}b_1 \text{ の risk"} + \beta_1^t\beta_1$$

となっている．(2. 2) の第2項については a^* が自由度 n - 1 の χ^2 分布にしたがい，$E(a^*) = n - 1$ となるから，

$$\text{"(2. 2) の第2項"} = -2cl_1T^{-2}c^{*2}(n - 1)$$

と計算される．次に第3項を考える．

$$E\{a^{*2}(\tau z^t z)^{-1}\}$$

を計算しなければならないが，ここで S が z と独立 (⊥) だから $(a^*, \tau) \perp z$，さらに $a^* \perp \tau$ もただちにわかる．

したがって

$$E\{a^{*2}(\tau z^t z)^{-1}\} = (n^2 - 1)E(\tau z^t z)^{-1} = (n^2 - 1)EE\{(\tau z^t z)^{-1}|\tau\} = (n^2 - 1)EE\{\tau^{-1}(2K + l_1 - 2)^{-1}|\tau\}$$

となる．ただしここで K は τ をあたえたとき，parameter が $\beta_1^t\beta_1/2\tau$ となるﾎﾟｱｿﾝ変数である．EE{ | } の値はのちに示す．定数 c を定める場合，それは必要ではない．つぎに (2. 2) の第5項の

$$E\{a^* z_i(\tau^{1/2} z^t z)^{-1}\}$$

をもとめる．それは以下のように計算される．

$$
\begin{aligned}
&(n-1)E\{z_i(\tau^{1/2} z^t z)^{-1}\} \\
&\quad = (n-1)EE\{z_i(\tau^{1/2} z^t z)^{-1} \mid \tau\} \\
&\quad = (n-1)EE\{2K\beta_i(\square(l_1 - 2 + 2K))^{-1} \mid \tau\}
\end{aligned}
$$

ここで $\square = \beta_1^t \beta_1$，K はさきにあたえたﾎﾟｱｿﾝ変数である．また，この最後の期待値は

$$EE\{\beta_i(\tau(2K + l_i))^{-1} \mid \tau\}$$

に等しい．証明は以下のとおり．

$x(p \times 1) \sim N(c, I)$ とする．そのとき，

$$
\begin{aligned}
E\{x_i(x^t x)^{-1}\} &= c_i(c^t c)^{-1} E\{2K(2K + p - 2)^{-1}\} \\
&= c_i(c^t c)^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} 2k(2k + p - 2)^{-1}(c^t c/2)^k \\
&\qquad \times (k!)^{-1} \exp(-c^t c/2) \\
&= c_i(c^t c)^{-1} \sum_{k=1} (2(k-1) + 2)(2(k-1) + p)^{-1} \\
&\qquad \times (c^t c/2)^{k-1}(c^t c/2)((k-1)!)^{-1} \\
&\qquad \times (k)^{-1} \exp(-c^t c/2) \\
&= c_i \sum_{k=0} (2k + p)^{-1}(c^t c/2)^k (k!)^{-1} \exp(-c^t c/2) \\
&= c_i E(2K + p)^{-1}
\end{aligned}
$$

となる． Q.E.D.

この結果はあとで $b_1(s, c)$ の moment に別の表現をあたえるときにも，用いられる．

そうするとけっきょく

(2.3) "$b_1(s, c)$ の risk" − "b_1 の risk"

$$
\begin{aligned}
&= -2c l_1 T^{-2} c^{*2}(n-1) \\
&\quad + c^2 l_1^2 T^{-4} c^{*4}(n^2 - 1)E\{\tau^{-1}(2K + l_1 - 2)^{-1}\} \\
&\quad + 2c l_1 T^{-2} c^{*2}(n-1)E\{2K(2K + l_1 - 2)^{-1}\}
\end{aligned}
$$

となる．

ここでｽﾀｲﾝ推定値の risk がもともとの推定値 b_1の risk より一様に小さくなるためには，適当な定数 c に対して (2.3) の右辺が，負になることを言えばよい．

$$\tau = c^{*2}(1 + r^2)T^{-1}, \quad c > 0$$

を用い,

(2. 4) $-2c + c^2 l_1 T^{-1}(n+1)E\{(1+r^2)^{-1}(2K+l_1-2)^{-1}\}$

$+ 2cE\{2K(2K+l_1-2)^{-1}\} < 0$

を示せばよい. 変数 r, あるいは K はもちろん c を含まないから, (2. 4) の左辺は c に関する 2 次式であり, c^2 の係数 > 0 となる. したがって,

(2. 5) $c < \{2 - 2E(2K(2K+l_1-2)^{-1})\}$

$\times \{l_1 T^{-1}(n+1)E((1+r^2)^{-1}(2K+l_1-2)^{-1})\}^{-1}$

であるように c をとれば, (2. 4) は負になる. いま, こうした c を parameter に無関係に選べることを示そう.

$c' = l_1 c(n+1)/2T$

とおくと, (2. 5) は

(2. 6) $c' < \{1 - E(2K(2K+l_1-2)^{-1})\}$

$\times \{E((1+r^2)^{-1}(2K+l_1-2)^{-1})\}^{-1}$

となる. いま, $c' = l_1 - 2$ とすると c' は (2. 6) を満足する. 証明は以下のとおり.

$(l_1-2)E((1+r^2)^{-1}(2K+l_1-2)^{-1})$

$-1 + E\{2K(2K+l_1-2)^{-1}\} < 0$

が言えればよい. この左辺は

$-(l_1-2)E\{r^2(1+r^2)^{-1}(2K+l_1-2)^{-1}\}$

となって, $l_1 > 2$ に対して負になる. また,

$E\{r^2(1+r^2)^{-1}(2K+l_1-2)^{-1}\} < +\infty$

となることもすぐわかる. 期待値の部分を計算できるが, ここでは必要ないので省略する.

Q. E. D.

したがって

$c = 2T(l_1-2)/l_1(n+1) = c''$

とすれば, $0 < c \leqq c''$ となるすべての c についてつねに

(2. 7) "$b_1(s, c)$ の risk" < "b_1 の risk"

となる. (2. 7) をみたすような c" より大きな c の値があるかどうかは, まだよく分かっていないが, c" が c の上限であれば, c = c"/2 とすることによって, $b_1(s, c)$ の

risk をもっとも小さくできる．T が十分に大きければ，$n = T - l_1 - l_2$ だから c^* はほぼ $2 - 4/l_1$ に等しくなる．

ところで，はじめにもどって

$$b_1(s, c) = \{1 - c\,tr(\Theta S_*)(b_1^t \Theta b_1)^{-1}\} b_1$$

をもう一度考えると，最適な c を選んだ場合

$$1 - c\,tr(\Theta S_*)(b_1^t \Theta b_1)^{-1}$$

が負になることがあるから，そうしたときには $c = 0$ とおく方がよい．したがって

$$b_1^+(s, c) = \{1 - c\,tr(\Theta S_*)(b_1^t \Theta b_1)^{-1}\}^+ b_1$$

とすればよい．ここで

$$(a)^+ = a, \quad a \geqq 0 \text{ のとき},$$

$$(a)^+ = 1, \quad a < 0$$

とする．

こうしたことが生ずるのは $c\,tr(\Theta S_*)$ が $\langle b_1, \Theta b_1 \rangle$ に比べて大きすぎるのだから，b_1^+ よりもっと一般的な推定値

$$b_1^*(s, c_1, c_2) = \{1 - c_1 tr(\Theta S_*)(b_1^t \Theta b_1 + c_2 tr(\Theta S_*))^{-1}\} b_1$$

を考えればよい．ただし，$c_1 > 0$, $c_2 \geqq 0$ とする．ここで $c_1 = c$, $c_2 = 0$ とすれば，

$$b_1^*(s, c, 0) = b_1(s, c)$$

となる．一般に $tr(\Theta S_*) > 0$ だから，$c_2 \geqq c_1$ としておけば，つねに

$$1 - c_1 tr(\Theta S_*)(b_1^t \Theta b_1 + c_2 tr(\Theta S_*))^{-1} \geqq 0$$

となって，$b_1^*(s, c_1, c_2)$, b_1 の符号が反対になることがさけられる．

竹内 [11] は shrink させる推定値が normal variable であるときこうした考え方をあたえ，ｽﾀｲﾝ推定値の近似的な risk を計算した．そこでは合理的な値として，いちおう $c_1 = c_2$ が得られている．ただいまの場合，推定値の修正の仕方はそのまま適用できるが，b_1 は normal ではないから，$c_1 = c_2$ としてよいかまだ分かっていない（著者は $b_1^*(s, c_1, c_2)$ の exact risk を計算したが，最適な c_1, c_2 の定め方については，まだ解を得ていない．moment を計算する場合，はじめから Nagar の方式のようにして近似し

た方がよいかも知れない．とにかくはっきりしたことはまだ分かっていない）．

ところで $b_1(s, c)$ の期待値，あるいは 2 次の moment を正確に計算できる．いうまでもなく，$b_1(s, c)$ はつねに偏りのある推定値となっている．先にあたえてあるように

(2．8)　$b_1(s, c) = \tau^{1/2}z - cl_1c^{*2}a^*z(T^2\tau^{1/2}z^tz)^{-1}$

から

$$E(\tau^{1/2}z) = EE(\tau^{1/2}z|\tau) = \beta_1,$$

(2．8) の第2項については $E\{a^*z(\tau^{1/2}z^tz)^{-1}\}$ を計算すればよい．それは途中までは分かっている．つまり，

$$E\{a^*z_i(\tau^{1/2}z^tz)^{-1}\}$$

$$= (n-1)\beta_i\square^{-1}EE\{2K(l_1-2+2K)^{-1}|\tau\}$$

$$= (n-1)\beta_i\square^{-1}[1-(l_1/2-1)EE\{(K+(l_1-2)/2)^{-1}|\tau\}]$$

となる．ただし $\square = \langle\beta_1, \beta_1\rangle$.

