学位論文

ボゾン・フェルミオン展開法

１９９３年

谷口　公一

目次

1　序論

フェルミオンである核子が核力によって形づくる原子核は、自然界において強相関孤立有限量子多体系という特徴的な位置を占める存在である [1][2]。その密度は核子数によらずほぼ一定である。これはいわゆる密度の飽和性と呼ばれるものであり、核力の到達距離（～１ｆｍ）が短いことに起因する。このことは１核子あたりの結合エネルギーがほぼ一定になる、いわゆる結合エネルギーの飽和性が成り立つ原因でもあり、また原子核が比較的明確な表面を持つ所以でもある。このように原子核は強い核力によって核子が凝集している系である。一方、核子はフェルミオンであるために、パウリ原理が重要な役割を演じる。顕著な例として、核子どうしの平均自由行程をあげることができる。その長さは、核力の強さから直感されるものに反して、核子間距離に比べて長い。

このような特徴を反映して原子核の運動形態は興味深いものとなっている。それは、原子核の模型として液滴模型と殻模型という、一見して相反する２つの模型が存在する原因となっている。前者は強い核力による凝集系という側面から原子核を捉えたものである。この液滴の表面振動を量子化すれば、調和振動子型の励起スペクトルを得る。この模型は原子核の集団運動の模型の一つである。後者は、核子が一体ポテンシャルの中を独立に運動（非集団運動）する描像に立つ、いわゆる独立粒子模型であり、前者とはまったく異なった模型である。後者の根拠としては、パウリ原理による核子の長い平均自由行程を挙げることができる。一見して対立するこの様な模型の共存は、原子核の運動形態の多様性の例証といえるであろう。むろんこれらの模型は、原子核の特徴の典型的な一側面のみを捉えたものである。強い核力とパウリ原理とが拮抗する性質のものであることを考慮すると、現実の原子核では、両者の絡み合いにより、集団的励起モードと非集団的励起モードが複雑に結合しあう多様な運動形態が存在することになる。

有限量子多体系としての原子核の典型的な集団運動の例として、サマリウム (S_m) の同位体を挙げることができる。その励起スペクトルをみると、$^{148}S_m$の場合は、等間隔の調和振動子型に近い励起スペクトルを示し、その形は球形であると考えられる。一方$^{154}S_m$は回転型スペクトルを示す。これはその形が葉巻形に変形した結果であると考えられる。従って$^{148}S_m$から$^{154}S_m$へと中性子数を増やすと、原子核の形が球形から葉巻型に変化していくと考えられる。しかしながら、その変化は明確なものではなく、両者の中間にある$^{150}S_m$、$^{152}S_m$に至っては、振動子型とも回転型ともいえない複雑なスペクトルを示す。この様な原子核は遷移領域核と呼ばれ、原子核のかなり広範な領域に現れる。

遷移領域核の励起スペクトルが示す集団運動を、フェルミオンである核子の有効ハミルトニアンに基づき微視的に解明することは重要な課題である [3][4][5][6][7][8][9]。この課題

を解決するためには、まず有効ハミルトニアンに集団運動を引き起こす重要な相関を取り込むことが必要であり [10][11][12]、さらに、そのハミルトニアンをできるだけ良い近似で解くための多体問題的手法を確立することが必要である。有効ハミルトニアンに十分な相関が取り込まれているかどうかは、最終的には現実の現象との比較のもとで判定される。その際、使用されている多体問題的手法が十分信頼性のあるものであることが前提条件となる。その意味で、後者の課題を追求することは前者の課題の進展の為にも重要である。

この論文は、微視的理論のうち後者の多体問題的手法を取り扱うことが目的である。従って、前者の問題に関してはここで簡単に触れるにとどめる。有効ハミルトニアンは通常、殻模型のそれと残留相互作用の二つの部分で表される。前者は原子核の典型的な一面を捉えた模型である。また、核力が短距離力であることを考慮すると、平均場の形がそのまま系の粒子数分布に反映されると考えられる。殻模型のハミルトニアンを無摂動項として採用することは、核子相関が球対称の平均場として部分的に取り入れられたことを意味する。残りの相関は残留相互作用として記述されることになる。この残留相互作用に、集団運動を引き起こす主要な相関を模型化して組み込む。具体的には、原子核を球形に保つ働きを対相関力で、変形させる働きを四重極相関力で代表させる。これら二つの相互作用の強さは核子数に依存するパラメータで決まる。

