第 7 章　精密ﾓｰﾒﾝﾄの数値計算*

7. 1　予備的考察

6. 2 以降にあたえる OLS 推定値の精密ﾓｰﾒﾝﾄが，実際どのような数値になるか，ここでﾓﾃﾞﾙに含まれるﾊﾟﾗﾒﾀ，および説明変数に適当な値を指定し，数値積分することを考える．ただ，数値積分にたよるのであれば，さきのﾓﾃﾞﾙ（6. 1 の（1. 4））よりも，いく分複雑な形をとるものを考えることができるので，1°，はじめに

(1. 1)　　$y_t = \gamma y_{t-1} + \beta^t X_t + \varepsilon_t$

$\varepsilon_t = \eta_t - \lambda \eta_{t-1}$

$\eta_t \sim N(0,\ \sigma^2),\ E(\eta_t \eta_s) = 0 \quad t \neq s$

として，OLS 推定値 c のﾓｰﾒﾝﾄの積分表示をあたえる．つづいて 2°，7. 2 で数値例を示す．ここで（1. 1）の意味については次のようである．ｼﾌﾄｵﾍﾟﾚﾀ L によって

$$(I - \gamma L) y_t = \beta^t X_t + (I - \lambda L) \eta_t$$

と書けば，

(1. 2)　　$y_t = (I - \gamma L)^{-1} \beta^t X_t + (I - \gamma L)^{-1} (I - \lambda L) \eta_t$

$$= \Sigma_{j=0}^{\infty} \gamma^j \beta^t X_{t-j} + \Sigma_{j=0}^{\infty} \gamma^j L^j (I - \lambda L) \eta_t$$

$$= \Sigma_{j=0}^{\infty} \gamma^j \beta^t X_{t-j} + \Sigma_{j=0}^{\infty} \gamma^j \eta_{t-j} - \Sigma_{j=0}^{\infty} \gamma^j \lambda \eta_{t-1-j}$$

となる．ここで $\gamma = \lambda$ であれば，(1. 2) は 6. 1 のﾓﾃﾞﾙ（1. 4）に一致する．しかし $\gamma \neq \lambda$ のとき，(1. 2) の R.H.S. の第2項以下は

$$\eta_t + \gamma \eta_{t-1} + \gamma^2 \eta_{t-2} + \ldots$$
$$- \lambda (\eta_{t-1} + \gamma \eta_{t-2} + \gamma^2 \eta_{t-3} + \ldots)$$
$$= \eta_t + (\gamma - \lambda) \eta_{t-1} + (\gamma^2 - \lambda \gamma) \eta_{t-2} + \ldots$$

---

* 以下の結果は A. Hoque, Y. Kataoka and H. Miyashita, International Economic Review, Vol. 27, No. 1, 1986 の第2，4節にもとづいている．原論文の作業分担は次のようである．まず，A. Hoque が数値積分のｱｲﾃﾞｱを出した．著者が実際に計算を進めていく場合の統計理論，および全体の構成を作りあげた．また，宮下洋氏が積分のﾌｫｰﾄﾗﾝﾌﾟﾛｸﾞﾗﾑを書いた．

と書けるから，(1. 2) は誤差項が η_{t-s} の(特定な) 1 次結合によって表される分布ラグモデルと解釈することができる．

いま (1. 1) の OLS 推定値 c は

(1. 3) $c = y^t M y_{-1}(y_{-1}^t M y_{-1})^{-1}$, $\dim(y)$: $(T-1) \times 1$

$= y_*^t A y_* (y_*^t B y_*)^{-1}$, $y_*^t = (y_1, \ldots, y_T)$

となる．ここで M, A, B は 6. 2 と同様に定められるものとする．ただし，y_s, y_t の分散共分散は以下のようになる．

$Var(y_t) = \omega_{tt} = d_2 = \sigma^2\{1 + (\gamma - \lambda)^2(1 - \gamma^2)^{-1}\}$

$Cov(y_s, y_t) = \omega_{st} = d_1\gamma^{t-s-1}$, $s < t$

$Cov(y_1, \ldots, y_T) = \Omega$

$d_1 = \gamma d_2 - \lambda\sigma^2$

(Phillips and Wickens [1] を見る)．そうすると $c(1 \times 1)$ のモーメントは (1. 4) であたえられるような積分表示をもつ．$E\{mod(c^i)\} < +\infty$ $i = 1, 2$ として，

(1. 4) $E(c^i) = \int_{-\infty}^{0} (-s_0)^{i-1}\Gamma^{-1}(i) d^i g(\ )|s_1=0 \ ds_0$

となる．ただし，

$$d^i g(\ )|(s_1=0) = \{(m_*^t M_0 A M_0 m_* + tr(M_0 A))^i$$

$$+ (i-1)(2tr(M_0 A)^2 + 4m_t^t M_0 A M_0 A M_0 m_t)\}$$

$$\times (\det(M_0 \Omega^{-1}))^{1/2} \exp\{2^{-1} m_*^t (M_0 - \Omega) m_*\}$$

$m_*^t = (m_1, \ldots, m_T)\Omega^{-1}$, $M_0 = (\Omega^{-1} - 2s_0 B)^{-1}$

$m_s = E(y_s)$.

この (1. 4) をみちびくには，Sawa [2] の定理に見る手続きにしたがえばよい．また，$\gamma = \lambda$ のとき，(1. 4) の積分は 6. 2 であたえられる級数表示をもつが，$\gamma \neq \lambda$ については，現在のところ integrate out するのは簡単ではない．ω_{st}, m_t, X_t に特定な値をあたえたときの数値積分のみが可能である．また，追加的な情報として，OLS 推定値 c の漸近的なふるまいを述べておくと，

(a) $T^{-1} m_{-1}^t M m_{-1} \rightarrow e_{00}$, $m_{-1}^t = (m_1, \ldots, m_{T-1})$

(b) $T^{-1}X^tX \to$ positive definite

(c) max mod(m_t): bounded

の仮定のもとで，c の確率極限は $\gamma - \lambda\sigma^2(e_{00} + d_2)^{-1}$ となる．さらにモーメント近似 (small σ^2 ではない)は，$E\{y^tMy_{-1}(y^t_{-1}My_{-1})^{-1}\}$ を $(E(y^tMy_{-1}),\ E(y^t_{-1}My_{-1}))$ のまわりでテイラー展開して高次の項をおとせば，次のようになる．

(1. 5) $$E(c) = h_0^{-1}h_1 - h_0^{-2}h_{01} + h_0^{-3}h_1h_{00} + o(T^{-1})$$

ただし

$$h_0 = a_{00} + tr(M\Omega_{-1})$$

$$h_1 = \gamma a_{00} + 2^{-1}tr(MS_{\Box})$$

$$h_{00} = 2b_{03} + 4b_{00}$$

$$h_{01} = tr(S_{\Box}M\Omega_{-1}M) + b_{12} + 2\gamma b_{00}$$

$$a_{00} = m^t_{-1}Mm_{-1}$$

$$b_{00} = m^t_{-1}M\Omega_{-1}Mm_{-1}$$

$$b_{03} = tr(M\Omega_{-1}M\Omega_{-1})$$

$$b_{12} = m^t_{-1}MS_{\Box}Mm_{-1}$$

$$S_{\Box} = c_1\Omega c_2^t + c_2\Omega c_1^t,$$

この計算には，$c_1\Omega c_1^t = c_2\Omega c_2^t = \Omega_{-1}$，$m_t = \gamma m_{t-1} + \beta^tX_t$ に気づくとよい．分散についても，同様の方法で簡単に計算できる．

(1. 6) $$Var(c) = (h_1h_0)^2(h_1^{-2}h_{11} + h_0^{-2}h_{00} - 2h_{01}h_0^{-1}h_1^{-1}) + o(T^{-1})$$

$$h_{11} = b_{03} + 2^{-1}tr(M(S_{\Box}MS_{\Box} - 2S')) + (1 + \gamma^2)b_{00} + \gamma b_{12}$$

$$S' = c_1\Omega c_2^tMc_2\Omega c_1^t$$

となる．$\gamma = \lambda$ のとき，(1. 5)，(1. 6) の R.H.S. の表現はいく分簡単な形になる．

7. 2 計算理論および数値例

以下，数値積分によって c の 2 次までのモーメントを示す．$E(c^i)$ を計算するには，ω_{st}，$m_t(= \gamma m_{t-1} + \beta^tX_t)$，$s, t = 1, \ldots, T$，そうして X_t に依存する A，B の数値が必要

になる．まず，k（説明変数の次数)を 1，したがって $\beta = 1$ とする．つぎに，説明変数 x_t(1 x 1) は区間 (0, 1) で y_t とは独立，かつﾗﾝﾀﾞﾑに一様分布に従うものとする．そうすると，x_t をあたえるときの y_t の期待値は

$$E(y_t | x_t) = m_t = \Sigma_{s=0}^{\infty} \gamma^s x_{t-s} \beta$$

$$= \Sigma_{s=0}^{\infty} \gamma^s x_{t-s}$$

となる（6. 2 ～ 3 の精密ﾓｰﾒﾝﾄの結果と両立可能であるためには，y_t が x_t と独立となる点以外に，もちろん $E(y_t)$, $Var(y_t)$ などを $E(y_t|x_t)$, $Var(y_t|x_t)$ におきかえる必要がある)．こうしていま $x_t \sim$ Uniform だから，$\gamma > 0$ $t = ..., -1, 0, ...$ について

$$0 < m_t = \Sigma_{s=0} \gamma^s x_{t-s}$$

$$< \Sigma_{s=0} \gamma^s$$

$$= (1 - \gamma)^{-1}$$

となるのがわかる．これは m_0 へ数値をあたえる場合，γ に依存させてよいことを意味する．しかしながら，表 1 ～ 4 でつねに $m_0 = 1$ を選んだ．実際，数表で指定する $m_0 = 1$, $\gamma = .1, .3, .6$ の値は，不等式 $0 < m_t < (1 - \gamma)^{-1}$ を満足するのがわかる．さらに，留意点の最後としては，σ^2 の値である．$\gamma = \lambda$ で x_t をあたえるときの y_t の条件付分散は，

$$Var(y_t | x_t) = \sigma^2 = Var(\eta_t | x_t)$$

となっている．η_t は第6章，(1. 4) の誤差項である．他方，$x_t \sim$ Uniform(0, 1), $t = 1, ..., T$ だから

$$x \text{ の標本平均} = T^{-1} \Sigma_{t=1}^{T} x_t \cong E(x_t) = .5,$$

そうして

$$T^{-1} \Sigma_{t=1}^{T} \{x_t - T^{-1} (\Sigma_{t=1}^{T} x_t)\}^2 \cong Var(x_t) = .08333.$$

したがって，以下のような制約をおくことが，直観的に考えて自然である．つまり，

$$\sigma^2 = Var(\eta_t | x_t) \leqq Var(x_t) = .08333$$

とする．けっきょく数表の作成において，$\sigma^2 = .005, .01, .03, .10, 1.00$ を選んだ．また，標本数 T，および λ については，T = 20, 30; $\lambda = .1, .3$ とした．最後に計算

結果を簡単に述べる．まず，表 1，2 は $\lambda = .3$; $T = 20, 30$ で，γ，σ^2 のさまざまな値に対応する c（γ の OLS 推定値）のﾓｰﾒﾝﾄ $E(c)$，$E(c^2)$，$Var(c)$，c の平均2乗誤差(M.S.E.）をあたえる．以下わかった点は，

(1) $\sigma^2 \leqq .3$ であれば，c はほとんど不偏である．

(2) σ^2 が小さくなるとき，c の M.S.E. も小さくなる(これは直観的にもあっている)．実際 (1)，(2) は 6. 4 に見るｽﾓｰﾙｼｸﾞﾏ (small σ）近似の結果と矛盾しない．6. 4 の近似理論は，$\gamma = \lambda$ のｹｰｽで $\sigma^2 \to 0$ のとき，$E(c - \gamma)^i$ $i = 1, 2$ は 0 になると主張する．

(3) また，表 1 〜 2，3 〜 4 の結果は，c のﾊﾞｲｱｽ，および M.S.E. が標本数 T の減少関数になっている点を示す．これは，γ，σ^2 の任意の値についても成立する．さらに表 3 〜 4 は $\lambda = .1$; $T = 20, 30$ のｹｰｽを議論するが，(1)，(2) で述べた点がそのままあてはまる．

(4) 表 1 〜 2，と 表 3 〜 4 を比較すると，つねに "表 3 〜 4 の $E(c - \gamma)^i$" < "表 1 〜 2 の $E(c - \gamma)^i$" となっている点に気づく．表 1 〜 2，表 3 〜 4 のちがいは，λ を $\lambda = .3$ から $\lambda = .1$ に変化させた点に起因する．しかしながら，こうした観察はおどろくにはあたらない．というのは $\lambda = 0$ のとき，$T \to +\infty$ で，OLS 推定値 c が γ に確率収束 (convergence in probability) するからである．

以上の計算はすべて数値積分にたよったが，$\gamma = \lambda$ のｹｰｽでは，級数表示による結果をもちいて機械計算をﾁｪｯｸした．こうした 2 つの方法とも，まったく同じ数値をあたえることがわかっている．

表 1 ﾓﾃﾞﾙ (1. 1) における γ の OLS 推定値 c の精密ﾓｰﾒﾝﾄ; λ = .3, T = 20

γ	σ^2	E(c)	E(c^2)	Var(c)	M.S.E.
.6	.005	.59584	.35622	.00120	.00122
	.010	.59225	.35253	.00177	.00183
	.030	.57882	.33965	.00462	.00507
	.100	.53671	.29902	.01096	.01415
	1.000	.34745	.21392	.09320	.15698
.3	.005	.29244	.08709	.00157	.00163
	.010	.28527	.08436	.00298	.00320
	.030	.25917	.07512	.00796	.00963
	.100	.19205	.05651	.01962	.03127
	1.000	.01794	.04405	.04368	.12324
.1	.005	.09037	.01038	.00222	.00231
	.010	.08129	.01085	.00424	.00459
	.030	.04950	.01334	.01089	.01344
	.100	-0.02338	.02451	.02396	.03918
	1.000	-0.16502	.06843	.04120	.11144

表 2 ﾓﾃﾞﾙ (1. 1) における γ の OLS 推定値 c の精密ﾓｰﾒﾝﾄ; λ = .3, T = 30

γ	σ^2	E(c)	E(c^2)	Var(c)	M.S.E.
.6	.005	.59597	.35626	.00108	.00110
	.010	.59273	.35276	.00143	.00148
	.030	.58031	.33951	.00278	.00317
	.100	.54300	.30146	.00661	.00986
	1.000	.37949	.15508	.01107	.05970
.3	.005	.29293	.08702	.00121	.00126
	.010	.28631	.08383	.00186	.00205
	.030	.26220	.07362	.00487	.00630
	.100	.19995	.05207	.01209	.02210
	1.000	.03202	.02892	.02790	.09971
.1	.005	.09073	.00955	.00131	.00140
	.010	.08201	.00925	.00252	.00284
	.030	.05160	.00922	.00656	.00890
	.100	-0.01813	.01521	.01488	.02883
	1.000	-0.15990	.05488	.02931	.09686

表 3 ﾓﾃﾞﾙ (1. 1) における γ の OLS 推定値 c の精密ﾓｰﾒﾝﾄ; λ = .1, T = 20

γ	σ^2	E(c)	E(c^2)	Var(c)	M.S.E.
.6	.005	.59746	.35814	.00118	.00119
	.010	.59545	.35632	.00175	.00177
	.030	.58777	.34968	.00421	.00436
	.100	.56473	.32918	.01026	.01150
	1.000	.46624	.25096	.03358	.05147
.3	.005	.29662	.08943	.00145	.00146
	.010	.29346	.08888	.00276	.00280
	.030	.28184	.08686	.00742	.00775
	.100	.25111	.08164	.01859	.02098
	1.000	.16618	.07085	.04323	.06114
.1	.005	.09625	.01122	.00196	.00197
	.010	.09269	.01237	.00378	.00383
	.030	.07992	.01634	.00995	.01035
	.100	.04874	.02535	.02297	.02560
	1.000	-0.01982	.04471	.04431	.05867

表 4 ﾓﾃﾞﾙ (1. 1) における γ の OLS 推定値 c の精密ﾓｰﾒﾝﾄ; λ = .1, T = 30

γ	σ^2	E(c)	E(c^2)	Var(c)	M.S.E.
.6	.005	.59771	.35832	.00107	.00108
	.010	.59618	.35684	.00140	.00141
	.030	.59030	.35114	.00269	.00278
	.100	.57267	.33412	.00617	.00692
	1.000	.49641	.25925	.01283	.02356
.3	.005	.29708	.08943	.00118	.00119
	.010	.29444	.08842	.00172	.00175
	.030	.28471	.08559	.00453	.00476
	.100	.25890	.07845	.01142	.01311
	1.000	.18614	.06073	.02608	.03904
.1	.005	.09652	.01049	.00117	.00118
	.010	.09324	.01095	.00226	.00231
	.030	.08160	.01266	.00600	.00634
	.100	.05363	.01711	.01424	.01639
	1.000	-0.00866	.02875	.02867	.04048

参考文献

[1] Phillips, P. C. B. and M. R. Wickens, Exercises in Econometrics, Vol. 2, Oxford: Philip Allan, 1978.

[2] Sawa, T., "The Exact Moments of the Least Squares Estimator for the Autoregressive Model," Journal of Econometrics, 8, 1978, pp. 159-172.

第 8 章　分布ﾗｸﾞﾓﾃﾞﾙに関する OLS 推定値の近似分布

8. 1　問題の再設定

以下のような単純な分布ﾗｸﾞﾓﾃﾞﾙを考える．すなわち

(1. 1)　　$y_t = \Sigma_{s=0}^{\infty} \Sigma_{j=1}^{J'} \gamma^s \beta_j x_{j,t-s} + \eta_t$

$= m_t + \eta_t$

ここで，y_t，$x_{j,t-s}$，η_t はそれぞれ，従属変数，説明変数，誤差項を表し，γ，β_j は未知ﾊﾟﾗﾒﾀ，かつ mod(γ) < 1 となっている．さらに η_t の分布については，

$\eta_t \sim N(0, \sigma^2)$　$t = 1, \ldots, T$

η_t，$\eta_s (t \neq s)$: independent

としよう．いま (1. 1) のﾊﾟﾗﾒﾀを推定するには，y_t を

(1. 2)　　$y_t = \gamma y_{t-1} + \Sigma_{j=1}^{J'} \beta_j x_{jt} + \eta_t - \gamma \eta_{t-1}$

$t = 1, \ldots, T$

と書換え，(1. 2) に OLS 等をあてはめることがよくある．

ところで，こうしたﾓﾃﾞﾙ (1. 1)，(1. 2) は econometrics，あるいはﾏｰｹﾃｨﾝｸﾞにおいて，ある異なるﾒﾃﾞｨｱの広告効果を測定する場合，ひんぱんに用いられる (Montgomery-Silk [1]，Parsons-Schultz [2]，上條 [3]，片平 [4])．いま，上條 [3] による実証研究から変数 y_t，x_{jt} の内容を指定すれば，以下のようになっている．すなわち，$y_t = \ln y_{0t}$，$x_{jt} = \ln z_{jt}$ として

(1. 3)　　y_{0t}: t 期における季節変動調整済み新車登録台数の指数

z_{jt}: 営業所のｾｰﾙｽﾏﾝ数

新聞広告費

ﾗｼﾞｵ広告費

相対的な意味での価格指数

ﾓﾃﾞﾙﾁｪﾝｼﾞに対応するﾀﾞﾐｰ変数，

ここで正確にいうと，z_{jt} はほとんど指数化された変数であって，z_{jt} のなかに遅れのある説明変数そのものが含まれている．いいかえると，例えば J' = 2 で (1. 2) を

(1. 4)　　$y_t = \gamma y_{t-1} + \beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t} + \eta_t - \gamma \eta_{t-1}$

とした場合，(1. 4) が

$$y_t = \gamma y_{t-1} + \beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{1,t-1} + \eta_t - \gamma \eta_{t-1}$$

であってもよい．こうした点を精密に区分するために，上條 [3] では

(1. 5) $\quad \Sigma_{j=1}^{J'} \beta_j x_{jt} = \Sigma_j^{J'} \Sigma_{k(j)}^{K(j)} \beta(j, k_j) x(j, t - k_j)$

とされている．さらに，[3] においては (1. 1)，(1. 2) をそれぞれ direct distributed lag model，modified Koyck および (これは Montgomery-Silk [1] にしたがったもの)，$x(j, t - k_j)$，$j \in J'$，$k_j \in K_j$ のなかからさまざまな変数の組合せを考え，ﾓﾃﾞﾙのあてはめがなされている．[3] の結果を簡単に示せば，

1° 考えるﾓﾃﾞﾙは (1. 1)，(1. 2)

2° 推定方法は OLS，したがって競合関係にある他企業の製品，あるいは他の銘柄の存在はｶｳﾝﾄしない(片平 [4] の考え方は，こうした点を推定理論に組み入れる)．

3° 最終的に選択されたﾓﾃﾞﾙ数は，5 ﾀｲﾌﾟで，いずれも J' は $5 \leqq J' \leqq 9$，ただしこの J' は，(1. 5) の L.H.S. で定められるものを意味する．

4° この 5 ﾀｲﾌﾟについては，広告効果を表す係数符号，t 統計量，修正済み決定係数，ﾀﾞｰﾋﾞﾝｰﾜﾄｿﾝ (d)，ﾀﾞｰﾋﾞﾝ統計量 (h) のいずれもが，常識的にほぼ許容される範囲内にある．

ところで，ﾓﾃﾞﾙ (1. 1)，(1. 2) による実証研究は，ﾏｰｹﾃｨﾝｸﾞ，計量経済学の分野においてかなりの量になるが，(1. 2) の OLS 推定値に関する理論研究は多くない ((1. 1) については，R.H.S. に η_t 以外の確率変数はないから問題はない)．とくに標本数 T が小さいとき，係数 γ，β_j の OLS 推定値，あるいは 4° の統計値は多分に疑わしい (上條 [3] の報告は，T = 36 となっている)．したがって，以下で γ の OLS 推定値 c の近似分布を計算する．このために必要とされる仮定は，σ^2(η_t の分散)が小さいというものであって，こうした状況を分布の計算にはじめてもちこんだのは，R. Mariano だったと思う．分布についてｵｰﾀﾞｰの低い部分は，片岡 [6] に現れるが，そこでは高次のｵｰﾀﾞｰを紙面の関係で省略した．また，c の exact moments はすでに計算されている(第6章)．(近似分布を計算するさい，標本数 T で考える場合もあるが，内容は σ に関するものとほぼ同様になる．また，説明変数 x_{jt} $j = 1, \ldots, J'$; $t = 1, \ldots, T$ を含む自己回帰 (AR) ﾓﾃﾞﾙにおいて，c の近似分布 (T に関するもの)を計算することは，だいた

いの点においてすでに解決ずみである).

以下でわかった点を簡単に紹介しておくと,

(1) $\delta = (c - \gamma)/\sigma$ の分布は σ のｵｰﾀﾞｰで正規分布からいく分ずれる. ずれの程度は $T - 1 - J'$, γ, $m_t (t = 1, \ldots, T)$, $M(= I - X(X^tX)^{-1}X^t)$ に依存する. 近似分布は σ^2 のｵｰﾀﾞｰまで計算されるが, このような近似の方法が, 精密に正しいかどうか (validity) のﾁｪｯｸは示さなかった.

(2) 近似分布から計算される δ の近似的なﾓｰﾒﾝﾄは, δ の exact moments から直接わかるﾓｰﾒﾝﾄの近似と 2 次までは正確に一致する. $\sigma \sim 0$ で, c はほとんど不偏になる. また, $\sigma \to 0$ の意味で c の確率極限も γ となっている (こうした事実は第6章に示した). したがって $\sigma \sim 0$ であれば, (1. 2) の OLS 推定値 c を実際上もちいる点にあまり問題はない.

8. 2 近似分布の計算

いま, さきのﾓﾃﾞﾙ (1. 2) をﾌﾟｰﾙして

(2. 1) $$y = \gamma y_{-1} + X\beta + \eta - \gamma \eta_{-1}$$

と書くと, c (γ の OLS 推定値)は

$$c = Y_1^t J_{11} Y_1 (Y_1^t Y_1)^{-1} + 2Y_2^t J_{21} Y_1 (Y_1^t Y_1)^{-1}$$

と表せる(第6章, 6. 2). ここで

(2. 2) $$y^t = (y_2, \ldots, y_T)$$

$$y_{-1}^t = (y_1, \ldots, y_{T-1})$$

$X((T-1) \times J')$ の第 t 行 $= (x_{1,t+1}, \ldots, x_{J',t+1})$ $t = 1, \ldots, T-1$

$$\beta^t = (\beta_1, \ldots, \beta_{J'})$$

$$\eta^t = (\eta_2, \ldots, \eta_T)$$

$$\eta_{-1}^t = (\eta_1, \ldots, \eta_{T-1}),$$

さらに Y_i, J_{ij} は次の関係をみたしている.

(2. 3) $$M = I - X(X^tX)^{-1}X^t$$

$$z_t = y_t/\sigma$$

$$z^t = (z_1, \ldots, z_T)$$

$$2A = c_1^t M c_2 + c_2^t M c_1$$

$$c_1 = (I_n,\ 0) \quad 0: n(= T - 1) \times 1$$

$$c_2 = (0,\ I_n)$$

$$B = c_1^t M c_1$$

$$Hz = Y = (Y_1^t,\ Y_2^t)^t$$

$$HBH^t = \mathrm{diag}(I(T^*),\ 0) \quad H: \text{orthogonal}$$

$$T^* = n - J^* = \mathrm{rank}(M),$$

ここで Y の分布は，$Y = Hz \sim N(Y^*,\ I_T)$，$Y^* = Hz^*$，$H = (H_1^t,\ H_2^t)^t$，$H_1: T^* \times T$，$z^* = m_+/\sigma$，$m_+^t = (m_1,\ \ldots,\ m_T)$，$m_t = y_t - \eta_t$ となっているのがわかる．そうして，$J = HAH^t$，$J_{ij} = H_i A H_j^t$，$i, j = 1,\ 2$．さらに

(2. 4) $$v_1 = PY_1 \sim N(PY_1^*,\ I)$$

$$v_2 = Y_2 \sim N(Y_2^*,\ I)$$

$$v_1,\ v_2: \text{independent}$$

$$PJ_{11}P^t = R: \text{diagonal}$$

$$P: \text{orthogonal}$$

$$G = J_{21}P^t$$

とすると

(2. 5) $$c = (v_1^t R v_1 + 2 v_2^t G v_1)(v_1^t v_1)^{-1}$$

と書ける．つづいて

(2. 6) $$P_* = \mathrm{diag}(P,\ I)$$

$$x = v - P_* H m_+/\sigma$$

$$= v - u/\sigma$$

$$u = P_* H m_+$$

として c を x で表せば，

(2. 7) $$c = \{(x_1 + u_1/\sigma)^t R (x_1 + u_1/\sigma) + 2(x_2 + u_2/\sigma)^t G (x_1 + u_1/\sigma)\}\sigma^2 (u_1^t u_1)^{-1}$$

$$\times\ \{1 + 2\,{}^t u_1 x_1 ({}^t u_1 u_1)^{-1} \sigma + {}^t x_1 x_1 ({}^t u_1 u_1)^{-1} \sigma^2\}^{-1}$$

となる．ここで

(2．8)　$u_1 = PH_1 m_+$

$u_2 = H_2 m_+$

$x_i = v_i - u_i/\sigma \quad i = 1,\ 2;\ x \sim N(0,\ I(T)).$

いま，(2．7) で $\sigma = N^{-1/2}$ と書いて，

$$\theta = 2\,{}^t u_1 x_1 a_{00}^{-1} N^{-1/2} + {}^t x_1 x_1 a_{00}^{-1} N^{-1}$$

$$a_{00} = {}^t u_1 u_1 = {}^t m_{-1} M m_{-1}$$

とおき，(2．7) に含まれる $\{1 + \theta\}^{-1}$ をﾃｲﾗｰ展開すれば，$\mathrm{mod}(\theta) < 1$ で

$$\{1 + \theta\}^{-1} = 1 - \theta + \theta^2 - \theta^3 + \ldots$$

となることがわかる．さらに，(2．7) の { } を

(2．9)
$$\{\ \} = N({}^t u_1 R u_1 + 2\,{}^t u_2 G u_1) + 2N^{1/2}({}^t u_1 R x_1 + {}^t u_2 G x_1 + {}^t x_2 G u_1) + {}^t x_1 R x_1 + 2\,{}^t x_2 G x_1$$
$$= Nc^{11} + 2N^{1/2} c^{12} + c^{13}$$

と書けば，c を以下のように表すことができる．

(2．10)
$$c = c^{11} a_{00}^{-1} + \Sigma_{j=1}^{5} N^{-j/2} h_j + o_p(N^{-5/2})$$
$$= c^{11} a_{00}^{-1} + N^{-1/2}(g^{11} c^{11} a_{00}^{-1} + 2c^{12} a_{00}^{-1})$$
$$+ N^{-1}(c^{11} a_{00}^{-1} g^{12} + 2c^{12} a_{00}^{-1} g^{11} + c^{13} a_{00}^{-1})$$
$$+ N^{-3/2}(c^{11} a_{00}^{-1} g^{13} + 2c^{12} a_{00}^{-1} g^{12} + c^{13} a_{00}^{-1} g^{11})$$
$$+ N^{-2}(c^{11} a_{00}^{-1} g^{14} + 2c^{12} a_{00}^{-1} g^{13} + c^{13} a_{00}^{-1} g^{12})$$
$$+ N^{-5/2}(c^{11} a_{00}^{-1} g^{15} + 2c^{12} a_{00}^{-1} g^{14} + c^{13} a_{00}^{-1} g^{13})$$
$$+ o_p(N^{-5/2}),$$

ここで

(2．11)　$c^{11} = \gamma a_{00}$

$$c^{12} = {}^t u_1 R x_1 + {}^t u_2 G x_1 + {}^t u_1 {}^t G x_2$$

$$= u_3^t x_1 + u_4^t x_2$$

$$c^{13} = x_1^t R x_1 + 2 x_2^t G x_1$$

$$u_3 = R u_1 + G^t u_2$$

$$u_4 = G u_1.$$

つづいて g^{1j} $j = 1, \ldots, 5$ を x_1, x_2 で書けば,

(2. 12) $$g^{11} = -2 a_{00}^{-1} u_1^t x_1 = -g_1$$

$$g^{12} = (2 u_1^t x_1 a_{00}^{-1})^2 - a_{00}^{-1} x_1^t x_1$$

$$= g_1^2 - g_2$$

$$g^{13} = 2(2 u_1^t x_1 a_{00}^{-1})(a_{00}^{-1} x_1^t x_1) - (2 u_1^t x_1 a_{00}^{-1})^3$$

$$= 2 g_1 g_2 - g_1^3$$

$$g^{14} = (x_1^t x_1 a_{00}^{-1})^2 - 3(2 u_1^t x_1 a_{00}^{-1})^2 x_1^t x_1 a_{00}^{-1} + (2 u_1^t x_1 a_{00}^{-1})^4$$

$$= g_2^2 - 3 g_1^2 g_2 + g_1^4$$

$$g^{15} = -3(x_1^t x_1 a_{00}^{-1})^2 (2 u_1^t x_1 a_{00}^{-1}) + 4 x_1^t x_1 a_{00}^{-1} (2 u_1^t x_1 a_{00}^{-1})^3 - (2 u_1^t x_1 a_{00}^{-1})^5.$$

そうして h_j $j = 0, 1, \ldots, 5$ を x_1, x_2 で表すと, (2. 13) となる.