ここで $E\{K+(l_1-2)/2\}^{-1}$ が必要になるが，期待値の部分をもう少し一般的に表現しておく方が，あとの議論のためにつごうがよい．$p > 0$ とし，$E(K+p)^{-1}$ を考える．ただし K は τ，したがって r をあたえたとき，parameter が $\square/2\tau = \phi$ となるﾎﾟｱｿﾝ変数である．$E(K+p)^{-1}$ は次のように計算される．

$$E(K+p)^{-1} = E\sum_{k=0}^{\infty}(k+p)^{-1}\phi^k(k!)^{-1}\exp(-\phi)$$

$$= p^{-1}E\{\exp(-\phi)\,{}_1F_1(p, p+1; \phi)\}$$

$$= p^{-1}E\{{}_1F_1(1, p+1; -\phi)\}$$

$$= p^{-1}\sum_{k=0}\Gamma(k+1)\Gamma(p+1)\Gamma^{-1}(k+p+1)$$

$$\times(-\iota)^k(k!)^{-1}E(1+r^2)^{-k}$$

ただし，$\Gamma(\ )$ はｶﾞﾝﾏ関数，そうして

$$\iota = \beta_1^t\beta_1T/2c^{*2},$$

${}_1F_1(\ )$ は次のような関数を表す．

$${}_1F_1(a, b; x) = \sum_{j=0}^{\infty}(a)_j(b)_j^{-1}(j!)^{-1}x^j$$

$$(a)_j = a(a+1)\ \dots\ (a+j-1)$$

$$b \neq 0, -1, -2, \dots$$

また，${}_1F_1(\ )$ の収束半径は $+\infty$ である．ここで上の期待値の部分は，

$$E(1 + r^2)^{-k} = \int_{-\infty}^{+\infty}(1 + r^2)^{-k} \times (r \text{ の密度})\, dr$$

$$= \Gamma(n/2 - 1/2)\Gamma(n/2 + k)\Gamma^{-1}(n/2)\Gamma^{-1}(n/2 + 1/2 + k)$$

となる．けっきょく整理すると，もとめる moment は

(2. 9) $\quad E(K + p)^{-1} = p^{-1}{}_2F_2(1,\ n/2;\ p + 1,\ n/2 + 1/2;\ -\iota) < +\infty$

となる．${}_2F_2(\ )$ は ${}_1F_1(\ )$ とほぼ同様に

$${}_2F_2(a_1,\ a_2;\ b_1,\ b_2;\ x) = \sum_{j=0}^{\infty}(a_1)_j(a_2)_j(b_1)_j^{-1}(b_2)_j^{-1}(j!)^{-1}x^j$$

を表す．${}_2F_2(\ )$ も $\mathrm{mod}(x) < +\infty$ でつねに収束する．

したがって $b_1(s,\ c)$ の期待値については，(2. 9) で $p = l_1/2 - 1$ とおけばよい．途中の計算を省略すると

$$E(b_1(s,\ c)) = \beta_1 - cl_1T^{-2}c^{*2}(n - 1)\beta_1 n^{-1}$$
$$\times \{1 - {}_2F_2(1,\ n/2;\ l_1/2,\ n/2 + 1/2;\ -\iota)\}$$

となる．

$E(b_1(s,\ c))$ の表現方法について他にも考えられる．その 1 つをとりあげる．すでに述べているが，

(2. 10) $\quad EE\{2K(l_1 - 2 + 2K)^{-1}\langle\beta_1,\ \beta_1\rangle^{-1}|\tau\}$

$\quad = EE\{(2K + l_1)^{-1}\tau^{-1}|\tau\}$

に注目すればよい．ここで

$$\tau^{-1} = (c^{*2})^{-1}T(1 + r^2)^{-1}$$

だから (2. 10) の右辺は

$$EE\{(1 + r^2)^{-1}(K + l_1/2)^{-1}|\tau\}$$

のかたちになる．いま期待値 $EE\{\ \ |\tau\}$ をもとめる．$l_1/2$ の代わりに一般に $p > 0$ とすると，次のようになる．

$$EE\{(1 + r^2)^{-1}(K + p)^{-1}|r\}$$
$$= p^{-1}\Sigma_k\Gamma(k + 1)\Gamma(p + 1)\Gamma^{-1}(k + p + 1)$$
$$\times (-\iota)^kE\{(1 + r^2)^{-k-1}\}(k!)^{-1}$$
$$= p^{-1}\Sigma_k\Gamma(k + 1)\Gamma(p + 1)\Gamma^{-1}(k + p + 1)$$
$$\times (-\iota)^k(k!)^{-1}(n/2)_{k+1}(n/2 + 1/2)_{k+1}^{-1}$$

$$= p^{-1}n(n+1)^{-1}{}_2F_2(1,\ n/2+1;\ p+1,\ n/2+3/2;\ -\iota).$$

したがって $p = l_1/2$ とおけば，(2. 10) の右辺は

$$EE\{\tau^{-1}(2K+l_1)^{-1} \mid \tau\}$$

$$= (c^{*2}l_1)^{-1}Tn(n+1)^{-1}$$

$$\times\ {}_2F_2(1,\ n/2+1;\ l_1/2+1,\ n/2+3/2;\ -\iota)$$

となる．これから $b_1(s,\ c)$ の平均は

$$E(b_1(s,\ c)) = \beta_1 - c\beta_1 T^{-1}n(n-1)(n+1)^{-1}$$

$$\times\ {}_2F_2(1,\ n/2+1;\ l_1/2+1,\ n/2+3/2;\ -\iota)$$

とも表される．parameter に特定な値をあたえて数値計算を進める場合は，あとの表現の方が便利かも知れないが，いまこうした話題はあまり本質的なものでない．

ｽﾀｲﾝの推定値 $b_1(s,\ c)$ の 2 次の moment をもとめるには，risk を計算するよりも少しめんどうになる．途中の計算を省略すると，いちおう次のように表せる．

(2. 11) $$E\{(b_1(s,\ c)-\beta_1)(b_1(s,\ c)-\beta_1)^t\}$$

$$= c^{*2}T^{-1}(n-1)(n-2)^{-1}I(l_1) + c^2(l_1)^2c^{*2}(n^2-1)T^{-3}$$

$$\times\ E[\{2K\beta_1\beta_1^t\square^{-1} + I(l_1)\}(1+r^2)^{-1}(2K+l_1)^{-1}(2K+l_1-2)^{-1}]$$

$$+\ 2cl_1T^{-2}c^{*2}(n-1)\{-2^{-1}I(l_1)E(K+l_1/2)^{-1}$$

$$+\ \beta_1\beta_1^t\square^{-1}E(K(K+l_1/2-1)^{-1})$$

$$-\ \beta_1\beta_1^t\square^{-1}E(K(K+l_1/2)^{-1})\},$$

$\square = \langle\beta_1,\ \beta_1\rangle$ となる．ここで risk を計算する場合に用いなかった項については，

$$E\{a^{*2}z_iz_j\tau^{-1}(z^tz)^{-2}\}$$

$$= E(a^{*2})E\{z_iz_j\tau^{-1}(z^tz)^{-2}\}$$

$$= (n^2-1)EE\{z_iz_j\tau^{-1}(z^tz)^{-2} \mid \tau\}$$

$$= (n^2-1)E\{(2K\beta_i\beta_j\square^{-1} + \delta_{ij})\tau^{-1}(2K+l_1)^{-1}(2K+l_1-2)^{-1}\},$$

さらに

$$E\{a^*z_iz_j(z^tz)^{-1}\}$$

$$= (n-1)EE\{z_iz_j(z^tz)^{-1}\}$$

$$= (n-1)E\{(2K\beta_i\beta_j\square^{-1} + \delta_{ij})(2K+l_1)^{-1}\}$$

となっている．(2. 11) で第3項の ｛ ｝ の部分はすべて

$$E(K + p)^{-1},\ p > 0$$

の形に書けるから，それは 2 つの関数

$$ {}_2F_2(1,\ n/2;\ l_1/2 + 1,\ n/2 + 1/2;\ -\iota) $$

$$ {}_2F_2(1,\ n/2;\ l_1/2,\ n/2 + 1/2;\ -\iota) $$

によって表せる．(2. 11) で $(1 + r^2)^{-1}$ を含む項については，

$$
\begin{aligned}
&E\{2K\beta_1\beta_1^t\Omega^{-1}(1 + r^2)^{-1}(2K + l_1)^{-1}(2K + l_1 - 2)^{-1}\} \\
&\quad = 4^{-1}\beta_1\beta_1^t\Omega^{-1}\{l_1E\{(1 + r^2)^{-1}(K + l_1/2)^{-1}\} \\
&\qquad\qquad - (l_1 - 2)E\{(1 + r^2)^{-1}(K + l_1/2 - 1)^{-1}\}\} \\
&\quad = 2^{-1}n(n + 1)^{-1}\beta_1\beta_1^t\Omega^{-1} \\
&\qquad \times \{{}_2F_2(1,\ n/2 + 1;\ l_1/2 + 1,\ n/2 + 3/2;\ -\iota) \\
&\qquad\quad - {}_2F_2(1,\ n/2 + 1;\ l_1/2,\ n/2 + 3/2;\ -\iota)\}
\end{aligned}
$$

となる．$I(l_1)$ の部分については，

$$
\begin{aligned}
&E\{I(l_1)(1 + r^2)^{-1}(2K + l_1)^{-1}(2K + l_1 - 2)^{-1}\} \\
&\quad = 2^{-1}(n + 1)^{-1}nI(l_1) \\
&\qquad \times \{(l_1 - 2)^{-1}{}_2F_2(1,\ n/2 + 1;\ l_1/2,\ n/2 + 3/2;\ -\iota) \\
&\qquad\quad - (1/l_1){}_2F_2(1,\ n/2 + 1;\ l_1/2 + 1,\ n/2 + 3/2;\ -\iota)\}
\end{aligned}
$$

になる．したがってこれらのことから，ｽﾀｲﾝ推定値 $b_1(s,\ c)$ の平均2乗誤差は，

$$
\begin{aligned}
(2.\ 12)\quad &E(b_1(s,\ c) - \beta_1)(b_1(s,\ c) - \beta_1)^t \\
&= c'^2T^{-1}(n - 1)(n - 2)^{-1}I(l_1) + 2^{-1}c^2(l_1)^2T^{-3}c'^2(n - 1)n \\
&\quad \times [\{(l_1 - 2)^{-1}I(l_1) - \beta_1\beta_1^t\Omega^{-1}\}G(1;\ 0,\ 1) \\
&\qquad - \{I(l_1)/l_1 - \beta_1\beta_1^t\Omega^{-1}\}G(1;\ 1,\ 1)] \\
&\quad + 2cl_1T^{-2}c'^2(n - 1)[-\beta_1\beta_1^t\Omega^{-1}G(0;\ 0,\ 0) \\
&\qquad\qquad - \{I(l_1)/l_1 - \beta_1\beta_1^t\Omega^{-1}\}G(0;\ 1,\ 0)]
\end{aligned}
$$

と表される．ただし，$\Omega = \langle\beta_1,\ \beta_1\rangle$,

$$G(i;\ j,\ k) = {}_2F_2(1,\ n/2 + i;\ l_1/2 + j,\ n/2 + 1/2 + k;\ -\iota).$$

上の表現の trace をとれば，それはもちろん $b_1(s,\ c)$ の risk 関数に正確に一致する

. $b_1(s, c)$ の平均2乗誤差はもっと別の形で表せる.

$$EE\{2K\alpha^{-1}(l_1 - 2 + 2K)^{-1} | \tau\}$$
$$= EE\{\tau^{-1}(2K + l_1)^{-1} | \tau\}$$

を用いればよい. そうして得られる表現方法も, だいたい (2. 12) と同じような形になる.