以下この様にして系のハミルトニアンが与えられたものと仮定して、この論文の主題に関連する多体問題的手法を考察する。対相関力は、BCS 理論を適用して準粒子を導入することにより、平均場の中に予め取り込むのが通例である。そこで以下準粒子描像を取ることにする。

集団的励起モードを導出する最もよく知られた多体問題的手法は乱雑位相近似 (RPA) である。RPA 方程式は時間依存ハートレー・フォック (TDHF) 方程式から導出する事ができる。TDHF の方法は、波動関数をスレーター行列とみなし、その時間発展の方程式を変分法により与える方法である。TDHF 方程式の解をハートレー・フォック (HF) 基底状態の回りの微小振動解として求めると、RPA 方程式が導出される。良く知られているように、原子核のように相互作用が引力の場合、この近似で求めた励起エネルギーは最低励起状態を除いて、もとの準粒子対の励起エネルギーとさほどずれない値を取る。最低の励起エネルギーは相互作用が強くなるに従い低くなる。前者が非集団的励起モードで後者が集団的励起モードに対応する。この近似の励起モードの生成消滅演算子はそれぞれ準粒子対の生成消滅の線形結合で与えられる。このような準粒子対の線形結合をフォノンと呼ぶ。(フォノンという用語は以後もフェルミオン系に対してのみ使う。) 非集団的励起モードが特定の準粒子対の寄与が大きいのに対して、集団的励起モードは多数の準粒子対のコヒーレントな重ね合わせからなる。対相関より四重極相関が勝り、HF 基底状態として球対称解から回

転対称性を破る変形解が安定になる過程において、集団的励起モードの励起エネルギーは徐々に小さくなり、変形解が安定になるところではゼロとなる。このゼロになる点が、球形から変形へ平均場が代わる臨界点を与える。HF 基底状態が球対称の場合、集団的フォノン演算子をボゾン演算子とみなし、その多重励起状態を作ると調和振動型スペクトルを得る。他方、回転モードの発生は、波動関数が回転対称性を破っていることに起因し、RPA 近似ではそれはゼロ・エネルギー・モードになる。これは、いわゆるゴールドストン・モードである。このように、RPA の枠内で集団的励起モードを選びだした場合、回転運動はゼロ・エネルギー・モードとしてしか記述されない。

振動モードから回転モードにいたる非調和性の強い集団運動を記述するには、RPA の様な小振幅理論では全く不十分である。この非調和効果は上述の近似において無視された効果を採り上げることにより評価することができる。この非調和効果は大別して次の二つからなる。一つは、力学的なモード・モード結合効果（集団的励起モードと非集団的励起モードとの結合効果）であり、他の一つはフェルミオン対に働くパウリ効果である。

非調和効果を取り扱う有力な手法の一つにボゾン展開法 (BET) がある [13][14]。これはフォノンに限らず、フェルミオン対演算子をボゾンの級数展開で表し、非調和効果の一因であるパウリ効果を逐次的に取り入れて行く方法である。BET はフェルミオン空間をボゾン空間に写像する方法として明確に定式化されている [15]。したがって、集団運動を微視的に解明するには明快な方法である。しかし、第 2節で詳しく分析するように、BET を現実の系に適用するためには、解決しなければならない問題点がある。例えば先に述べたように、非調和効果を取り扱うためには、集団的励起モードと非集団的励起モードの結合を考慮しなければならないが、非集団的励起モードのボゾン展開の収束性は必ずしも良くない [6]。また、BET はフェルミオン空間をボゾンの部分空間（これを物理的部分空間と呼ぶ）に一対一に写像するが、この物理的空間の基底ベクトルを正しく構成するためには予めモードを制限しておかねばならない [16]。前者の収束性の問題を回避するために、有限展開型の BET であるダイソン型 BET が最近勢力的に研究されてきた [17][18][19]。しかし、有限展開の代償としてこの展開は非エルミート型の展開となる。さらにこの場合でも、状態ベクトルとして簡単なものを使用するには採り上げるモードに制限が付くことには変わりがない。