(2. 13) $$h_0 = c^{11} a_{00}^{-1} = \gamma$$

$$h_1 = -\gamma g_1 + g_3(x_1) + g_4(x_2)$$

$$g_3(x_1) = 2 u_3^t x_1 a_{00}^{-1}$$

$$g_4(x_2) = 2 u_4^t x_2 a_{00}^{-1}$$

$$h_2 = \gamma (g_1^2(x_1) - g_2(x_1)) - g_1(x_1)(g_3 + g_4) + g_5(x_1) + g_6(x_1, x_2)$$

$$g_5 = x_1^t R x_1 a_{00}^{-1}$$

$$g_6 = 2 x_2^t G x_1 a_{00}^{-1}$$

$$h_3 = c^{11} a_{00}^{-1} (2 g_1 g_2 - g_1^3) + (g_3 + g_4)(g_1^2 - g_2) - g_1 (g_5 + g_6)$$

$$h_4 = \gamma (g_2^2 - 3 g_1^2 g_2 + g_1^4) + (g_3 + g_4)(2 g_1 g_2 - g_1^3) + (g_5 + g_6)(g_1^2 - g_2)$$

$$h_5 = \gamma(-3g_2^2 g_1 + 4g_1^3 g_2 - g_1^5) + (g_3 + g_4)(g_2^2 - 3g_1^2 g_2 + g_1^4)$$

$$+ (g_5 + g_6)(2g_1 g_2 - g_1^3)$$

$$h_6 = \gamma(-g_2^3 + 6g_2^2 g_1^2 - 5g_1^4 g_2 + g_1^6) + (g_3 + g_4)(-3g_1 g_2^2 - g_1^5 + 4g_1^3 g_2)$$

$$+ (g_5 + g_6)(g_2^2 - 3g_1^2 g_2 + g_1^4).$$

つづいて c を基準化して以下のように書く.

(2. 14) $\quad \delta = N^{1/2}(c - \gamma) = \Sigma_{j=1}^{6} h_j N^{-(j-1)/2} + o_p(N^{-5/2}).$

そうすると δ の特性関数は (2. 15) のようになる.

(2. 15) $\quad E\{\exp(it\delta)\}$

$$= E\{\exp(it(\Sigma_{j=1}^{6} h_j N^{-(j-1)/2} + \ldots))\}$$

$$= E\{(\exp(ith_1)) \times \Pi_{s=2}^{6}(\Sigma_{j=0}(j!)^{-1}(it)^j N^{-(s-1)j/2} h_s^j) \ldots \}$$

$$= E\{(\exp(ith_1))$$

$$\times \{1 + itN^{-1/2}h_2$$

$$+ N^{-1}(ith_3 + (1/2)(it)^2 h_2^2)$$

$$+ N^{-3/2}(ith_4 + (3!)^{-1}(it)^3 h_2^3 + (it)^2 h_2 h_3)$$

$$+ N^{-2}((4!)^{-1}(it)^4 h_2^4 + (1/2)(it)^2 h_3^2 + ith_5$$

$$+ (it)^2 h_2 h_4 + (1/2)(it)^3 h_2^2 h_3)$$

$$+ o_p(N^{-2})\}\}$$

ただし, $i^2 = -1$.

そうして, まず (2. 15) で $(\exp(ith_1))h_2(x)$ の期待値を計算すれば,

(2. 16) $\quad E\{(\exp(ith_1))h_2(x)\}$

$$= \int h_2(x)(\exp(ith_1))f(x)\,dx$$

$$= \{\exp((-1/2)t^2\square^t\square)\}E\{h_2(Y. + it\square)\}$$

となる. (2. 16) で

$f(x)$: x の密度

$Y. \sim N(0, I(T))$

$$\square^t = (\square_1^t,\ \square_2^t)$$

$$\square_1 = 2a_{00}^{-1}(a^0 u_1 + u_3)$$

$$\square_2 = 2a_{00}^{-1} u_4$$

$$a^0 = -\gamma .$$

ここで h_2 については

(2. 17) $$E\{h_2(x)\} = \gamma E(g_1^2(x_1)) - \gamma E(g_2(x_1)) - E(g_1 g_3) - E(g_1 g_4) + E(g_5) + E(g_6)$$

となるから，(2. 17) の R.H.S. で $x \to Y_\cdot + it\square$ とおいて計算すれば，(2. 16) の R.H.S. がわかる．次のようになる．

はじめに

$$E\{g_1^2(Y_\cdot + it\square)\} = E\{(2/a_{00})^2 (u_1^t(Y_1 + it\square_1))^2\}$$
$$= (2/a_{00})^2 u_1^t\{E(Y_1 Y_1^t) + (it)^2 \square_1 \square_1^t\} u_1$$
$$= (2/a_{00})^2 \{u_1^t u_1 + (it)^2 (u_1^t \square_1)^2\}$$

ただし Y_1 は $Y_\cdot^t = (Y_{\cdot 1}^t,\ Y_{\cdot 2}^t)$ とするときの $Y_{\cdot 1}$ を意味する．さらに結果のみを書いて

，

$$E(g_{2\cdot}) = a_{00}^{-1}\{T' + (it)^2 \square_1^t \square_1\}$$

$$E(g_{1\cdot} g_{3\cdot}) = (2/a_{00})^2 \{u_1^t u_3 + (it)^2 u_1^t \square_1 \square_1^t u_3\}$$

$$E(g_{1\cdot} g_{4\cdot}) = (2/a_{00})^2 (it)^2 u_1^t \square_1 \square_2^t u_4$$

$$E(g_{5\cdot}) = a_{00}^{-1}\{E(\Sigma_{i=1}^{T'} Y_{1i}^2 r_i) + (it)^2 \square_1^t R \square_1\}$$
$$= a_{00}^{-1}\{tr(R) + (it)^2 \square_1^t R \square_1\}$$

$$E(g_{6\cdot}) = (2/a_{00})(it)^2 \square_2^t G \square_1 ,$$

こうした点によって $E(h_{2\cdot})$ は

(2. 18) $$E\{h_2(Y_\cdot + it\square)\} = a_{00}^{-1}\{4\gamma a_{00}^{-1} u_1^t u_1 - \gamma T' - 4a_{00}^{-1} u_1^t u_3 + tr(R)\}$$

$$
\begin{aligned}
&+ a_{00}^{-1}(it)^2\{4\gamma a_{00}^{-1}(u_1^t\square_1)^2 - \gamma\,\square_1^t\square_1 + \square_1^t R\square_1 \\
&\qquad - 4a_{00}^{-1}u_1^t\square_1(\square_1^t u_3 + \square_2^t u_4) + 2\square_2^t G\square_1\} \\
&= q_{21} + q_{22}(it)^2.
\end{aligned}
$$

つづいて (2. 15) の

$$E\{(\exp(ith_1))N^{-1}ith_3(x)\}$$

を計算するには，$E\{h_3(Y_\cdot + it\square)\}$, $Y_\cdot \sim N(0, I)$ がわかればよい．そのためには h を g で表して，以下計算結果を示せば，

$$
\begin{aligned}
\text{(2. 18. a)}\quad E(g_{1\cdot}g_{2\cdot}) &= (2/a_{00})^2 itu_1^t\square_1 + 2a_{00}^{-2}itu_1^t\square_1(T' + (it)^2\square_1^t\square_1) \\
E(g_{1\cdot}^3) &= (2/a_{00})^3\{3itu_1^t\square_1u_1^tu_1 + (it)^3(u_1^t\square_1)^3\} \\
E(g_{3\cdot}g_{1\cdot}^2) &= (2/a_{00})^2 2itu_1^t\square_1u_1^tu_3 \\
&\qquad + (2/a_{00})^3 itu_3^t\square_1\{u_1^tu_1 + (it)^2(u_1^t\square_1)^2\} \\
E(g_{3\cdot}g_{2\cdot}) &= (2/a_{00})^2 itu_3^t\square_1 + 2a_{00}^{-2}it\square_1^tu_3\{T' + (it)^2\square_1^t\square_1\} \\
E(g_{4\cdot}g_{1\cdot}^2) &= (2/a_{00})^3 itu_4^t\square_2\{u_1^tu_1 + (it)^2(\square_1^tu_1)^2\} \\
E(g_{4\cdot}g_{2\cdot}) &= 2a_{00}^{-2}itu_4^t\square_2\{T' + (it)^2\square_1^t\square_1\} \\
E(g_{1\cdot}g_{5\cdot}) &= (2/a_{00})^2 itu_1^tR\square_1 + 2a_{00}^{-2}itu_1^t\square_1\{tr(R) + (it)^2\square_1^tR\square_1\} \\
E(g_{1\cdot}g_{6\cdot}) &= (2/a_{00})^2\{u_1^tG^t\square_2 it + (it)^3u_1^t\square_1\square_1^tG^t\square_2\}.
\end{aligned}
$$

こうして $E(h_{3\cdot})$ がわかる．

$$
\begin{aligned}
\text{(2. 19)}\quad E(h_{3\cdot}) &= (2/a_{00})^2 it\{u_1^t\square_1(T' + 8)\gamma + 4a_{00}^{-1}u_1^t\square_1u_1^tu_3 + u_3^t\square_1(1 - T'/2) \\
&\qquad + u_4^t\square_2(2 - T'/2) - u_1^tR\square_1 - u_1^t\square_1 tr(R/2) - u_1^tG^t\square_2\} \\
&\quad + (it)^3(2/a_{00})^2\{\gamma u_1^t\square_1\square_1^t\square_1 - 2a_{00}^{-1}(\gamma - \square_1^tu_3)(u_1^t\square_1)^2 \\
&\qquad - 2^{-1}u_3^t\square_1\square_1^t\square_1 + 2a_{00}^{-1}(u_1^t\square_1)^2\square_2^tu_4 \\
&\qquad - 2^{-1}u_4^t\square_2\square_1^t\square_1 - 2^{-1}u_1^t\square_1\square_1^tR\square_1 \\
&\qquad - u_1^t\square_2\square_1^tG^t\square_2\}
\end{aligned}
$$

$$= itq_{31} + (it)^3 q_{33}$$

と計算される．つづいて $h_{2\cdot}^2$ については以下のように考える．まず，h_2^2 を 21 種類の $g_i^p g_j^q g_k^r g_l^s$ の加重和によって表し，$x \to Y_\cdot + it\square$ としておいて $E(g_{i\cdot}^p g_{j\cdot}^q g_{k\cdot}^r g_{l\cdot}^s)$ を計算する．そうして，$E(h_{2\cdot}^2)$ を it, $(it)^2$, $(it)^3$, $(it)^4$ で区分すればよい．こうした計算をすべて省略するが，けっきょく $E(h_{2\cdot}^2)$ は

(2. 20) $$E(h_{2\cdot}^2) = q_{30} + q_{32}(it)^2 + q_{34}(it)^4$$

となる．ここで，q_{3j} はいずれも it を含まない．q_{3j} j = 0, 2, 4 の表現はのちに計算する．そうすると N^{-1} のｵｰﾀﾞｰで δ の特性関数は，

(2. 21) $$\begin{aligned} cf(t) = &(\exp(-t^2\square^t\square/2)) \\ &\times \{1 + N^{-1/2}(q_{21}it + q_{22}(it)^3) \\ &\quad + N^{-1}((it)^2 p_{31} + (it)^4 p_{32} + (it)^6 p_{33}) + \dots\} \end{aligned}$$

となる．ただし

(2. 22) $$\begin{aligned} p_{31} &= q_{31} + q_{30}/2 \\ p_{32} &= q_{33} + q_{32}/2 \\ p_{33} &= q_{34}/2. \end{aligned}$$

こうして $\delta = N^{1/2}(c - \gamma)$ の密度は

(2. 23) $$\begin{aligned} f(\delta) &= (2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty} cf(t)\exp(-it\delta)\,dt \\ &= (2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty} (\exp(-it\delta - t^2\square^t\square/2))s(t)\,dt \\ &= n(\delta\,|\,0,\ \square^t\square)E\{s((\square^t\square)^{-1/2}u_\cdot - i\delta(\square^t\square)^{-1})\} \end{aligned}$$

と書ける．ここで

$s(t)$: (2. 21) の R.H.S. の t に関する多項式

$n(\delta\,|\,0,\ \square^t\square)$: 平均 0，分散 $\square^t\square$ の正規密度関数

$u_\cdot \sim N(0,\ 1)$．

計算を続けて δ の密度の近似は，最終的に以下のようになるのがわかる．

(2. 24) $$\begin{aligned} f(\delta) \sim\ & n(\delta\,|\,0,\ \square^t\square) \\ &\times \{1 + \sigma q_{21}\delta(\square^t\square)^{-1} \end{aligned}$$

$$+ \sigma q_{22}(-3\delta(\square^t\square)^{-2} + \delta^3(\square^t\square)^{-3})$$

$$+ \sigma^2 p_{31}(-(\square^t\square)^{-1} + \delta^2(\square^t\square)^{-2})$$

$$+ \sigma^2 p_{32}(3(\square^t\square)^{-2} - 6\delta^2(\square^t\square)^{-3} + \delta^4(\square^t\square)^{-4})$$

$$+ \sigma^2 p_{33}(-15(\square^t\square)^{-3} + 45\delta^2(\square^t\square)^{-4} - 15\delta^4(\square^t\square)^{-5}$$

$$+ \delta^6(\square^t\square)^{-6})\} + o(\sigma^2),$$

ここで

(2. 25) $\square^t\square = (\gamma^2 + 1 - \gamma b_{12})/a_{00}$

となっている．ただし，$b_{ij} = a_{ij}/a_{00}$, $a_{00} = \langle m_{-1}, Mm_{-1}\rangle$．(2. 25) の右辺を計算するには，

(2. 26) $\square^t\square = \langle 2(a^0u_1 + u_3)/a_{00},\ 2(a^0u_1 + u_3)/a_{00}\rangle$

$$+ \langle 2u_4/a_{00},\ 2u_4/a_{00}\rangle$$

と書いて，この u_j を m_{-1}, M などで表せばよい．さらに以下で (2. 24) の q_{ij}, p_{ij} を a_{ij} によって示す．

(2. 27) $a_{00}q_{21} = (2 - T')\gamma - b_{12} + a_{01}/2$

$T' = T - 1 - J'$

$a_{12} = \langle m_{-1}, MSMm_{-1}\rangle$

$a_{01} = tr(MS)$

$S = c_1 c_2^t + c_2 c_1^t,$

q_{22} については

(2. 28) $a_{00}^2 q_{22} = \gamma^3 - (3/2)b_{12}\gamma^2$

$$+ \gamma(1 + b_{12}^2 + 2b_{12} - b_{19} - 2^{-1}b_{15})$$

$$+ 2^{-1}(b_{17} - b_{12} - b_{23} + b_{24} + b_{21})$$

$$+ b_{19} - 2b_{13}$$

$a_{19} = m_{-1}^t M(SMc_1c_2^t + c_2c_1^tMS)Mm_{-1}$

$a_{15} = m_{-1}^t M(SMc_2c_1^t + c_1c_2^tMS)Mm_{-1}$

$a_{17} = m_{-1}^t MSMSMSMm_{-1}$

$$a_{23} = {}^t m_{-1} M(S_2 MS + SMS_2) Mm_{-1}$$

$$a_{24} = {}^t m_{-1} M(c_2 {}^t c_1 MS_3 + S_3 Mc_1 {}^t c_2) Mm_{-1}$$

$$a_{21} = {}^t m_{-1} Mc_1 {}^t c_2 MSMc_2 {}^t c_1 Mm_{-1}$$

$$a_{13} = {}^t m_{-1} MSMSMm_{-1}$$

$$S_2 = c_2 {}^t c_1 Mc_1 {}^t c_2$$

$$S_3 = c_1 {}^t c_2 Mc_2 {}^t c_1.$$

さらに p_{ij} を以下に示す.

(2. 29) $$a_{00}^2 p_{31} = (q_{31} + 2^{-1} q_{30}) a_{00}^2$$
$$= \gamma^2 (2^{-1} T'^2 - 3T' - 42)$$
$$+ \gamma(-2^{-1} T' a_{01} + (3T' + 16) b_{12})$$
$$+ 2^{-3} a_{01}^2 + 2^{-2} a_{02} + 2^{-1}(a_{03} - a_{04})$$
$$+ 3b_{12}^2 - a_{01} b_{12} - 2(b_{19} + b_{16}) + 4 - 4T'$$

となる. ここで

$$a_{02} = tr(SMSM)$$

$$a_{03} = tr(M) = T'$$

$$a_{04} = tr(MS_3)$$

$$a_{16} = {}^t m_{-1} MS_2 Mm_{-1}.$$

そうして p_{33} は

(2. 30) $$2a_{00}^4 p_{33} = \{\gamma^3 + \gamma + \gamma b_{12}^2 + 2^{-1} b_{17}$$
$$+ 2^{-1} b_{21} - b_{13}((3/2)\gamma + 1)$$
$$+ b_{12}(2\gamma - (3/2)\gamma^2 - 2^{-1})$$
$$+ (b_{14} - b_{16})(2^{-1}\gamma - 1)$$
$$+ 2^{-1}(b_{24} - b_{23})\}^2$$

$$a_{14} = {}^t m_{-1} MS_3 Mm_{-1}.$$

p_{32} は以下のようになっている.

(2. 31) $$a_{00}^{3} p_{32} = g_{01} + g_{12} + g_{21} + g_{41} + g_{42} + g_{43}$$

$$\begin{aligned}
g_{01} = {} & \gamma^{2}(3 - 7\gamma^{2} - 8\gamma) + \gamma b_{12}(9\gamma^{2} + 8\gamma - 3) \\
& + b_{12}^{2}(1 - 3\gamma^{2} - 2\gamma) - b_{16}(1 + 3\gamma^{2}) \\
& + 2\gamma b_{12} b_{16} + p_{0}(2\gamma - b_{12})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{0} = {} & 2^{-1} b_{17} - b_{13}((3/2)\gamma + 1) + 2^{-1} b_{12}(4\gamma + \gamma^{2} + 1) \\
& + 2^{-1} b_{21} + 2^{-1} b_{14}(\gamma - 2) + 2^{-1} b_{16}(2 + \gamma) \\
& - \gamma + 2^{-1}(b_{24} - b_{23})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_{12} = {} & -4\gamma^{3}(T' - 7)(\gamma - b_{12}) - 4\gamma^{2} b_{16} \\
& - \gamma^{2}(T' - 8) b_{12}^{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_{21} = {} & -\gamma T' p_{0} + \gamma \{-3b_{12}^{3} + b_{12}^{2}(2^{-1} a_{01} + \gamma) \\
& + b_{12}(T' - 5 - \gamma^{2}(T' - 27) - b_{16} \\
& - (3/2)\gamma a_{01} + 2b_{19}) \\
& + 2\gamma^{3}(T' - 30) + (3/2) a_{01} \gamma^{2} \\
& + (6\gamma + 1 - 2^{-1} a_{01}) b_{16} - 2\gamma (T' - 5) \\
& - 4\gamma b_{19} - b_{23} - b_{24}\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_{41} = {} & 2(1 + 6\gamma^{4} - 5\gamma^{2}) - 2\gamma b_{12} \\
& + 2^{-1} b_{12}^{2}(5 - 7\gamma^{2}) + 2^{-1} \gamma b_{12}^{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_{42} = {} & 2^{-1} a_{01} p_{0} + 4\gamma(\gamma + 1) b_{13} - (4\gamma^{2} + (3/2)\gamma) b_{12} \\
& + 2^{-1}\{b_{28} - \gamma b_{21} + (1 + \gamma^{2})(1 - b_{16}) \\
& - b_{31} - 2\gamma b_{24} - b_{25} - b_{26} + 3\gamma b_{23}\} \\
& + 2^{-1}(1 - 4\gamma) b_{19} - (3/2)\gamma b_{17}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_{43} = {} & -(2\gamma + b_{12}) p_{0} - b_{12}^{2}(1 + 4\gamma - \gamma^{2}) \\
& + b_{12}\{4\gamma(1 + 2\gamma - \gamma^{2}) + 2^{-1}(\gamma^{2} - 1) a_{01} \\
& - (2\gamma + 4) b_{13} - b_{23} + b_{24} + 2b_{19} + b_{21} + b_{17}\} \\
& + 2\gamma\{b_{24} - b_{23} + 2b_{19} + b_{21} + b_{17} - (2\gamma + 4) b_{13}\} \\
& + (\gamma^{2} - 1)(b_{19} - a_{01}\gamma + 2 - b_{16}).
\end{aligned}$$

ここで g_{42} の b_{28}, b_{31}, b_{25}, b_{26} は (2. 32) に定められる.

(2. 32)　$a_{28} = m^t_{-1} M c_2 c^t_1 MSMSM c_1 c^t_2 M m_{-1}$

$a_{31} = m^t_{-1} M c_2 c^t_1 M S_2 M c_1 c^t_2 M m_{-1}$

$a_{25} = m^t_{-1} M S_2 M S_2 M m_{-1}$

$a_{26} = m^t_{-1} M (S_2 MSM c_1 c^t_2 + c_2 c^t_1 MSM S_2) M m_{-1}$

$b_{ij} = a_{ij}/a_{00}.$

以上で，δ の近似分布に含まれるﾊﾟﾗﾒﾀを γ，M，m_{-1}，T' によって表現したことになっている．すぐわかるように σ のｵｰﾀﾞｰまでをとれば，近似分布は比較的簡単な形をとる．

8．3　近似分布によるﾓｰﾒﾝﾄ

ここで 8．2 の結果について簡単なｺﾒﾝﾄを加えておく．1 つは，近似分布から計算される δ のﾓｰﾒﾝﾄである．それは以下のようになっている．

(3. 1)
$$\begin{aligned} E(\delta) = \int \{\delta &+ q_{21}(\square^t\square)^{-1}\delta^2 N^{-1/2} \\ &+ q_{22}\{-3\delta^2(\square^t\square)^{-2} + \delta^4(\square^t\square)^{-3}\}N^{-1/2} \\ &+ \dots\}n(\delta\,|\,0,\ \square^t\square)\,d\delta \\ = q_{21}N^{-1/2} &+ o(N^{-1/2}) \end{aligned}$$
$$N = \sigma^{-2}.$$

この R.H.S. の積分からわかるように，$N^{-1/2}$ のｵｰﾀﾞｰで $E(\delta)$ は q_{22} を含まない．
(3. 1) を書きかえれば，

(3. 2)
$$\begin{aligned} E(c - \gamma) &\sim q_{21}\sigma^2 \\ &\sim (2\tau)^{-1} q_{21} a_{00},\quad \tau = (2\sigma^2)^{-1} a_{00}. \end{aligned}$$

そうして q_{21} を 8．2 のはじめの記号で表して，

(3. 3)
$$\begin{aligned} a_{00} q_{21} &= (4 - T')\gamma - 4 u^t_1 u_3 a^{-1}_{00} + tr(R) \\ &= 2\gamma - \gamma T' - a_{12} a^{-1}_{00} + 2^{-1} a_{01}. \end{aligned}$$

したがって

(3. 4)　$E(c - \gamma) \sim (2\tau)^{-1} \times$ ((3. 3) の R.H.S.)

となって，(3. 4) は exact moments から計算される近似に正確に一致する(第6章)．証

明をしないが，こうした点は 2 次の部分でも示される．ｺﾒﾝﾄの他の 1 つは，特性関数の反転についてである．すなわち，(2. 7) の分母を $1+\theta$ と書いて，$\mathrm{mod}(\theta)<1$ のとき

$$(1+\theta)^{-1}=1-\theta+\theta^2-\ldots$$

とした．したがって (2. 15) の $E\{\exp(it\delta)\}$，あるいは (2. 16) の $E\{(\exp(ith_1))\times h_2(x)\}$ は，$\mathrm{mod}(\theta)<1$ で計算される必要がある．ところが，8. 2 では θ に課せられる制約を無視した．こうした考え方は正確には正しくないが，σ が十分に小さければ

(3. 5) $\quad E\{(\exp(ith_1))h_2(x)\}-E_*\{(\exp(ith_1))h_2(x)\}\sim 0$

と見てよい．ここで $E_*\{\ \}$ は，$\mathrm{mod}(\theta)<1$ のもとでの期待値を意味する．(3. 5) の精密な証明は省略した．

参考文献

[1] Montgomery, D. B. and A. J. Silk, "Estimating Dynamic Effects of Market Communications Expenditures," Management Science, 18, 1972, pp. 485-501.

[2] Parsons, L. J. and R. L. Schultz, Marketing Models and Econometric Research, North-Holland, 1976.

[3] 上條哲男「ﾏｰｹﾃｨﾝｸﾞ･ﾐｯｸｽ･ﾓﾃﾞﾙ」「ﾏｰｹﾃｨﾝｸﾞ･ｻｲｴﾝｽ」第15号, 1980年, pp. 35-46.

[4] 片平秀貴「ﾏｰｹｯﾄ･ｼｪｱ･ﾓﾃﾞﾙの一応用-英国乗用車市場の分析」「ﾏｰｹﾃｨﾝｸﾞ･ｻｲｴﾝｽ」第14号, 1979年, pp. 1-14.

[5] 片岡佑作「分布ﾗｸﾞﾓﾃﾞﾙにおける最小2乗推定値の小標本特性」「経済経営論叢」第15巻, 第3号, 1980年, pp. 85-108.

[6] ――――「分布ﾗｸﾞﾓﾃﾞﾙにおける最小2乗推定値の近似分布」日本統計学会講演報告集, 1981年, pp. 157-158.

第 9 章 ﾛｼﾞｽﾃｨｯｸ - 分布ﾗｸﾞの複合回帰ﾓﾃﾞﾙ

9. 1 広告ｲﾒｰｼﾞの測定例

以下のようなﾓﾃﾞﾙを考える.

(1. 1) $U_t = f_0(A_{0t}, A_{0,t-1}, \ldots)f_*(A_{*t}, A_{*,t-1}, \ldots)$

$\times \exp(\varepsilon_{0t})$

(1. 2) $Y_{it} = f_i(A_{it}, A_{i,t-1}, \ldots)U_t^{\square(i)}\exp(\varepsilon_{it}) \quad i = 1, 2, \ldots, I$

ここで

A_{0t}: ｱﾝﾌﾞﾚﾗ広告支出

A_{it}: 製品 i への広告支出

$A_{*t} = \Sigma_{i=1}^{I} A_{it}$

ε_{0t}, ε_{it}: random disturbances

U_t: ｱﾝﾌﾞﾚﾗｲﾒｰｼﾞ

Y_{it}: 製品 i の販売額,

さらに $f_0(\ )$, $f_*(\ )$, $f_i(\ )$ は, 適当な関数を表すものとしよう.

(1. 1), (1. 2) は, 中島 [1] によって提案されるﾓﾃﾞﾙであるが, その意味は以下のように考えられる. まず最初のｽﾃｯﾌﾟとして A_0 と A_* が, いったんある特定企業のｲﾒｰｼﾞ U を構成し, 次に, この企業の個々の製品 i への広告支出 A_i, および U の 2 要素によって Y_i が説明され, さらにこうした効果, 影響がつねに時間のｽﾞﾚをともなってあらわれる.

ところで, いまこのようなﾓﾃﾞﾙにおける問題は,

1° ｱﾝﾌﾞﾚﾗｲﾒｰｼﾞ U_t をいかに構成するか, つまり U_t にどのような変数を指定すれば, ﾓﾃﾞﾙがある程度の理論的意味あいを満足するか,

2° f_i, f_0, f_* に含まれるﾊﾟﾗﾒﾀ, あるいは $\square_i$ をどのように推定するか,

という 2 点に整理できる. 以下展開されている内容は, 1°, および 2° への解となっている. 9. 2, 3 において, それぞれ 1°, 2° をあつかったのち, 9. 4 では, ﾓﾃﾞﾙ (1. 1), (1. 2) における推定値の性質を簡単に議論した. 命題の証明ﾌﾟﾛｾｽについては, ｽｷｯﾌﾟしている部分もかなりある.

9．2　定式化および解

はじめにここで 1° をとりあげる．いま，A_* を含まない (1．1) を考える．

$z = 1$，個人が，ある何らかの肯定的なｱﾝﾌﾞﾚﾗｲﾒｰｼﾞを保持している

$= 0$，そうでない，

となるような変数 z を定めて，

(2．1)　$Pr(z = 1|R_\theta) = H(R_\theta)$

$R_\theta = \ln A_\theta$

H: 単調非減少，かつ $0 < H < 1$

としよう．以下，$Pr(z = 1|R_\theta) = p_z$ と書く．ここで H に logistic function を選べば，p_z を

(2．2)　$p_z = \exp(G(R_\theta))\{1 + \exp(G(R_\theta))\}^{-1}$

と書くことができる．ただし $G(R_\theta)$ は R_θ の 1 次関数，また以下 p_z，$G(R_\theta)$ をそれぞれ p_{zt}，$G(R_{\theta t})$ と書いて，次の表現がみちびかれる．

(2．3)　$p_{zt}(1 - p_{zt})^{-1} = \exp(G(R_{\theta t}))$，

いま (2．3) の対数をとれば，

(2．4)　$\ln p_{zt}(1 - p_{zt})^{-1} = G(R_{\theta t})$

となる．さらに (2．4) の $R_{\theta t}$ に時間の遅れをみとめれば，$G(R_{\theta t})$ を $G(R_{\theta t}, R_{\theta, t-1}, \ldots)$ とおきかえることができる．つまり

(2．5)　$\ln p_{zt}(1 - p_{zt})^{-1} = G(R_{\theta t}, R_{\theta, t-1}, \ldots)$．

ところで，p_{zt} をその推定値 $\hat{p}_{zt}$ によっておきかえれば，(2．5) の L.H.S. は

(2．6)　$\ln \hat{p}_t(1 - \hat{p}_t)^{-1} \sim \ln p_{zt}(1 - p_{zt})^{-1}$

$+ (\hat{p}_t - p_{zt})\{(1 - p_{zt})p_{zt}\}^{-1}$

をみたす．ただし

$\hat{p}_t = n_t^{-1} \Sigma_{j=1}^{n(t)} z_{jt}$，$t = 1, \ldots, T$

z_{jt}: 0 あるいは 1.