SUR-Stein 推定値 $b_1(s, c)$ の moment をあたえたが, これまでものは, いわゆる exact な議論といわれる. 回帰式の左側に入る従属変数について, nonlinear となる推定値の exact moment をもとめるのは, どんな場合でもかなりはん雑になる. こうしたとき推定値に含まれる $[\ \ ]^{-1}$ の部分をはじめに Taylor 展開して, moment の近似式を計算することがあるが (Nagar の方法), そうしたｱｲﾃﾞｱはもともとの推定値の exact な moment が存在しないかぎり, 意味がない. したがってはじめに推定値の moment が存在するかどうか, 見ておかなければならない. 何年か前にこうした話題が, ひんぱんに議論されたことがあった. Sargan がいちおう一般的な 1 つの解をあたえたように思う.

ここで $b_1(s, c)$ の低次 exact moment は存在するから, その近似式をあたえるさい, はじめから $[\ \ ]^{-1}$ の部分を Taylor 展開することは許される. したがって Srivastava et al. [6] の近似式も, 多分意味をもつように思われる. ただし, Srivastava の推定値のかたちが, いまの $b_1(s, c)$ とはもちろん一致していないので, $b_1(s, c)$ の moment の近似式を探すには, はじめから計算しなおす必要がある.

またもう 1 つの考え方として, さきにあたえた (2. 12) の部分で関数

$${}_2F_2(a_1, a_2; b_1, b_2; x)$$

に注目し, $\iota = (2c^{*2})^{-1}T\langle\beta_1, \beta_1\rangle$ が大きいとき, ${}_2F_2(a_1, a_2; b_1, b_2; x)$ を漸近展開 (asymptotic expansion) すればよい. 観測数 T をおさえておけば, それは c^{*2} が小さいことを意味する. ただ, $x > 0$ で $x \to +\infty$ とするとき, 関数 ${}_2F_2(\ )$ の展開はよく知られているが, $x < 0$ で $x \to -\infty$ となる場合については, あまりよく分かっていない. a_1, a_2, b_1, b_2 がその虚数部分が zero でない complex number であれば, $x < 0$ でも展開は容易になる. ただし, いまの場合はそうでない. ところで

$$c^{*2} = \sigma_{11.2} = \sigma_{11}(1 - \rho^2),\ \rho: 相関係数$$

だから, こうした考え方 (c^{*2} が小さい)は, いわゆる Kadane の small sigma asymptotics になっていることがわかるだろう(第1章, 1. 3 を参照).

参考文献

[1] Kataoka, Y., "The Exact Finite Sample Distribution of Joint Least Squares Estimators for Seemingly Unrelated Regression Equations," Economic Studies Quarterly, 25, 1974, pp. 36-44.

[2] Kuroda, Y. and P. A. Yotopoulos, "A Microeconomic Analysis of Production Behavior of the Farm Household in Japan - A Profit Function Approach," Economic Review, 29, 1978, pp. 116-129.

[3] Phillips, P. C. B., "An Approximation to the Finite Sample Distribution of Zellner's Seemingly Unrelated Regression Estimator," Journal of Econometrics, 6, 1977, pp. 147-164.

[4] Revankar, N. S., "Some Finite Sample Results in the Context of Two Seemingly Unrelated Regression Equations," Journal of the American Statistical Association, 69, 1974, pp. 187-190.

[5] ———, "Use of Restricted Residuals in SUR Systems: Some Finite Sample Results," Journal of the American Statistical Association, 71, 1976, pp. 183-188.

[6] Srivastava, V. K. and T. D. Dwivedi, "Estimation of Seemingly Unrelated Regression Equations: A Brief Survey," Journal of Econometrics, 10, 1979, pp. 15-32.

[7] Zellner, A.,"An Efficient Method of Estimating Seemingly Unrelated Regressions and Tests of Aggregation Bias," Journal of the American Statistical Association, 57, 1962, pp. 348-368.

[8] ———, "Estimators for Seemingly Unrelated Regression Equations: Some Exact Finite Sample Results," Journal of the American Statistical Association, 58, 1963, pp. 977-992.

[9] ——— and W. Vandaele, "Bayes-Stein Estimators for k-Means, Regression and Simultaneous Equation Models," in S. E. Fienberg and A. Zellner, eds., Studies in Bayesian Econometrics and Statistics in Honor of Leonard J. Savage, Amsterdam: North-Holland, 1975, pp. 627-653.

[10] 刈屋武昭「回帰分析の理論」岩波書店，1979年.

[11] 竹内啓「計量経済学の研究」東洋経済新報社，1972年.

第 6 章　分布ﾗｸﾞﾓﾃﾞﾙにおける最小2乗（OLS）推定値

6．1　Koyck 分布ﾗｸﾞﾓﾃﾞﾙ

一般に次のような確率ﾓﾃﾞﾙは，Koyck の分布ﾗｸﾞﾓﾃﾞﾙとよばれている(例えば Theil [5])．つまり，変数 y_t が異なる他の変数 x_t，x_{t-1}，x_{t-2}，... によって影響を受けるが，その程度は time t が過去にさかのぼるほど，少なくなるだろうというものである．そうした内容を 1 次式で表せば，

(1．1)　$y_t = \beta_0 + \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i \beta_1 x_{t-i} + \eta_t$

となる．ここで β_0，β_1，λ ($\mathrm{mod}(\lambda) < 1$) は unknown parameter，$\eta_t$ は time について，たがいに独立となる random disturbances である．さらに

$$\eta_t \sim N(0,\ \sigma^2)$$

とする．

いま，data y_t，x_t，x_{t-1}，x_{t-2}，... から，parameter の set を推定する問題を考える．(1．1) に直接最小2乗法 (L.S.) をあてはめるのは意味がない．そこで

(1．2)　$\lambda y_{t-1} = \lambda \beta_0 + \lambda \beta_1 x_{t-1} + \ldots + \lambda \eta_{t-1}$

とすれば，(1．1)，(1．2) によって

(1．3)　$y_t = (1 - \lambda)\beta_0 + \beta_1 x_t + \lambda y_{t-1} + \eta_t - \lambda \eta_{t-1}$

となる．したがって (1．3) に L.S. をあてはめればよい．ただし，そうしてみちびかれる $(1 - \lambda)\beta_0$，β_1，λ の L.S.E. については，model そのものが通常の condition を満足しないから，ふつうの回帰ﾓﾃﾞﾙ(右辺に入る変数が fixed) で得られる結論は成立しない．また標本の size T が十分に大きい場合を除いて，L.S. estimates の小標本特性は，ほとんど分かっていないように思われる．

ところで，このような議論はより一般的に扱うことができるので，formulation を以下のように整理する．つまり，たがいに独立な variable $y_t (1 \times 1)$ について

$$y_t \sim N(m_t,\ \sigma^2)$$

とする．さらに y_t の mean である m_t が，m_{t-1} と外生変数 $X_t (k \times 1)$ の 1 次関数によって定められるものとしよう．

$$m_t = \gamma m_{t-1} + X_t^t \beta,\ \mathrm{mod}(\gamma) < 1$$

となる．繰り返していえば，y_t，X_t がそれぞれ従属変数，nonstochastic な外生変数，m_t は unknown mean，γ，β が推定しようとする unknown parameter である．すると y_t について，

$$
\begin{aligned}
(1.\ 4)\qquad y_t &= m_t + \eta_t \\
&= \gamma m_{t-1} + X_t^t \beta + \eta_t \\
&= \gamma (m_{t-1} + \eta_{t-1}) + X_t^t \beta + \eta_t - \gamma \eta_{t-1} \\
&= \gamma y_{t-1} + X_t^t \beta + \varepsilon_t \\
\eta_t &\sim N(0,\ \sigma^2)
\end{aligned}
$$

となる．model (1. 4) は model (1. 3) を拡張したものになっているのがわかる．

Nerlove による model も (1. 4) に含まれる．それは，供給関数を農作物に割り当てられる作付面積 y_t が，expected normal price (unobservable) np_t に依存すると解釈する．つまり

$$(1.\ 5)\qquad y_t = \beta_0 + \beta np_t + \eta_t,$$

そうして expected normal price について

$$(1.\ 6)\qquad np_t - np_{t-1} = \gamma (p_{t-1} - np_{t-1}),\quad 0 < \gamma \leqq 1$$

となるような関係をあたえるものとなっている．ここで p_{t-1} は $t-1$ 時点での価格についての observed values である．(1. 5) と (1. 6) によって

$$(1.\ 7)\qquad y_t = \beta_0 \gamma + \beta \gamma p_{t-1} + (1-\gamma) y_{t-1} + \eta_t - (1-\gamma)\eta_{t-1}$$

となるから，(1. 7) を (1. 4) によって表現できるのがわかる．

また，次のような supply function system (Nerlove による model) を考えることができる．

$$
\begin{aligned}
(1.\ 8)\qquad & ey_t = \beta_0 + \beta p_{t-1} + u_t \\
& y_t - y_{t-1} = \gamma (ey_t - y_{t-1}),\quad 0 < \gamma \leqq 1
\end{aligned}
$$

ここで

ey_t: long-run equilibrium acreage (unobservable)

y_t: actual acreage (observable)

p_t: observed price

となっている．(1. 8) を observable な変数によって表せば，

(1. 9)　　$y_t = \beta_0\gamma + \beta\gamma p_{t-1} + (1-\gamma)y_{t-1} + \gamma u_t$

となる．みちびかれる (1. 9) はさきの Koyck, あるいは Nerlove model と同じ form になっていない．(1. 9) の disturbances は γu_t のみからなる．しかしながら，y_t について同様な仮定

$$y_t \sim N(m_t,\ \sigma^2)$$

$$y_t \perp y_s \quad t \neq s$$

$$m_t = \gamma m_{t-1} + X_t^t\beta$$

をおけば，(1. 9) の L.S. estimates は disturbances γu_t の内容によって影響を受けないから，(1. 9) の L.S.E. の性質を見るには，(1. 4) の L.S.E. を考えるだけで十分であることが分かるだろう．

以下で model (1. 4) について γ の L.S.E. の exact mean, exaxt な M.S.E. (平均2乗誤差)をあたえる．また，$\sigma^2 \sim 0$ となるときの mean, M.S.E. の近似式をもとめる. model (1. 4) について，Carter-Ullah は L.S. estimates の moments をあたえようとしたが，解に届かなかった([1], [2]). Sawa [3, 4] のﾚﾎﾟｰﾄが正しい．