BET のこの様な制限は、モードの特徴的な性質がそのボゾン展開の初項に十分反映されていないことによると考えられる。すなわち、ボゾン的性質の強くない非集団的励起モードの生成消滅演算子を第ゼロ近似としてボゾンの生成消滅演算子で表さなければならないところに問題がある。そこで、フェルミオン空間をボゾン空間に写像するのではなく、ボゾン・フェルミオン空間に写像する。そして、第ゼロ近似で集団的励起モードはボゾン演

算子で、非集団的励起モードはフェルミオン演算子で表し、それだけでは捉えきれない残りのパウリ効果を以下ボゾン、フェルミオン演算子の級数展開で表す。この様な方法を確立すれば、非集団的励起モードに対しても展開の収束性が良く、しかもすべてのモードを取り扱えることが期待できる。この論文の主目的はそのような方法、すなわちボゾン・フェルミオン展開法 (BFET)[20][21] を呈示することにある。

なお、フェルミオン系の集団運動をボゾン・フェルミオン系として記述する方法に、核場の理論 (nuclear field theory; NFT)[22][23][24][25]、力学的な核場の理論 (dynamical nuclear field theory; DNFT)[26][27][28] がある。前者は、非集団的励起モードを表すフェルミオンに加えて、集団的励起モードに対応するボゾンを独立した場として導入し、摂動論を適用する。その際余計な自由度として導入されたボゾンと集団運動モードとの重複問題は、ファインマン図に一定の規則で制限を与えることにより回復する。この方法では、ボゾンとフェルミオンの結合項は、人為的に外から持ち込まざるを得ない。一方 DNFT は準縮退系に対する摂動の手法を駆使して、フェルミオンの自由度とボゾンの自由度の間に自己無撞着条件と呼ばれる条件を課すことにより、ボゾン・フェルミオン結合項を微視的に導出する方法であり、NFT の改良版とみなすことができる。しかしながらこの方法と、やはり微視的理論である BET との関連は必ずしも明確ではなく、BET を導出するためにはもともとの定式化を修正する必要がある [28][29]。BFET も余分な自由度であるボゾンを含む理論であるが、フェルミオン空間からボゾン・フェルミオン空間への写像を採用することにより、パウリ原理の効果を系統的かつ明確に把握する点でこれらの方法とは異なっている。

この論文の構成は以下通りである。第2節では BFET を導入するに当たって、BET を紹介する。そこでは、BFET で踏襲される概念、用語を導入する。また BET の限界について論じる。第3節では、BET の欠点を改善するために著者達が考案した BFET の内容を呈示する。この節が本論文の最も中心的な部分である。4節では、BFET と BET の比較検討を行う。第5節は結論にあてる。

2 ボゾン展開法

良く知られているように、適切な状況下でフェルミオンの（準）粒子対演算子の交換関係はボゾンのそれに近似することができる。その様な近似をボゾン近似と呼ぶ。この近似はもともとの準粒子対を対応するボゾンに置き換える近似である。ボゾン展開法 (BET) の基本となる発想は、ボゾン近似で無視されたパウリ原理の効果をフェルミオンの対演算子をボゾンの多項式で表すことによりとり入れて行くところにあった。つまり、準粒子対演算子をそのような多項式で表すことにより、その交換関係が近似的により良く再現できるということである。さらに進んで言えばその方法は、フェルミオン空間をボゾン空間の中に写像する方法である。より正確に述べると、準粒子対演算子を基本的に取り扱うことから想像できるように、BET はフェルミオン空間のうち、粒子数が偶数の空間をボゾン空間の中に写像する方法である。粒子数が奇数個の系の定式化は別の取扱いがなされる。