(2．6) については，$\ln \hat{p}_t(1 - \hat{p}_t)^{-1}$ を p_{zt} のまわりでﾃｲﾗｰ展開すればよい．佐和 [2] を見よ．したがって

(2．7)　$\ln \hat{p}_t(1 - \hat{p}_t)^{-1} = G(R_{\theta t}, R_{\theta, t-1}, \ldots) + \varepsilon_{\theta t}$

$$\varepsilon_{0t} = (\hat{p}_t - p_{zt})\{(1 - p_{zt})p_{zt}\}^{-1}$$

となる．ここで

$$E(\varepsilon_{0t}) = 0$$

$$Var(\varepsilon_{0t}) = n_t^{-1} p_{zt}^{-1}(1 - p_{zt})^{-1}$$

$$= \omega_{0t}$$

$$Cov(\varepsilon_{0t},\ \varepsilon_{0s}) = 0 \quad t \neq s$$

となるのが容易にわかる（第6 ～ 8章において，平均 0，分散一定，かつたがいに独立となる誤差項を η_t で表現したが，以下 ε_{0t}，あるいは ε_{it} と書く）．

ところで（1. 1）にもどり，$f_\cdot = 1$，$f_0 = J(A_{0t},\ A_{0,t-1},\ \ldots\ )$ とおき，（1. 1）の ln をとれば

(2. 8) $$\ln U_t = \ln f_0 + \varepsilon_{0t}$$

$$= \ln J(\ ) + \varepsilon_{0t}$$

となる．こうして（2. 7）と（2. 8）の対応から

(2. 9) $$G(R_{0t},\ R_{0,t-1},\ \ldots\ ) = \ln J(A_{0t},\ A_{0,t-1},\ \ldots\ )$$

がみたされるならば，$U_t = \hat{p}_t(1 - \hat{p}_t)^{-1}$ とおくことによって，ﾓﾃﾞﾙ（1. 1）の背景に（2. 1）を考えてよいことになる．簡単な関数形で，（2. 9）を成立させるようなものには，たとえば

(2. 10) $$J(A_{0t},\ A_{0,t-1},\ \ldots\ ) = k\Pi_{s=0}^{\infty} A_{0,t-s}^{F(s)}$$

$$F(s) = \beta_0 \alpha_0^s,\ \mathrm{mod}(\alpha_0) < 1$$

がある．（2. 10）の ln をとれば

(2. 11) $$\ln J(\ ) = k' + \Sigma_{s=0}^{\infty} \beta_0 \alpha_0^s \ln A_{0,t-s}$$

$$= k' + \Sigma_{s=0}^{\infty} \beta_0 \alpha_0^s R_{0,t-s}$$

となって，（2. 11）の R.H.S. は，G( ) をみたすのがわかる．けっきょく（2. 9）を成立させるような関数は存在するから，1 つの考え方として，$U_t = \hat{p}_t(1 - \hat{p}_t)^{-1}$ としてよいことになる．つまり，（1. 1）の L.H.S.，U_t には t 期についてｻｲｽﾞ n_t のｻﾝﾌﾟﾙを考え，

(2. 12) $$U_t = s_t(n_t - s_t)^{-1}$$

$$= \hat{p}_t(1 - \hat{p}_t)^{-1}$$

s_t: ｲﾒｰｼﾞに対して肯定的な回答数

$n_t - s_t$: ｲﾒｰｼﾞに対して否定的な回答数

とすればよい.

9. 3 ﾓﾃﾞﾙの推定

ここで (1. 1) の推定問題をとりあげる. $\ln U_t = u_t$, $\mathrm{mod}(\alpha_0) < 1$, さらに

$$f_0 = J = k\Pi_{s=0}^{\infty} A_{0,t-s}^{F(s)}$$

とすれば, (2. 8) は

(3. 1) $\quad u_t = k' + (I - \alpha_0 L)^{-1}\beta_0 R_{0t} + \varepsilon_{0t}$

と書ける. ただし L は

$$L^s x_t = x_{t-s},\ s = 0,\ 1,\ \ldots$$

$$L^0 = I = 1$$

となるようなﾗｸﾞｵﾍﾟﾚﾀである. (3. 1) を変形して

(3. 2) $\quad u_t = \alpha_0 u_{t-1} + k'' + \beta_0 R_{0t} + \eta_{0t}$

$$\eta_{0t} = \varepsilon_{0t} - \alpha_0\varepsilon_{0,t-1}$$

とすれば, (3. 2) は推定可能になる. ここで η_{0t} の分散共分散を知っておく必要があるが, ε_{0t}, $\varepsilon_{0,t-1}$ は独立だから,

(3. 3) $\quad \mathrm{Var}(\eta_{0t}) = \mathrm{Var}(\varepsilon_{0t}) + \alpha_0^2\mathrm{Var}(\varepsilon_{0,t-1})$

$$= \omega_{0t} + \alpha_0^2\omega_{0,t-1}$$

$$\mathrm{Cov}(\eta_{0t},\ \eta_{0,t+1}) = E\{(\varepsilon_{0t} - \alpha_0\varepsilon_{0,t-1})(\varepsilon_{0,t+1} - \alpha_0\varepsilon_{0t})\}$$

$$= -\alpha_0\omega_{0t}$$

$$\mathrm{Cov}(\eta_{0t},\ \eta_{0,t+s}) = E\{(\varepsilon_{0t} - \alpha_0\varepsilon_{0,t-1})(\varepsilon_{0,t+s} - \alpha_0\varepsilon_{0,t+s-1})\}$$

$$= 0,\ s > 1$$

となる. したがって GLS 推定するのであれば,

(3. 4) $\quad \mathrm{Var}(\eta_{0t})$ の estimate $= m_{\cdot 0t} + a_0^2 m_{\cdot 0,t-1}$

$\quad \mathrm{Cov}(\eta_{0t},\ \eta_{0,t+1})$ の estimate $= -a_0 m_{\cdot 0t}$

をもちいればよい．ただし

(3．5)　$m_{\cdot 0t} = n_t^{-1}\hat{p}_t^{-1}(1 - \hat{p}_t)^{-1}$

$\hat{p}_t = n_t^{-1}\Sigma_{j=1}^{n(t)} z_{jt}$, $t = 1, \ldots, T$

a_0: (3．2) の α_0 の OLS estimate

となっている．

つづいて (1．2) をとりあげる．両辺の対数をとって，これを

(3．6)　$\ln Y_{it} = \ln f_i + \square_i \ln U_t + \varepsilon_{it}$

と表すことができる．ここで先と同様に，f_i に

$$\ln f_i = c' + \Sigma_{s=0}^{\infty} \alpha_i^s \beta_i \ln A_{it},\ \mathrm{mod}(\alpha_i) < 1$$

$$= c' + (I - \alpha_i L)^{-1}\beta_i R_{it}$$

を選べば，(3．6) は

(3．7)　$y_{it} = c' + (I - \alpha_i L)^{-1}\beta_i R_{it} + \square_i u_t + \varepsilon_{it}$,

あるいは

(3．8)　$y_{it} = \alpha_i y_{i,t-1} + c'' + \beta_i R_{it}$

$$+ \square_i(u_t - \alpha_i u_{t-1}) + \varepsilon_{it} - \alpha_i \varepsilon_{i,t-1}$$

となる，ここで $y_{it} = \ln Y_{it}$, $u_t = \ln U_t$．したがって (3．8) に OLS, GLS をあてはめればよい．ただし，この場合 OLS を選ぶとしても，(3．8) のﾊﾟﾗﾒﾀには nonlinear な制約がつく．つまり，

u_{t-1} の coefficient = -($y_{i,t-1}$ の coefficient)

x (u_t の coefficient)

となる．さらに (3．8) における誤差項，$\eta_{it} = \varepsilon_{it} - \alpha_i \varepsilon_{i,t-1}$ について，そのﾓｰﾒﾝﾄは以下のようになっている．

$$E(\eta_{it}) = 0.$$

また，ε_{it} は t について独立，かつ $\varepsilon_{it} \sim N(0, \omega_i^2)$ とすれば，

$$\mathrm{Var}(\eta_{it}) = (1 + \alpha_i^2)\omega_i^2$$

$$\mathrm{Cov}(\eta_{it}, \eta_{i,t+1}) = E\{(\varepsilon_{it} - \alpha_i \varepsilon_{i,t-1})(\varepsilon_{i,t+1} - \alpha_i \varepsilon_{it})\}$$

$$= -\alpha_i \omega_i^2$$

$$\mathrm{Cov}(\eta_{it},\ \eta_{i,t+s}) = 0,\ s > 1$$

となる．

つづいてこうした議論をある程度拡張，あるいは修正することを考える．(1. 1) において

(3. 9) $\quad 1 \neq f_* = c_* \Pi_{s=0}^{\infty} A_{*,t-s}^{F'(s)}$

$$F'(s) = \beta_* \alpha_0^s,\ \mathrm{mod}(\alpha_0) < 1$$

とすれば，(3. 2) は

(3. 10) $\quad u_t = \alpha_0 u_{t-1} + k_3 + \beta_0 R_{0t} + \beta_* R_{*t} + \varepsilon_{0t} - \alpha_0 \varepsilon_{0,t-1}$

となる．ただし $R_{*t} = \ln A_{*t}$．(3. 9) の α_0 に α_0 以外のﾊﾟﾗﾒﾀを選ぶと，(3. 10) は高階の定差方程式になる．さらに (1. 2) で $U_t^{\square(i)}$ を

(3. 11) $\quad f_U(U_t,\ U_{t-1},\ \ldots\ ) = \Pi_{s=0}^{\infty} U_{t-s}^{F''(s)}$

$$F''(s) = \square_i \delta_i^s,\ \mathrm{mod}(\delta_i) < 1$$

とすれば，(1. 2) を

(3. 12) $\quad y_{it} = c' + (I - \alpha_i L)^{-1} \beta_i R_{it}$

$$+ (I - \delta_i L)^{-1} \square_i u_t + \varepsilon_{it}$$

と書くことができる．そうして，ここで $\delta_i = \alpha_i$ のとき，(3. 12) は

(3. 13) $\quad y_{it} = \alpha_i y_{i,t-1} + c'' + \beta_i R_{it}$

$$+ \square_i u_t + \varepsilon_{it} - \alpha_i \varepsilon_{i,t-1}$$

となる．すぐ気づくように，(3. 13) の係数に制約はない．

9. 4 OLS，GLS 推定値の漸近的性質

ここでさきのﾓﾃﾞﾙ

(4. 1) $\quad u_t = \alpha_0 u_{t-1} + k'' + \beta_0 R_{0t} + \eta_{0t}$

における推定値の性質を考える．ただし

$$\ln U_t = u_t = \ln \hat{p}_t (1 - \hat{p}_t)^{-1}$$

$$\eta_{0t} = \varepsilon_{0t} - \alpha_0 \varepsilon_{0,t-1}.$$

いまﾃﾞｰﾀをﾌﾟｰﾙし，$u = \alpha_0 u_{-1} + X\beta_{00} + \eta$ と書いて，OLS 推定値は

(4. 2)　$(a_0,\ b_{00}^t)^t = (X_*^t X_*)^{-1} X_*^t u,\ \ \beta_{00}^t = (k^*,\ \beta_0)$

となる．ここで

$X_* = (u_{-1},\ X),\ \dim(X) : (T - 1) \times 2$

X の 第 t 行 $= x_{t+1}(1 \times 2) = (1,\ R_{0,t+1})\quad t = 1,\ \ldots,\ T - 1$

$u_{-1}^t = (u_1,\ \ldots,\ u_{T-1})$

$u^t = (u_2,\ \ldots,\ u_T)$.

はじめに a_0，b_{00} の確率極限を計算する．

(4. 3)　$(a_0,\ b_{00}^t)^t = (\alpha_0,\ \beta_{00}^t)^t + (X_*^t X_*)^{-1} X_*^t \eta$

となるから，以下 $\langle X_*,\ \eta \rangle$ を見ればよい．

(4. 4)　$X_*^t \eta = (u_{-1}^t \eta,\ (X^t \eta)^t)^t$

だから，はじめに $\langle u_{-1},\ \eta \rangle$ を考えれば，

$u_{-1}^t \eta = u_{-1}^t \varepsilon - \alpha_0 u_{-1}^t \varepsilon_{-1}$

$\varepsilon = (\varepsilon_{02},\ \ldots,\ \varepsilon_{0T})^t$

$\varepsilon_{-1} = (\varepsilon_{01},\ \ldots,\ \varepsilon_{0,T-1})^t$.

さらに

(4. 5)　$u_{-1}^t \varepsilon = \Sigma_{t=1}^{T-1} u_t \varepsilon_{0,t+1}$

(4. 5.a)　$\varepsilon_{0t} = (\hat{p}_t - p_{zt}) p_{zt}^{-1} q_{zt}^{-1}$

$q_{zt} = 1 - p_{zt}$.

以下，(4. 5.a) の p_{zt}，q_{zt} を p_t，q_t と書く．いま，$E(\hat{p}_t) = p_t, Var(\hat{p}_t) = p_t q_t / n_t = O(1/n_t)$，ゆえに $n_t (t = 1,\ \ldots,\ T) \to +\infty$ のとき，$\hat{p}_t \to p_t$ (in probability) から $\varepsilon_{0t} \to 0$, $u_t = \ln \hat{p}_t \hat{q}_t^{-1} \to \ln p_t q_t^{-1}$．したがって (4. 5) の $u_t \varepsilon_{0,t+1}$ は $n_t \to +\infty$ で $u_t \varepsilon_{0,t+1} \to 0$ となる．ここで，あるいは以下についても同様であるが，→ と書く場合，左側がﾗﾝﾀﾞﾑであれば，→ は convergence in probability を意味する．

$u_t \varepsilon_{0t}$ についても，

(4. 6)　$u_{-1}^t \varepsilon_{-1} = \Sigma_{t=1}^{T-1} u_t \varepsilon_{0t}$

から $n_t \to +\infty$ で $u_t \varepsilon_{0t} \to 0$ となる．さらに，$T^{-1}\Sigma_{t=1}^{T-1} u_t \varepsilon_{0,t+1}$，$T^{-1}\Sigma_{t=1}^{T-1} u_t \varepsilon_{0t}$ がいずれも T^0 のｵｰﾀﾞｰだから，$T \to +\infty$，$n_t \to +\infty$ においても，$T^{-1}\Sigma_{t=1}^{T-1} u_t \varepsilon_{0,t+1} \to 0$，$T^{-1}\Sigma_{t=1}^{T-1} u_t \varepsilon_{0t} \to 0$ となる．ゆえに (4. 3) において，$T^{-1}X_{\cdot}^{t}X_{\cdot} \to$ const. であれば，$T \to +\infty$，$n_t \to +\infty$ で $a_0 \to \alpha_0$ となる．以下これを考える．

$$T^{-1}u_{-1}^{t}u_{-1} = T^{-1}\Sigma_{t=1}^{T-1}u_t^2$$

$$= T^{-1}\Sigma_{t=1}^{T-1}(\ln \hat{p}_t\hat{q}_t^{-1})^2.$$

ここで $n_t \to +\infty$ で $\hat{p}_t \to p_t$ だから $n_t \to +\infty$ のとき，$(\ln \hat{p}_t\hat{q}_t^{-1})^2 \to (\ln p_t q_t^{-1})^2$，いま $\max(\ln p_t q_t^{-1})^2 = \delta$ とすれば，$n_t \to +\infty$ で

(4. 7) $$T^{-1}u_{-1}^{t}u_{-1} = T^{-1}\Sigma_{t=1}^{T-1}u_t^2$$

$$\leqq T^{-1}\Sigma_{t=1}^{T-1}\delta$$

$$= T^{-1}(T-1)\delta.$$

こうして $T \to +\infty$，$n_t \to +\infty$ で $T^{-1}u_{-1}^{t}u_{-1} \to$ const. となる．

つづいて $T^{-1}X^{t}u_{-1}$ をとりあげる．

$$T^{-1}X^{t}u_{-1} = T^{-1}\Sigma_{t=1}^{T-1}x_{t+1}^{t}u_t,\ \dim(x_{t+1}^{t}):\ 2 \times 1$$

$$= T^{-1}\Sigma_{t=1}^{T-1}x_{t+1}^{t}\ln \hat{p}_t\hat{q}_t^{-1},$$

ここで $n_t \to +\infty$ のとき，

$$T^{-1}\mathrm{mod}(X_j^{t}u_{-1}) \to T^{-1}\mathrm{mod}(\Sigma_{t=1}^{T-1}x_{j,t+1}\ln p_t q_t^{-1})$$

$$\leqq T^{-1}\Sigma_{t=1}^{T-1}\mathrm{mod}(x_{j,t+1})\mathrm{mod}(\ln p_t q_t^{-1})$$

$$\leqq T^{-1}\Sigma_{t=1}^{T-1}\mathrm{mod}(x_{j,t+1})\delta^{1/2}.$$

いま，$\mathrm{mod}(x_{j,t+1})$　$j = 1, 2$ は bounded だから，$\delta^{1/2}T^{-1}\Sigma_{t=1}^{T-1}\mathrm{mod}(x_{j,t+1}) = O(T^0)$，ゆえに $T^{-1}X^{t}u_{-1} = O(T^0)$，さらに $T^{-1}X^{t}X = O(T^0)$．ゆえに $T \to +\infty$ のとき，$T^{-1}X_{\cdot}^{t}X_{\cdot} \to \delta''$ となるような δ'' がある．したがって (4. 3) の a_0 は $a_0 \to \alpha_0$ となる．b_{00} においても同様である．

つづいて GLS についてはまず，推定値を

(4. 8) $(a_{*0},\ b^t_{*00})^t = (X^t_* S^{-1} X_*)^{-1} X^t_* S^{-1} u$

と書く．ただし

$X_* = (u_{-1},\ X)$

$u_{-1} = (u_1,\ \ldots,\ u_{T-1})^t$

$u = (u_2,\ \ldots,\ u_T)^t$

X の第 t 行 $= x_{t+1}(1 \times 2)$

S: η_{0t} の covariances の OLS 推定値．

いま S の要素を書けば，

(4. 8.a) $s_{tt} = m_{*0t} + a_0^2 m_{*0,t-1} \quad t = 2,\ \ldots,\ T$

$s_{t,t+1} = -a_0 m_{*0t}$

$s_{t,t+j} = 0 \quad j > 1$

$m_{*0t} = n_t^{-1} \hat{p}_t^{-1} \hat{q}_t^{-1}$

$\hat{q}_t = 1 - \hat{p}_t$

$\hat{p}_t = n_t^{-1} \Sigma_{j=1}^{n(t)} z_{jt} \quad t = 1,\ \ldots,\ T$

a_0: α_0 の OLS 推定値

となっている．a_{*0}，b_{*00} の確率極限を計算するために，(4. 8) を

(4. 9) $(a_{*0},\ b^t_{*00})^t = (\alpha_0,\ \beta^t_{00})^t + (X^t_* S^{-1} X_*)^{-1} X^t_* S^{-1} \eta$

と書きかえる．まず $n_t \to +\infty$ で $\dot{s}_{ts} \to \dot{\sigma}_{ts}(\alpha_0,\ p_t,\ p_s)$ $t,s = 2,\ \ldots,\ T$ となる．ただし，この $\dot{s}_{ts}$，$\dot{\sigma}_{ts}$ は n_t を含まないものを意味する．さらに X_* の部分 u_{-1} は $n_t \to +\infty$ で $u_{-1} \to v_{-1}$ となる．ただし $v^t_{-1} = (v_1,\ \ldots,\ v_{T-1})$，$v_t = \ln p_t q_t^{-1}$，$\eta$ については先と同様に $\eta \to 0$．これらの議論をあわせて $n_t \to +\infty$ のとき，$(a_{*0},\ b_{*00}) \to (\alpha_0,\ \beta_{00})$ となるのがわかる．つづいて $n_t \to +\infty$，$T \to +\infty$ の場合を考える．いま $n_t \to +\infty$ で (4. 9) の R.H.S. の第2項は，

$$T^{-1} X^t_* S^{*-1} \eta \to T^{-1} X^t_+ \Sigma^{*-1} \operatorname{plim} \eta = O(T^0)，$$

この plim は $n_t \to +\infty$ のもとでの plim を示す．また，$X_+ = (v_{-1},\ X)$ である．ここ

で plim $\eta = 0$ だから，$T \to +\infty$ で $T^{-1} X_{\cdot}^{t} S^{\cdot -1} \eta \to 0$，さらに n_t，$T \to +\infty$ で

$$T^{-1} X_{\cdot}^{t} S^{\cdot -1} X_{\cdot} \sim T^{-1} X_{+}^{t} \Sigma^{\cdot -1} X_{+} \to 0(T^{0}),$$

ゆえに $T \to +\infty$，$n_t \to +\infty$ で $(a_{\cdot 0}, b_{\cdot 00}) \to (\alpha_0, \beta_{00})$ となる．

次に，推定値の分布を考える．いま $\varepsilon_{\cdot} = (\varepsilon_{00}, \varepsilon^{t})^{t}$ として $\varepsilon = (0, I)\varepsilon_{\cdot} = c_2 \varepsilon_{\cdot}$，$\varepsilon_{-1} = (I, 0)\varepsilon_{\cdot} = c_1 \varepsilon_{\cdot}$ と書けるから，$\eta = \varepsilon - \alpha_0 \varepsilon_{-1} = (c_2 - \alpha_0 c_1)\varepsilon_{\cdot} = c_3 \varepsilon_{\cdot}$ となる．$X_{\cdot}^{t} \eta$ をもう一度書けば，

(4. 10) $\quad X_{\cdot}^{t} \eta = X_{\cdot}^{t} c_3 \varepsilon_{\cdot}$

$$\varepsilon_{\cdot t} = (\hat{p}_t - p_t)\{(1 - p_t)p_t\}^{-1} = (\hat{p}_t - p_t)(q_t p_t)^{-1}.$$

ここで $n_t \to +\infty$ のとき，$q_t p_t \varepsilon_{\cdot t} \sim N(0, n_t^{-1} p_t q_t)$ だから $\varepsilon_{\cdot t} \sim N(0, n_t^{-1} p_t^{-1} q_t^{-1})$，$u_{-1}$ については $u_{-1} \to v_{-1}$，ただし

$$v_{-1} = (v_1, \ldots, v_{T-1})^{t}$$

$$v_t = \ln p_t q_t^{-1}.$$

そうすると，まず $n_t \to +\infty$ で $X_{\cdot}^{t} \eta = X_{\cdot}^{t} c_3 \varepsilon_{\cdot}$，$X_{+}^{t} c_3 \varepsilon_{\cdot}$ の分布は等しい．ただし $X_{\cdot} \to X_{+}$．したがって $X_{+}^{t} c_3 \varepsilon_{\cdot}$ を調べればよい．いま $n_t \to +\infty$ で $\varepsilon_{\cdot}(T \times 1) \sim N(0, \Omega)$，

$$\Omega = \mathrm{diag}(\ \ldots,\ n_t^{-1} p_t^{-1} q_t^{-1},\ \ldots\ ) = \mathrm{diag}(\ \ldots,\ \omega_{0t},\ \ldots\ )$$

だから $X_{+}^{t} c_3 \varepsilon_{\cdot} \sim N(0, X_{+}^{t} c_3 \Omega c_3^{t} X_{+})$，さらに $n_t \to +\infty$ で $(X_{+}^{t} X_{+})^{-1} X_{+}^{t} c_3 \varepsilon_{\cdot} \sim N(0, Q_1)$ となる．ただし $Q_1 = (X_{+}^{t} X_{+})^{-1} X_{+}^{t} c_3 \Omega c_3^{t} X_{+} (X_{+}^{t} X_{+})^{-1}$．ところで $n_t \to +\infty$ で $X_{\cdot} \to X_{+}$ だから，$n_t \to +\infty$ のとき，

(4. 11) $\quad (a_0, b_{00}^{t})^{t} \sim N((\alpha_0, \beta_{00}^{t})^{t}, Q_1)$

となるのがわかる．

GLS 推定値の分布についても，これらの議論がそのまま成立する．

(4. 12) $\quad X_{\cdot}^{t} S^{-1} \eta \sim X_{+}^{t} \Sigma^{-1} \eta \sim N(0, X_{+}^{t} \Sigma^{-1} c_3 \Sigma c_3^{t} \Sigma^{-1} X_{+})$

から

$$R^{-1}X_+^t\Sigma^{-1}\eta \sim N(0,\ Q_2)$$

ただし

(4. 13)　$R = X_+^t\Sigma^{-1}X_+,\quad Q_2 = R^{-1}X_+^t\Sigma^{-1}c_3\Omega c_3^t\Sigma^{-1}X_+R^{-1}.$

そうすると GLS 推定値については, $n_t \to +\infty$ で

(4. 14)　$(a_{*0},\ b_{*00}^t)^t \sim N((\alpha_0,\ \beta_{00}^t)^t,\ Q_2)$

となる. この Q_2 は (4. 13) によって定められる.

いま (4. 11), (4. 14) で $c_3\Omega c_3^t = \Sigma$ に気づくとよい. これは以下のようにして示される. $\varepsilon_*(T \times 1) \sim N(0,\ \Omega)$, $\eta = c_3\varepsilon_*$ だから "η の covariances" = Σ = $c_3\Omega c_3^t$ となる. そうすると

(4. 15)　$Q_1 = (X_+^tX_+)^{-1}X_+^t\Sigma X_+(X_+^tX_+)^{-1}$

$$Q_2 = (X_+^t\Sigma^{-1}X_+)^{-1}$$

について "$Q_1 - Q_2$: nonnegative definite" を主張できる. 証明は以下のとおり.

$$A = X_+^tX_+(Q_1 - Q_2)X_+^tX_+$$

$$= X_+^t\Sigma X_+ - X_+^tX_+(X_+^t\Sigma^{-1}X_+)^{-1}X_+^tX_+$$

として, いま $\Sigma = \Sigma^{1/2}\Sigma^{1/2}$ ($\Sigma^{1/2}$: symmetric positive definite) とすれば,

$$X_+^t\Sigma^{-1}X_+ = Y^tY \ (\text{ただし } Y = \Sigma^{-1/2}X_+).$$

そうすると

(4. 16)　$A = Y^t\Sigma^2Y - Y^t\Sigma Y(Y^tY)^{-1}Y^t\Sigma Y$

$$= Y_*^t(I - Y(Y^tY)^{-1}Y^t)Y_*,\quad Y_* = \Sigma Y$$

となる. (4. 16) で $I - Y(Y^tY)^{-1}Y^t$ はベキ等, したがって $I - Y(Y^tY)^{-1}Y^t$, A は非負値定符号になる. 以上の点から α_0 (あるいは β_{00}) の OLS, GLS 推定値は n_t, $T \to +\infty$ のとき, ともに α_0 の一致推定値となるが, 極限分布については $\mathrm{Var}(a_0) \geqq \mathrm{Var}(a_{*0})$ となっている.

つづいて (3. 12), あるいは (3. 13) の母数推定を考える. (3. 13) を

(4. 17)　$y = (y_{-1},\ u,\ X)(\alpha_i,\ \square_i,\ \beta_{i0}^t)^t + \eta$

と書く．ただし

(4. 18)　$y = (y_{i2},\ \ldots,\ y_{iT})^t$

$y_{-1} = (y_{i1},\ \ldots,\ y_{iT-1})^t$,

この y, y_{-1} は i に依存するが，簡単のために y, y_{-1} と書いた．以下についても同様である．

$\eta = (\eta_{i2},\ \ldots,\ \eta_{iT})^t$

$\eta_{it} = \varepsilon_{it} - \alpha_i \varepsilon_{i,t-1}$

$u = (u_2,\ \ldots,\ u_T)^t$

$X((T - 1) \times 2)$ の第 t 行 $= x_{t+1}$

$x_t = (1,\ R_{it})$

$\beta_{i0} = (c'',\ \beta_i)^t$,

となっている．さらに $z = (y_{-1},\ u,\ X)$, $\delta^t = (\alpha_i,\ □_i,\ \beta_{i0}^t)$ とおけば，

(4. 18.a) $y = z\delta + \eta$

となる．そうすると δ の OLS 推定値は

(4. 19)　$d = (z^t z)^{-1} z^t y$

と書ける．以下 d の確率極限を計算する．

(4. 19.a) $d = \delta + (z^t z)^{-1} z^t \eta$

として，ここでまず $n_t \to +\infty$ のとき，$u \to v$ となる．ただし $v = (v_2,\ \ldots,\ v_T)^t$, $v_t = \ln p_t q_t^{-1}$.