6. 2　OLS 推定値の精密 1 次ﾓｰﾒﾝﾄ

いま，ﾃﾞｰﾀ $t = 1, \ldots, T$ をﾌﾟｰﾙして model (1. 4) を

(2. 1)　　$y = \gamma y_{-1} + X\beta + \varepsilon$

と表現しよう．ここで

$$y^t = (y_2, \ldots, y_T)$$

$$y_{-1}^t = (y_1, \ldots, y_{T-1})$$

$X((T-1) \times k)$ の第 t 行 $= (x_{1,t+1}, \ldots, x_{k,t+1})$　$t = 1, \ldots, T-1$

$$\varepsilon^t = (\varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_T)$$

γ : scalar

$$\beta^t = (\beta_1, \ldots, \beta_k)$$

となっている．こうしたとき，(2. 1) の γ の L.S.E. c は

(2. 2)　　$c = y_{-1}^t My(y_{-1}^t My_{-1})^{-1}$

によってあたえられる．ただし

$$M = I - X(X^tX)^{-1}X^t$$

となって，M はベキ等，

$$\mathrm{rank}(M) = T - 1 - k = T'$$

であることがわかる．

そうして new variable

$$z_t = y_t/\sigma,\ z^t = (z_1,\ \ldots,\ z_T)$$

によって（2．2）を表すと

(2．3) $$c = z^tAz(z^tBz)^{-1}$$

となる．ただし

$$A = 2^{-1}(c_1^tMc_2 + c_2^tMc_1)$$

$$c_1 = (I_n,\ 0)\quad 0:\ n(= T - 1) \times 1$$

$$c_2 = (0,\ I_n)\quad 0:\ n \times 1$$

$$B = c_1^tMc_1.$$

以下でまず，c の exact mean をもとめよう．ここで B がベキ等となるのもすぐわかるから，z をさらに Hz = Y によって new variable Y へ移す．ただし H は

$$HBH^t = \mathrm{diag}(I(T'),\ 0)$$

となるような orthogonal matrix である．(2．3) の z^tBz は

$$\begin{aligned} z^tBz &= z^tH^t\{\mathrm{diag}(I,\ 0)\}Hz \\ &= Y^t\{\mathrm{diag}(I,\ 0)\}Y \\ &= \langle Y_1,\ Y_1\rangle \end{aligned}$$

となる．ここで Y_1 は $Y^t = (Y_1^t,\ Y_2^t)$ の subvector である．また，

$$Y = Hz \sim N(Y^*,\ I_T)$$

ただし

$$Y^* = Hz^*$$

$$H^t = (H_1^t,\ H_2^t)\quad H_1:\ T' \times T$$

$$z_*^t = m_+^t/\sigma,\ m_+^t = (m_1,\ \ldots,\ m_T).$$

さらに

$$Y_1^t Y_1 \sim \chi'^2(T',\ z^{*t} H_1^t H_1 z^*)$$

$$H_1^t H_1 = B$$

$$Y_2^t Y_2 \sim \chi'^2(T - T',\ z^{*t} H_2^t H_2 z^*)$$

$$H_2^t H_2 = I - B$$

となるのも容易にわかる．

そうすると (2. 3) の L.S.E. c は Y(T x 1) によって

$$c = Y^t JY(Y_1^t Y_1)^{-1}$$

$$J = HAH^t$$

となる．ここで J_{ij} を

$J_{11}(T' \times T')$: J の upper-left 部分行列

J_{21}: J の lower-left

J_{22}: J の lower-right

とし，E(c) を J_{ij} と Y_i によって表せば，

(2. 4)
$$E(c) = E\{Y_1^t J_{11} Y_1 (Y_1^t Y_1)^{-1}\} + 2E\{Y_2^t J_{21} Y_1 (Y_1^t Y_1)^{-1}\} + E\{Y_2^t J_{22} Y_2 (Y_1^t Y_1)^{-1}\}$$

となる．(2. 4) の第1項をあたえるために，以下の lemma が必要になる．

lemma 2. 1. $Y_*(T' \times 1) \sim N(b,\ I)$, R: diagonal とするとき，$Y_*^t Y_*$, $Y_*^t R Y_*$ の m. g. f. (積率母関数)は

$$g(s_0,\ s_1) = \{\Pi_{i=1}^{T'}(1 - 2s_0 - 2s_1 r_i)\}^{-1/2} \times \exp\{-b^t b/2 + \Sigma_{i=1}^{T'} b_i^2 (1 - 2s_0 - 2s_1 r_i)^{-1}/2\}$$

となる．

<証明> m. g. f. は

$$\begin{aligned} g(\ ) &= \int \exp(s_0 Y_*^t Y_* + s_1 Y_*^t R Y_*) f(Y_*)\, dY_* \\ &= \{\det(I - 2s_0 I - 2s_1 R)\}^{-1/2} \\ &\quad \times \exp\{-b^t b/2 + b^t (I - 2s_0 I - 2s_1 R)^{-1} b/2\} \end{aligned}$$

となる.　　Q. E. D.

lemma 2. 2. $Y_*^t R Y_* (Y_*^t Y_*)^{-1}$ の 1 次モーメントは

$$b^t R b E(T' + 2 + 2K)^{-1} + tr(R) E(T' + 2K)^{-1}$$

によってあたえられる. ここで $K \sim \mathrm{Poisson}(b^t b/2)$ である.

〈証明〉まず m.g.f. を s_1 について微分すると

$$d_1 g(\ ) = \{\exp(-b^t b/2 + b^t S^* b/2)\}$$

$$\times\ [2^{-1} \Sigma_i b_i^2 \{d_1 (1 - 2s_0 - 2s_1 r_i)^{-1}\} \{\Pi_i (\ )\}^{-1/2}$$

$$+ d_1 \{\Pi_i (1 - 2s_0 - 2s_1 r_i)^{-1/2}\}]$$

$$S^* = \mathrm{diag}\{(1 - 2s_0 - 2s_1 r_1)^{-1}, \ldots, (1 - 2s_0 - 2s_1 r_{T'})^{-1}\}$$

d_1: 微分オペレタ

となる. ここで

$$d_1 (1 - 2s_0 - 2s_1 r_i)^{-1} | (s_1 = 0) = 2r_i (1 - 2s_0)^{-2}$$

$$d_1 \{\Pi_i (1 - 2s_0 - 2s_1 r_i)^{-1/2}\} | (s_1 = 0) = (1 - 2s_0)^{-T'/2-1} tr(R)$$

に注意すれば, けっきょく

$$d_1 g(s_0, s_1)|_0 = \{(1 - 2s_0)^{-(T'+4)/2} e^{22} + (1 - 2s_0)^{-(T'+2)/2} e^{21}\}$$

$$\times \exp\{-b^t b/2 + b^t b (1 - 2s_0)^{-1}/2\}$$

となる. ただし $e^{21} = tr(R)$, $e^{22} = b^t R b$. したがって, もとめる期待値は以下のようになる.

$$E\{Y_*^t R Y_* (Y_*^t Y_*)^{-1}\} = \int_{-\infty}^{0} d_1 g(\ )_0 ds_0$$

$$= \Sigma_{i=1}^{2} e^{2i} \int_{-\infty}^{0} \mathrm{m.g.f.}(s_0 | \chi'^2, T' + 2i, b^t b)\, ds_0.$$

さらにこの積分は

$$E\{\chi'^2 (T' + 2i, b^t b)\}^{-1} = E\{\chi^2 (T' + 2i + 2K)\}^{-1}$$

となる. ここで m.g.f.$(s_0 | \chi'^2, T' + 2i, b^t b)$ は自由度 $T' + 2i$, 非心度が $b^t b$ となる χ^2 variable の m.g.f. を表す.　　Q. E. D.

ところで, 一般に $x \sim N(m, I(T'))$, J: symmetric とすれば,

$$E\{x^t J x (x^t x)^{-1}\} = E\{x^t P^t P J P^t P x (x^t P^t P x)^{-1}\}$$

$$= E\{Y_+^t R Y_+ (Y_+^t Y_+)^{-1}\}$$

とすることができる．ここで

$$PJP^t = R \text{ (diagonal)}, \quad Y_+ = Px.$$

したがって $b^t Rb = m^t Jm$, $tr(R) = tr(J)$ となるから

$$E\{x^t Jx(x^t x)^{-1}\} = m^t JmE(T' + 2 + 2K)^{-1}$$
$$+ tr(J)E(T' + 2K)^{-1}$$
$$K \sim \text{Poisson}(m^t m/2).$$

こうした結果から

(2. 5)　(2. 4) の R.H.S. の第1項

$$= \langle Y_1^*, J_{11}Y_1^*\rangle E(T' + 2 + 2K)^{-1} + tr(J_{11})E(T' + 2K)^{-1}$$

$$K \sim \text{Poisson}(\alpha/2)$$

$$\alpha = \langle Y_1^*, Y_1^*\rangle$$

のように計算されるのがわかる．ここで $\langle Y_1^*, J_{11}Y_1^*\rangle$, $tr(J_{11})$, $\langle Y_1^*, Y_1^*\rangle$ をはじめの parameter で表すと，簡単な計算によって

$$\langle Y_1^*, J_{11}Y_1^*\rangle = \langle z^*, BABz^*\rangle$$

$$tr(J_{11}) = tr(AB)$$

$$\langle Y_1^*, Y_1^*\rangle = \langle z^*, Bz^*\rangle$$

となる．さらに A は B で表せる．また，z^*, A, B, を γ, m_+, σ^2, M, c_1, c_2 によって表現できるが，それものちに述べよう．

つぎに (2. 4) の R.H.S. の第2項 x 1/2, つまり

$$E\{Y_2^t J_{21} Y_1 (Y_1^t Y_1)^{-1}\}$$

を考える．

(2. 6)　$E\{Y_2^t J_{21} Y_1 (Y_1^t Y_1)^{-1}\}$

$$= E(Y_2^t J_{21})E\{Y_1^t (Y_1 Y_1)^{-1}\}$$

$$= z^* H_2^t J_{21} H_1 z^* E(T' + 2K)^{-1}$$

$$= z^*(I - B)ABz^* E(T' + 2K)^{-1}$$

となる．ここで $H_1(T' \times T)$, $H_2((T - T') \times T)$ はすでにあたえてある．

$$J_{ij} = H_i A H_j^t \quad i, j = 1,\ 2$$

となっている.

つづいて (2. 4) における R.H.S. の第3項を計算すると,

$$(2.\ 7)\qquad E(Y_2^t J_{22} Y_2)E(Y_1^t Y_1)^{-1}$$

$$= tr(J_{22})E(Y_2 Y_2^t)E(T' - 2 + 2K)^{-1}$$

$$= \{tr(A(I - B)) + z^{*t}(I - B)A(I - B)z^*\}E(T' - 2 + 2K)^{-1}$$

ここで $E\langle Y_1,\ Y_1\rangle^{-1} < +\infty$ となるように, $T' > 2$ としておく. さらに (2. 7) の R.H.S. の { } は zero になる. つまり, それは $E\langle Y_2,\ J_{22}Y_2\rangle = 0$ を意味している. こうした点は直観的には明かではないが, Y_2 を z で表せばわかる.

$$Y_2^t J_{22} Y_2 = z^t H_2^t J_{22} H_2 z$$

$$= z^t (I - B)A(I - B)z,$$

そうして $(I - B)A(I - B)$ を取り上げると次のようになる.

$$A = (Bc_1^t c_2 + c_2^t c_1 B)/2$$

だから

$$AB = (Bc_1^t c_2 B + c_2^t c_1 B)/2$$

$$A - AB = B(c_1^t c_2 - c_1^t c_2 B)/2$$

$$BA(I - B) = B(c_1^t c_2 - c_1^t c_2 B)/2$$

したがって $(I - B)A(I - B) = 0$ となる.

すると, (2. 4), (2. 5), (2. 6), (2. 7) から, γ の L.S. estimates c の exact mean は

$$(2.\ 8)\qquad E(c) = z^{*t}BABz^*E(T' + 2 + 2K)^{-1}$$

$$+ \{tr(AB) + 2z^{*t}(A - BA)Bz^*\}E(T' + 2K)^{-1}$$

$$K \sim \text{Poisson}(\text{¤}/2)$$

となって, 比較的簡単な表現になる.

ここで (2. 8) の R.H.S. の $E(\ \ )^{-1}$ にかかる係数値を, m_+, σ^2, M, c_1, c_2 によっ

て表そう．まず

(2. 9) $\quad z^{*t} B z^{*} = \sigma^{-2} m_{+}^{t} B m_{+} = \sigma^{-2} m_{-1}^{t} M m_{-1} = \sigma^{-2} a_{00}$

(2. 10) $\quad z^{*t} BAB z^{*} = 2^{-1} z^{*t} c_1^{t} M c_2 c_1^{t} M c_1 z^{*} + 2^{-1} z^{*t} c_1^{t} M c_1 c_2^{t} M c_1 z^{*}$

$$= 2^{-1} \sigma^{-2} m_{-1}^{t} MSM m_{-1}$$

$$= 2^{-1} \sigma^{-2} a_{12}$$

となる．ただし

(2. 11) $\quad S(n \times n) = c_2 c_1^{t} + c_1 c_2^{t}, \; n = T - 1.$

また，

(2. 12) $\quad tr(AB) = -2^{-1} tr\{c_2 c_1^{t} (I - M)\} - 2^{-1} tr\{(I - M) c_1 c_2^{t}\}$

$$= 2^{-1} tr(MS)$$

$$= 2^{-1} a_{01}$$

$$z^{*t} AB z^{*} = 2^{-1} z^{*t} c_1^{t} M c_2 c_1^{t} M c_1 z^{*} + 2^{-1} z^{*t} c_2^{t} M c_1 z^{*}$$

$$= 2^{-1} \sigma^{-2} m_{-1}^{t} M c_2 c_1^{t} M m_{-1} - 2^{-1} \sigma^{-2} \gamma m_{-1}^{t} M m_{-1}$$

（ここで $m = \gamma m_{-1} + X\beta$，$MX = 0$ に気づけばよい）．さらに B，A はともに symmetric になっているから，$\langle z^{*}, ABz^{*} \rangle = \langle z^{*}, BAz^{*} \rangle$，したがって

(2. 13) $\quad z^{*t} AB z^{*} = 4^{-1} \sigma^{-2} m_{-1} MSM m_{-1}^{t} + 2^{-1} \sigma^{-2} \gamma m_{-1}^{t} M m_{-1}$

$$= 4^{-1} \sigma^{-2} a_{12} + 2^{-1} \sigma^{-2} \gamma a_{00}$$

となる．

こうした結果から E(c) は

(2. 14) $\quad E(c) = 2^{-1} \sigma^{-2} a_{12} E(T' + 2 + 2K)^{-1}$

$$+ (2^{-1} a_{01} - 2^{-1} \sigma^{-2} a_{12} + \sigma^{-2} \gamma a_{00}) E(T' + 2K)^{-1}$$

$$K \sim \text{Poisson}(2^{-1} \sigma^{-2} a_{00})$$

となる．a_{ij}，$i, j = 0, 1, \ldots$ は (2. 9) ～ (2. 13) からえられる．また，$E(\;)^{-1}$ は confluent hypergeometric function によって表せる．(2. 14) ですぐわかるように，c は γ の biased estimates となっている．

6．3　2 次モーメント

ここで c の 2 次モーメントをもとめよう．

$$c^2 = (Y^t JY)^2 (Y_1^t Y_1)^{-2}$$

$$J = HAH^t$$

$$Y_2^t J_{22} Y_2 = 0$$

に気づけば，

$$(3.\ 1)\qquad E(c^2) = E\{(Y_1^t J_{11} Y_1)^2 (Y_1^t Y_1)^{-2}\} + 4E\{(Y_2^t J_{21} Y_1)^2 (Y_1^t Y_1)^{-2}\}$$

$$+ 4E\{Y_1^t J_{11} Y_1 Y_1^t J_{21}^t (Y_1^t Y_1)^{-2}\} E(Y_2)$$

となることがわかる．$E(c^2) < +\infty$ となるように

$$E(Y_1^t Y_1)^{-2} < +\infty,$$

つまり T' > 4 としておく．moment の存在について詳しくﾁｪｯｸしないが，多分これでよい．T' を適当に大きくとれば，$E(c^2)$ はつねに bounded になる．

はじめに (3．1) の R.H.S. の第1項を計算しよう．一般に

$$Y_\cdot \sim N(b,\ I(T'))$$

とするとき，$\langle Y_\cdot, Y_\cdot\rangle$, $\langle Y_\cdot, RY_\cdot\rangle$ の m.g.f. を s_1 で微分した表現は 6．2 より

$$d_1 g(\ ) = [\Sigma_i b_i^2 r_i (1 - 2s_0 - 2s_1 r_i)^{-2} \{\Pi_i(\ )\}^{-1/2}$$

$$+ d_1\{\Pi_i (1 - 2s_0 - 2s_1 r_i)^{-1/2}\}]$$

$$\times \{\exp(-b^t b/2 + b^t S^* b/2)\}.$$

したがってさらに $d_1 g(\ )$ を s_1 で微分すれば，

$$d_1^2 g(\ ) = \Sigma\ 4b_i^2 r_i^2 (1 - 2s_0 - 2s_1 r_i)^{-3} \{\Pi(\ )\}\exp(\ )$$

$$+ \{\Sigma\ b_i^2 r_i (1 - 2s_0 - 2s_1 r_i)^{-2}\}^2 \{\Pi(\ )\}\exp(\ )$$

$$+ 2\{d_1\{\Pi(\ )\}\}\{\Sigma\ b_i^2 r_i (1 - 2s_0 - 2s_1 r_i)^{-2}\}\exp(\ )$$

$$+ \{d_1^2\{\Pi(\ )\}\}\exp(\ )$$

となる．ここで $d_1^2 g(\ )$ を $s_1 = 0$ で evaluate した値が必要になるが，$d_1^2\{\Pi(\ )\}|_0$ に注意しておけばよい．それは以下のようになる．

$$d_1^2\{\Pi_{i=1}^{T'}(1 - 2s_0 - 2s_1r_i)^{-1/2}\}$$

$$= \Sigma_{i=1}^{T'} f_i^{-1} d_1 f_i \{d_1\{\Pi(\ )\}\} + \Sigma_{i=1}^{T'} (f_i^{-2}(f_i d_1^2 f_i - (d_1 f_i)^2))\Pi(\ )$$

$$= \{\Sigma_{i=1}^{T'} (f_i^{-1} d_1 f_i)^2 + \Sigma_{i=1}^{T'} (f_i^{-2}(f_i d_1^2 f_i - (d_1 f_i)^2))\}\Pi(\ )$$

$$f_i = (1 - 2s_0 - 2s_1r_i)^{-1/2}.$$

そうして

$$(d_1 f_i)/f_i|_0 = (1 - 2s_0)^{-1} r_i$$

$$f_i^{-2}(f_i d_1^2 f_i - (d_1 f_i)^2)|_0 = 2r_i^2(1 - 2s_0)^{-2}$$

となるから，けっきょく

$$d_1^2 \Pi(\ )|_0 = (1 - 2s_0)^{-(T'+4)/2}\{(tr(R))^2 + 2tr(R^2)\}$$

のように計算されることがわかる．

計算過程を省略すれば，$d_1^2 g(\ )|_0$ は

$$d_1^2 g(\ )|_0 = \Sigma_{i=1}^{3} e_i (1 - 2s_0)^{-T'/2-i-1}\exp(\ )$$

$$\exp(\ ) = \exp(-2^{-1}b^t b + 2^{-1}(1 - 2s_0)^{-1}b^t b)$$

$$e_1 = (tr(R))^2 + 2tr(R^2)$$

$$e_2 = 4b^t R^2 b + 2tr(R)b^t Rb$$

$$e_3 = (b^t Rb)^2$$

となる．したがって

$$E\{(Y_*^t RY_*)^2 (Y_*^t Y_*)^{-2}\}$$

$$= \int_{-\infty}^{0} (-s_0) d_1^2 g(\ )|_0 ds_0$$

$$= \Sigma_{i=1}^{3} e_i \int_{-\infty}^{0} (-s_0) \mathrm{m.g.f.}(s_0|\chi'^2,\ T' + 2i + 2,\ b^t b)\ d_0$$

$$= \Sigma_{i=1}^{3} e_i E\{\chi'^2(T' + 2i + 2,\ b^t b)\}^{-2}$$

$$= \Sigma_{i=1}^{3} e_i E\{(T' + 2i + 2K)^{-1}(T' - 2 + 2i + 2K)^{-1}\}$$

$$K \sim \mathrm{Poisson}(2^{-1}b^t b).$$

そうすると (3. 1) の R.H.S. の第1項を知るには，(3. 1) の Y_1 を x_1 に移したのち

, x_1 と $Y_\cdot$ の対応関係に気づきさえすればよい．つまり

$$E\{(Y_1^t J_{11} Y_1)^2 (Y_1^2 Y_1)^{-1}\} = E\{x_1^t R_{11} x_1)^2 (x_1^t x_1)^{-2}\}$$