つづいて $T^{-1} z^t \eta$ を考える．

(4. 20)　$T^{-1} z^t \eta = T^{-1} \sum_{t=2}^{T} (y_{i,t-1}\eta_{it},\ u_{it}\eta_{it},\ (x_t^t \eta_{it})^t)^t$,

ここで

$$\sum y_{i,t-1}\eta_{it} = \sum y_{i,t-1}\varepsilon_{it} - \alpha_i \sum y_{i,t-1}\varepsilon_{i,t-1}$$

となるが，以下の計算のために (3. 12) の y_{it} についてその性質を調べておくと，まず (3. 12) を

$y_{it} = \mu_{it} + \varepsilon_{it}$, $\delta_i = \alpha_i$

と書いて $n_t \to +\infty$ のとき，$y_{it} \sim m_{it} + \varepsilon_{it}$ ただし

$m_{it} = c' + (I - \alpha_i L)^{-1} \beta_i R_{it}$

$$+ (I - \alpha_i L)^{-1} \Pi_i v_t$$

$$< +\infty.$$

そうすると $n_t \to +\infty$ で

(4. 21) $\Sigma\, y_{i,t-1}\eta_{it} \sim \Sigma\,(m_{i,t-1} + \varepsilon_{i,t-1})\varepsilon_{it}$

$$- \alpha_i \Sigma\,(m_{i,t-1} + \varepsilon_{i,t-1})\varepsilon_{i,t-1}$$

ここで $E(\varepsilon^2_{it}) = \omega^2_i$; ε_{it}, $\varepsilon_{is}(t \neq s)$: independent, $E(m_{it}\varepsilon_{it}) = 0$, そうして

$\varepsilon_{it} \sim$ normal, あるいは $E(\varepsilon^s_{it}) < +\infty$ s: 適当な整数, を仮定すれば, $T \to +\infty$ で

(4. 21.a) $T^{-1}\Sigma\, y_{i,t-1}\eta_{it} \to -\omega^2_i\alpha_i$

となる. つぎに $\Sigma^T_{t=2}u_{it}\eta_{it}$ は $n_t \to +\infty$ のとき $u_{it}\eta_{it} \to v_{it}\eta_{it}$. この v_{it} は ﾗﾝﾀﾞﾑではない. そうすると $T \to +\infty$ のとき,

$$T^{-1}\Sigma^T_{t=2}v_{it}\eta_{it} = T^{-1}\Sigma^T_{t=2}v_{it}(\varepsilon_{it} - \alpha_i\varepsilon_{i,t-1}) \to 0,$$

さらに $\Sigma x^t_t\eta_{it}$ についても, $T \to +\infty$ で $T^{-1}\Sigma x^t_t\eta_{it} \to 0(2 \times 1)$, 以上を整理して

(4. 20) において $T \to +\infty$, $n_t \to +\infty$ のとき, $T^{-1}(z^t\eta)^t \to (-\omega^2_i\alpha_i,\ 0)$ $\dim(0) = 1 \times 3$ となるのがわかる. また (4. 19) で $n_t \to +\infty$, $T \to +\infty$ のとき, $T^{-1}z^tz \to$ const. となる. これを計算すれば以下のようになる. $n_t \to +\infty$ で

$$z^tz = (y_{-1},\ u,\ X)^t(y_{-1},\ u,\ X)$$

の y_{-1}, u は, それぞれ $y_{-1} \sim m_{-1} + \varepsilon_{-1}$, $u \to v$ となる. $T \to +\infty$ で計算を続ければ,

$$T^{-1}y^t_{-1}y_{-1} \sim T^{-1}m^t_{-1}m_{-1} + \omega^2_i \to e_{00}$$

$$T^{-1}y^t_{-1}v \sim T^{-1}m^t_{-1}v \to e_{01}$$

$$T^{-1}y^t_{-1}X \sim T^{-1}m^t_{-1}X \to e_{02}$$

$$T^{-1}v^tv \to e_{22}$$

$$T^{-1}v^tX \to e_{23}$$

$$T^{-1}X^tX \to e_{33}.$$

ここで e_{ij} はいずれも定数である. いま, $\mathrm{plim}\ T^{-1}z^tz = E$. と書けば, d は $n_t \to +\infty$

, $T \to +\infty$ のとき

(4. 22)　$d = (\alpha_i, \square_i, \beta_{i0}^t)^t$ の OLS 推定値

$$\to \delta + E_{\cdot}^{-1}(-\alpha_i \omega_i^2, 0)^t, \quad 0: 1 \times 3$$

となって，これは d が inconsistent であることを意味する．つづいて $T^{-1}(y - zd)^t \times (y - zd) = T^{-1}B$ の確率極限を計算する．いま，$y - zd = M\eta$，$M = I - z(z^t z)^{-1} z^t$ と書けるから，

(4. 23)　$B = \eta^t M \eta = \eta^t \eta - \eta^t z(z^t z)^{-1} z^t \eta$

となる．ここで $n_t \to +\infty$，$T \to +\infty$ のとき

$$T^{-1} \eta^t z \to (-\omega_i^2 \alpha_i, 0),$$

したがって，あと $\eta^t \eta$ を見ればよい．

$$\eta^t \eta = \Sigma_{t=2}^{T} (\varepsilon_{it} - \alpha_i \varepsilon_{i,t-1})^2$$

$$= \Sigma_{t=2}^{T} \varepsilon_{it}^2 - 2\alpha_i \Sigma_{t=2}^{T} \varepsilon_{it} \varepsilon_{i,t-1} + \alpha_i^2 \Sigma_{t=2}^{T} \varepsilon_{i,t-1}^2,$$

すぐわかるように $T^{-1} \eta^t \eta \to (1 + \alpha_i^2)\omega_i^2$ となる．そうすると $T \to +\infty$，$n_t \to +\infty$ のとき，

(4. 24)　$T^{-1}B \to (1 + \alpha_i^2)\omega_i^2 - (-\omega_i^2 \alpha_i, 0)E_{\cdot}^{-1}(-\omega_i^2 \alpha_i, 0)^t$

$$= (1 + \alpha_i^2)\omega_i^2 - \omega_i^4 \alpha_i^2 e^{11}$$

$$< (1 + \alpha_i^2)\omega_i^2$$

$$= \eta_{it} \text{ の variance}$$

e^{11}: $E_{\cdot}$ の逆行列の (1,1) 要素

となって，$T^{-1}B$ の定数倍は $(1 + \alpha_i^2)\omega_i^2$ の一致推定値を構成できないのがわかる．また，ﾓﾃﾞﾙ (4. 17) における δ の GLS 推定値も，inconsistent である．これは以下のようにして示される．GLS については，OLS 推定値の $z^t \eta$ に対応する部分が，$z^t S_i^{-1} \eta$ となっている．ただし S_i は Σ_i の OLS 推定値を示す．いま，$T^{-1} z^t S_i^{-1} \eta$ をとりあげると，$n_t \to +\infty$，$T \to +\infty$ のとき，$S_i^{-1} \to \text{const.} (= G)$ だから $T^{-1} z^t G \eta$ を調べれば

よい.

(4. 25) $z^t G\eta = z^t(g_2\eta, \ldots, g_T\eta)^t \quad g_t: 1 \times (T-1)$

$$= \Sigma_{t=2}^{T} z_t^t g_t \eta$$

$$= \Sigma_{t=2}^{T} (y_{i,t-1} g_t \eta, \ldots)^t$$

と書けるが, $T^{-1}\Sigma_{t,s=2}^{T} y_{i,t-1} g_{ts} \eta_s \sim T^{-1}\Sigma_{t,s=2}^{T}(m_{i,t-1} + \varepsilon_{i,t-1}) g_{ts}\eta_s$ ($n_t \to +\infty$). また $T \to +\infty$ で, これは $T^{-1}\Sigma_{t,s}\varepsilon_{i,t-1} g_{ts}\eta_s$ の確率極限に一致する. 計算を続けて,

(4. 26) $\Sigma_{t,s=2}\varepsilon_{i,t-1} g_{ts}\eta_s = \Sigma_t \varepsilon_{i,t-1} g_{tt}(\varepsilon_{it} - \alpha_i \varepsilon_{i,t-1})$

$$+ \Sigma_{t \neq s}\varepsilon_{i,t-1} g_{ts}(\varepsilon_{is} - \alpha_i \varepsilon_{i,s-1}),$$

ここでこの R.H.S. についてその期待値は 0 でない. したがって $T^{-1}\Sigma_{t,s}\varepsilon_{i,t-1} g_{ts}\eta_s \to$ nonzero. ゆえに (4. 17) については, GLS 推定値も inconsistent になっているのがわかる.

remark: pp. 137 ～ で OLS, GLS 推定値の分布を考える場合, 正確には推定値を $(n_t T)^{1/2}$ 倍する方がよい.

参考文献

[1] 中島望「ﾌｧﾐﾘｰﾌﾞﾗﾝﾄﾞの広告計画」数量ﾓﾃﾞﾙによる市場分析研究部会，1983年．

[2] 佐和隆光「回帰分析」朝倉書店，1979年．

第 10 章　2 変量分布ﾗｸﾞﾓﾃﾞﾙの最小2乗 (OLS) 推定値

10. 1　広告支出による市場反応の測定問題

p 次元の Koyck 分布ﾗｸﾞﾓﾃﾞﾙを以下のように書くことができる.

(1. 1)　$$Y_t = \Sigma_{s=0}^{\infty} \alpha^s \beta X_{t-s} + \varepsilon_t$$
$$= m_t + \varepsilon_t$$

ここで $Y_t(p \times 1)$, $X_{t-s}(J \times 1)$, $\varepsilon_t(p \times 1)$ はそれぞれ従属変数, 説明変数, 誤差項を表し, $\alpha(p \times p)$, $\beta(p \times J)$ は未知ﾊﾟﾗﾒﾀ, α の固有値のうち, 絶対値の最大のものは 1 より小さいとする. さらに ε_t, X_t について

(1. 2)　$\varepsilon_t \sim N(0, \Sigma)$　Σ: positive definite

$\varepsilon_t, \varepsilon_s (t \neq s)$: independent

X_t: fixed

としよう. (1. 2) は p = 1 のとき通常よくおかれる仮定である. ところで, ﾏｰｹﾃｨﾝｸﾞにおけるﾓﾃﾞﾙ (1. 1) の意味は, 以下のような内容になる. 簡単のために p = 2 として Y_{1t} を X_{t-s} で表せば,

(1. 3)　$$Y_{1t} = \beta_1^t X_t + (\alpha_{11}, \alpha_{12}) \beta X_{t-1} + \ldots + \varepsilon_{1t}$$

$\beta_1^t(1 \times J)$: β の第 1 行

となる. ここで

Y_{1t}: t 期における財 1 の販売数量(例えば野本 [5] によれば, Y_{1t}, Y_{2t} をそれぞれﾋﾞｰﾙ, ｳｲｽｷｰ販売量としている)

X_t:　様々な広告媒体を通しての第 1, 2 財への広告支出, [5] を引用すれば

x_{11t}: ﾋﾞｰﾙに関する journal advertising

x_{12t}: ﾋﾞｰﾙを目的とするﾗｼﾞｵ, TV 広告

x_{21t}: ｳｲｽｷｰに関する journal advertising (新聞, 雑誌広告)

x_{22t}: ｳｲｽｷｰについてのﾗｼﾞｵ, TV 広告,

つまり (1. 3) は, ﾋﾞｰﾙの販売数量がｳｲｽｷｰの広告支出によっても左右され, さらにこうした広告支出全体の効果が, 時間の経過とともに幾何的に減少する点を意味している. あるいは, このような多元的 (2 次元)な考え方は, ﾋﾞｰﾙ会社 1 社が市場に供給するﾋﾞｰﾙの

種類を細分化し，かつそれに対応して広告媒体を区分するｹｰｽにも適用できる．ﾋﾞｰﾙの種別と媒体を，それぞれ I，J 通りとすれば，

Y_t: I x 1 ﾍﾞｸﾀ，X_t: IJ x 1 ﾍﾞｸﾀ

になるのがわかる．Ashley，Granger and Schmalensee [2] は，causality の test をする場合，Box-Jenkins のｱｲﾃﾞｱにしたがって 1 次元ﾓﾃﾞﾙ，2 次元ﾓﾃﾞﾙによるﾃﾞｰﾀのﾌｨｯﾄのよさを比較する．そこでとりあげられる例も，もちろん広告-個人消費支出の関係となっている．また統計的な面に限定されているが，Anderson-Mentz [1] は，こうした場合の意味あいをよく説明する．ただ [1] の内容は，いわゆる vectorvariate の AR ﾓﾃﾞﾙであるが，ここでは vectorvariate の分布ﾗｸﾞﾓﾃﾞﾙを考える．

以下統計的な側面を展開するのに先だって，注意をしておく．

aﾟ (1．3) において $\alpha_{12} = 0$ であれば，これは p = 1 の分布ﾗｸﾞﾓﾃﾞﾙとあまり異なるものではない．さらに $\alpha_{12} = 0$，かつ ε_{1t}，ε_{2t} が独立のとき，それは p = 1 のﾓﾃﾞﾙと同等になる．つまり (1．3) は

(1．4) $$Y_{1t} = \beta_1^t X_t + \alpha_{11}\beta_1^t X_{t-1} + \ldots + \varepsilon_{1t}$$

と表され，ε_{1t}，ε_{2t}: independent では Σ を対角行列に帰着できる．したがって多次元の分布ﾗｸﾞﾓﾃﾞﾙとは，ﾗｸﾞ構造の shape ではなく，内容をもう少し複雑なものとしたうえで，従属変数間の相関を組み入れたﾓﾃﾞﾙ，と解釈することができる．例えば，p = 2 で

(1．1) の $\alpha_1^t\beta$ (1 x J) は

$$\alpha_1^t\beta = (\alpha_{11}\beta_{11} + \alpha_{12}\beta_{21}, \ \ldots, \ \alpha_{11}\beta_{1J} + \alpha_{12}\beta_{2J})$$

となっている．

bﾟ さらに (1．3) は，片平 [4] がとりあげる seemingly unrelated regressions (SUR，表面上無相関に見える回帰) のかたちにはなっていない．[4] は Y_{1t} を説明する場合，$\alpha_{12} = 0$ となって，かつ $Cov(\varepsilon_t(2 \times 1)) = \Sigma \neq$ diagonal である．つまり，こうした SUR ﾓﾃﾞﾙの内容を verbal にはﾋﾞｰﾙの販売数量を決定するのは，ﾋﾞｰﾙへの広告支出のみである，と言うことができる．ただし，ﾋﾞｰﾙとｳｲｽｷｰの販売数量に相関はあってもよい．

ところで 10．2 は p = 2 のとき，$\alpha(2 \times 2)$ の OLS 推定値をとりあげ，その exact mean を計算する．ﾏｰｹﾃｨﾝｸﾞ，あるいは経済学が対象とする統計ﾓﾃﾞﾙのｻﾝﾌﾟﾙｻｲｽﾞは，たか

だか 2 ｹﾀとなっている場合がほとんどだから，みちびかれる結果の解釈が容易ではないとしても，こうした有限標本理論にはそれなりの意味がある．これまでのところ，$p \geqq 2$ で exact moments，あるいは近似分布はわかっていない．以下で示されるように，exact mean は 2 重の無限級数によって表される．

10. 2 OLS 推定値の精密 1 次ﾓｰﾒﾝﾄ

いま，ﾗｸﾞｵﾍﾟﾚｰﾀ L によって (1. 1) を

(2. 1) $$Y_t = \Sigma_{s=0} \alpha^s \beta L^s X_t + \varepsilon_t$$
$$= (I - \alpha L)^{-1} \beta X_t + \varepsilon_t$$

と書くことができる．さらに (2. 1) から

(2. 2) $$Y_t = \alpha Y_{t-1} + \beta X_t + \varepsilon_t - \alpha \varepsilon_{t-1}$$

となる．そうすると (2. 2) における α の OLS 推定値 a は，

(2. 3) $$a^t = (Y_{-1}^t M Y_{-1})^{-1} Y_{-1}^t M Y$$
$$M = I - X(X^t X)^{-1} X^t$$

によって表せる．ただし

$$Y_{-1}^t = (Y_0, Y_1, \ldots, Y_{T-1}),\ \dim(Y_{-1}) = T \times 2$$
$$Y^t = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_T)$$
$$X^t = (X_1, X_2, \ldots, X_T),\ \dim(X) = T \times J.$$

さらに一般性を失うことなく，

(2. 4) $$\Sigma = I_2$$

としておく．また，exact mean の計算方法については，Ullah-Nagar [3] が採用した考え方をもう少し改良してもちいる．つまり，解析的な表現を簡単にするために，まえもって 2 種類の変数を直交化することを考える．

$$z^t = (Y_0, Y_1, \ldots, Y_T)$$

と定めて a^t を

(2. 5) $$a^t = (z^t B z)^{-1} z^t G z$$

と書くことができる．ただし

$$B = c_1^t M c_1,\ c_1(T \times (T+1)) = (I_T, 0)$$

$$G = c_1^t M c_2,\quad c_2(T \times (T + 1)) = (0,\ I_T).$$

さらに $HBH^t = \mathrm{diag}(I(T'),\ 0)$，$T' = \mathrm{rank}(M) = T - J$，H: orthogonal，$Hz = x$，$H = (H_1^t,\ H_2^t)^t$，$H_i z = x_i$，$HGH^t = J^0$，$H_i G H_j^t = J^0_{ij}$ と書いて $a(2 \times 2)$ を

(2. 6)　$a^t = (x_1^t x_1)^{-1} \Sigma^2_{i,j=1} x_i^t J^0_{ij} x_j$

と表せる．ここで $x_2^t J^0_{21} x_1 = x_2^t J^0_{22} x_2 = 0(2 \times 2)$ である．

これは以下のようにして示される．

$$x_2^t J^0_{21} x_1 = x_2^t H_2 G H_1^t x_1$$
$$= z^t H_2^t H_2 G H_1^t H_1 z$$
$$= z^t (I - B) G B z$$

となるが，ここで

$$GB - BGB = c_1^t M c_2 B - c_1^t M c_1 c_1^t M c_2 B = 0,$$

したがって $x_2^t J^0_{21} x_1 = 0$，さらに

$$x_2^t J^0_{22} x_2 = z^t H_2^t H_2 G H_2^t H_2 z$$
$$= z^t (I - B) G (I - B) z$$

$$(I - B) G = c_1^t M c_2 - c_1^t M c_1 c_1^t M c_2 = 0,$$

ゆえに $x_2^t J^0_{22} x_2 = 0$ となる．そうすると a は

(2. 7)　$a^t = (x_1^t x_1)^{-1} (x_1^t J^0_{11} x_1 + x_1^t J^0_{12} x_2)$

となる．x_i については以下の性質が成り立つ．

$x_1(T' \times 2)$，x_2: independent

$x_{j1}^t (2 \times 1) \sim N(x_{j1}^{*t},\ I_2)$　$j = 1, \ldots, T'$

x_{j1}^t: $x_1^t (2 \times T')$ の第 j 要素，

$x_2^t (2 \times (T + 1 - T'))$ についても同様である．いま $x_1^t x_1 \sim W(T',\ \langle x_1^*,\ x_1^* \rangle,\ I_2)$，この W は "Wishart" を意味する．ゆえに $x_6 = x_1 S^t$，$S\langle x_1^*,\ x_1^* \rangle S^t = \mathrm{diag}(r_1,\ r_2)$，S: orthogonal とすれば，

$$x_6^t x_6 = S x_1^t x_1 S^t \sim W(T', \mathrm{diag}(r_1, r_2), I_2),$$

そうすると a^t を

(2. 8) $\quad a^t = S^t (x_6^t x_6)^{-1} (x_6^t J_{11}^0 x_6 + x_6^t J_{12}^0 x_2 S^t) S$

と表すことができる．つづいて $SaS^t = a_\cdot$ として $a_\cdot$ をとりあげれば，

(2. 9) $\quad a_\cdot^t = (x_6^t x_6)^{-1} (x_6^t J_{11}^0 x_6 + x_6^t J_{12}^0 x_2 S^t).$

そうして以下 $a_{\cdot 11}$ のﾓｰﾒﾝﾄを調べる．まず

(2. 10) $\quad E(a_\cdot^t | x_6) = (x_6^t x_6)^{-1} (x_6^t J_{11}^0 x_6 + x_6^t u)$

$$u = J_{12}^0 \mathring{x}_2 S^t, \quad E(x_2) = \mathring{x}_2$$

となる．$a_{\cdot 11}$ の条件付きでない期待値を考えるために，次の表現が必要である．

(2. 11) $\quad E(a_{\cdot 11} | x_6) = A_0 \{x_{61}^t J_{11}^0 x_{61} - (x_{62}^t x_{62})^{-1} x_{61}^t x_{62} x_{62}^t J_{11}^0 x_{61}$

$$+ x_{61}^t u_1 - (x_{62}^t x_{62})^{-1} x_{61}^t x_{62} x_{62}^t u_1\}$$

ただし

$$A_0^{-1} = x_{61}^t x_{61} - x_{61}^t x_{62} (x_{62}^t x_{62})^{-1} x_{62}^t x_{61}$$

$x_6 = (x_{61}, x_{62})$; x_{61}, x_{62}: independent

$\dim(x_{6i}) = T' \times 1.$

はじめに (2. 11) の R.H.S. の第1項を以下のように計算する．Ullah-Nagar [3] を見よ．いま $E(x_{61i}^2 A_0)$ を

(2. 12) $\quad E(x_{61i}^2 A_0) = d_{1i}^2 E(A_0) + 2\mathring{x}_{61i} d_{1i} E(A_0) + (1 + \mathring{x}_{61i}^2) E(A_0)$

と書くことができる．ここで $d_{1i}(\ )$ は ( ) を $\mathring{x}_{61i}$ で微分する内容を意味する．したがって $E(A_0 x_{61}^t J_{11}^0 x_{61})$ を計算するには，$E(A_0)$ を $\mathring{x}_{61i}$ で s 回 (s = 1, 2) 微分したもの，さらに $\mathring{x}_{61i}$, $\mathring{x}_{61j}$ でそれぞれ 1 回微分した表現がわかればよい．$E(A_0 | x_{62})$ を $E_2(A_0)$ と書いて，

(2. 13) $\quad E_2(A_0) = E_2(n + 2H - 2)^{-1}$

$$n = T' - 1$$

$$H | x_{62} \sim \mathrm{Poisson}(\pi)$$

$$\square = 2^{-1}\,{}^{t}g_1 M_{62} g_1$$

$$g_1 = \dot{x}_{61}$$

$$M_{62} = I - x_{62}({}^{t}x_{62}x_{62})^{-1}\,{}^{t}x_{62},$$

計算をつづけて，$EE_2(A_0) = E(A_0)$ を (2. 14) のように表現することができる．

$$(2.\ 14)\quad E(A_0) = (n-2)^{-1}\sum_{h=0}^{\infty}(1)_h(h!)^{-1}$$

$$\times\ (-2^{-1}r_1)^h(\exp(-2^{-1}r_2))(2^{-1}n + 2^{-1})_h^{-1}$$

$$\times\ \sum_{k=0}^{\infty}(2^{-1}r_2)^k(k!)^{-1}(2^{-1}n + h)_k(2^{-1}n)_k^{-1}$$

$$\times\ (2^{-1}n + 2^{-1})_k(2^{-1}n + 2^{-1} + h)_k^{-1}$$

$$= \square_0$$

ただし $(a)_j = a(a+1)\ \ldots\ (a+j-1)$，$(a)_0 = 1$，$a > 0$．$E(A_0)$ の $\dot{x}_{61i}$ に関する微分を $d_{1i}E(A_0)$ と書いて，

$$(2.\ 15)\quad d_{1i}(A_0) = -\dot{x}_{61i}\square_1$$

となる．この $\square_1$ は

$$(2.\ 16)\quad \square_j = (n-2)^{-1}(1)_j(2^{-1}n + 2^{-1})_j^{-1}\sum_{h=0}^{\infty}(j+1)_h(2^{-1}n + 2^{-1} + j)_h^{-1}(h!)^{-1}$$

$$\times\ (-2^{-1}r_1)^h\exp(-2^{-1}r_2)\sum_{k=0}^{\infty}(2^{-1}r_2)^k(k!)^{-1}(2^{-1}n + j + h)_k$$

$$\times\ (2^{-1}n + 2^{-1})_k(2^{-1}n)_k^{-1}(2^{-1}n + 2^{-1} + j + h)_k^{-1}$$

$$j = 0,\ 1,\ 2$$

によって定められる．さらに $E(A_0)$ の 2 次微分は，

$$(2.\ 17)\quad d_{1i}^2E(A_0) = -\square_1 + \dot{x}_{61i}^2\square_2$$

$$d_{1i}d_{1j}E(A_0) = \dot{x}_{61i}\dot{x}_{61j}\square_2$$

となる．

いま，${}^{t}x_{61}J_{11}^{0}x_{61} = {}^{t}x_{61}J_{11}x_{61} = {}^{t}x_{61}Qx_{61}$に気づいて，ただし $J_{11} = H_1A\,{}^{t}H_1$，$A = 2^{-1}({}^{t}c_1Mc_2 + {}^{t}c_2Mc_1)$，簡単のために x_{61} を x_1 と書けば，(2. 11) の R.H.S. の 第1項は

$$(2.18)\quad E({}^{t}x_{61}Qx_{61}A_0) = \Sigma_{i=1}^{T'}E(x_{1i}^{2}q_{ii}A_0) + \Sigma_{i\neq j}E(q_{ij}x_{1i}x_{1j}A_0)$$

$$= \Sigma_{i=1}^{T'}\{q_{ii}d_{1i}^{2}E(A_0) + 2q_{ii}\mathring{x}_{1i}d_{1i}E(A_0) + q_{ii}(1 + \mathring{x}_{1i}^{2})E(A_0)\}$$

$$+ \Sigma_{i\neq j}q_{ij}\{d_{1i}d_{1j}E(A_0) + \mathring{x}_{1i}d_{1j}E(A_0) + \mathring{x}_{1j}d_{1i}E(A_0)$$

$$+ \mathring{x}_{1i}\mathring{x}_{1j}E(A_0)\}$$

となる．ここで (2. 14) から (2. 17) までを知って，(2. 18) は以下のように書ける．

$$(2.19)\quad E({}^{t}x_{61}J_{11}^{0}x_{61}A_0) = \Sigma_{j=0}^{2}\square_j\,\delta_j$$

$$\delta_0 = tr(J_{11}) + {}^{t}\mathring{x}_{61}J_{11}\mathring{x}_{61}$$

$$\delta_1 = -tr(J_{11}) - 2\,{}^{t}\mathring{x}_{61}J_{11}\mathring{x}_{61}$$

$$\delta_2 = -\delta_0 - \delta_1.$$

つぎに (2. 11) の第3項については，

$$(2.20)\quad E({}^{t}x_{61}u_1A_0) = \Sigma_{i=1}^{T'}u_{1i}E(x_{61i}A_0)$$

$$= \Sigma_{i=1}u_{1i}\{d_{1i}E(A_0) + \mathring{x}_{61i}E(A_0)\}$$

$$= \Sigma_{i=1}u_{1i}(-\mathring{x}_{61i}\square_1 + \mathring{x}_{61i}\square_0)$$

$$= -{}^{t}u_1\mathring{x}_{61}(\square_1 - \square_0)$$

となる．つづいて (2. 11) の第2, 4項を計算するには，$E(A_1) = E(A_0\langle x_{62},\ x_{62}\rangle^{-1})$ の power series representation を知っておく必要がある．

$$(2.21)\quad EE(A_1|x_{62}) = (n-2)^{-1}\Sigma_{h=0}^{\infty}(1)_h(-2^{-1}r_1)^h(2^{-1}n)_h^{-1}(h!)^{-1}$$

$$\times\ E\{w_1^{h}(w_1 + w_2)^{-h-1}\},$$

ここで w_1, w_2 はたがいに独立，かつ $w_1 \sim \chi'^2(n,\ r_2)$, $w_2 \sim \chi^2(1)$ である．計算をつづけて

$$(2.22)\quad EE(A_1|x_{62}) = \tau_{0(0)}$$

となる．ただし $\tau_{0(0)}$ は

$$(2.23)\quad \tau_{q(p)} = c_{q(p)}\Sigma_{h=0}^{\infty}(1+q)_h(h!)^{-1}(-2^{-1}r_1)^h(\exp(-2^{-1}r_2))$$

$$\times\ (2^{-1}n + p + q)_h(2^{-1}n + q)_h^{-1}(2^{-1}n + 2^{-1} + p + q)_h^{-1}$$

$$\times\ {}_2F_2(\cdot_1,\ \cdot_2;\ \cdot_3,\ \cdot_4;\ 2^{-1}r_2)$$

$$\bullet_1 = 2^{-1}n + h + p + q$$

$$\bullet_2 = 2^{-1}n + 2^{-1} + p - 1$$

$$\bullet_3 = 2^{-1}n + p$$

$$\bullet_4 = 2^{-1}n + 2^{-1} + h + p + q$$

によって定められる．ここで

$$_2F_2(\bullet_1, \bullet_2; \bullet_3, \bullet_4; x) = \Sigma_{i=0}^{\infty}(\bullet_1)_i(\bullet_2)_i(\bullet_3)_i^{-1}(\bullet_4)_i^{-1}(i!)^{-1}x^i$$

$$c_{q(p)} = e_0(1)_q(2^{-1}n - 2^{-1})_p(2^{-1}n + q)_p$$

$$\times (2^{-1}n + 2^{-1})_q^{-1}(2^{-1}n)_p^{-1}(2^{-1}n + 2^{-1} + q)_p^{-1}$$

$$e_0 = (n - 2)^{-1}(n - 1)^{-1}.$$

そうすると，(2. 11) の R.H.S. の第4項は以下のように計算される．

(2. 24) $$E(A_1\dot{x}^t_{62}x_{61}\dot{x}^t_{62}u_1) = \Sigma_{i=1}u_{1i}E(x_{61i}\dot{x}^2_{62i}A_1)$$

$$+ \Sigma_{i\neq j}u_{1j}E(x_{61i}x_{62i}x_{62j}A_1),$$

いま，(2. 24) の第1項については

(2. 25) $$E(x_{61i}\dot{x}^2_{62i}A_1) = \{d^2_{2i}d_{1i} + \dot{x}_{61i}d^2_{2i} + 2\dot{x}_{62i}d_{2i}d_{1i} + 2\dot{x}_{62i}\dot{x}_{61i}d_{2i}$$

$$+ (1 + \dot{x}^2_{62i})d_{1i} + \dot{x}_{61i}(1 + \dot{x}^2_{62i})\}E(A_1)$$

となる．(2. 25) の微分は $\tau_{q(p)}$ によって表すことができる．

(2. 26) $$d_{1i}E(A_1) = -\dot{x}_{61i}\tau_{1(0)}$$

$$d_{2i}d_{1i}E(A_1) = \dot{x}_{61i}\dot{x}_{62i}(\tau_{1(0)} - \tau_{1(1)})$$

$$= \dot{x}_{61i}\dot{x}_{62i}\tau^1_1$$

$$d^2_{2i}d_{1i}E(A_1) = \dot{x}_{61i}\tau^1_1 + \dot{x}_{61i}\dot{x}_{62i}d_{2i}\tau^1_1$$

$$= \dot{x}_{61i}\tau^1_1 + \dot{x}_{61i}\dot{x}^2_{62i}(-\tau_{1(0)} + 2\tau_{1(1)} - \tau_{1(2)})$$

$$d_{2i}E(A_1) = \dot{x}_{62i}(-\tau_{0(0)} + \tau_{0(1)}) = \dot{x}_{62i}\tau^1_0$$

$$d^2_{2i}E(A_1) = \tau^1_0 + \dot{x}_{62i}(-\dot{x}_{62i}\tau^1_0 + d_{2i}\tau_{0(1)})$$

$$= \tau^1_0 + \dot{x}^2_{62i}(\tau_{0(0)} - 2\tau_{0(1)} + \tau_{0(2)}).$$

(2. 26) を (2. 25) に代入して

(2. 27) $E(x_{\delta 1i}x_{\delta 2i}^2 A_1) = \dot{x}_{\delta 1i}(\tau_1^1 + \tau_{0(1)} - \tau_{1(0)})$

$$+ \dot{x}_{\delta 1i}\dot{x}_{\delta 2i}^2(\kappa_1 + \kappa_0 + 2\tau_1^1 + 2\tau_0^1 - \tau_{1(0)} + \tau_{0(0)})$$

ただし $\kappa_i = (-1)^i(\tau_{i(0)} - 2\tau_{i(1)} + \tau_{i(2)})$ $i = 0, 1, 2$ となるのがわかる.