と表現しよう．ここで

$$QY_1 = x_1 \sim N(QY_1^*,\ I(T'))$$

$$QJ_{11}Q^t = R_{11}$$

$$QQ^t = I(T')$$

R_{11}: diagonal

Q: orthogonal,

対応は $(Y_\cdot,\ b,\ R) \to (x_1,\ QY_1^*,\ R_{11})$ となっている．途中の計算をすべて書かないが，以下がわかる．

$$b^t b \to z_*^t Bz^*$$

$$b^t Rb \to z_*^t BABz^*$$

$$b^t R^2 b \to z_*^t BABABz^*$$

$$tr(R) \to tr(AB)$$

$$tr(R^2) \to tr(ABAB).$$

そうすると必要としている期待値は

$$(3.\ 2) \qquad E\{(Y_1^t J_{11} Y_1)^2 (Y_1^t Y_1)^{-1}\}$$

$$= \Sigma_{i=1}^{3} e_i E\{(T' + 2i + 2K)^{-1} (T' - 2 + 2i + 2K)^{-1}\}$$

$$K \sim \mathrm{Poisson}(2^{-1}\langle z^*,\ Bz^*\rangle)$$

$$e_1 = (tr(AB))^2 + 2tr(ABAB)$$

$$e_2 = 4z_*^t BABABz^* + 2tr(AB) z_*^t BABz^*$$

$$e_3 = (z_*^t BABz^*)^2$$

となる．

つぎに (3. 1) の R.H.S. の第2項 x 1/4 を計算しよう．

$$E\{(Y_2^t J_{21} Y_1)^2 (Y_1^t Y_1)^{-2}\} = EE\{(c^t Y_1)^2 (Y_1^t Y_1)^{-2} | Y_2\} \quad c^t = Y_2^t J_{21}$$

となるから，まず Y_2 について conditional な $\langle Y_1,\ Y_1\rangle$, $\langle c,\ Y_1\rangle$ の m.g.f. をもとめ

る．すると簡単な計算によって，

$$g(s_0,\ s_2)|Y_2 = (1 - 2s_0)^{-T'/2}$$

$$\times \exp\{-2^{-1}\langle Y_1^*,\ Y_1^*\rangle + 2^{-1}\langle Y_1^* + s_2 c,\ Y_1^* + s_2 c\rangle(1 - 2s_0)^{-1}\}$$

$$c:\ \text{given}$$

となる．この $g(\ )|Y_2$ について s_2 で連続 2 回微分し，$s_2 = 0$ とすれば，

$$d_2^2 g(\ )|Y_2|(s=0) = \Sigma_{i=1}^{2} u_i (1 - 2s_0)^{-T'/2-i} \exp(\ )$$

$$u_1 = c^t c$$

$$u_2 = (c^t Y_1^*)^2$$

$$\exp(\ ) = \exp\{-2^{-1}\langle Y_1^*,\ Y_1^*\rangle + 2^{-1}\langle Y_1^*,\ Y_1^*\rangle(1 - 2s_0)^{-1}\}$$

となる．ゆえに

(3. 3) $$EE\{(c^t Y_1)^2 (Y_1^t Y_1)^{-2} | Y_2\}$$

$$= \int_{-\infty}^{0} (-s_0)\{d_2^2 g(\ )|Y_2\}|_0 ds_0$$

$$= \Sigma_{i=1} u_i E\{\chi'^2(T' + 2i,\ \langle Y_1^*,\ Y_1^*\rangle)\}^{-2},$$

そうして

(3. 4) $$E\{\chi'^2(T' + 2i,\ \langle Y_1^*,\ Y_1^*\rangle)\}^{-2},$$

$$= E\{(T' - 2 + 2i + 2K)^{-1}(T' - 4 + 2i + 2K)^{-1}\} \quad i = 1,\ 2$$

である．ここで (3. 4) は Y_2 を含んでいないから，(3. 3) の L.H.S. の 条件付きでない期待値をもとめるには，(3. 3) の R.H.S. の u_i について，Y_2 に関する期待値をとればよい．まず，u_1 について

$$E(u_1) = E(Y_2^t J_{21} J_{21}^t Y_2)$$

$$= tr\{H_2 A H_1^t H_1 A H_2^t (I + H_2 z^* z^{*t} H_2^t)\}$$

$$= tr\{ABA(I - B)\} + z^{*t}(I - B)AB(I - B)z^*$$

となる．さらに u_2 は

$$E(u_2) = z^{*t} H_1^t J_{21}^t E(Y_2 Y_2^t) J_{21} H_1 z^*$$

$$= z^{*t} BA(I - B)ABz^* + \{z^{*t} BA(I - B)z^*\}^2$$

のようになる．

けっきょく条件付きでない $(Y_2^t J_{21} Y_1)^2 (Y_1^t Y_1)^{-2}$ の期待値は，次のように表現される．

(3. 4.a) $E\{(Y_2^t J_{21} Y_1)^2 (Y_1^t Y_1)^{-2}\}$

$$= \Sigma_{i=1}^{2} E(u_i) E\{(T' - 2 + 2i + 2K)^{-1} (T' - 4 + 2i + 2K)^{-1}\}$$

$$K \sim \mathrm{Poisson}(2^{-1}\langle z^*, Bz^*\rangle).$$

つぎに (3. 1) の第3項 x 1/4 をもとめよう．$E(Y_2) = H_2 z^*$ だからそれは

(3. 5) $E\{Y_1^t J_{11} Y_1 Y_1^t J_{21}^t H_2 z^* (Y_1^t Y_1)^{-2}\} = E\{x^t Rx x^t c (x^t x)^{-2}\}$

となる．ここで

$QJ_{11}Q^t = R$

R: diagonal

Q: orthogonal

$x = QY_1 \sim N(b, I(T'))$

$c = QJ_{21}^t H_2 z^*$

$b = QY_1^*$

である．(3. 5) をもとめるために，$\langle x, x\rangle$，$\langle x, Rx\rangle$，$\langle x, c\rangle$ の m.g.f. を考えれば

$$g(s_0, s_1, s_2) = E\{\exp(s_0 x^t x + s_1 x^t Rx + s_2 x^t c)\}$$

$$= \int \mathrm{const.}\exp\{-2^{-1}(x^t L_1 x - 2L_2^t x + b^t b)\}\, dx$$

$L_1 = I - 2s_0 I - 2s_1 R$

$L_2 = cs_2 + b$

となる．計算を続けると g( ) は

$$g(\ ) = \Pi_{i=1}^{T'} (1 - 2s_0 - 2s_1 r_i)^{-1/2}$$

$$\times \exp\{-2^{-1} b^t b + 2^{-1} \Sigma_i (c_i s_2 + b_i)^2 (1 - 2s_0 - 2s_1 r_i)^{-1}\}.$$

ここで g( ) を s_1 で微分したものは

$$d_1 g(\ ) = u^1 \exp(\ ) + \Sigma_i (c_i s_2 + b_i)^2 r_i (1 - 2s_0 - 2s_1 r_i)^{-2}$$

$$\times \{\Pi_i(\ )\}\exp(\ )$$

$$u^1 = \Sigma_j r_j (1 - 2s_0 - 2s_1 r_j)^{-1} \{\Pi_i(\ )\},$$

さらに $d_1 g(\ )$ を s_2 で微分すれば，

$$d_{21}g(\ ) = u^1u^2\exp(\ ) + \{\Sigma_i 2c_i(c_is_2 + b_i)(1 - 2s_0 - 2s_1r_i)^{-2}r_i$$

$$+ \Sigma_i(c_is_2 + b_i)^2(1 - 2s_0 - 2s_1r_i)^{-2}r_iu^2\}\exp(\ )\{\Pi_i(\ )\}$$

$$u^2 = \Sigma_i c_i(c_is_2 + b_i)(1 - 2s_0 - 2s_1r_i)^{-1}$$

となるのがわかる. そうして

$$u^1|(s_1=0) = (1 - 2s_0)^{-T'/2-1}tr(R)$$

$$u^2|(s_1=s_2=0) = (1 - 2s_0)^{-1}b^tc$$

に気づけば, $s_1 = s_2 = 0$ での $d_{21}g(\ )$ の値は

$$d_{21}g(\ )|(s_1=s_2=0) = \Sigma_{i=1}^2 h_i(1 - 2s_0)^{-T'/2-i-1}\exp(\ )$$

$$\exp(\ ) = \exp\{-2^{-1}b^tb + 2^{-1}b^tb(1 - 2s_0)^{-1}\}$$

$$h_1 = b^tctr(R) + 2b^tRc$$

$$h_2 = b^tRbb^tc$$

となる.

したがって

(3. 6) $$E\{x^tRxc^tx(x^tx)^{-2}\}$$

$$= \int_{-\infty}^0(-s_0)d_{21}g(\ )|_{00}ds_0$$

$$= \Sigma_{i=1}^2 h_i\int_{-\infty}^0(-s_0)m.g.f.(s_0|\chi'^2,\ T' + 2i + 2,\ b^tb)\ ds_0$$

$$= \Sigma_{i=1}^2 h_iE\{(T' + 2i + 2K)^{-1}(T' - 2 + 2i + 2K)^{-1}\}$$

$$K \sim \mathrm{Poisson}(2^{-1}\langle Y_1^*,\ Y_1^*\rangle)$$

となることが容易にわかる. (3. 6) にあらわれる係数 h_1, h_2 を A, B, z^* で表現すれば,

$$\langle Y_1^*,\ Y_1^*\rangle = \langle z^*,\ Bz^*\rangle$$

$$tr(R) = tr(AB)$$

$$b^tc = z^{*t}BA(I - B)z^*$$

$$b^tRc = z^{*t}BABA(I - B)z^*$$

$$b^tRb = z^{*t}BABz^*$$

から

$$h_1 = z_*^t BA(I - B)z^* \mathrm{tr}(AB) + 2z_*^t BABA(I - B)z^*$$

$$h_2 = z_*^t BABz^* z_*^t BA(I - B)z^*$$

となる．A を B で表せるが，そうしても見通しはさほどよくない．

そうすると (3. 2)，(3. 4.a)，(3. 6) から，L.S. estimates c の 2 次の exact moment は，以下のようになる．

(3. 7) $$E(c^2) = \Sigma_{i=0}^{3} h^i E\{(T' - 2 + 2i + 2K)^{-1}(T' + 2i + 2K)^{-1}\}$$

$$K \sim \mathrm{Poisson}(2^{-1}\langle z^*, Bz^*\rangle).$$

ここで

(3. 8) $$h^0/4 = \mathrm{tr}\{A(I - B)AB\} + z_*^t(I - B)ABA(I - B)z^*$$

$$h^1/4 = 4^{-1}\{\mathrm{tr}(AB)\}^2 + 2^{-1}\mathrm{tr}(ABAB) + z_*^t BA(I - B)z^* \mathrm{tr}(AB)$$