(2. 24) の R.H.S. の第2項については

(2. 28) $E(x_{\delta 1i}x_{\delta 2i}x_{\delta 2j}A_1) = \{d_{2i}d_{2j}d_{1i} + \dot{x}_{\delta 1i}d_{2i}d_{2j} + \dot{x}_{\delta 2j}d_{2i}d_{1i}$

$$+ \dot{x}_{\delta 2i}d_{2j}d_{1i} + \dot{x}_{\delta 1i}\dot{x}_{\delta 2j}d_{2i} + \dot{x}_{\delta 2i}\dot{x}_{\delta 1i}d_{2j}$$

$$+ \dot{x}_{\delta 2i}\dot{x}_{\delta 2j}d_{1i} + \dot{x}_{\delta 1i}\dot{x}_{\delta 2j}\dot{x}_{\delta 2i}\}E(A_1),$$

微分したものを $\tau_{q(p)}$ で表して

(2. 29) $d_{2i}d_{2j}E(A_1) = \dot{x}_{\delta 2i}\dot{x}_{\delta 2j}(\tau_{0(0)} - 2\tau_{0(1)} + \tau_{0(0)})$

(2. 30) $d_{2i}d_{2j}d_{1i}E(A_1) = \dot{x}_{\delta 1i}\dot{x}_{\delta 2i}d_{2j}\tau_1^1$

$$= \dot{x}_{\delta 1i}\dot{x}_{\delta 2i}\dot{x}_{\delta 2j}\kappa_1.$$

そうするとけっきょく (2. 28) は

(2. 31) $E(x_{\delta 1i}x_{\delta 2i}x_{\delta 2j}A_1)$

$$= \dot{x}_{\delta 1i}\dot{x}_{\delta 2i}\dot{x}_{\delta 2j}(\kappa_1 + \kappa_0 + 2\tau_1^1 + 2\tau_0^1 - \tau_{1(0)} + \tau_{0(0)})$$

$$= \dot{x}_{\delta 1i}\dot{x}_{\delta 2i}\dot{x}_{\delta 2j}\xi'.$$

ここで (2. 27) にもどり, $\tau_1^1 + \tau_{0(1)} - \tau_{1(0)}$ を ξ と書いて

(2. 32) $E(A_1{}^t x_{\delta 2}x_{\delta 1}{}^t x_{\delta 2}u_1) = \Sigma_{i=1}u_{1i}(\dot{x}_{\delta 1i}\xi + \dot{x}_{\delta 1i}\dot{x}_{\delta 2i}^2\xi')$

$$+ \xi'\Sigma_{i\neq j}u_{1j}\dot{x}_{\delta 2j}\dot{x}_{\delta 1i}\dot{x}_{\delta 2i}$$

$$= \xi\,{}^t u_1\dot{x}_{\delta 1} + \xi'\,{}^t u_1\dot{x}_{\delta 2}{}^t\dot{x}_{\delta 1}\dot{x}_{\delta 2}$$

$$= \xi\,{}^t u_1\dot{x}_{\delta 1}$$

となる. (2. 32) で $\langle\dot{x}_{\delta 1}, \dot{x}_{\delta 2}\rangle = 0$ に気づくとよい. つぎに (2. 11) の R.H.S. の第2項をとりあげる.

$A_0({}^t x_{\delta 2}x_{\delta 2})^{-1}\,{}^t x_{\delta 1}x_{\delta 2}{}^t x_{\delta 2}J_{11}^0 x_{\delta 1}$ で, $A_1 = A_0({}^t x_{\delta 2}x_{\delta 1})^{-1}$, さらに J_{11}^0 を P と書く.

(2. 33) $EE(A_1{}^t x_{\delta 1}x_{\delta 2}{}^t x_{\delta 2}Px_{\delta 1})$

$$= \Sigma_{i=1}^{T'}p_{ii}E(x_{\delta 1i}^2 x_{\delta 2i}^2 A_1) + \Sigma_{i\neq j}p_{ij}E(x_{\delta 1j}x_{\delta 2j}x_{\delta 2i}x_{\delta 1i}A_1)$$

$$+ \Sigma_{j \neq k} p_{jk} E(x_{\delta 1j} x_{\delta 2j}^{2} x_{\delta 1k} A_1) + \Sigma_{i \neq j} p_{ij} E(x_{\delta 1j}^{2} x_{\delta 2j} x_{\delta 2i} A_1)$$

$$+ \Sigma_{i \neq k, j \neq k, j \neq i} p_{ik} E(x_{\delta 1j} x_{\delta 2j} x_{\delta 2i} x_{\delta 1k} A_1)$$

となる．以下，(2. 33) の R.H.S. の第1，2項の計算結果をあたえる．第3 ～ 5項も，同様な考え方によって計算可能であるが省略した．

(2. 34) $$E(x_{\delta 1i}^{2} x_{\delta 2i}^{2} A_1) = \{d_{1i}^{2} d_{2i}^{2} + 2\dot{x}_{\delta 2i} d_{1i}^{2} d_{2i} + 2\dot{x}_{\delta 1i} d_{2i}^{2} d_{1i}$$

$$+ (1 + \dot{x}_{\delta 1i}^{2}) d_{2i}^{2} + (1 + \dot{x}_{\delta 2i}^{2}) d_{1i}^{2} + 4\dot{x}_{\delta 1i} \dot{x}_{\delta 2i} d_{2i} d_{1i}$$

$$+ 2(\dot{x}_{\delta 2i} + \dot{x}_{\delta 1i}^{2} \dot{x}_{\delta 2i}) d_{2i} + 2(\dot{x}_{\delta 1i} + \dot{x}_{\delta 2i}^{2} \dot{x}_{\delta 1i}) d_{1i}$$

$$+ 1 + \dot{x}_{\delta 2i}^{2} + \dot{x}_{\delta 1i}^{2} + \dot{x}_{\delta 2i}^{2} \dot{x}_{\delta 1i}^{2}\} E(A_1)$$

(2. 34.a) $d_{1i} d_{2i}^{2} E(A_1) = \dot{x}_{\delta 1i} \tau_{1}^{1} + \dot{x}_{\delta 1i} \dot{x}_{\delta 2i}^{2} (-\tau_{1(0)} + 2\tau_{1(1)} - \tau_{1(2)})$.

計算をつづけて，

(2. 35) $$d_{2i}^{2} d_{1i}^{2} E(A_1) = \tau_{1}^{1} - \dot{x}_{\delta 1i}^{2} (\tau_{2(0)} - \tau_{2(1)}) + \dot{x}_{\delta 2i}^{2} \kappa_1$$

$$+ \dot{x}_{\delta 1i}^{2} \dot{x}_{\delta 2i} (\tau_{2(0)} - 2\tau_{2(1)} + \tau_{2(2)}),$$

(2. 34) の R.H.S. を $\tau_{q(p)}$ で書けば

(2. 36) $$E(x_{\delta 1i}^{2} x_{\delta 2i}^{2} A_1) = \tau_{1}^{1} - \dot{x}_{\delta 1i}^{2} (\tau_{2(0)} - \tau_{2(1)}) + \dot{x}_{\delta 2i}^{2} \kappa_1$$

$$+ \dot{x}_{\delta 1i}^{2} \dot{x}_{\delta 2i}^{2} \kappa_2 + 2\dot{x}_{\delta 2i}^{2} (\tau_{1}^{1} + \dot{x}_{\delta 1i}^{2} \tau_{2}^{1})$$

$$+ 2\dot{x}_{\delta 1i}^{2} (\tau_{1}^{1} + \dot{x}_{\delta 2i}^{2} \kappa_1) + (1 + \dot{x}_{\delta 1i}^{2})(\tau_{0}^{1} + \dot{x}_{\delta 2i}^{2} \kappa_0)$$

$$+ (1 + \dot{x}_{\delta 2i}^{2})(-\tau_{1(0)} + \dot{x}_{\delta 1i}^{2} \tau_{2(0)}) + 4\dot{x}_{\delta 1i}^{2} \dot{x}_{\delta 2i}^{2} \tau_{1}^{1}$$

$$+ 2\dot{x}_{\delta 2i}^{2} (1 + \dot{x}_{\delta 1i}^{2}) \tau_{0}^{1} - 2\dot{x}_{\delta 1i}^{2} (1 + \dot{x}_{\delta 2i}^{2}) \tau_{1(0)}$$

$$+ (1 + \dot{x}_{\delta 1i}^{2})(1 + \dot{x}_{\delta 2i}^{2}) \tau_{0(0)}$$

ただし $\tau_{2}^{1} = -\tau_{2(0)} + \tau_{2(1)}$．さらに (2. 33) の第2項については

(2. 37) $$E(x_{\delta 1i} x_{\delta 1j} x_{\delta 2i} x_{\delta 2j} A_1) = (d_{1i} d_{1j} d_{2i} d_{2j} + \dot{x}_{\delta 2j} d_{1i} d_{1j} d_{2i}$$

$$+ \dot{x}_{\delta 2i} d_{1j} d_{1i} d_{2j} + \dot{x}_{\delta 1j} d_{1i} d_{2j} d_{2i}$$

$$+ \dot{x}_{\delta 1i} d_{1j} d_{2i} d_{2j} + \dot{x}_{\delta 2j} \dot{x}_{\delta 2i} d_{1i} d_{1j}$$

$$+ \dot{x}_{\delta 1j} \dot{x}_{\delta 2j} d_{1i} d_{2i} + \dot{x}_{\delta 2i} \dot{x}_{\delta 1j} d_{1i} d_{2j}$$

$$+ \dot{x}_{61j}\dot{x}_{61i}d_{2i}d_{2j} + \dot{x}_{62j}\dot{x}_{61i}d_{1j}d_{2i}$$

$$+ \dot{x}_{61i}\dot{x}_{62i}d_{1j}d_{2j} + \dot{x}_{61j}\dot{x}_{62i}\dot{x}_{62j}d_{1i}$$

$$+ \dot{x}_{61i}\dot{x}_{62j}\dot{x}_{61j}d_{2i} + \dot{x}_{61j}\dot{x}_{62i}\dot{x}_{61i}d_{2j}$$

$$+ \dot{x}_{61i}\dot{x}_{62i}\dot{x}_{62j}d_{1j} + \dot{x}_{61j}\dot{x}_{62j}\dot{x}_{61i}\dot{x}_{62i})E(A_1).$$

この R.H.S. で

(2. 38) $\quad d_{1i}d_{1j}d_{2i}d_{2j}E(A_1) = \dot{x}_{61i}\dot{x}_{62i}\dot{x}_{62j}\dot{x}_{61j}\kappa_2.$

さらに s 次微分 (s = 1, 2, 3) を $\tau_{q(p)}$ によって表せば,

(2. 39) $\quad E(x_{61i}x_{61j}x_{62i}x_{62j}A_1) = \dot{x}_{61i}\dot{x}_{61j}\dot{x}_{62i}\dot{x}_{62j}(\kappa_2 + 2\tau_2^1 + 2\kappa_1$

$$+ \tau_{2(0)} + 4\tau_1^1 + \kappa_0 - 2\tau_{1(0)}$$

$$+ 2\tau_0^1 + \tau_{0(0)})$$

となる.

ここで $\langle \dot{x}_{61}, \dot{x}_{62} \rangle = 0$ に注意すれば, けっきょく (2. 23) の全体を以下のように書くことができる.

(2. 40) $\quad E({}^{t}x_{61}x_{62}{}^{t}x_{62}J_{11}^{0}x_{62}A_1)$

$$= tr(J_{11}^{0})(\tau_1^1 + \tau_0^1 - \tau_{1(0)} + \tau_{0(0)})$$

$$+ {}^{t}\dot{x}_{61}J_{11}^{0}\dot{x}_{61}(\tau_{2(1)} + 2\tau_1^1 + \tau_0^1 - 2\tau_{1(0)} + \tau_{0(0)})$$

$$+ {}^{t}\dot{x}_{62}J_{11}^{0}\dot{x}_{62}(2\tau_1^1 + \kappa_1 + \kappa_0 - \tau_{1(0)} + 2\tau_0^1 + \tau_{0(0)}).$$

ゆえに (2. 19), (2. 20), (2. 32), (2. 40) から (2. 10) の $a_{\cdot 11}$ の 1 次ﾓｰﾒﾝﾄは,

(2. 41) $\quad E(a_{\cdot 11}) = \{tr(J_{11}^{0}) + {}^{t}u_1\dot{x}_{61}\}(-\square_1 + \square_0 + \tau_{1(1)} - \tau_{0(1)})$

$$+ {}^{t}\dot{x}_{61}J_{11}^{0}\dot{x}_{61}(-2\square_1 + \square_0 + \square_2 - \tau_{2(1)} + 2\tau_{1(1)} - \tau_{0(1)})$$

$$+ {}^{t}\dot{x}_{62}J_{11}^{0}\dot{x}_{62}(\tau_{1(2)} - \tau_{0(2)})$$

となる. (2. 41) の $\square_j$, $\tau_{q(p)}$ は, それぞれ (2. 16), (2. 23) で定められる. さらに $tr(J_{11}^{0})$ などについては, 以下のようになっている.

$$tr(J_{11}^{0}) = tr(AB)$$

$$u_1^t x_{\delta 1}^{*} = s_{(1)} z^{*t} G(I - B) z^{*} s_{(1)}^t$$

$$x_{\delta i}^{*t} J_{11}^{\emptyset} x_{\delta i}^{*} = s_{(i)} z^{*t} BABz^{*} s_{(i)}^t, \quad i = 1, 2$$

$$S^t = (s_{(1)}^t, s_{(2)}^t) \quad s_{(i)}^t : 2 \times 1.$$

参考文献

[1] Anderson, T. W. and R. P. Mentz, "Notes on the Estimation of Parameters in Vector Autoregressive Models 1," in A Festschrift for Erich L. Lehmann in Honor of his 65th Birthday, eds., by Peter J. Bickel, Kjell A. Doksum and J. L. Hodges, Jr., Belmont, California: Wadsworth International Group, A Division of Wadsworth Inc., 1983, pp. 1-13.

[2] Ashley, R., C. W. J. Granger and R. Schmalensee, "Advertising and Aggregate Consumption: an Analysis of Causality," Econometrica, 48, 1980, pp. 1149-1167.

[3] Ullah, A. and A. L. Nagar, "The Exact Mean of the Two Stage Least Squares Estimator of the Structural Parameters in an Equation Having Three Endogenous Variables," Econometrica, 42, 1974, pp. 749-758.

[4] 片平秀貴「ﾏｰｹｯﾄ･ｼｪｱ･ﾓﾃﾞﾙの一応用-英国乗用車市場の分析」ﾏｰｹﾃｨﾝｸﾞ･ｻｲｴﾝｽ, 第14号, 1979年, pp. 1-14.

[5] 野本明成「販売-広告ﾓﾃﾞﾙ構築への因果関係検定（causality test）の適用」彦根論叢, 第215号, 1982年, pp. 93-99.

第 11 章　OLS 推定値ﾓｰﾒﾝﾄの近似

11. 1　近似方式

10. 2 で，2 変量分布ﾗｸﾞﾓﾃﾞﾙにおける OLS 推定値の 1 次ﾓｰﾒﾝﾄをあたえたが，以下こうした exact moments に対する近似を計算する．ここで必要とされている仮定は，標本ｻｲｽﾞ T が大きいというものではなく，"想定しているﾓﾃﾞﾙの説明変数の分散が，誤差分散と比較してある程度大きくなければならない" という内容である．こうした仮定は，例えば Kadane [1] にも見られるように，それなりの正当性を保持している．

ﾓｰﾒﾝﾄの近似を探すために，まず Mariano ([4], pp. 720, 注 6, 例 (2), [3], [5], [6]) の "large μ に関する公式" によって 10. 2 の $\Box_j$, $\tau_{q(p)}$ の近似を考える．ここで [4] の μ に対応するﾊﾟﾗﾒﾀが $\langle x_i^{*}, x_i^{*}\rangle = \langle Y_{-1}^{*}, MY_{-1}^{*}\rangle$, $E(Y_{-1}) = Y_{-1}^{*}$ である点に気づくとよい．$\langle x_i, x_i\rangle$ の固有値は r_1, r_2 となっている．ただし，$r_1 < r_2$ としよう．Mariano [4] の large μ は 1 次元のｹｰｽ，つまり $\mu : 1 \times 1$, のみをあつかうが，次数が大きくなった場合も近似理論の本質は変わらないので，そうした考え方を拡張させて採用した．

11. 2 の内容は簡単に言って次のようなものである．まず $\Box_j$, $\tau_{q(p)}$ を整理して，ある 1 つの関数 $T_{q,p}^{u,t}(a, b)$ で書いたうえ，この $T_{q,p}^{u,t}(a, b)$ にあらわれる級数 ${}_2F_2(a_1, a_2; b_1, b_2; x)$ を $x(>0) \sim +\infty$ で漸近展開することを考える．${}_2F_2(\ )$ は

(1. 1)
$$
\begin{aligned}
&{}_2F_2(a_1, a_2; b_1, b_2; x) \\
&= \Sigma_{j=0}^{\infty} (a_1)_j (a_2)_j (b_1)_j^{-1} (b_2)_j^{-1} (j!)^{-1} x^j \\
&(a)_j = a(a+1) \ldots (a+j-1) \\
&b_1, b_2 \neq \text{負の整数}
\end{aligned}
$$

によって定義され，収束半径は $+\infty$ である．また，以下の議論のためには，$x = 2^{-1} r_2$ とおけばよい．$r_i > 0$ は自動的にみたされる．ところで

(1. 2)
$$
\begin{aligned}
T_{q,p}^{u,t}(a, b) &= c_{\cdot t} e_{\cdot t}(q, p) \\
&\times \Sigma_{h=0}^{\infty} (a+q)_h (2^{-1}n + q)_h^{-1} (-2^{-1} r_1)^h (h!)^{-1} (2^{-1}n + p + q)_{h+ut} \\
&\times (t + n' + p - b + q)_{b+h}^{-1} (\exp(-2^{-1} r_2))\, {}_2F_2(\cdot_1, \cdot_2; \cdot_3, \cdot_4; 2^{-1} r_2)
\end{aligned}
$$

$$\cdot_1 = 2^{-1}n + h + ut + p + q$$

$$\cdot_2 = t + n' - b + p$$

$$\cdot_3 = 2^{-1}n + p$$

$$\cdot_4 = t + h + n' + p + q$$

ただし

(1. 3) $$c_{\cdot t} = 2^{t-a-b}(2^{-1}n - a)_a^{-1}$$

$$e_{\cdot t}(q, p) = (a)_q(t + n' - b)_p(2^{-1}n + q)_p(t + n' - b)_q^{-1}$$

$$\times (2^{-1}n)_p^{-1}(t + n' - b + q)_p^{-1}$$

$$n = T - J - 1 = T' - 1$$

$$n' = 2^{-1}n + 2^{-1}$$

とすると，10. 2 の Π_j，$\tau_{q(p)}$ は

(1. 4) $$\Pi_j = T_{j,0}^{u,0}(1, 0)$$

(1. 5) $$\tau_{q(p)} = T_{q,p}^{u,0}(1, 1)$$

によって表すことができる．また $T_{q,p}^{u,t}$ の $t = 0$ のとき，$ut = 0$，そうして $T_{q,p}^{u,0}$ は u に依存しない．したがって $T_{q,p}^{u,0}$ を $T_{q,p}^{0,0}$ と書いてよいことになる．

11. 2 一般化された超幾何関数の漸近展開

ここで r_2(> 0) が十分大きいとして，1 次モーメント $E(a_{\cdot 11})$ の approximation を計算することが可能である．いま，$T_{q,p}^{u,t}$ に含まれる $_2F_2$( ) を展開すると，以下のような表現を得る．つまり，mod(x) ～ large value で

(2. 1) $$_2F_2(a_1, a_2; b_1, b_2; x)$$

$$= \{\exp(x)\}x^{a(1)+a(2)-b(1)-b(2)}\Gamma(b_1)\Gamma(b_2)\{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)\}^{-1}$$

$$\times [1 + x^{-1}\{(1 + b_1 - a_1 - a_2)(b_2 - a_2) + (1 - a_1)(b_1 - a_1)\}$$

$$+ 2^{-1}x^{-2}\{(b_2 - a_2)_2(1 + b_1 - a_1 - a_2)_2$$

$$+ 2(1 - a_1)(b_2 - a_2)(b_1 - a_1)(2 + b_1 - a_1 - a_2)$$

$$+ (1 - a_1)_2(b_1 - a_1)_2\} + o(x^{-2})]$$

を知って（例えば Luke [2] を見よ），

(2. 2) $$a_1 = 2^{-1}n + h + ut + p + q$$

$$a_2 = t + n' - b + p$$

(2. 3) $$b_1 = 2^{-1}n + p$$

$$b_2 = t + h + n' + p + q$$

とおく．そうすると

(2. 4) $$b_2 - a_2 = h + q + b = e_2$$

$$b_1 - a_1 = -h - ut - q = e_1$$

から

$$(b_1 - a_1)(b_2 - a_2 + 1 - a_1)$$

$$= -(h + ut + q)(1 + b - 2^{-1}n - ut - p)$$

$$(b_2 - a_2)(1 - a_2) = (h + q + b)\{1 - (t + n' - b + p)\}.$$

したがって (2. 1) の $x^{-1}\{\quad\}$ のｶｯｺの部分は，

(2. 5) $$(h + q)\{1 - (t + n' - b + p) - (1 + b - 2^{-1}n - ut - p)\}$$

$$+ b\{1 - (t + n' - b + p)\} - ut(1 + b - 2^{-1}n - ut - p)$$

$$= (h + q)\{(u - 1)t - 2^{-1}\} + \ldots$$

となる．(2. 5) の ... は h に無関係の項である．つづいて x のﾍﾞｷの部分を計算すれば，

(2. 6) $$-(b_1 - a_1 + b_2 - a_2) = ut - b$$

となって，これは簡単な表現をあたえる．とりあえず $1/r_2$ のｵｰﾀﾞｰまでの近似は，

$${}_2F_2(\ ,\ ;\ ,\ ;\ 2^{-1}r_2)$$

$$\sim \{\exp(2^{-1}r_2)\}(2^{-1}r_2)^{ut-b}(t + n' + p - b)_{b+q+h}$$

$$\times\ (2^{-1}n + p)^{-1}_{h+ut+q}[1 + 2^{-1}r_2^{-1}\{(h + q)((u - 1)t - 2^{-1}) + \ldots\}$$

$$+ \ldots]$$

となる．したがって $T^{u,t}_{q,p}(a, b)$ については

(2. 7) $$T^{u,t}_{q,p}(a, b) \sim c_{*t}e_{*t}(q, p)$$

$$\times\ \Sigma^{\infty}_{h=0}(a + q)_h(2^{-1}n + q)^{-1}_h(h!)^{-1}(-2^{-1}r_1)^h(2^{-1}n + p)^{-1}_q$$

$$\times\ (t + n' - b + p)_q (2^{-1} r_2)^{ut-b} \{1 + (2^{-1} r_2)^{-1} (g_{*1} h + g_{*0}) + \dots \}$$

となる．ここで $g_{*1}h + g_{*0}$ に注意して (2．7) を書きかえる．まず

(2．8) $$\Sigma_{h=0}^{\infty} \ell_q(h)(2^{-1}r_2)^{ut-b-1} g_{*1} h$$

$$= \Sigma_{h=1}^{\infty} (a + q)_{h-1+1} (2^{-1} n + q)_{h-1+1}^{-1} ((h - 1)!)^{-1}$$

$$\times\ (-2^{-1} r_1)^h (2^{-1} r_2)^{ut-b-1} g_{*1}$$

ただし

$$\ell_q(h) = (a + q)_h (2^{-1} n + q)_h^{-1} (-2^{-1} r_1)^h (h!)^{-1}$$

である．また $(a)_h(a + h) = a(a + 1) \dots (a + h - 1)(a + h) = a(a + 1)_h = (a)_{h+1}$ から $(a)_h = (a)_{h-1+1} = a(a + 1)_{h-1}$，$h = 1, 2, \dots$．したがって (2．8) は

$$\Sigma_{h=0}^{\infty} (a + q)(a + q + 1)_h (2^{-1} n + q)^{-1} (2^{-1} n + q + 1)_h^{-1}$$

$$\times\ (h!)^{-1} (-2^{-1} r_1)^{h+1} (2^{-1} r_2)^{ut-b-1} g_{*1}$$

$$= (a + q)(2^{-1} n + q)^{-1} (2^{-1} r_2)^{ut-b-1} g_{*1}$$

$$\times\ \Sigma_{h=0}^{\infty} \ell_{q+1}(h)(-2^{-1} r_1)$$

となる．いま

$$l_t(q, p) = c_{*t} e_{*t}(q, p)(t + n' + p - b)_q (2^{-1} n + p)_q^{-1}$$

と書けば，$T_{q,p}^{u,t}$ は

(2．9) $$T_{q,p}^{u,t}(a, b) \sim l_t(q, p)(2^{-1} r_2)^{ut-b} \Sigma_h \ell_q(h)$$

$$+ l_t(q, p)(2^{-1} r_2)^{ut-b-1} g_{*0} \Sigma_h \ell_q(h)$$

$$+ l_t(q, p)(2^{-1} r_2)^{ut-b-1} g_{*1} \Sigma_h \ell_{q+1}(h)$$

$$\times\ (a + q)(2^{-1} n + q)^{-1} (-2^{-1} r_1)$$

となるのがわかる．(2．9) において $ut = 0, 1;\ b = 0, 1, \dots$，したがってこの第1項のｵｰﾀﾞｰは，第2 ～ 3項のそれより 1 だけ大きくなっている．つまり第1項が dominate する．

つぎにもう少し詳しい近似をもとめるには，(2．1) の x^{-2} にかかる係数(= J) が必要になる．いま $b_2 - a_2 = e_2$，$b_1 - a_1 = e_1$ とすれば，

$$(b_2 - a_2)_2 = e_2(e_2 + 1)$$

$$(1 + b_1 - a_1 - a_2)_2 = (1 + e_1 - a_2)(2 + e_1 - a_2)$$

$$2 + b_1 - a_1 - a_2 = 2 + e_1 - a_2$$

$$(b_1 - a_1)_2 = e_1(e_1 + 1).$$

そうすると J は

$$J = 2(1 - a_1)e_2e_1(2 + e_1 - a_2) + (1 - a_1)_2e_1(e_1 + 1)$$
$$+ e_2(e_2 + 1)(1 + e_1 - a_2)(2 + e_1 - a_2)$$

となる．ここで a_2 は h を含まない．また，

$$a_1 = (2^{-1}n + p) - e_1 = a_3 - e_1$$

$$a_4 = a_3 - 1$$

として

(2. 10) $$J = 2(e_1 - a_4)e_2e_1(2 + e_1 - a_2)$$
$$+ (e_1 - a_4)(e_1 - a_4 + 1)e_1(e_1 + 1)$$
$$+ e_2(e_2 + 1)(1 + e_1 - a_2)(2 + e_1 - a_2),$$

ところでいま $e_2 + e_1 = b - ut = a_5$ だから，この (2. 10) を e_1 のみで表すことができる．

$$J = \Sigma_{i=1}^{3} j_i$$

$$j_1 = 2(e_1 - a_4)(a_5 - e_1)e_1(2 + e_1 - a_2)$$

$$j_2 = (e_1 - a_4)(e_1 - a_4 + 1)e_1(e_1 + 1)$$

$$j_3 = (a_5 - e_1)(a_5 - e_1 + 1)(1 + e_1 - a_2)(2 + e_1 - a_2),$$

これは e_1 について 4 次式のかたちをとるが，e_1^4 の係数は 0，したがって e_1^3 から計算すればよい．第1，2項の和は

$$j_1 + j_2 = e_1(e_1 - a_4)(-e_1^2 + k_1e_1 + k_2)$$

$$= e_1(-e_1^3 + e_1^2(k_1 + a_4) + e_1(k_2 - a_4k_1) - a_4k_2)$$

$$k_1 = 2a_2 + 2a_5 - a_4 - 2$$

$$k_2 = 2a_5(2 - a_2) + 1 - a_4.$$

他方，j_3 は

$$j_3 = (e_1^2 + e_1k_3 + k_4)(e_1^2 + e_1k_5 + k_6)$$

$$k_3 = -2a_5 - 1$$

$$k_4 = a_5(a_5 + 1)$$

$$k_5 = 3 - 2a_2$$

$$k_6 = (1 - a_2)(2 - a_2).$$

いま，

$$J = \Sigma_{j=0}^{3} e_1^j f_j$$

となるのがわかる．ただし

(2. 11) $f_3 = k_1 + a_4 + k_5 + k_3$

$$= 2a_2 + 2a_5 - a_4 - 2 + a_4 + 3 - 2a_2 - 2a_5 - 1$$

$$= 0$$

$$f_2 = 2a_5(2 - a_2) - a_4(2a_2 + 2a_5 - a_4 - 2) + 2$$

$$+ a_2^2 - 3a_2 + a_5^2 + a_5 - (2a_5 + 1)(3 - 2a_2) + 1 - a_4$$

$$= 2a_5a_2 - a_5 + a_2^2a_5^2 - a_2 - a_4(2a_2 + 2a_5 - a_4 - 2),$$

ここで $a_4 = a_3 - 1$, $a_5 = b - ut$, $a_3 = 2^{-1}n + p$ を代入すれば，f_2 は

$$f_2 = (a_2 + a_5)^2 - (a_2 + a_5) - (a_3 - 1)\{2(a_2 + a_5) - a_3\}$$

$$= a_6^2 - a_6(1 + 2(a_3 - 1)) + (a_3 - 1)^2 + (a_3 - 1)$$

$$a_6 = a_2 + a_5$$

$$= t(1 - u) + n' + p.$$

f_1 については，

(2. 12) $f_1 = a_4\{2a_5(a_2 - 2) + a_4 - 1\} - (2a_5 + 1)(a_2 - 1)(a_2 - 2)$

$$- (2a_2 - 3)a_5(a_5 + 1).$$

f_0 については

(2. 13) $f_0 = k_4k_6 = a_5(a_5 + 1)(a_2 - 1)(a_2 - 2)$

となる．けっきょく $f_3 = 0$, そうして f_2, f_1, f_0 は a_2, a_5, a_3 によって表されることになる．

$$a_2 = t + n' + p - b, \quad n' = 2^{-1}n + 2^{-1}$$

$$a_5 = b - ut$$

$$a_3 = 2^{-1}n + p$$

となっている．ここで (2. 7) にもどり，$2^{-1}(2^{-1}r_2)^{-2}J$ を考える．いま J は

(2. 14) $\quad J = \Sigma_{j=0}^{2} e_1^j f_j$

と書くことができるから（ただし，f_j は h を含まない．e_1 は $e_1 = -(h + ut + q)$)，これを

$$J = g_2 h(h - 1) + g_1 h + g_0$$

のﾌｫｰﾑに書き直す必要がある．まず，$e_1 = -(h + k)$; $k = ut + q$ と書いて，

$$\begin{aligned} J &= f_0 + e_1 f_1 + e_1^2 f_2 \\ &= f_0 - f_1 h + f_2\{h(h - 1) + 2hk + h + k^2\} - kf_1 \\ &= g_2 h(h - 1) + g_1 h + g_0 \end{aligned}$$

となる．ただし，

$$g_2 = f_2$$

$$g_1 = (2k + 1)f_2 - f_1$$

$$g_0 = f_0 + f_2 k^2 - kf_1$$

となっている．そうすると -2 のｵｰﾀﾞｰまでの (2. 7) の表現は，

(2. 15) $\quad T_{q,p}^{u,t}(a, b) = c_{*t}e_{*t}(q, p)$

$$\times\ \Sigma_{h=0}^{\infty} \ell_q(h)(t + n' - b + p)_q(2^{-1}n + p)_q^{-1}$$

$$\times\ (2^{-1}r_2)^{ut-b}\{1 + (2^{-1}r_2)^{-1}(g_{*1}h + g_{*0})$$

$$+ 2^{-1}(2^{-1}r_2)^{-2}(g_2 h(h - 1) + g_1 h + g_0) + o((1/r_2)^2)\}$$

となる．ここで (2. 8) と同様な計算をおこなえば，

(2. 16) $\quad \Sigma_{h=0}^{\infty} \ell_q(h)h(h - 1)$

$$= \Sigma_{h=2}^{\infty}(a + q)_{h-2+2}(2^{-1}n + q)_{h-2+2}^{-1}(-2^{-1}r_1)^h((h - 2)!)^{-1}.$$

そうして

$$\begin{aligned} (a)_h &= a(a + 1)(a + 2)\ \ldots\ (a + h - 2)(a + h - 1) \\ &= a(a + 1)(a + 2)_{h-2} \end{aligned}$$

に気づけば，この (2. 16) を

$$\sum_{h=0}^{\infty} \ell_q(h)h(h-1)$$

$$= (a+q)_2(2^{-1}n+q)_2^{-1}(-2^{-1}r_1)^2 \sum_{h=0} \ell_{q+2}(h)$$

と書くことができる．したがって以上の結果から $T^{u,t}_{q,p}$ は

(2. 17)　$T^{u,t}_{q,p}(a, b)$

$$\sim l_t(q, p)\sum_{h=0}^{\infty} \ell_q(h)\{(2^{-1}r_2)^{ut-b} + (2^{-1}r_2)^{ut-b-1}g_{*0} + 2^{-1}(2^{-1}r_2)^{ut-b-2}g_0\}$$

$$+ l_t(q, p)\sum_{h=0}^{\infty} \ell_{q+1}(h)\{-g_{*1}(2^{-1}r_2)^{ut-b-1}(a+q)(n+2q)^{-1}r_1 - g_1(2^{-1}r_2)^{ut-b-2}r_1(a+q)(2(n+2q))^{-1}\}$$

$$+ l_t(q, p)\sum_{h=0}^{\infty} \ell_{q+2}(h)\{2^{-1}g_2(2^{-1}r_2)^{ut-b-2}(-2^{-1}r_1)^2 \times (a+q)_2(2^{-1}n+q)_2^{-1}\}$$

となる．さらに (2. 17) をｵｰﾀﾞｰの低い順に並べ変えれば次のようになる．

(2. 18)　$T^{u,t}_{q,p} \sim (2^{-1}r_2)^{ut-b}l_t\sum_h \ell_q(h)$

$$+ (2^{-1}r_2)^{ut-b-1}l_t\sum_h\{\ell_q(h)g_{*0} - 2^{-1}g_{*1}r_1\ell_{q+1}(h)(a+q)(2^{-1}n+q)^{-1}\}$$

$$+ (2^{-1}r_2)^{ut-b-2}l_t\sum_h\{\ell_q(h)(2^{-1}g_0) - 4^{-1}g_1r_1\ell_{q+1}(h)(a+q)(2^{-1}n+q)^{-1} - 2^{-3}g_2r_1^2\ell_{q+2}(h)(a+q)_2(2^{-1}n+q)_2^{-1}\}$$

$$\sim (2^{-1}r_2)^{ut-b}l_t\sum_{h=0}^{\infty}\ell_q(h)$$

$$+ (2^{-1}r_2)^{ut-b-1}l_t\sum_{h=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{1}\ell_{q+i}(h)\xi_{1i}$$

$$+ (2^{-1}r_2)^{ut-b-2}l_t\sum_{h=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{2}\ell_{q+i}(h)\xi_{2i},$$

ただし

(2. 19)　$\xi_{1i} = g_{*i}(-2^{-1}r_1)^i(a+q)_i/(2^{-1}n+q)_i \quad i = 0, 1$

$\xi_{2i} = 2^{-1}g_i(-2^{-1}r_1)^i(a+q)_i/(2^{-1}n+q)_i \quad i = 0, 1, 2$

ここで，もちろん $(a)_i = a(a+1)\ ...\ (a+i-1)$ である．(2. 19) はよりｺﾝﾊﾟｸﾄに

は

(2. 20)　$\xi_{1i} = g_{+i}\mu_i$, $\xi_{2i} = 2^{-1}g_i\mu_i$

(2. 21)　$\mu_i = (-2^{-1}r_1)^i(a + q)_i/(2^{-1}n + q)_i$

となる．けっきょく (2. 18) は

(2. 22)　$\xi_{00} = 1$, $\xi_{01} = \xi_{02} = \xi_{12} = 0$

を導入して，

(2. 23)　$T^{u,t}_{q,p} \sim l_t \Sigma^2_{j=0} \Sigma^{\infty}_{h=0} \Sigma^2_{i=0}\, \ell_{q+i}(h)\, \xi_{ji} (2^{-1}r_2)^{ut-b-j}$

と書くことができる．

いま，t = 0 で $T^{u,t}_{q,p}$ の approximation を計算しておくと，

(2. 24)　$T^{u,0}_{q,p} \sim (2^{-1}r_2)^{-b} l_0 \Sigma_h \ell_q(h)$

$$+ (2^{-1}r_2)^{-b-1} l_0 \Sigma_h \Sigma^1_{i=0} \ell_{q+i}(h)\xi_{1i}$$

$$+ (2^{-1}r_2)^{-b-2} l_0 \Sigma_h \Sigma^2_{i=0} \ell_{q+i}(h)\xi_{2i}.$$

ここで b = 1 であれば，-2 のｵｰﾀﾞｰまでが必要だとしても，(2. 24) の R.H.S. の第3項をおとしてかまわないことになる．t = 1 のときは，u = 0, 1 を分けて考えねばならないが，u + 1 = t = 1 については (2. 24) の l_0 を l_1 にするだけでよいのがわかる．また，u = t = 1 ではｵｰﾀﾞｰが 1 だけ大きくなる．つまり

(2. 25)　$T^{1,1}_{q,p} \sim (2^{-1}r_2)^{1-b} l_1 \Sigma_h \ell_q(h)$

$$+ (2^{-1}r_2)^{-b} l_1 \Sigma_h \Sigma^1_{i=0} \ell_{q+i}(h)\xi_{1i}$$

$$+ (2^{-1}r_2)^{-b-1} l_1 \Sigma_h \Sigma^2_{i=0} \ell_{q+i}(h)\xi_{2i}$$

となる．

近似の本質的な部分は (2. 23) の R.H.S. によって表されるが，数値計算のためには，この R.H.S. を適当な積分で表す方がよい．以下こうした点を考える．いま $\ell_{q+i}(h)$ をとりあげると，

(2. 26)　$\Sigma_h \ell_{q+i}(h) = \Sigma_h (a + q + i)_h (2^{-1}n + q + i)^{-1}_h (h!)^{-1} (-2^{-1}r_1)^h$

$$= {}_1F_1(a + q + i,\ 2^{-1}n + q + i;\ -2^{-1}r_1)$$

$$= \exp(-2^{-1}r_1)\,{}_1F_1(2^{-1}n - a,\ 2^{-1}n + q + i;\ 2^{-1}r_1)$$

$$= (2^{-1}n - a)_{a+q+i}\Gamma^{-1}(a + q + i)\exp(-2^{-1}r_1)$$

$$\times \int_0^1 (1 - t)^{a+q+i-1} t^{-a-1+n/2}\exp(2^{-1}r_1 t)\, dt$$

となるのがわかる．この (2．26) を (2．23) へ代入すれば，

(2．27) $$T^{u,t}_{q,p} \sim l_t \Sigma^2_{j=0} \Sigma^2_{i=0} \text{я}_{ji}(2^{-1}r_2)^{ut-b-j}$$

$$\times \int_0^1 (1 - t)^{a+q+i-1} t^{-a-1+n/2}\exp(2^{-1}r_1(t - 1))\, dt$$

ただし

(2．28) $$\text{я}_{ji} = \xi_{ji}(2^{-1}n - a)_{a+q+i}\Gamma^{-1}(a + q + i)$$

$$= \tau_{ji}\mu_i(2^{-1}n - a)_{a+q+i}\Gamma^{-1}(a + q + i) \quad i, j = 0,\ 1,\ 2.$$

ここで

$\tau_{1i} = g_{*i},\ i = 0,\ 1$

$\tau_{12} = 0$

$\tau_{2i} = 2^{-1}g_i,\ i = 0,\ 1,\ 2$

$\tau_{00} = 1$

$\tau_{01} = \tau_{02} = 0$

$g_{*1} = -2^{-1}$

$g_{*0} = -2^{-1}q - b(n' - b + p - 1)$

$\quad = -2^{-1}q - n_{bp}$

$g_2 = 3/4$

$g_1 = (3/2)q + (b + 1)n_{bp}$

$g_0 = (b)_2 n_{bp}(n_{bp} - 1) + (3/4)q^2$

$\quad + q\{(b + 1)(n_{bp} + 1) - b - 7/4\}$

である．いま (2．28) を書きかえて

(2．29) $$\text{я}_{ji} = \tau_{ji}(-2^{-1}r_1)^i\{(2^{-1}n - a)_{a+q}\Gamma^{-1}(a + q)\}$$

とすることができる．さらに，(2．29) の { } の部分は i，j に無関係だから，

$\text{э}_{ji} = \tau_{ji}(-2^{-1}r_1)^i$

$l_{*t} = l_t \times (2^{-1}n - a)_{a+q}\Gamma^{-1}(a + q)$

と書いて，$T^{u,t}_{q,p}$ は

$$(2.\ 30)\quad T_{q,p}^{u,t} \sim 1_{*t} \Sigma_{j,i=0}^{2} \text{ə}_{ji} (2^{-1} r_2)^{ut-b-j}$$

$$\times \int_0^1 (1 - t)^{a+q+i-1} t^{-a-1+n/2} \exp(2^{-1} r_1 (t - 1))\, dt$$

と表せる．ただし

$$1_{*t} = c_{*t} e_{*t} (t + n' + p + b)_q (2^{-1} n + p)_q^{-1}$$

$$\times (2^{-1} n - a)_{a+q} \Gamma^{-1}(a + q)$$

$$= 2^{-a-b+t} \Gamma^{-1}(a)$$

となっている．また，(2. 30) の ə_{ji} は $\text{ə}_{ji} = \tau_{ji}(-2^{-1} r_1)^i$，$\tau_{ji}$ は (2. 28) のすぐ下の表現によって定義される．

参考文献

[1] Kadane, J. B., "Comparison of k-class Estimators When the Disturbances Are Small," Econometrica, 39, 1971, pp. 723-737.

[2] Luke, Y. L., The Special Functions and Their Approximations: Volume 1, New York: Academic Press, 1969.

[3] Mariano, R. S., "Approximations to the Distribution Functions of the Ordinary Least Squares and Two-Stage Least Squares Estimators in the Case of Two Included Endogenous Variables," Econometrica, 41, 1973a, pp. 67-77.

[4] ――――, "Approximations to the Distribution Functions of Theil's k-class Estimators," Econometrica, 41, 1973b, pp. 715-721.

[5] ――――, "Some Large Concentration Parameter Asymptotics for the k-class Estimators," Journal of Econometrics, 3, 1975, pp. 171-177.

[6] ――――, "Analytical Small-Sample Distribution Theory in Econometrics: The Simultaneous-Equations Case," International Economic Review, 23, 1982, pp. 503-533.

第 12 章　近似の数値計算*

12. 1　1 次ﾓｰﾒﾝﾄ，および近似の解析的表現

第10章において OLS 推定値の 1 次ﾓｰﾒﾝﾄをあたえたのち，第11章ではその近似式をみちびくための議論を展開してきた．したがって，以下 12. 1 においてこれまで述べてきた解析的な面を整理し，1 次ﾓｰﾒﾝﾄ，近似式を統一した見方で表現する．つづいて，12. 2 で精密ﾓｰﾒﾝﾄにあらわれる説明変数，およびﾊﾟﾗﾒﾀに適当な値を指定し，そうして実際に計算される近似値が，どのようなふるまいをとるか調べることにする．

$S^t = (s^t_{(1)},\ s^t_{(2)})$ を $SY^{*t}_{-1}MY^*_{-1}S^t = \mathrm{diag}(r_1,\ r_2)$，$E(Y_{-1}) = Y^*_{-1}$ をみたす直交行列とすれば，10. 2 の結果によって $\alpha\,(2 \times 2)$ の精密 1 次ﾓｰﾒﾝﾄを次のように書くことができる．

(1. 1)　　$E(a) = S^t\{E(a_*)\}S$

(1. 2)　　$E(a_*(n',\ m')) = \Sigma^1_{k=0}\Sigma^3_{i=1}\Sigma^i_{s=0}\Sigma^2_{j=0}\ {}_iC_s(-1)^s$

$$\times\ \{\xi^{(k)}_{ij}(n',\ m')\}T^{(k)}_{s(j)}$$

$$a_*(2,\ 1):\ a^t_*\ \text{の upper-right}$$

$${}_iC_s = i!\{s!(i - s)!\}^{-1}$$

ただし，

(1. 3)　　$T^{(s)}_{q(p)} = T^{0,0}_{q,p}(1,\ s)\quad s = 0,\ 1$

$(T^{0,0}_{q,p}(1,\ s)$ については第11章を見よ)

$n = T' - 1 = T - J - 1 > 2.$

さらに $\xi^{(k)}_{ij}(1,\ 1)$ は以下のように定められる．

---

* 以下は Y. Kataoka, H. Miyashita and K. Morimune, Economic Studies Quarterly, 近刊，の第2，3節に展開したものである．著者が原論文の執筆，および理論計算を担当した．また，宮下洋氏が数値積分のためのﾌﾟﾛｸﾞﾗﾑを作成し，理論上の誤りの有無を森棟公夫氏が最終的にﾁｪｯｸしている．

(1. 4) $\xi_{10}^{(0)}(1,\ 1) = -\xi_{11}^{(1)}(1,\ 1) = tr(G) + f_{11}(r_1)$

$\xi_{20}^{(0)}(1,\ 1) = -\xi_{21}^{(1)}(1,\ 1) = GB_{11}$

$\xi_{12}^{(1)}(1,\ 1) = -GB_{22}$

$\xi_{ij}^{(k)}(1,\ 1) = 0$, その他の場合,

$GB_{ij} = s_{(i)} z^{*t} GB z^{*} s_{(j)}^{t}$

$z^t(2 \times (T + 1)) = (Y_0,\ Y_1,\ \ldots,\ Y_T),\ E(z) = z^*$

(1. 5) $f_{ij}(r_j) = r_j s_{(i)} \alpha s_{(j)}^{t} - GB_{ji}$

$= r_j \alpha_{*ij} - GB_{ji}.$

また, $\xi_{ij}^{(k)}(n',\ m')$, $n' \neq 1$, $m' \neq 1$ は第13章にあたえるが, ここで留意する点は, $\xi_{ij}^{(k)}$ がたかだか r_2 の 1 次関数であって, かつ $\xi_{ij}^{(0)}$ は r_2 を含まないという事実である.

つづいて 11. 2 を整理して, $T_{q(p)}^{(s)} = T_{q,p}^{0,0}(1,\ s)$ の近似は次の (1. 6) となる. つまり, $r_2(>r_1)$ を $\langle Y_{-1}^{*},\ MY_{-1}^{*}\rangle$ の固有値とすれば, T を一定として $r_2 \to +\infty$ とするとき, $T_{q(p)}^{(s)}$ は

(1. 6) $T_{q(p)}^{(s)} = 2^{-1-s} \Sigma_{j=0}^{2} \Sigma_{i=0}^{2} \pi_{ji} (j!)^{-1} (2^{-1} r_2)^{-s-j} I_{(i)}$

$+ o(r_2^{-s-2})$

$= \Sigma_{j=0}^{2} T_{q(p),j}^{*(s)} + o(r_2^{-s-2})$

となる. ただし,

(1. 7) $I_{(i)} = (-2^{-1} r_1)^{i} \int_0^1 (1 - t)^{i+q} t^{n/2-2} \{\exp(2^{-1} r_1 (t - 1))\}\ dt$

$T_{q(p),j}^{*(s)} = 2^{-1-s} \Sigma_{i=0}^{2} \pi_{ji} (j!)^{-1} (2^{-1} r_2)^{-s-j} I_{(i)}$

$= O(r_2^{-s-j})$

$\pi_{ji} = 0,\ i > j$

$\pi_{00} = 1$

$$\pi_{11} = -2^{-1}$$

$$\pi_{10} = -2^{-1}q - sn_{sp}$$

$$\pi_{22} = 3/4$$

$$\pi_{21} = (3/2)q + (s+1)n_{sp}$$

$$\pi_{20} = s(s+1)n_{sp}(n_{sp} - 1) + (3/4)q^2$$
$$+ q\{(s+1)(n_{sp} - 1) - s - 7/4\}$$

$$n_{sp} = 2^{-1}(n+1) - s + p - 1$$

(π_{ji} は 11. 2 の g_{*i}, g_i である). そうして (1. 2) の 1 次ﾓｰﾒﾝﾄの表現において, $T^{(s)}_{q(p)}$ を $\Sigma^2_{j=0} T^{*(s)}_{q(p),j}$ におきかえれば, 1 次ﾓｰﾒﾝﾄの近似がみちびかれる. ここで

$$\max_{r(2)} \mathrm{mod}(\xi^{(k)}_{ij}(n', m')) = O(r_2) \quad k = 0, 1$$

となっている点に留意する (こうした考え方は, いま展開している内容とはまったく別の文脈で Holly-Phillips [1] においてももちいられている). 近似ﾓｰﾒﾝﾄは

$$(1.\ 8) \quad E(a_*(n', m')) = \Sigma^1_{k=0} \Sigma^3_{i=1} \Sigma^i_{s=0} \Sigma^2_{j=0}\, {}_iC_s (-1)^s$$
$$\times\ \Sigma^k_{t=0} \Sigma^{2-k+t}_{u=0}\, r_2^t e^{(k)}_{ijt}(n', m') T^{*(k)}_{s(j),u} + o(r_2^{-2})$$
$$= A_2(n', m') + o(r_2^{-2})$$

となる. ただし, $e^{(k)}_{ijt}(n', m')$ $t = 0, 1$ は次のように定められる.

$$\xi^{(k)}_{ij}(n', m') = r_2 e^{(k)}_{ij1}(n', m') + e^{(k)}_{ij0}(n', m'),$$

たとえば,

$$\xi^{(0)}_{20}(1, 1) = GB_{11} = e^{(0)}_{200}(1, 1)$$

$$\xi^{(1)}_{11}(1, 2) = r_2(T' - 1)\alpha_{*12} - (T' - 1)GB_{21}$$
$$= r_2 e^{(1)}_{111}(1, 2) + e^{(1)}_{110}(1, 2)$$

とする. $\xi^{(1)}_{11}(1, 2)$ については第13章参照. さらに $A_2(n', m')$ を $A^t_2(2 \times 2)$ の m', n' 要素としておけば,

$$(1.\ 9) \quad E(a^t) = S^t\{A^t_2 + o(r_2^{-2})\}S$$

$$= S^t A_2^t S + o(r_2^{-2})$$

となる．また，$A_2(n', m')$ よりラフな $E(a^t(n', m'))$ への近似，$A_1(n', m')$ を考えることもできる．そのためには (1. 8) の "$u = 0$ から $u = 2 - r + t$" を "$u = 0$ から $u = 1 - r + t$" に置きかえればよい．そうするとより簡単な表現

(1. 10) $$E(a_{\cdot}(n', m')) = A_1(n', m') + o(r_2^{-1}),$$

あるいは

$$E(a^t) = S^t A_1^t S + o(r_2^{-1})$$

がみちびかれる．

また $n' = m' = 1$ のとき，$E(a_{\cdot 11})$ への近似の異なる表現 (1. 11) がえられる (12. 2 の数値計算においては，(1. 11) をもちいた)．

(1. 11) $$\begin{aligned} E(a_{\cdot 11}) = \textstyle\sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{1}(-1)^{i+j}\{&T^{*(j)}_{i(j)}(u)(\xi^{(0)}_{10}(1, 1) + \xi^{(0)}_{20}(1, 1)) \\ &- T^{*(j)}_{i+1(j)}(u)\,\xi^{(0)}_{20}(1, 1) - \delta_{1j}T^{*(j)}_{i(j+1)}(u)\,\xi^{(1)}_{12}(1, 1)\} \\ &+ o(r_2^{-u}) \\ = A_u(1, 1) + o(r_2^{-u}),\ u = 1, 2 \end{aligned}$$

となる．ただし，$\xi^{(k)}_{ij}(1, 1)$ は (1. 4) にあたえられる．また δ_{ij} はｸﾛﾈｯｶｰﾃﾞﾙﾀ，そうして

(1. 12) $$T^{*(s)}_{q(p)}(u) = 2^{-1} r_2^{-s} \textstyle\sum_{i=0}^{2} \gamma_i^{(s)}(u) I_{(i)}$$

$$\gamma_0^{(0)}(u) = 1 - q r_2^{-1} + \delta_{2u} r_2^{-2}\{3q^2/2 + q(n + 2p - 5/2)\}$$

$$\gamma_1^{(0)}(u) = -r_2^{-1} + \delta_{2u} r_2^{-2}(3q + 2p + n - 1)$$

$$\gamma_2^{(0)}(u) = (3/2)\delta_{2u} r_2^{-2}$$

$$\gamma_0^{(1)}(u) = 1 + \delta_{2u} r_2^{-1}(-2p - q - n + 3)$$

$$\gamma_1^{(1)}(u) = -\delta_{2u} r_2^{-1}$$

$$\gamma_2^{(1)}(u) = 0$$

となっている．(1. 8) から (1. 11)，(1. 12) をみちびくことはきわめて容易である．

12. 2　数値例

標本数 T が大きくないとき，これまで議論してきた OLS 推定値のふるまいについて，何らかの情報をえるために，以下数値計算することを考える．(1. 2) で見るように OLS 推定値の 1 次ﾓｰﾒﾝﾄ E(a)，あるいは $E(a_*)$ をそのまま計算するのは非常にむずかしい．したがって，$E(a_*(n', m'))$ を $A_i(n', m')$ によって近似するのがよい．ただし

$a_*(m', n')$ は $\alpha_*(m', n') = s_{(m')}\alpha s^t_{(n')}$ (α の次数は 2 x 2) の規準化された OLS 推定値である．さらに

(2. 1)　　$E(a) = S^t\{E(a_*)\}S,$

また，$E(a_*(n', m'))$　$n' \neq 1$, $m' \neq 1$ と $E(a_*(1, 1))$ の解析的な表現は，次章で示すようにまったく同一だから，$E(a_*(1, 1))$ への近似式 $A_i(1, 1)$ を計算するだけで十分である．ここで以下の点にも気づいているとよい．つまり $f_{a(*)}(a_*)$ を a_* の密度関数とするとき，

(2. 2)　　a の密度 $= \mathrm{mod}(J(a_* \to a))f_{a(*)}(SaS^t)$

$$= f_{a(*)}(SaS^t)$$

$a(2 \times 2)$ のﾉﾙﾑ $= (\mathrm{tr}(a^t a))^{1/2}$

$$= (\mathrm{tr}(a^t_* a_*))^{1/2}.$$

ただし，$J(a_* \to a)$ は a_* から a へのﾔｺﾋﾞｱﾝ (1 x 1) を表す．

つづいて OLS を評価するために選ぶﾓﾃﾞﾙを以下 (2. 3) ～ (2. 5) で定める．

(2. 3)　　$Y_t = \alpha Y_{t-1} + \beta X_t + \varepsilon_t - \alpha\varepsilon_{t-1}$

$(\varepsilon_{10}, \ldots, \varepsilon_{1T}, \varepsilon_{20}, \ldots, \varepsilon_{2T})^t \sim N(0, I_{2T+2})$

$t = 0, \ldots, T;\ J = 2$

(2. 4)　　$X(T \times 2)$ の第 i ｺﾗﾑ $\neq$ const. $\times (1, \ldots, 1)^t$

(2. 5)　　$\alpha_{ii} = .3,\ \alpha_{ij} = \alpha_{ji} = .1$

$\beta_{ii} = 1.0,\ \beta_{ij} = \beta_{ji} = .1, 0., -0.1,$

$1 \leqq i, j \leqq 2$

としよう．ここで (2. 4) はさきの分布ﾗｸﾞﾓﾃﾞﾙのかたちからみちびかれる直接の結果である．つまり 10. 1 で

$$Y_t(2 \times 1) = \Sigma_s \alpha^s \beta X_{t-s} + \varepsilon_t$$

と書いた．また x_{it} のﾁｮｲｽであるが，x_{it} がﾗﾝﾀﾞﾑ(もちろん ε_{it} とは独立)であれば，$E(x_{it}) = 0$，x_{it} が確定変数のときは，$T^{-1}\Sigma_{t=1}^{T} x_{it}$ = "x_i の標本平均" = 0 であるようにする．これはのちに述べるが，1 つは $Y_{i0} = E(Y_{i0})$ = "$E(Y_{it})$ の初期値" = 0 に対応するものである．つづいて (2. 5) で指定する数値についても，以下説明をあたえる．もう一度 $Y_t(2 \times 1)$ を

$$Y_t = \beta X_t + \alpha\beta X_{t-1} + \ldots + \varepsilon_t$$

$$X_t = (x_{1t},\ x_{2t})^t$$

と書く．ここで

x_{it}: Y_{it} の変動をよく説明するｺｱ変数

(ｺｱ変数については Sawa-Hiromatsu [2] を見よ) としておいて

$i \neq j$ について $\beta_{ij} \neq 0$

$j = 1, 2$ にたいして $\beta_{jj} = 1$

とすると，Y_{1t} は x_{1t} に依存するばかりでなく，x_{2t} にも依存する (x_{2t} が Y_{2t} のｺｱ変数である点に気づくとよい)．とくに，すべての i, j について $\beta_{ij} = 1$ とすれば，$(Y_{1t},\ Y_{2t})$ は $x_{1t} + x_{2t}$ のみの 1 次関数となって，その結果 Y_{1t}，Y_{2t} はたがいに独立ではない．つまり

$$\sigma_{12} = \mathrm{Cov}((Y_{1t},\ Y_{2t})|X_s) = \mathrm{Cov}((\varepsilon_{1t},\ \varepsilon_{2t})|X_s) \neq 0$$

を意味し，これは 10. 2 の仮定 (2. 4) に矛盾する．したがって (2. 5) のﾁｮｲｽは 10. 2, 12. 1 で展開している理論とよく両立する内容である．

次に説明変数 x_{it} $i = 1, 2;\ t = 1, \ldots, 30$ を以下のように生成する．まず

$$x_{*it} \sim \mathrm{Uniform}(-0.5,\ .5),$$

そうして x_{*it} のすべてがたがいに独立となるように x_{*it} をとり，

$$x_{it} = c_i^{1/2} x_{*it} = c_*^{1/2} x_{*it} \quad c_i,\ c_*:\ \text{定数}$$

$$0 < c_* = c_i < +\infty$$

とする．ここで $\beta_{jj} = 1$, $j = 1, 2$, および $c_i = c_*$ は

$$\mathrm{Var}(\varepsilon_{1t}|X_s) = \mathrm{Var}(\varepsilon_{2t}|X_s) = 1$$

に対応している (数値例の内容を 10. 2 の理論と両立させるためには，正確には Y_{it} と x_{*js} の独立性を仮定し，また，さきの期待値 $E(a_{*11})$ を条件付期待値 $E(a_{*11}|x_{*js})$ に

おきかえる必要がある)．ところで $x_{\cdot it} \sim \mathrm{Uniform}(-0.5, .5)$ で

(2．6)　$T^{-1}\Sigma_{t=1}^{T} x_{it}$ = "x_i の標本平均" $\doteqdot E(x_{it}) = 0$

$T^{-1}\Sigma_{t=1}^{T}\{x_{it} - T^{-1}(\Sigma\ x_{it})\}^2 \doteqdot Var(x_{it}) = c_{\cdot}/12$

となる点を知って，以下 $c_{\cdot}$ のとりうる値を考える．もし

(2．7)　$1 = Var(\varepsilon_{it}) = Var(\varepsilon_{it}|X_s)$

$\leqq \min_{j,s}\{Var(x_{js})\}$

とすれば，$c_{\cdot}$ について $c_{\cdot} \geqq 12$ となるような制約をおくことになる．

また，たとえば $\beta_{ij} = \delta_{ij}$，$\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ のもとで，Y_t の条件付きでない分散共分散は以下のようになる．

$$E(Y_t) = EE(Y_t|X_s) = 0$$

そうして，

$$Cov(Y_t) = E\{(\Sigma_s \alpha^s c_{\cdot}^{1/2} X_{\cdot t-s} + \varepsilon_t)(\Sigma_s \alpha^s c_{\cdot}^{1/2} X_{\cdot t-s} + \varepsilon_t)^t\}$$

$$= Cov(\text{ｼｽﾃｨﾏﾃｨｯｸﾊﾟｰﾄ}) + Cov(\varepsilon_t)$$

$$= Cov(\Sigma_s \alpha^s c_{\cdot}^{1/2} X_{\cdot t-s}) + I_2$$

$$= (1/12)c_{\cdot}(I_2 - \alpha^2)^{-1} + I_2$$

$$= (1/12)c_{\cdot}Q^t\{\mathrm{diag}((1 - \lambda_1^2(\alpha))^{-1},\ (1 - \lambda_2^2(\alpha))^{-1})\}Q + I_2,$$

ただし $QQ^t = I_2$，$Q\alpha Q^t = \mathrm{diag}(\lambda_1(\alpha), \lambda_2(\alpha))$ である．

したがって (2．6)，(2．7) から $c_{\cdot}$ に 90，120，150 を選ぶことにする．つまり $c_{\cdot} = 120$ のとき，"誤差項の分散に対する説明変数の分散の値" は 10 となっている．これは，通常のこうしたﾓﾃﾞﾙにおいては常識的に許容できる範囲内にある．また簡単な計算からすぐ気づくように，$E(Y_{it}|(t = 0)) = E(Y_{i0}) = Y_{i0}^{*}$ であれば，$S(2 \times 2)$ の各行 $s_{(i)}(1 \times 2)$，および $\alpha_{\cdot 11} = s_{(1)}\alpha s_{(1)}^t$ は $c_{\cdot}$ とは関数的に独立となる．したがって数表 1，2 の計算において，$E(Y_{i0}) = 0$ としてある．また，$T = 20, 30$ とした．以下の (2．8) にも留意しよう．つまり $c_{\cdot}^{1/2}x_{\cdot it}$ から $k^{1/2}c_{\cdot}^{1/2}x_{\cdot it}$ $(k > 0)$ に変数を移してもﾍﾞｷ等の M を変化させることはないが，他方こうした変換は，$E(Y_0) = Y_0^{*}(2 \times 1) = 0$