$$+ 2z_*^t BABA(I - B)z^* + z_*^t BA(I - B)ABz^* + \{z_*^t BA(I - B)z^*\}^2$$

$$h^2/4 = z_*^t BABABz^* + 2^{-1} z_*^t BABz^* \mathrm{tr}(AB) + z_*^t BABz^* z_*^t BA(I - B)z^*$$

$$h^3 = (z_*^t BABz^*)^2.$$

さきにも述べているが，(3. 8) の h^i $i = 0, 1, 2, 3$ は，A，B，z^* よりも M，c_1，c_2，σ^2，γ，

$$m_+^t = (m_1, \ldots, m_T)$$

$$m_{-1}^t = (m_1, \ldots, m_{T-1})$$

$$m^t = (m_2, \ldots, m_T)$$

によって表現する方がよい．そうすると

$$z_*^t BABz^* = (2\sigma^2)^{-1} a_{12}$$

$$z_*^t BABABz^* = (4\sigma^2)^{-1} m_{-1}^t MSMSMm_{-1} = (4\sigma^2)^{-1} a_{13}$$

$$S = c_1 c_2^t + c_2 c_1^t$$

$$\mathrm{tr}(AB) = 2^{-1} a_{01}$$

$$z_*^t BA(I - B)z^* = (2\sigma^2)^{-1}\gamma\, m_{-1}^t Mm_{-1} - (4\sigma^2)^{-1} m_{-1}^t MSMm_{-1}$$

$$= (2\sigma^2)^{-1}\gamma a_{00} - (4\sigma^2)^{-1}a_{12}$$

$$\mathrm{tr}(ABAB) = 4^{-1}\mathrm{tr}(SMSM) = 4^{-1}a_{02}$$

$$z_*^t BABA(I - B)z_* = -(4\sigma^2)^{-1} m_{-1}^t MSMSM m_{-1} + (4\sigma^2)^{-1}\gamma m_{-1}^t MSM m_{-1}$$

$$+ (8\sigma^2)^{-1} m_{-1}^t MS_1 M m_{-1}$$

$$S_1 = SMc_1c_2^t + c_2c_1^t MS$$

$$z_*^t BA(I - B)ABz_* = (4\sigma^2)^{-1} m_{-1}^t M m_{-1} - (4\sigma^2)^{-1} m_{-1}^t MS_2 M m_{-1}$$

$$S_2 = c_2c_1^t Mc_1c_2^t$$

$$\mathrm{tr}\{A(I - B)AB\} = 4^{-1}\mathrm{tr}\{M(I - S_3)\}$$

$$S_3 = c_1c_2^t Mc_2c_1^t$$

$$\mathrm{tr}(M) = T' = a_{03}$$

$$z_*^t (I - B)ABA(I - B)z_* = (4\sigma^2)^{-1}\gamma^2 a_{00} - (4\sigma^2)^{-1}\gamma a_{13}$$

$$+ (4\sigma^2)^{-1}a_{14}$$

$$a_{14} = m_{-1}^t MS_3 M m_{-1}$$

となって，これらは対称行列に左右から m_{-1} がかかったものになる．ここで h^1 にあらわれる

$$2z_*^t BABA(I - B)z_* + z_*^t BA(I - B)ABz_*$$

は，簡単な計算によって

$$-(4\sigma^2)^{-1} m_{-1}^t MSMSM m_{-1} - (4\sigma^2)^{-1} m_{-1}^t MS_3 M m_{-1}$$

$$+ (2\sigma^2)^{-1}\gamma m_{-1}^t MSM m_{-1} + (4\sigma^2)^{-1} m_{-1}^t M m_{-1}$$

$$= -(4\sigma^2)^{-1}a_{13} - (4\sigma^2)^{-1}a_{14} + (2\sigma^2)^{-1}\gamma a_{12} + (4\sigma^2)^{-1}a_{00}$$

となる．$S_1 - S_2 = SMS^t - S_3$ に気づけばよい．したがって (3. 8) の h^i は m_{-1}, γ, σ^2, M, S, S_3 によって表現される．

exact mean の場合と同様に (3. 7) の R.H.S. を σ^2, a_{ij} i, j = 0, 1, ... で表せば，以下のようになる．

$$(3.\ 9)\quad E(c^2) = a_{12}^2(4\sigma^4)^{-1}E\{(T' + 6 + 2K)^{-1}(T' + 4 + 2K)^{-1}\}$$
$$+ \{\sigma^{-2}(a_{13} + 2^{-1}a_{12}a_{01}) + \sigma^{-4}(a_{12}a_{00}\gamma - 2^{-1}a_{12}^2)\}$$
$$\times E\{(T' + 4 + 2K)^{-1}(T' + 2 + 2K)^{-1}\}$$
$$+ \{4^{-1}a_{01}^2 + 2^{-1}a_{02} + \sigma^{-4}(\gamma a_{00} - 2^{-1}a_{12})^2$$
$$+ \sigma^{-2}(\gamma a_{00}a_{01} - 2^{-1}a_{12}a_{01} - a_{13} - a_{14} + 2\gamma a_{12} + a_{00})\}$$
$$\times E\{(T' + 2 + 2K)^{-1}(T' + 2K)^{-1}\}$$
$$+ \{a_{03} - a_{04} + \sigma^{-2}(\gamma^2 a_{00} - \gamma a_{12} + a_{14})\}$$
$$\times E\{(T' + 2K)^{-1}(T' - 2 + 2K)^{-1}\}$$
$$K \sim \mathrm{Poisson}(2^{-1}\sigma^{-2}a_{00}),$$

こうしておくことによって, $\sigma^2 \sim 0$ とする場合の $E(c^2)$ の近似式がわかる. c の平均2乗誤差 (M. S. E.) は

$$E(c - \gamma)^2 = E(c^2) - 2\gamma E(c) + \gamma^2,$$

および (2. 14), (3. 9) から容易に計算される.

6. 4 誤差分散が小さい場合

ところで, いわゆるこうした econometric estimates のよさを評価する場合, その exact moments のみでは不十分なことがある. いま L.S. estimates c が biased となるのは確かであるが, moments をあまりうまく解釈できない. したがって, σ^2 が十分に小さい場合の E(c), $E(c^2)$ のふるまいを観察しよう.

証明をしないが, σ^2 が小さいとき, c のバイアスはほぼ以下のようになる.

$$(4.\ 1)\quad E(c) - \gamma \sim 2^{-1}\{\gamma(2 - T') - a_{00}^{-1}a_{12} + 2a_{01}^{-1}\}\tau^{-1}$$
$$+ 2^{-2}(2 - T')\{\gamma(4 - T') - 2a_{00}^{-1}a_{12} + 2^{-1}a_{01}\}\tau^{-2}$$
$$+ 2^{-3}(2 - T')(4 - T')\{\gamma(6 - T') - 3a_{00}^{-1}a_{12} + 2^{-1}a_{01}\}\tau^{-3}$$
$$\tau = (2\sigma^2)^{-1}a_{00},$$

ただし symbol ∼ は, 等号が近似的に成立することを意味する. すぐわかるように $\sigma^2 \to 0$ のとき, (4. 1) の R.H.S. → 0 となるから, L.S. estimates c は, $\sigma^2 \to 0$ の意味でほとんど不偏になる.

さらに $\sigma^2 \sim 0$ のとき，c の M.S.E. は

$$(4.\ 2) \qquad E(c-\gamma)^2 \sim 2^{-1}(\gamma^2 - \gamma a_{12}a_{00}^{-1} + 1)\tau^{-1}$$
$$+ 4^{-1}\{(4-T')^2\gamma^2 + \gamma(2a_{12}a_{00}^{-1}(3T'-8)$$
$$+ (2-T')a_{01}) + \text{const.}\}\tau^{-2}$$

となる．ここで (4. 2) の const. は a_{ij} のみに依存する項である．また，τ^{-3} の項についてもわかっているが，複雑なので省略する．(4. 2) より $\sigma^2 \to 0$ のとき，$E(c-\gamma)^2 \to 0$ となる．さらに $E(c) \sim \gamma$ だから，Chebyshev's inequality によって，$\sigma^2 \to 0$ の意味で c の確率極限は γ となる．ここでの詳しい議論は 片岡 [6] にあたえられる．

6. 5 Fractional Calculus による接近

6. 2 ～ 3 では，通常の計算方法から OLS 推定値のﾓｰﾒﾝﾄをあたえたが，以下 fractional calculus にたよって，密度，ﾓｰﾒﾝﾄの計算例を示す．ただし，密度については Knight (4. 2 ～ 3 を参照) の結果と同様，初等関数で表すところまでは届いていない．

いま，6. 2 の c は

$$c = Y_1^t J_{11} Y_1 (Y_1^t Y_1)^{-1} + 2Y_2^t J_{21} Y_1 (Y_1^t Y_1)^{-1}$$

と書けるが，ここで以下のように変数を移しかえる．つまり，直交行列 Q を選んで

$$QJ_{11}Q^t = R \text{ (diagonal)},\ QQ^t = I,\ QY_1 = z_1$$
$$Y_2 = z_2,\ J_{21}Q^t = P^t$$

とすると，c は

$$(5.\ 1) \qquad c = z_1^t R z_1 (z_1^t z_1)^{-1} + 2z_2^t P^t z_1 (z_1^t z_1)^{-1},$$

このとき z_i の分布は $Y \sim N(Y^*, I(T))$ から

$$z_1 = QY_1 \sim N(QY_1^*, I(T'))$$
$$z_2 = Y_2 \sim N(Y_2^*, I(T-T'))$$
$$z_1 \perp z_2$$

となっている．(5. 1) の記号は 6. 2 のそれとは一部分ちがえてある．いま，c の特性関数を次のように表すことができる．$E(z_i) = z_i^*$ として，

$$(5.\ 2)\qquad cf(t) = E\{\exp(itc)\}$$

$$= E\{\exp(itz_1^tRz_1(z_1^tz_1)^{-1} + 2itz_2^tP^tz_1(z_1^tz_1)^{-1})\}$$

$$= E\{\exp(itd_\times^tRd_\times q_\times + 2itz_2^tP^td_\times q_\times)\exp(x^tz_1)\}|x=0.$$

さきに $cf(t)|z_2$ を計算すると

$$x^tz_1 - 2^{-1}(z_1 - z_1^*)^t(z_1 - z_1^*)$$

$$= -2^{-1}\{(z_1 - z_1^* - x)^t(z_1 - z_1^* - x) - 2x^tz_1^* - x^tx\}$$

だから

$$cf(t)|z_2 = \exp(itd_\times^tRd_\times q_\times + 2z_2^tP^td_\times q_\times it)$$

$$\times\ \exp(x^tz_1^* + 2^{-1}x^tx)|x=0.$$

さらに $cf(t)$ は

$$(5.\ 3)\qquad cf(t) = \int \exp(\quad)\exp(\quad)f(z_2)|x=0\ dz_2$$

$$= \exp(itd_\times^tRd_\times q_\times)\exp(2itd_\times^tPz_2^*q_\times + 2q_\times^2d_\times^tPP^td_\times(it)^2)$$

$$\times\ \exp(x^tz_1^* + 2^{-1}x^tx)|x=0.$$

いま c の密度は

$$(5.\ 4)\qquad f(c) = (2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-itc)cf(t)\ dt$$

だから，この積分を以下計算すれば

$$\int \exp\{-it(c - \phi_1) - t^2\phi_2\}\ dt$$

$$= \int \exp\{-\phi_2(t + i(c - \phi_1)/2\phi_2)^2 - (c - \phi_1)^2(4\phi_2)^{-1}\}\ dt$$

$$= (2\pi)^{1/2}(2\phi_2)^{-1/2}\exp\{-2^{-2}(c - \phi_1)^2/\phi_2\},$$

ゆえに

$$(5.\ 5)\qquad f(c) = [(2\pi)^{-1/2}(2\phi_2)^{-1/2}\exp\{-2^{-2}(c - \phi_1)^2/\phi_2\}]$$

$$\times\ \exp(x^tz_1^* + 2^{-1}x^tx)|x=0,$$

ここで $\phi_2 = 2q_\times^2d_\times^tPP^td_\times$，$\phi_1 = d_\times^tRd_\times q_\times + 2d_\times^tPz_2^*q_\times$ である．したがって $f(c)$ の [ ] の部分は，形式的には平均 ϕ_1，分散 $2\phi_2$ の正規密度関数と見ることができる．いま，$f(c)$ から c の期待値を計算することを考える．

(5. 6) $$E(c) = \int c\{f(c)\}\,dc$$

$$= \phi_1 \exp(x^t z_1^* + 2^{-1} x^t x)|x=0$$

$$= (d_x^t R d_x q_x + 2 d_x^t P z_2^* q_x) \exp(x^t z_1^* + 2^{-1} x^t x)|x=0$$

$$= (d_w^t R d_w q_w + 2 d_w^t P z_2^* q_w) \exp(w^t w/2 - \langle z_1^*, z_1^* \rangle/2)|w=z_1^*$$

$$= \exp(-\theta)(d_w^t R d_w q_w + 2 d_w^t P z_2^* q_w) \exp(\square)|w=z_1^*,$$

ここで $\theta = \langle z_1^*, z_1^* \rangle/2$, $\square = w^t w/2$. さらに $d_i q_w \exp(\square)$ は

(5. 7) $$d_i q_w \exp(\square) = 2^{-1} w_i \Sigma_{u=0}^{\infty} \square^u (T'/2 + u)^{-1} (u!)^{-1}$$

である. ただし, d_i は $d_{w(i)}$ を表す. そうしてこの微分 (w_i に関するもの)を考えれば

(5. 8) $$d_i^2 q_w \exp(\square) = 2^{-1} \Sigma_{u=0}^{\infty} \square^u (T'/2 + u)^{-1} (u!)^{-1}$$

$$+ 2^{-1} w_i^2 \Sigma_{u=1}^{\infty} \square^{u-1} (T'/2 + u)^{-1} ((u - 1)!)^{-1},$$

したがって

(5. 9) $$d_w^t R d_w q_w \exp(\square) = \Sigma_{i=1} r_i w_i^2 q_w \exp(\square)$$

$$= 2^{-1} tr(R) \Sigma_{u=0}^{\infty} \square^u (T'/2 + u)^{-1} (u!)^{-1}$$

$$+ 2^{-1} w^t R w \Sigma_{u=0}^{\infty} \square^u (T'/2 + u + 1)^{-1} (u!)^{-1}$$

となる. つづいて $2 d_w^t P z_2^* q_w \exp(\square)$ の部分は

(5. 10) $$w^t P z_2^* \Sigma_{u=0}^{\infty} \square^u (T'/2 + u)^{-1} (u!)^{-1}$$

となる. こうして (5. 9), (5. 10) より E(c) は,

(5. 11) $$E(c) = \exp(-\theta)\{(2^{-1} tr(R) + w^t P z_2^*) \Sigma_{u=0}^{\infty} \square^u (T'/2 + u)^{-1} (u!)^{-1}$$

$$+ 2^{-1} w^t R w \Sigma_{u=0}^{\infty} \square^u (T'/2 + u + 1)^{-1} (u!)^{-1}\}|w=E(z_1)$$

となる. さらに

(5. 12) $$\exp(-\theta) \Sigma_{u=0}^{\infty} \theta^u (T'/2 + u)^{-1} (u!)^{-1}$$

は, $U \sim$ Poisson(θ) と考えるときの $(T'/2 + U)^{-1}$ の期待値となる. したがって最終的に E(c) を

$$(5.\ 13)\quad E(c) = (\mathrm{tr}(R) + 2\langle Pz_2^{*},\ z_1^{*}\rangle)E(T' + 2U)^{-1}$$
$$+ \langle Rz_1^{*},\ z_1^{*}\rangle E(T' + 2U + 2)^{-1}$$

と書くことができて，(5. 13) は (2. 14) の表現に正確に一致するのがわかる．また，2 次のモーメントは以下のようになる．

$$(5.\ 14)\quad \mathrm{Var}(c) = 2\phi_2 \exp(x^t z_1^{*} + 2^{-1}x^t x)|x=0,$$

この計算を続ければ，$\theta = \langle z_1^{*},\ z_1^{*}\rangle/2$ として

$$(5.\ 15)\quad \mathrm{Var}(c) = 4q_x^2 d_x^t PP^t d_x \exp(x^t z_1^{*} + 2^{-1}x^t x)|x=0$$
$$= 4(\exp(-\theta))q_w^2 d_w^t PP^t d_w \exp(2^{-1}w^t w)|w=z_1^{*}.$$

そうして $Q_* PP^t Q_*^t = R_*$, $Q_* w = w_*$, Q_*: orthogonal と書いて

$$(5.\ 16)\quad q_w^2 d_*^t R_* d_* \exp(2^{-1}w_*^t w_*)|w_*=Q_* z_1^{*}$$

を考えればよい．ただし d_* は w_* についての微分オペレタを表す．

ところで，いま問題をいく分一般化して

$$(5.\ 17)\quad c_* = g(z_1,\ z_2)$$

の特性関数が，次のように書けたとしよう（ただし，z_i の性質は不変である）．

$$(5.\ 18)\quad cf(t) = E\{\exp(itg(z_1,\ z_2))\}$$
$$= E\{\exp(itg_0(d_x) + itg_1^t(d_x)z_2)\exp(x^t z_1)|x=0\},$$

ここで $g_0(d_x)$: 1 x 1, $g_1^t(d_x)$: 1 x n, そうすると $cf(t)|z_2$ は

$$cf(t)|z_2 = \exp(itg_0(d_x) + itg_1^t(d_x)z_2)\exp(x^t z_1^{*} + 2^{-1}x^t x)|x=0.$$

さらに，条件付きでない特性関数 $cf(t)$ は

$$(5.\ 19)\quad cf(t) = \exp(itg_0(d_x))\exp(itg_1^t(d_x)z_2^{*} + 2^{-1}(it)^2 g_1^t(d_x)g_1(d_x))$$
$$\times \exp(x^t z_1^{*} + 2^{-1}x^t x)|x=0$$

となる．こうして c_* の密度は

$$(5.\ 20)\quad f(c_*) = (2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(itc_*)cf(t)\ dt$$

を計算することによって得られる．(5. 4) と同様に

$$\int \exp\{-it(c_* - \kappa_1) - t^2\kappa_2\}\ dt$$

$$= (\pi/\kappa_2)^{1/2}\exp\{-(c_* - \kappa_1)^2/4\kappa_2\}.$$

したがって

(5. 21) $$f(c_*) = (2\pi)^{-1/2}(2\kappa_2)^{-1/2}\exp\{-2^{-2}(c_* - \kappa_1)^2/\kappa_2\}$$
$$\times \exp(x^t z_1^* + 2^{-1}x^t x)|x=0$$

となる．ただし，

(5. 22) $$\kappa_1 = g_0(d_x) + g_1^t(d_x)z_2^*$$
$$\kappa_2 = 2^{-1}g_1^t(d_x)g_1(d_x)$$

である．ここで

(5. 23) $$g_0(d_x) = 0$$
$$g_1^t(d_x) = d_x^t(d_x^t d_x)^{-1}$$

とすれば，$g_1^t(d_x)g_1(d_x) = (d_x^t d_x)^{-1} = q_x = 2\kappa_2$ となって，この場合の特性関数 (5. 19) は，Knight による結果に一致するのがわかる(第4章，4. 4 を見よ)．また，(5. 21)，(5. 22) のもとで 2 次までのﾓｰﾒﾝﾄは次のようになる．

(5. 24) $$E(c_*) = \kappa_1\exp(x^t z_1^* + 2^{-1}x^t x)|x=0$$
$$= \{g_0(d_x) + g_1^t(d_x)z_2^*\}\exp(x^t z_1^* + 2^{-1}x^t x)|x=0$$
$$= (\exp(-2^{-1}\langle z_1^*, z_1^*\rangle))\{g_0(d_w) + g_1^t(d_w)z_2^*\}\exp(2^{-1}w^t w)|w=z_1^*$$

(5. 25) $$\mathrm{Var}(c_*) = 2\kappa_2\exp(x^t z_1^* + 2^{-1}x^t x)|x=0$$
$$= \{g_1^t(d_x)g_1(d_x)\}\exp(x^t z_1^* + 2^{-1}x^t x)|x=0$$
$$= (\exp(-2^{-1}\langle z_1^*, z_1^*\rangle))g_1^t(d_w)g_1(d_w)\exp(2^{-1}w^t w)|w=z_1^*.$$

参考文献

[1] Carter, R. A. L. and A. Ullah, "The Finite Sample Properties of OLS and IV Estimators in Two Distributed Lag Models," unpublished manuscript, 1977.

[2] ———, "The Finite Sample Properties of OLS and IV Estimators in Two Distributed Lag Models (revised)," unpublished manuscript, 1977.

[3] Sawa, T., Referee's Report on "The Finite Sample Properties of OLS and IV Estimators in Two Distributed Lag Models," 1977.

[4] ——, Referee's Report on "The Finite Sample Properties of OLS and IV Estimators in Two Distributed Lag Models (revised)," 1978.

[5] Theil, H., Principles of Econometrics, Amsterdam: North-Holland Publishing Co., 1971.

[6] 片岡佑作「分布ﾗｸﾞﾓﾃﾞﾙにおける最小2乗推定値の近似ﾓｰﾒﾝﾄ」「京都産業大学論集」第10巻, 第4号, (社会科学系列, 第5号), 1981年, pp. 74-98.