とともに $E(Y_t)$ を $k^{1/2}E(Y_t)$, $t = 1, \ldots, T$ に移す．ゆえに $\mu(2 \times 2)$ を

$$\mu = (\mu_{ij}) = (Y_0^*, \ldots, Y_{T-1}^*)M(Y_0^*, \ldots, Y_{T-1}^*)^t$$

とすれば，$\mu \to k\mu$, $r_i \to kr_i$, $s_{(i)}(1 \times 2) \to s_{(i)}$ となる．ただし r_i, $s_{(i)}$ は μ の固有値，および固有ﾍﾞｸﾀである．

(2. 8)
$$r_i = 2^{-1}(-1)^i\{(\mu_{11} - \mu_{22})^2 + 4\mu_{12}^2\}^{1/2} + 2^{-1}(\mu_{11} + \mu_{22})$$

$$s_{(i)} = (s_{i1}, s_{i2})$$

$$s_{11} = s_{22} = (r_2 - \mu_{11})^{1/2}(r_2 - r_1)^{-1/2}$$

$$s_{21} = -s_{12} = \mu_{12}(r_2 - \mu_{11})^{-1/2}(r_2 - r_1)^{-1/2}$$

となっている．

こうして β_{12}, c_* のさまざまな値に対して，表 1 ($T = 20$), 表 2 ($T = 30$) は α_{*11}, $A_i(1, 1)$, $A_i(1, 1)/\alpha_{*11}$ $i = 1, 2$ の数値をあたえる．ただし，$A_i(1, 1)$ は (1. 11) における $E(a_{*11})$ の近似値を表す（もちろん誤差のｵｰﾀﾞｰは $o((1/r_2)^i)$ であって，$1/r_2$ のとき近似はﾗﾌになる)．表 1，表 2 を読みとれば，だいたい以下の点がわかる．

1° 近似値 A_i は，c_*（あるいは r_2）が大きくなるにしたがって単調に $A_i(1, 1) \to \alpha_{*11}$ $i = 1, 2$ となる．r_2 が大きければ $A_i(1, 1)$ は真値の α_{*11} に近い．

2° 近似的なﾊﾞｲｱｽについてはほとんどの場合，

$$"\alpha_{*11} - A_2(1, 1)" < "\alpha_{*11} - A_1(1, 1)"$$

となる．これは r_2 の小さい値に対して著しい．

3° r_2 が大きければ，OLS 推定値は $T = 20$ のｹｰｽでさえももちいられてよい．$T = 30$ のとき，この状況はもちろんより改善される．表 1，表 2 を比較するとよい．

4° β_{12} の異なる値について近似ﾊﾞｲｱｽを見ると，$\beta_{12} = -0.1$ のとき，ﾊﾞｲｱｽは小さく，$\beta_{12} = 0.$, $.1$ で大きくなるが，これは次のような理由による．つまり

(2. 9)
$$\alpha\beta \text{ の } (1,2) \text{ 要素} = (\alpha\beta)_{12}$$

$$= \Sigma_{i=1}^2 \alpha_{1i}\beta_{i2}$$

$$= .3 \times \beta_{12} + .1$$

$$(\beta)_{12} + (\alpha\beta)_{12} = 1.3 \times \beta_{12} + .1$$

$$\alpha_{ii} = .3, \ \alpha_{ij} = \alpha_{ji} = .1, \ \beta_{ii} = 1.$$

だから β_{12} = .1, 0., -0.1 に対して (2. 9) は

(2. 10) $(\alpha\beta)_{12}$ = .13, .1, .07

$(\beta)_{12} + (\alpha\beta)_{12}$ = .23, .1, -0.03

となる．つまり $\beta_{12} = -0.1$ のとき，2 次元分布ﾗｸﾞﾓﾃﾞﾙ

$$Y_t = \Sigma_s \alpha^s \beta X_{t-s} + \varepsilon_t$$

の $\alpha^s \beta X_{t-s}$ の非対角部分が小さくなり(絶対値ではかる)，そうした点は $Cov(\varepsilon_t) = I_2$ といっそう矛盾しないから，OLS 推定値(の期待値の近似)が真値 $\alpha_{\cdot 11}$ に近くなると考えられる．

表 1 (1. 11) の R.H.S. による $E(a_{*11})$ への近似;
$T = 20$, α_{*11} は基準化された真値

β_{12}	c_* (r_2)	α_{*11}	$A_1(1,\ 1)$	$A_2(1,\ 1)$	A_1/α_{*11}	A_2/α_{*11}
.1	90 (144.72)	.20429	.15172	.15238	.74267	.74590
	120 (192.95)		.16259	.16297	.79588	.79774
	150 (241.19)		.16974	.17000	.83088	.83215
0.	90 (121.36)	.21205	.16547	.16613	.78033	.78345
	120 (161.81)		.17542	.17581	.82726	.82910
	150 (202.26)		.18188	.18214	.85772	.85895
-0.1	90 (103.95)	.25762	.20769	.20831	.80619	.80859
	120 (138.60)		.21856	.21893	.84838	.84982
	150 (173.25)		.22556	.22579	.87555	.87645

表 2 (1. 11) の R.H.S. による $E(a_{\cdot 11})$ への近似;
$T = 30$, $\alpha_{\cdot 11}$ は基準化された真値

β_{12}	$c_{\cdot}$ (r_2)	$\alpha_{\cdot 11}$	$A_1(1, 1)$	$A_2(1, 1)$	$A_1/\alpha_{\cdot 11}$	$A_2/\alpha_{\cdot 11}$
.1	90 (344.45)	.20026	.15141	.15167	.75607	.75737
	120 (459.26)		.16141	.16157	.80600	.80680
	150 (574.08)		.16802	.16812	.83901	.83951
0.	90 (284.89)	.20058	.15910	.15937	.79320	.79455
	120 (379.85)		.16790	.16806	.83707	.83787
	150 (474.82)		.17363	.17374	.86564	.86619
-0.1	90 (231.24)	.20181	.16606	.16635	.82285	.82429
	120 (308.32)		.17386	.17403	.86150	.86235
	150 (385.40)		.17887	.17898	.88633	.88687

参考文献

[1] Holly, A. and P. C. B. Phillips, "A Saddlepoint Approximation to the Distribution of the k-class Estimator of a Coefficient in a Simultaneous System," Econometrica, 47, 1979, pp. 1527-1547.

[2] Sawa, T. and T. Hiromatsu, "Minimax Regret Significance Points for a Preliminary Test in Regression Analysis," Econometrica, 41, 1973, pp. 1093-1101.

第 13 章　ｵﾍﾟﾚﾀによる OLS 推定値ﾓｰﾒﾝﾄの表現

13. 1　ｵﾍﾟﾚﾀの性質

通常の仮定のもとで，2 変量分布ﾗｸﾞﾓﾃﾞﾙにおける OLS 推定値は

(1. 1)　　$a(2 \times 2) = S^t a_{\cdot} S$

(1. 2)　　$a_{\cdot}^t = (x_6^t x_6)^{-1}(x_6^t J_{11}^0 x_6 + x_6^t J_{12}^0 x_2 S^t)$

と表現できる(第10章を参照)．ここで

S: orthogonal

$S\langle x_1^{\prime}, x_1^{\prime}\rangle S^t = \mathrm{diag}(r_1, r_2)$　$r_2 > r_1$

$x_6 = x_1 S^t$

$x_1(T' \times 2)$, x_2: independent

$x_{j1}^t(2 \times 1) \sim N(x_{j1}^{\prime}, I_2)$　$j = 1, \ldots, T'$

x_{j1}^t: $x_1^t(2 \times T')$ の第 j 要素，

さらに $x_2^t(2 \times (T + 1 - T'))$ の分布は，x_1^t の分布と同様の性質をもつ．

こうしたとき，10. 2，あるいは 片岡 [2] では a^t の upper-left の 1 次ﾓｰﾒﾝﾄをあたえた．また r_2 が大きいとき，その近似も簡単に計算するこができる．ところで以下の目的は 2 つある．1 つは，$a(2 \times 2)$ のすべての要素の 1 次ﾓｰﾒﾝﾄ(期待値)を計算することである．それによって，$E\{a_{\cdot}(2 \times 2)\}$ が完全にわかる．もちろん $S(2 \times 2)$ はﾗﾝﾀﾞﾑではないから，$E(a^t) = S^t\{E(a_{\cdot}^t)\}S$ である．$a_{\cdot}^t$ の (n', m') 要素を $a_{\cdot}^t(n', m')$ と書くが，以下でも見るように，$E\{a_{\cdot}^t(n', m')\}$ の表現はすべて同じ関数形によって書かれる．つぎに 2 番目として，$E\{a_{\cdot}^t(n', m')\}$ をある簡単なｵﾍﾟﾚﾀによって表現することが可能であり，この事実を実際 13. 2 で explicit に展開することである (Dhrymes [1] にはﾗｸﾞｵﾍﾟﾚﾀによる記述があるが，ここで導入されるｵﾍﾟﾚﾀがﾗｸﾞｵﾍﾟﾚﾀと同一のものかはﾁｪｯｸしていない．詳細においては，性質上異なる内容を含むかもしれない)．また，2 次ﾓｰﾒﾝﾄについてもｵﾍﾟﾚﾀによる表現が可能であり，それは見通しのよい結果をあたえることがすでにわかっている．片岡 [3] を参照．

13. 2 の計算に進むまえに，11. 1 で定義した $T^{u,t}_{q,p}(a, b)$ には以下のような性質があるのに気づくとよい．

$$(1.\ 3)\qquad d_{1i}T^{u,t}_{q,p} = -x^{\bullet}_{\delta 1i}T^{u,t}_{q+1,p}$$

$$d_{2i}T^{u,t}_{q,p} = -x^{\bullet}_{\delta 2i}(T^{u,t}_{q,p} - T^{u,t}_{q,p+1})$$

ただしこの (1. 3) において，簡単のために $d_{ji}T^{u,t}_{q,p} = d_{\delta ji}T^{u,t}_{q,p}(a, b)$　$j = 1, 2$ と書いた．ただし $d_{\delta ji}$ は $x^{\bullet}_{\delta ji}$ に関する微分ｵﾍﾟﾚｰﾀである．証明は以下のとおり．

$$(1.\ 4)\qquad d_{1i}T^{u,t}_{q,p} = -x^{\bullet}_{\delta 1i}f_{*t}(q, p)(a + q)(2^{-1}n + p + q)(2^{-1}n + q)^{-1}$$

$$\times\ (t + n' + p - b + q)^{-1}\Sigma^{\infty}_{h=0}(q \to q + 1)$$

ただし

$$f_{*t}(q, p) = c_{*t}e_{*t}(q, p),$$

c_{*t}, e_{*t} は 11. 1, (1. 3) にあたえられる．この $(q \to q + 1)$ は，11. 1, (1. 2) において $\Sigma_h(\ )$ の部分にあらわれる q を $q + 1$ にしたものである．したがってあと

$$(1.\ 5)\qquad f_{*t}(q, p)(a + q)(2^{-1}n + p + q)$$

$$\times\ (2^{-1}n + q)^{-1}(t + n' + p - b + q)^{-1}$$

$$= f_{*t}(q + 1, p)$$

を言えばよいが，$(a)_{j+1} = a(a + 1) \ldots (a + j - 1)(a + j) = (a)_j(a + j)$ から (1. 5) が成立するのがすぐわかる．つぎに (1. 3) の 2 番目の部分については，

$$(1.\ 6)\qquad d_{2i}T^{u,t}_{q,p} = -x^{\bullet}_{\delta 2i}T^{u,t}_{q,p} + x^{\bullet}_{\delta 2i}f_{*t}(q, p)$$

$$\times\ (t + n' - b + p)(2^{-1}n + p)^{-1}\Sigma^{\infty}_{h=0}(a + q)_h(h!)^{-1}(\ )^h$$

$$\times\ (2^{-1}n + q)^{-1}_h(2^{-1}n + p + q)_{h+ut}(t + n' + p + q - b)^{-1}_{h+b}$$

$$\times\ (2^{-1}n + h + ut + p + q)(t + h + n' + p + q)^{-1}$$

$$\times\ \Sigma^{\infty}_{k=0}(p \to p + 1),$$

この $\Sigma_k(p \to p + 1)$ については，11. 1, (1. 2) の ${}_2F_2(\ )$ において p を $p + 1$ にかえたものを意味する．いま (1. 6) の $\Sigma_h(\ )$ 以下を書きかえると，

$$(2^{-1}n + p + q)(t + n' + p - b + q)^{-1}\Sigma_h(a + q)_h(\ )^h(h!)^{-1}$$

$$\times\ (2^{-1}n + q)_h^{-1}(2^{-1}n + p + q + 1)_{h+ut}$$

$$\times\ (t + n' + p - b + q + 1)_{h+b}^{-1}\Sigma_k(p \to p + 1),$$

そうするとあと

(1. 7) $\quad f_{*t}(q,\ p)(t + n' - b + p)(2^{-1}n + p)^{-1}$

$$\times\ (2^{-1}n + p + q)(t + n' + p - b + q)^{-1}$$

$$= f_{*t}(q,\ p + 1)$$

を言えばよいが，(1. 7) はたしかに成立する． Q.E.D.

また，(1. 3) を次のようなｵﾍﾟﾚｰﾀ d_{*1}，d_{*2} によって表すと，のちの議論の展開が容易になる．つまり

(1) $\quad d_{1i}T_{q,p}^{u,t} = -\mathring{x}_{61i}T_{q+1,p}^{u,t} = -\mathring{x}_{61i}d_{*1}T_{q,p}^{u,t}$

$$d_{2i}T_{q,p}^{u,t} = -\mathring{x}_{62i}(T_{q,p}^{u,t} - T_{q,p+1}^{u,t}) = -\mathring{x}_{62i}d_{*2}T_{q,p}^{u,t}.$$

すぐ気づくように，d_{*1}，d_{*2} は単なるｼﾌﾄｵﾍﾟﾚｰﾀである．さらに以下

(2) $\quad d_{\square si}(\ ) = (d_{si} + \mathring{x}_{6si})(\ ) \quad s = 1,\ 2$

と書くこともある．ただし，d_{si} は通常の微分ｵﾍﾟﾚｰﾀである．また，(2) に加えて

$d_{\square si}d_{\square tj}(\ )$ と書く場合，こうした積はつねに

(2') $\quad d_{\square si}d_{\square tj}(\ ) = (d_{si} + \mathring{x}_{6si})(d_{tj} + \mathring{x}_{6tj})(\ )$

$$= (d_{si}d_{tj} + \mathring{x}_{6si}d_{tj} + \mathring{x}_{6tj}d_{si} + \mathring{x}_{6si}\mathring{x}_{6tj})(\ )$$

を意味するものとしよう．つづいて 13. 2 で変数 $x_6(T' \times 2)$ を $x_7(= Q_*^t x_6)$ へ移す．ここで

Q_*: orthogonal

$Q_*\{(J_{11}^{0} + (J_{11}^{0})^t)/2\}Q_*^t = R_*$: diagonal

J_{11}^{0}: 10. 2, (2. 5), (2. 6).

もちろんこうした変換は，10. 2 の A_0，A_1 を不変 (invariant) に保つ．また 13. 2 の C_{00}，B_{00} であるが，以下のようになっている．

$$C_{00} = E(A_1) = \tau_{0(0)} = T_{0,0}^{0,0}(1,\ 1) = T_{0,0}^{(1)} = T_{0(0)}^{(1)}$$

$$B_{00} = E(A_0) = \square_0 = T_{0,0}^{0,0}(1,\ 0) = T_{0,0}^{(0)} = T_{0(0)}^{(0)}.$$

したがって例えば，$d_{1i}C_{00} = -\dot{x}_{61i}C_{10}$ は，$d_{1i}T^{0,0}_{0,0}(1,\ 1) = -\dot{x}_{61i}T^{0,0}_{1,0}(1,\ 1) = -\dot{x}_{61i}$ x $d_{\cdot 1}T^{0,0}_{0,0}(1,\ 1)$ を意味する．

13．2　ｵﾍﾟﾚﾀによる計算

a^t の lower-left($= a_{12}$) は 10．2 によって

$$(2.\ 1)\qquad E(a_{12}|x_6) = -x^t_{62}x_{61}A_1(x^t_{61}J^0_{11}x_{61} + x^t_{61}u_1)$$

$$+\ x^t_{61}x_{61}A_1(x^t_{62}J^0_{11}x_{61} + x^t_{62}u_1)$$

となる．ここで $A_1 = A_0(x^t_{62}x_{62})^{-1}$，さらに変数を $x_6 \rightarrow x_7$ と移せば $(x_6 = Q\cdot x_7)$，(2．1) の第1項の最初の部分を

$$(2.\ 2)\qquad E(A_1x^t_{71}R_{*}x_{71}x^t_{71}x_{72}) = E(x^t_{71}R_{*}x_{71}M_1)$$

$$= \Sigma_i r_{*i}E(x^2_{71i}M_1)$$

$$= \Sigma_i r_{*i}(d^2_{\square 1i} + 1)E(M_1)$$

と計算することができる．ただし

$$(2.\ 3)\qquad M_1 = A_1x^t_{71}x_{72}$$

$$E(M_1) = \dot{x}^t_{71}\dot{x}_{72}(C_{01} - C_{11})$$

$$= \dot{x}^t_{71}\dot{x}_{72}N$$

$$= M_{*1}.$$

いま，M_1 は $x_6 \rightarrow x_7$ において invariant である．また，$\dot{x}_{6j}$ $j = 1,\ 2$ に関する微分ｵﾍﾟﾚﾀ d_{ji} の性質は $\dot{x}_{7j}$ についても保存される．そうして C_{ij} は以下のようになっている．

$$C_{00} = E(A_1),\ d_{1i}C_{00} = -\dot{x}_{71i}C_{10}\ \ldots\ .$$

この $E(A_1)$ の explicit な表現は 10．2 にある．

M_{*1} の $\dot{x}_{71i}$，$\dot{x}_{72i}$ についての微分を計算すれば (以下 $\dot{x}_{7ji}$ $j = 1,\ 2$ を $\dot{x}_{ji}$ と書く)，

$$d_{1i}M_{*1} = \dot{x}_{2i}N - \langle \dot{x}_1,\ \dot{x}_2\rangle \dot{x}_{1i}N_1$$

$$d^2_{1i}M_{*1} = -2x^*_{2i}x^*_{1i}N_1 - (\langle x^*_1,\ x^*_2\rangle N_1 - \langle x^*_1,\ x^*_2\rangle x^{*2}_{1i}N_{11}),$$

いま $\langle x^*_1,\ x^*_2\rangle = 0$ で

$$d^2_{1i}M_{*1}|_0 = -2x^*_{2i}x^*_{1i}N_1.$$

そうすると

$$(d^2_{\square 1i} + 1)M_{*1}|_0 = -2x^*_{2i}x^*_{1i}N_1 + 2Nx^*_{1i}x^*_{2i},$$

ゆえに

$$(2.\ 4)\qquad \Sigma_i r_{*i}(d^2_{\square 1i} + 1)M_{*1} = 2\langle x^*_2,\ R_*x^*_1\rangle(N - N_1)$$

$$= 2\langle x^*_2,\ R_*x^*_1\rangle(1 - d_{*1})N$$

$$= 2\langle x^*_2,\ R_*x^*_1\rangle(1 - d_{*1})^2C_{01}.$$

ここで d_{*1} は $d_{*1}N = N_1$ となるようなｵﾍﾟﾚｰﾀである．また，C_{01} については $N = (1 - d_{*1})C_{01}$ となっている．つづいて第1項の 2 番目のﾌﾞﾛｯｸについては，

$$(2.\ 5)\qquad E(A_1x^t_{72}x_{71}x^t_{71}u_{(1)}) = E(x^t_{71}u_{(1)}M_1)$$

$$= \Sigma_i u_{(1)i}E(x_{1i}M_1)$$

$$= \Sigma_i u_{(1)i}d_{\square 1i}E(M_1)$$

$$= \Sigma_i u_{(1)i}(d_{1i} + x^*_{1i})E(M_1)$$

$$= \Sigma_i u_{(1)i}x^*_{2i}N$$

$$= u^t_{(1)}x^*_2N$$

$$= u^t_{(1)}x^*_2(1 - d_{*1})C_{01}.$$

さらに (2．1) の第2項をとりあげる．はじめに $E(x^t_{71}x_{71}A_1) = E(M_2)$ を計算すると，

$$(2.\ 6)\qquad E(M_2) = \Sigma_i E(x^2_{71i}A_1)$$

$$= \Sigma_i(d^2_{\square 1i} + 1)E(A_1)$$

$$= \Sigma_i(d^2_{\square 1i} + 1)C_{00}$$

ここで $d_{1i}C_{00} = -x^*_{1i}C_{10}$, $d^2_{1i}C_{00} = -C_{10} + x^{*2}_{1i}C_{20}$ に気づけば，(2．6) は

$$E(M_2) = \Sigma_i\{-C_{10} + x^{*2}_{1i}C_{20} - 2x^{*2}_{1i}C_{10} + (x^{*2}_{1i} + 1)C_{00}\}$$

$$= r_1 C_{20} - (2r_1 + T')C_{10} + (r_1 + T')C_{00}$$

$$= M_{\cdot 2}$$

となる．そうしておいて（2．1）の第2項の最初のﾌﾞﾛｯｸを

(2．7) $$E({}^t x_{\tau 2} U x_{\tau 1} {}^t x_{\tau 1} x_{\tau 1} A_1) = \Sigma_{i,j} U_{ij} E(x_{2i} x_{1j} M_2)$$

$$= \Sigma_{i,j} U_{ij} d_{\square 2i} d_{\square 1j} M_{\cdot 2}$$

と書く．以下 $d_{\square 2i} d_{\square 1j} M_{\cdot 2}$ を計算する．

$$d_{1j} M_{\cdot 2} = -r_1 x^*_{1j} C_{30} + x^*_{1j}(2r_1 + T' + 2)C_{20}$$

$$- x^*_{1j}(r_1 + T' + 4)C_{10} + 2x^*_{1j} C_{00}$$

$$d_{2i} d_{1j} M_{\cdot 2} = x^*_{1j} x^*_{2i} \{r_1 d_{\cdot 2} C_{30} - (2r_1 + T' + 2)d_{\cdot 2} C_{20}$$

$$+ (r_1 + T' + 4)d_{\cdot 2} C_{10} - 2d_{\cdot 2} C_{00}\}$$

$$d_{2i} M_{\cdot 2} = x^*_{2i} \{-r_1 d_{\cdot 2} C_{20} + (2r_1 + T')d_{\cdot 2} C_{10} - (r_1 + T')d_{\cdot 2} C_{00}\},$$

そうして

(2．8) $$d_{\square 2i} d_{\square 1j} M_{\cdot 2} = x^*_{2i} x^*_{1j} \{r_1 d_{\cdot 2} C_{30} - (2r_1 + T' + 2)d_{\cdot 2} C_{20}$$

$$+ (r_1 + T' + 4)d_{\cdot 2} C_{10} - 2d_{\cdot 2} C_{00} - r_1 d_{\cdot 2} C_{20}$$

$$+ (2r_1 + T')d_{\cdot 2} C_{10} - (r_1 + T')d_{\cdot 2} C_{00} - r_1 C_{30}$$

$$+ (2r_1 + T' + 2)C_{20} - (r_1 + T' + 4)C_{10} + 2C_{00}$$

$$+ r_1 C_{20} - (2r_1 + T')C_{10} + (r_1 + T')C_{00}\}.$$

ゆえに（2．7）の L.H.S. は

(2．9) $$\langle x^*_2, U x^*_1 \rangle \{-r_1(1 - d_{\cdot 2})C_{30} + (3r_1 + T' + 2)(1 - d_{\cdot 2})C_{20}$$

$$- (3r_1 + 2T' + 4)(1 - d_{\cdot 2})C_{10} + (r_1 + T' + 2)(1 - d_{\cdot 2})C_{00}\}$$

$$= \langle x^*_2, U x^*_1 \rangle \{r_1(1 - d_{\cdot 2})(1 - d_{\cdot 1})^3 C_{00}$$

$$+ (T' + 2)(1 - d_{\cdot 2})(d^2_{\cdot 1} C_{00} - 2d_{\cdot 1} C_{00} + C_{00})\}$$

$$= \langle x^*_2, U x^*_1 \rangle \{r_1(1 - d_{\cdot 2})(1 - d_{\cdot 1})^3 C_{00}$$

$$+ (T' + 2)(1 - d_{\cdot 2})(1 - d_{\cdot 1})^2 C_{00}\}.$$

同様にして

(2．10) $$E({}^t x_{\tau 1} x_{\tau 1} {}^t x_{\tau 2} u_{(1)} A_1) = \Sigma_i E(x_{\tau 2i} u_{(1)i} M_2)$$

$$= \Sigma_i u_{(1)i} d_{\square 2i} E(M_2)$$

$$= -{}^{t}u_{(1)}\mathring{x}_2 r_1 d_{\cdot 2} C_{20} + {}^{t}u_{(1)}\mathring{x}_2 (2r_1 + T')d_{\cdot 2} C_{10}$$

$$- {}^{t}u_{(1)}\mathring{x}_2 \{(r_1 + T')d_{\cdot 2} C_{00} - r_1 C_{20}$$

$$+ (2r_1 + T')C_{10} - (r_1 + T')C_{00}\}$$

$$= {}^{t}u_{(1)}\mathring{x}_2 \{r_1(1 - d_{\cdot 1})^2(1 - d_{\cdot 2})C_{00}$$

$$+ T'(1 - d_{\cdot 2})(1 - d_{\cdot 1})C_{00}\}.$$

これで (1. 2) の lower-left をすべて計算したことになる.

(2. 11) $$\text{lower-left} = -2\langle \mathring{x}_2,\ R_{\cdot}\mathring{x}_1\rangle(1 - d_{\cdot 1})^2 C_{01} - {}^{t}u_{(1)}\mathring{x}_2(1 - d_{\cdot 1})C_{01}$$

$$+ \langle \mathring{x}_2,\ U\mathring{x}_1\rangle r_1(1 - d_{\cdot 1})^3(1 - d_{\cdot 2})C_{00}$$

$$+ \{(T' + 2)\langle \mathring{x}_2,\ U\mathring{x}_1\rangle + r_1\,{}^{t}u_{(1)}\mathring{x}_2\}(1 - d_{\cdot 1})^2(1 - d_{\cdot 2})C_{00}$$

$$+ {}^{t}u_{(1)}\mathring{x}_2 T'(1 - d_{\cdot 1})(1 - d_{\cdot 2})C_{00},$$

さらにもう一度 $(1 - d_{\cdot 2})C_{00} = C_{01}$ に気づけば, (2. 11) は

(2. 12) $$\text{lower-left} = \Sigma_{i=1}^{3}\,\tilde{a}_{i1}^{(1)}(1,\ 2)(1 - d_{\cdot 1})^{i}(1 - d_{\cdot 2})C_{00}$$

となる. ただし

$$\tilde{a}_{31}^{(1)}(1,\ 2) = \langle \mathring{x}_2,\ U\mathring{x}_1\rangle r_1 = GB_{21} r_1$$

$$\tilde{a}_{21}^{(1)}(1,\ 2) = -2\langle \mathring{x}_2,\ R_{\cdot}\mathring{x}_1\rangle + (T' + 2)\langle \mathring{x}_2,\ U\mathring{x}_1\rangle + r_1\,{}^{t}u_{(1)}\mathring{x}_2$$

$$= -B{}^{t}G_{21} - GB_{21} + (T' + 1)GB_{21} + r_1(r_2\alpha_{\cdot 12} - GB_{21})$$

$\alpha_{\cdot 12}$: $\alpha_{\cdot}(2 \times 2)$ の upper-right

$$\tilde{a}_{11}^{(1)}(1,\ 2) = {}^{t}u_{(1)}\mathring{x}_2(T' - 1) = (r_2\alpha_{\cdot 12} - GB_{21})(T' - 1).$$

ここで例えば GB_{21} は $GB_{21} = s_{(2)}\,{}^{t}z^{*}GBz^{*}\,{}^{t}s_{(1)}$ となっている. (以下 $E({}^{t}a_{\cdot}(n',\ m'))$ がすべて (2. 12) の R.H.S. の関数形で書かれることを示す).

つづいて (1. 2) の upper-left を計算する. はじめに

(2. 13) $$E(a_{\cdot 11} | x_7) = A_0\{{}^{t}x_{71}R_{\cdot}x_{71} - ({}^{t}x_{72}x_{72})^{-1}\,{}^{t}x_{71}x_{72}\,{}^{t}x_{72}Ux_{71}$$

$$+ {}^{t}x_{71}u_{(1)} - ({}^{t}x_{72}x_{72})^{-1}\,{}^{t}x_{72}x_{71}\,{}^{t}x_{72}u_{(1)}\}.$$

ここで $E(A_0\,{}^{t}x_{71}R_{\cdot}x_{71})$ は

(2. 14) $\quad \Sigma_i r_{*i} E(x^2_{\tau 1i} A_0) = \Sigma_i r_{*i}(d^2_{\square 1i} + 1)E(A_0)$

となる．$E(A_0) = B_{00}$ と書いて (2. 14) は

$$
\begin{aligned}
&\Sigma_i r_{*i}\{-B_{10} + x^{*2}_{1i} B_{20} - 2x^{*2}_{1i} B_{10} + (x^{*2}_{1i} + 1)B_{00}\} \\
&\quad = -\mathrm{tr}(R_*)d_{*1}B_{00} + \langle x^*_1, R_* x^*_1\rangle d^2_{*1}B_{00} \\
&\qquad - 2\langle x^*_1, R_* x^*_1\rangle d_{*1}B_{00} + (\langle x^*_1, R_* x^*_1\rangle + \mathrm{tr}(R_*))B_{00} \\
&\quad = \langle x^*_1, R_* x^*_1\rangle(1 - d_{*1})^2 B_{00} + \mathrm{tr}(R_*)(1 - d_{*1})B_{00}
\end{aligned}
$$

となるのがわかる．さらに (2. 13) の第3項は

$$
\begin{aligned}
(2.\ 15) \quad E({}^t x_{\tau 1} u_{(1)} A_0) &= \Sigma_i u_{(1)i} d_{\square 1i} B_{00} \\
&= \Sigma_i u_{(1)i}(-x^*_{1i} d_{*1} B_{00} + x^*_{1i} B_{00}) \\
&= {}^t u_{(1)} x^*_1 (1 - d_{*1})B_{00}.
\end{aligned}
$$

第2，4項を計算するには，$E(A_1 {}^t x_{\tau 1} x_{\tau 2}) = E(M_1)$ を考える．$E(M_1)$ は (2. 3) に計算してある．そうすると ($x_{\tau 2}$ を x_2 と書く)

$$
\begin{aligned}
(2.\ 16) \quad E({}^t x_{\tau 2} U x_{\tau 1} {}^t x_{\tau 1} x_{\tau 2} A_1) &= \Sigma_{i,j} U_{ij} E(x_{2i} x_{1j} M_1) \\
&= \Sigma_{i,j} U_{ij} d_{\square 2i} d_{\square 1j} \langle x^*_2, x^*_1\rangle N.
\end{aligned}
$$

$\langle x^*_1, x^*_2\rangle N = M_{*1}$ と書いて，さらに $|_0$ を $\langle x^*_1, x^*_2\rangle = 0$ での evaluation を表すものとすれば，

$$
\begin{aligned}
d_{1j} M_{*1} &= x^*_{2j} N - \langle x^*_1, x^*_2\rangle x^*_{1j} N_1 \\
d_{1j} M_{*1}|_0 &= x^*_{2j} N \\
d_{2i} M_{*1} &= x^*_{1i} N - \langle x^*_1, x^*_2\rangle + \ldots \\
d_{2i} M_{*1}|_0 &= x^*_{1i} N \\
d_{2i} d_{1j} M_{*1} &= \delta_{ij} N - x^*_{2i} x^*_{2j} N_2 - x^*_{1i} x^*_{1j} N_1 + \ldots \\
d_{2i} d_{1j} M_{*1}|_0 &= \delta_{ij} N - x^*_{2i} x^*_{2j} N_2 - x^*_{1i} x^*_{1j} N_1.
\end{aligned}
$$

けっきょくこの結果から (2. 16) は

(2. 17) $\quad E({}^t x_{\tau 2} U x_{\tau 1} M_1) = \langle x^*_2, U x^*_2\rangle(N - N_2) + \langle x^*_1, U x^*_1\rangle(N - N_1) + N\mathrm{tr}(U)$

となる．さらに $N = C_{01} - C_{11} = (1 - d_{*1})C_{01} = (1 - d_{*1})(1 - d_{*2})C_{00}$ に気づいて (2. 17) を

(2. 18) $E(x^{t}_{?2}Ux_{?1}M_1) = \langle x^{*}_{2},\ Ux^{*}_{2}\rangle(1 - d_{\cdot 2})^2(1 - d_{\cdot 1})C_{00}$

$+ \langle x^{*}_{1},\ Ux^{*}_{1}\rangle(1 - d_{\cdot 1})^2(1 - d_{\cdot 2})C_{00}$

$+ tr(U)(1 - d_{\cdot 1})(1 - d_{\cdot 2})C_{00}$

と書く．つづいて $E(x^{t}_{?2}x_{?1}x^{t}_{?2}u_{(1)}A_1)$ は

(2. 19) $E(x^{t}_{?2}u_{(1)}M_1) = \Sigma_i u_{(1)i}E(x_{2i}M_1)$

$= \Sigma_i u_{(1)i}d_{D2i}\langle x^{*}_{1},\ x^{*}_{2}\rangle N$

$= \Sigma_i u_{(1)i}x^{*}_{1i}N$

$= u^{t}_{(1)}x^{*}_{1}(1 - d_{\cdot 1})(1 - d_{\cdot 2})C_{00}.$

これで upper-left の計算はおえたことになる．以下のように整理できる．

(2. 20) $\text{upper-left} = -(u^{t}_{(1)}x^{*}_{1} + tr(U))(1 - d_{\cdot 1})(1 - d_{\cdot 2})C_{00}$

$- \langle x^{*}_{2},\ Ux^{*}_{2}\rangle(1 - d_{\cdot 1})(1 - d_{\cdot 2})^2C_{00}$

$- \langle x^{*}_{1},\ Ux^{*}_{1}\rangle(1 - d_{\cdot 1})^2(1 - d_{\cdot 2})C_{00}$

$+ \langle x^{*}_{1},\ Ux^{*}_{1}\rangle(1 - d_{\cdot 1})^2B_{00}$

$+ (tr(R_{\cdot}) + u^{t}_{(1)}x^{*}_{1})(1 - d_{\cdot 1})B_{00}$

$= \Sigma^{1}_{k=0}\Sigma^{2}_{i=1}\Sigma^{2}_{j=0}\text{И}^{(k)}_{ij}(1,\ 1)(1 - d_{\cdot 1})^{i}(1 - d_{\cdot 2})^{j}T^{(k)}_{00},$

ただし

(2. 21) $\text{И}^{(0)}_{20}(1,\ 1) = \langle x^{*}_{1},\ R_{\cdot}x^{*}_{1}\rangle = GB_{11}$

$\text{И}^{(0)}_{10}(1,\ 1) = tr(R_{\cdot}) + u^{t}_{(1)}x^{*}_{1} = tr(G) + r_1\alpha_{\cdot 11} - GB_{11}$

$\text{И}^{(1)}_{11}(1,\ 1) = -(u^{t}_{(1)}x^{*}_{1} + tr(U)) = -\text{И}^{(0)}_{11}(1,\ 1)$

$\text{И}^{(1)}_{21}(1,\ 1) = -\langle x^{*}_{1},\ Ux^{*}_{1}\rangle = -GB_{11} = -\text{И}^{(0)}_{20}(1,\ 1)$

$\text{И}^{(1)}_{12}(1,\ 1) = -\langle x^{*}_{2},\ Ux^{*}_{2}\rangle = -GB_{22}$

$\text{И}^{(k)}_{ij}(1,\ 1) = 0$, otherwise

$T^{(1)}_{00} = C_{00}$

$T^{(0)}_{00} = B_{00} = E(A_0).$

この upper-left の表現は 10. 2, (2. 41) に等しいのがすぐわかる.

つづいて (1. 2) の upper-right を計算する. まず

$$
\begin{aligned}
(2.\ 22)\quad E(x^{t}_{72}U_{\cdot}x_{71}A_{0}) &= \Sigma_{i,j}U_{\cdot ij}E(x_{2i}x_{1j}A_{0}) \\
&= \Sigma_{i,j}U_{\cdot ij}d_{\square 2i}d_{\square 1j}B_{00} \\
&= \Sigma_{i,j}U_{\cdot ij}(x_{\dot{2}i}x_{\dot{1}j}d_{\cdot 2}B_{10} - x_{\dot{2}i}x_{\dot{1}j}d_{\cdot 1}B_{00} \\
&\qquad - x_{\dot{2}i}x_{\dot{1}j}d_{\cdot 2}B_{00} + x_{\dot{2}i}x_{\dot{1}j}B_{00}) \\
&= \Sigma_{i,j}U_{\cdot ij}\{x_{\dot{2}i}x_{\dot{1}j}(1 - d_{\cdot 2})(1 - d_{\cdot 1})B_{00}\}.
\end{aligned}
$$

さらに $v = Q_{\cdot}u_{2}$ と書いて, $E(x^{t}_{71}vA_{0})$ は

$$
\begin{aligned}
(2.\ 23)\quad E(x^{t}_{71}vA_{0}) &= \Sigma_{i}v_{i}E(x_{1i}A_{0}) \\
&= \Sigma_{i}v_{i}d_{\square 1i}B_{00} \\
&= \Sigma_{i}v_{i}(-x_{\dot{1}i}d_{\cdot 1}B_{00} + x_{\dot{1}i}B_{00}) \\
&= \langle x_{\dot{1}}, v\rangle(1 - d_{\cdot 1})B_{00}.
\end{aligned}
$$

また A_{1} を含む項は

$$
(2.\ 24)\quad E(x^{t}_{71}x_{72}x^{t}_{72}R_{\cdot}x_{72}A_{1}) = \Sigma_{i}r_{\cdot i}(d^{2}_{\square 2i} + 1)(\langle x_{\dot{1}}, x_{\dot{2}}\rangle N),
$$

ここで $d_{\square 2i}(\quad)$ を見ると,

$$d_{2i}\langle x_{\dot{1}}, x_{\dot{2}}\rangle N = x_{\dot{1}i}N - \langle x_{\dot{1}}, x_{\dot{2}}\rangle x_{\dot{2}i}N_{2}$$

$$d^{2}_{2i}\langle x_{\dot{1}}, x_{\dot{2}}\rangle N = -2x_{\dot{1}i}x_{\dot{2}i}N_{2} - \ldots$$

$$d^{2}_{2i}\langle x_{\dot{1}}, x_{\dot{2}}\rangle N|_{0} = -2x_{\dot{1}i}x_{\dot{2}i}N_{2}$$

となるから (2. 24) は

$$
\begin{aligned}
(2.\ 25)\quad \Sigma_{i}r_{\cdot i}(-2x_{\dot{2}i}x_{\dot{1}i}N_{2} + 2x_{\dot{2}i}x_{\dot{1}i}N) &= 2\langle x_{\dot{2}}, R_{\cdot}x_{\dot{1}}\rangle(N - N_{2}) \\
&= 2\langle x_{\dot{2}}, R_{\cdot}x_{\dot{1}}\rangle(1 - d_{\cdot 1})(1 - d_{\cdot 2})^{2}C_{00}.
\end{aligned}
$$

さらにもう 1 つの項は以下のように計算できる.

$$
\begin{aligned}
(2.\ 26)\quad E(x^{t}_{72}vx^{t}_{72}x_{71}A_{1}) &= \Sigma_{i}v_{i}d_{\square 2i}\langle x_{\dot{1}}, x_{\dot{2}}\rangle N \\
&= \Sigma_{i}v_{i}x_{\dot{1}i}N \\
&= \langle v, x_{\dot{1}}\rangle(1 - d_{\cdot 1})(1 - d_{\cdot 2})C_{00}.
\end{aligned}
$$

けっきょく upper-right は

(2. 27) $\quad \text{upper-right} = -2\langle \dot{x}_2, R_* \dot{x}_1\rangle(1 - d_{*1})(1 - d_{*2})^2 C_{00}$

$$+ \langle \dot{x}_2, U\dot{x}_1\rangle(1 - d_{*1})(1 - d_{*2})B_{00}$$

$$- v^t \dot{x}_1(1 - d_{*1})(1 - d_{*2})C_{00} + v^t \dot{x}_1(1 - d_{*1})B_{00}$$

$$= \Sigma_{k=0}^{1}\Sigma_{j=0}^{2}\tilde{n}_{1j}^{(k)}(2, 1)(1 - d_{*1})(1 - d_{*2})^j T_{00}^{(k)}$$

となる．ただし，

(2. 28) $\quad \tilde{n}_{11}^{(0)}(2, 1) = \langle \dot{x}_2, U\dot{x}_1\rangle = GB_{12}$

$$\tilde{n}_{10}^{(0)}(2, 1) = \langle \dot{x}_1, v\rangle$$

$$\tilde{n}_{11}^{(1)}(2, 1) = -\langle \dot{x}_1, v\rangle = -\tilde{n}_{10}^{(0)}(2, 1)$$

$$\tilde{n}_{12}^{(1)}(2, 1) = -2\langle \dot{x}_2, R_* \dot{x}_1\rangle$$

$$\tilde{n}_{ij}^{(k)}(2, 1) = 0, \text{ otherwise.}$$

さらにこの $\langle \dot{x}_1, v\rangle$ を以下のように書く．つまり，

(2. 29) $\quad \tilde{n}_{10}^{(0)}(2, 1) = \langle \dot{x}_1, v\rangle$

$$= \dot{x}_{61}^{t} Q_*^t Q_* u_2$$

$$= \dot{x}_{61}^{t} J_{12}^{0} \dot{x}_2 s_{(2)}^{t}$$

$$= s_{(1)} z_*^t H_1^t H_1 G H_2^t H_2 z^* s_{(2)}^t$$

$$= s_{(1)} z_*^t BG(I - B) z^* s_{(2)}^t$$

$$= s_{(1)} S^t S Y_{-1}^{*t} M Y_{-1}^{*} S^t S a_*^t s_{(2)}^t - GB_{12}$$

$$= (1, 0)\{\mathrm{diag}(r_1, r_2)\}(s_{(1)}\alpha^t s_{(2)}^t, s_{(2)}\alpha^t s_{(2)}^t)^t$$

$$- GB_{12}$$

$$= r_1 \alpha_{*12} - GB_{12}.$$

他の $\tilde{n}_{ij}^{(k)}(2, 1)$ についても

(2. 30) $\quad \tilde{n}_{12}^{(1)}(2, 1) = -2\langle \dot{x}_2, R_* \dot{x}_1\rangle = -(GB + BG^t)_{21}$

$$\tilde{n}_{11}^{(0)}(2, 1) = \langle \dot{x}_1, U\dot{x}_2\rangle = GB_{12}$$

と表すことができる．つづいて (1．2) の lower-right を以下計算する．はじめに

$$(2.\ 31)\quad E(x^t_{\tau 2}U_* x_{\tau 1} x^t_{\tau 2} x_{\tau 1} A_1) = \Sigma_{i,j} U_{*ij} E(x_{2i} x_{1j} x^t_{\tau 2} x_{\tau 1} A_1)$$

$$= \Sigma_{i,j} U_{*ij} d_{\square 2i} d_{\square 1j} \langle \mathring{x}_2,\ \mathring{x}_1 \rangle N.$$

ここで (2．31) の $d_{\square 2i} d_{\square 1j}(\quad)$ は

$$d_{\square 2i} d_{\square 1j} \langle \mathring{x}_2,\ \mathring{x}_1 \rangle N = -\mathring{x}_{1i} \mathring{x}_{1j} N_1 - \mathring{x}_{2j} \mathring{x}_{2i} N_2 + \mathring{x}_{1j} \mathring{x}_{1i} N$$

$$+ \mathring{x}_{2i} \mathring{x}_{2j} N + \delta_{ij} N.$$

したがって (2．31) は

$$(N - N_1)\langle \mathring{x}_1,\ U_* \mathring{x}_1 \rangle + (N - N_2)\langle \mathring{x}_2,\ U_* \mathring{x}_2 \rangle + N tr(U)$$

$$= \langle \mathring{x}_1,\ U_* \mathring{x}_1 \rangle (1 - d_{*1})^2 (1 - d_{*2}) C_{00} + N tr(U)$$

$$+ \langle \mathring{x}_2,\ U_* \mathring{x}_2 \rangle (1 - d_{*1})(1 - d_{*2})^2 C_{00}$$

となる．さらに $E(x^t_{\tau 1} v x^t_{\tau 2} x_{\tau 1} A_1)$ は

$$(2.\ 32)\quad \Sigma_j v_j E(x_{1j} x^t_{\tau 2} x_{\tau 1} A_1) = \Sigma_j v_j d_{\square 1j} \langle \mathring{x}_1,\ \mathring{x}_2 \rangle N$$

$$= \Sigma_j v_j \mathring{x}_{2j} N$$

$$= \langle v,\ \mathring{x}_2 \rangle (1 - d_{*1})(1 - d_{*2}) C_{00}.$$

つぎに $E(x^t_{\tau 2} R_* x_{\tau 2} x^t_{\tau 1} x_{\tau 1} A_1)$ を計算するには，まずこの $E(x^t_{\tau 1} x_{\tau 1} A_1)$ を考える．
(2．6) の結果から

$$(2.\ 32.a)\ E(x^t_{\tau 1} x_{\tau 1} A_1) = \langle \mathring{x}_1,\ \mathring{x}_1 \rangle C_{20} - (2r_1 + T')C_{10} + (r_1 + T')C_{00}$$

$$= r_1(1 - d_{*1})^2 C_{00} + T'(1 - d_{*1}) C_{00}$$

$$= B_*$$

となる．したがって $E(x^t_{\tau 2} R_* x_{\tau 2} x^t_{\tau 1} x_{\tau 1} A_1)$ は

$$(2.\ 32.b)\ E(x^t_{\tau 2} R_* x_{\tau 2} x^t_{\tau 1} x_{\tau 1} A_1) = \Sigma_i r_{*i}(d^2_{\square 2i} + 1) B_*.$$

ここで B_* の微分は以下のようになるのがわかる．

$$(2.\ 33)\quad d_{2i} B_* = -\mathring{x}_{2i} r_1 d_{*2} C_{20} + \mathring{x}_{2i}(2r_1 + T') d_{*2} C_{10} - \mathring{x}_{2i}(r_1 + T') d_{*2} C_{00}$$

$$= -\mathring{x}_{2i} r_1 d_{*2} (1 - d_{*1})^2 C_{00} - T' \mathring{x}_{2i} (1 - d_{*1}) d_{*2} C_{00}$$

$$(2.\ 34)\quad d^2_{2i} B_* = \mathring{x}^2_{2i} r_1 d^2_{*2} (1 - d_{*1})^2 C_{00} - r_1 d_{*2} (1 - d_{*1})^2 C_{00}$$

$$+ \mathring{x}^2_{2i} T' (1 - d_{*1}) d^2_{*2} C_{00} - T' (1 - d_{*1}) d_{*2} C_{00}.$$

この 2 次微分は 1 次微分から直接出る．そうすると (2. 32.b) は

(2. 35) $E(x^{t}_{\tau 2}R_{*}x_{\tau 2}x^{t}_{\tau 1}x_{\tau 1}A_{1})$

$$
\begin{aligned}
&= \Sigma_{i} r_{*i}\{\mathring{x}^{2}_{2i} r_{1} d^{2}_{*2}(1 - d_{*1})^{2} C_{00} - r_{1} d_{*2}(1 - d_{*1})^{2} C_{00} \\
&\qquad + \mathring{x}^{2}_{2i} T'(1 - d_{*1}) d^{2}_{*2} C_{00} - T'(1 - d_{*1}) d_{*2} C_{00} \\
&\qquad - 2\mathring{x}^{2}_{2i} r_{1}(1 - d_{*1})^{2} d_{*2} C_{00} - 2T'\mathring{x}_{2i}(1 - d_{*1}) d_{*2} C_{00} \\
&\qquad + (1 + \mathring{x}^{2}_{2i})(r_{1}(1 - d_{*1})^{2} C_{00} + T'(1 - d_{*1}) C_{00})\} \\
&= r_{1}\langle \mathring{x}_{2}, R_{*}\mathring{x}_{2}\rangle(1 - d_{*2})^{2}(1 - d_{*1})^{2} C_{00} \\
&\quad + T'\langle \mathring{x}_{2}, R_{*}\mathring{x}_{2}\rangle(1 - d_{*2})^{2}(1 - d_{*1}) C_{00} \\
&\quad + tr(R_{*}) r_{1}(1 - d_{*2})(1 - d_{*1})^{2} C_{00} \\
&\quad + tr(R_{*}) T'(1 - d_{*2})(1 - d_{*1}) C_{00}.
\end{aligned}
$$

ここですぐ気づくように，$E(x^{t}_{\tau 2}R_{*}x_{\tau 2}x^{t}_{\tau 1}x_{\tau 1}A_{1})$ は $(1 - d_{*1})^{i}(1 - d_{*2})^{j}C_{00}$ の加重和となっている．

つづいて $E(x^{t}_{\tau 2}vx^{t}_{\tau 1}x_{\tau 1}A_{1})$ は

(2. 36)
$$
\begin{aligned}
E(x^{t}_{\tau 2}vx^{t}_{\tau 1}x_{\tau 1}A_{1}) &= \Sigma_{i} v_{i} d_{\circ 2i} B_{*} \\
&= \Sigma_{i} v_{i}\{-\mathring{x}_{2i} r_{1} d_{*2}(1 - d_{*1})^{2} C_{00} - T'\mathring{x}_{2i} d_{*2}(1 - d_{*1}) C_{00} \\
&\qquad + r_{1}\mathring{x}_{2i}(1 - d_{*1})^{2} C_{00} + T'\mathring{x}_{2i}(1 - d_{*1}) C_{00}\} \\
&= v^{t}\mathring{x}_{2} r_{1}(1 - d_{*2})(1 - d_{*1})^{2} C_{00} \\
&\quad + v^{t}\mathring{x}_{2} T'(1 - d_{*2})(1 - d_{*1}) C_{00}
\end{aligned}
$$

となる．したがって (2. 31), (2. 32), (2. 35), (2. 36) から，lower-right は以下のように整理される．

(2. 37)
$$
\begin{aligned}
\text{lower-right} &= (v^{t}\mathring{x}_{2}T' + tr(R_{*})T' - tr(U))(1 - d_{*1})(1 - d_{*2}) C_{00} \\
&\quad + r_{1}(v^{t}\mathring{x}_{2} + tr(R_{*}))(1 - d_{*1})^{2}(1 - d_{*2}) C_{00} \\
&\quad + T'\langle \mathring{x}_{2}, R_{*}\mathring{x}_{2}\rangle(1 - d_{*1})(1 - d_{*2})^{2} C_{00} \\
&\quad + r_{1}\langle \mathring{x}_{2}, R_{*}\mathring{x}_{2}\rangle(1 - d_{*1})^{2}(1 - d_{*2})^{2} C_{00} \\
&\quad - \langle \mathring{x}_{1}, U_{*}\mathring{x}_{1}\rangle(1 - d_{*1})^{2}(1 - d_{*2}) C_{00} \\
&\quad - \langle \mathring{x}_{2}, U_{*}\mathring{x}_{2}\rangle(1 - d_{*1})(1 - d_{*2})^{2} C_{00}
\end{aligned}
$$

$$- v^t x_2^\circ (1 - d_{*1})(1 - d_{*2}) C_{00}$$

$$= \Sigma_{i,j=1}^{2} \tilde{a}_{ij}^{(1)}(2, 2)(1 - d_{*1})^i (1 - d_{*2})^j C_{00},$$

ただし

$$C_{00} = T_{00}^{(1)}$$

$$\tilde{a}_{11}^{(1)}(2, 2) = v^t x_2^\circ (T' - 1) + tr(R_*)T' - tr(U)$$

$$= (T' - 1)(r_2 \alpha_{*22} - GB_{22}) + (T' - 1)tr(G)$$

$$\tilde{a}_{21}^{(1)}(2, 2) = v^t x_2^\circ r_1 + tr(R_*) r_1 - \langle x_1^\circ, U_* x_1^\circ \rangle$$

$$= r_1(r_2 \alpha_{*22} - GB_{22} + tr(G)) - GB_{11}$$

$$\tilde{a}_{12}^{(1)}(2, 2) = T' \langle x_2^\circ, R_* x_2^\circ \rangle - \langle x_2^\circ, U_* x_2^\circ \rangle$$

$$= (T' - 1) GB_{22}$$

$$\tilde{a}_{22}^{(1)}(2, 2) = r_1 \langle x_2^\circ, R_* x_2^\circ \rangle$$

$$= r_1 GB_{22}.$$

けっきょくこれで OLS 推定値 (normalize されたものではない)の 1 次ﾓｰﾒﾝﾄをすべて計算したことになる. 以下のように整理できる.

$$\text{lower-right} = \Sigma_{i,j=1}^{2} \tilde{a}_{ij}^{(1)}(2, 2)(1 - d_{*1})^i (1 - d_{*2})^j T_{00}^{(1)}$$

$$\text{lower-left} = \Sigma_{i=1}^{3} \tilde{a}_{i1}^{(1)}(1, 2)(1 - d_{*1})^i (1 - d_{*2}) T_{00}^{(1)}$$

$$\text{upper-left} = \Sigma_{k=0}^{1} \Sigma_{i=1}^{2} \Sigma_{j=0}^{2} \tilde{a}_{ij}^{(k)}(1, 1)(1 - d_{*1})^i (1 - d_{*2})^j T_{00}^{(k)}$$

$$\text{lower-right} = \Sigma_{k=0}^{1} \Sigma_{j=0}^{2} \tilde{a}_{1j}^{(k)}(2, 1)(1 - d_{*1})(1 - d_{*2})^j T_{00}^{(k)}.$$

そうすると, $1 \leqq n', m' \leqq 2$ で a_*^t の (n', m') 要素の期待値は

$$(2.\ 38) \quad E(a_*^t(n', m')) = \Sigma_{k=0}^{1} \Sigma_{i=1}^{3} \Sigma_{j=0}^{2} \tilde{a}_{ij}^{(k)}(n', m')(1 - d_{*1})^i (1 - d_{*2})^j T_{00}^{(k)}$$

となる. さらにここで $(1 - d_{*1})^i (1 - d_{*2})^j T_{00}^{(k)}$ を考える. いま

$$(1 - d_{*2}) T_{00}^{(k)} = T_{00}^{(k)} - (T_{00}^{(k)} - T_{01}^{(k)}) = T_{01}^{(k)}$$

$$(1 - d_{*2})^2 T_{00}^{(k)} = T_{01}^{(k)} - (T_{01}^{(k)} - T_{02}^{(k)}) = T_{02}^{(k)}$$

となるのがわかる．したがって一般に $(1 - d_{*2})^{j}T_{00}^{(k)} = T_{0j}^{(k)}$ となる．つづいて

$(1 - d_{*1})^{i}T_{00}^{(k)}$ は

$$(1 - d_{*1})T_{00}^{(k)} = T_{00}^{(k)} - T_{10}^{(k)}$$

$$(1 - d_{*1})^{2}T_{00}^{(k)} = (1 - d_{*1})T_{00}^{(k)} - (1 - d_{*1})T_{10}^{(k)}$$

$$= T_{00}^{(k)} - 2T_{10}^{(k)} + T_{20}^{(k)},$$

さらに計算をつづければすぐにわかるが，けっきょく

$$(1 - d_{*1})^{i}T_{00}^{(k)} = \Sigma_{s=0}^{i}(-1)^{s}{}_{i}C_{s}T_{s0}^{(k)}$$

となる．つまりｵﾍﾟﾚｰﾀ $(1 - d_{*1})^{i}$ においては，通常の 2 項展開が許される．こうした内容をもう一度書けば，

$$(1 - d_{*1})^{i}T_{00}^{(k)} = \Sigma_{s=0}^{i}{}_{i}C_{s}(-1)^{s}d_{*1}^{s}T_{00}^{(k)}$$

$$= \Sigma_{s=0}^{i}(-1)^{s}{}_{i}C_{s}T_{s0}^{(k)}.$$

そうすると (2. 38) の $E(a_{*}^{t}(n', m'))$ はｵﾍﾟﾚｰﾀによることなく，以下のようになる．

(2. 39) $$E(a_{*}^{t}(n', m')) = \Sigma_{k=0}^{1}\Sigma_{i=1}^{3}\Sigma_{j=0}^{2}\Sigma_{s=0}^{i}\theta_{ij}^{(k)}(n', m')$$

$$\times\ {}_{i}C_{s}(-1)^{s}T_{sj}^{(k)},$$

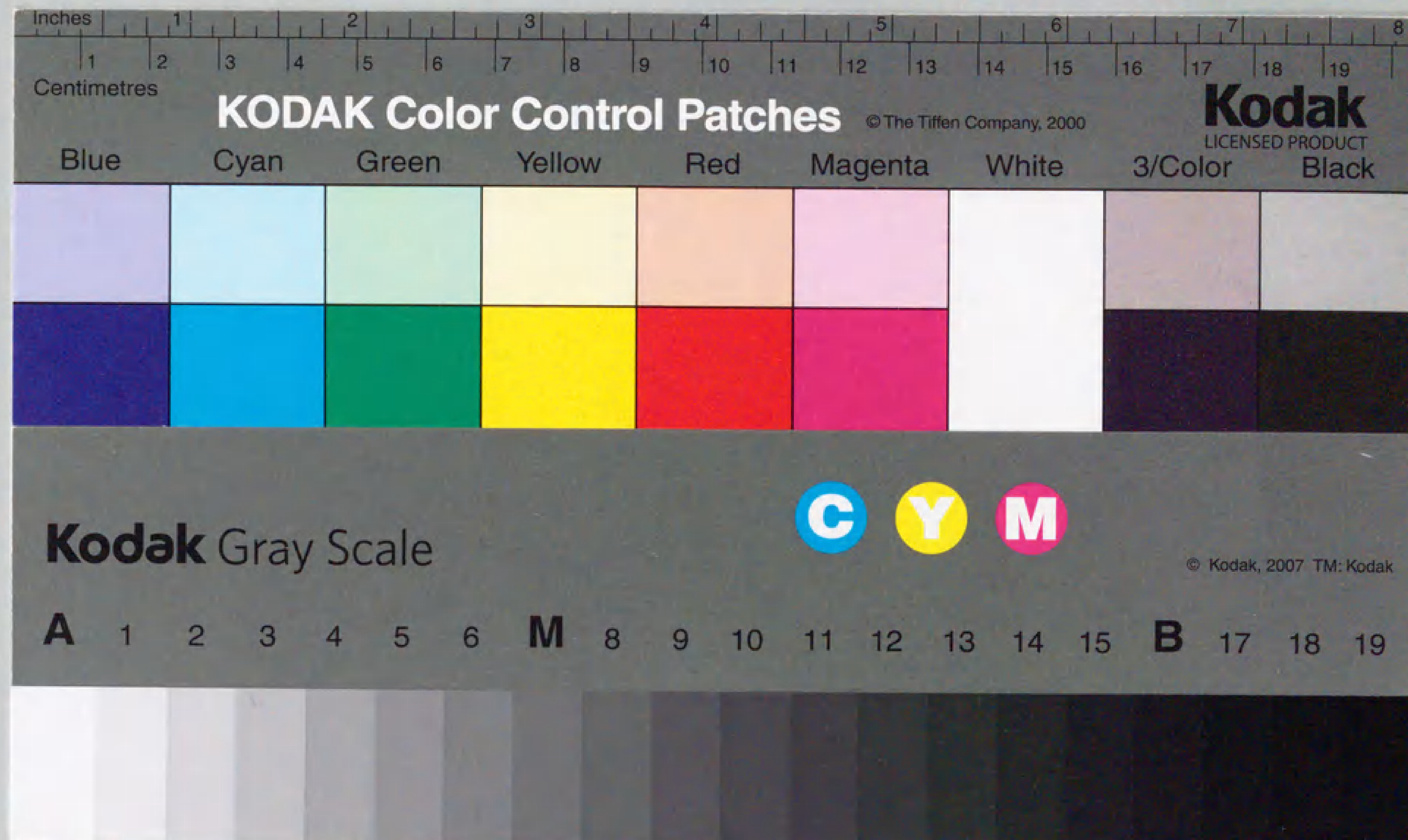
ただしこの $\theta_{ij}^{(k)}(n', m')$ はさきに定められるﾊﾟﾗﾒｰﾀである．

参考文献

[1] Dhrymes, P. J., Distributed Lags: Problems of Estimation and Formulation, San Francisco: Holden-Day, 1971.

[2] 片岡佑作「2 変量分布ﾗｸﾞﾓﾃﾞﾙの最小2乗推定値: 2」経済経営論叢, 第19巻, 第4号, 1985年, pp. 157-170.

[3] ―――― 「2 変量分布ﾗｸﾞﾓﾃﾞﾙにおける OLS 推定値の 2 次ﾓｰﾒﾝﾄ近似」経済経営論叢, 第22巻, 第2号, 1987年, pp. 1-18.


Inches
Centimetres
KODAK Color Control Patches
© The Tiffen Company, 2000
Kodak
LICENSED PRODUCT
Blue
Cyan
Green
Yellow
Red
Magenta
White
3/Color
Black
Kodak Gray Scale
C Y M
© Kodak, 2007 TM: Kodak
A 1 2 3 4 5 6 M 8 9 10 11 12 13 14 15 B 17 18 19