本論文の主目的であるボゾン・フェルミオン展開法の定式化は、ボゾン展開法を改善し、ある意味でその拡張版と言えるものである。従ってまずこの BET について、我々の仕事と最も関連の深い部分についてその概略を述べる。BET については数多くの仕事がなされてきた（詳細は最近の総合報告 [13] を参照）。我々はその中から、写像の概念をはじめて明確に打ちだした丸森・山村・徳永 (MYT) の方法を紹介する [15]。この方法は、（偶数個の）全フェルミオン空間を忠実にボゾン空間に写像する方法である。その結果得られた準粒子対演算子のボゾンに関する展開形式は展開の収束性が悪いことがわかった。そこで次に、展開の収束性を良くするためにどのようにこの方法が修正され、その結果 BET にどの様な制限がつくことになるのかを具体的に示す。

2.1 丸森・山村・徳永の方法

準粒子の生成消滅演算子を $a^\dagger_\alpha$、a_α、その真空の状態ベクトルを $|0\rangle_F$ とする。ここで、α は 1 粒子状態の量子数を表すものとする。準粒子対演算子 $A^\dagger_{\alpha\beta} \equiv a^\dagger_\alpha a^\dagger_\beta$、$A_{\alpha\beta} \equiv a_\beta a_\alpha$、$B^\dagger_{\alpha\beta} \equiv a^\dagger_\alpha a_\beta$、$B_{\alpha\beta} \equiv a^\dagger_\beta a_\alpha$、で定義すると、$A_{\alpha\beta}$、$A^\dagger_{\alpha\beta}$ の交換関係は

$$\begin{aligned}[A_{\alpha_1\beta_1}, A^\dagger_{\alpha_2\beta_2}] \;=\; & \delta_{\alpha_1\alpha_2}\delta_{\beta_1\beta_2} - \delta_{\alpha_1\beta_2}\delta_{\alpha_2\beta_1} \\ & -\delta_{\alpha_1\alpha_2}B_{\beta_1\beta_2} + \delta_{\alpha_1\beta_2}B_{\beta_1\alpha_2} \\ & -\delta_{\beta_1\beta_2}B_{\alpha_1\alpha_2} + \delta_{\beta_1\alpha_2}B_{\alpha_1\beta_2},\end{aligned} \tag{2.1}$$

となる。

この交換関係で第 3 項以降を無視するのが、ボゾン近似である。その近似で、準粒子対演算子 $A_{\alpha\beta}$、$A^\dagger_{\alpha\beta}$ に対応する演算子、$b_{\alpha\beta}$、$b^\dagger_{\alpha\beta}$ を導入する。それらは次の関係を満たす：

$$[b_{\alpha_1\beta_1}, b^\dagger_{\alpha_2\beta_2}] = \delta_{\alpha_1\alpha_2}\delta_{\beta_1\beta_2} - \delta_{\alpha_1\beta_2}\delta_{\alpha_2\beta_1}, \quad b^\dagger_{\alpha\beta} = -b^\dagger_{\beta\alpha}. \tag{2.2}$$

また、これら演算子に対する真空の状態ベクトルを $|0\rangle_B$ とする。これは、$|0\rangle_F$ に対応する。これらは、イデアルボソンと呼ばれる。このように、ボソン展開法は、ボソン近似をもとに上記のようなフェルミオン対演算子に対応するイデアルボソンを導入することから始まる。

ここで状態ベクトルに着目してそれらの対応関係を調べてみる。フェルミオンの規格直交ベクトルは

$$|N;\alpha\beta\rangle_F \equiv |\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2\cdots\alpha_N\beta_N\rangle_F \equiv a^\dagger_{\alpha_1}a^\dagger_{\beta_1}a^\dagger_{\alpha_2}a^\dagger_{\beta_2}\cdots a^\dagger_{\alpha_N}a^\dagger_{\beta_N}|0\rangle_F, \tag{2.3}$$

である。一方イデアルボソンの直交系は

$$|N;\alpha\beta\rangle_B \equiv |\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2\cdots\alpha_N\beta_N\rangle_B \equiv b^\dagger_{\alpha_1\beta_1}b^\dagger_{\alpha_2\beta_2}\cdots b^\dagger_{\alpha_N\beta_N}|0\rangle_B, \tag{2.4}$$

である。ボソン近似は演算子の対応関係を

$$A^\dagger_{\alpha\beta} \leftrightarrow b^\dagger_{\alpha\beta}, \tag{2.5}$$

とする近似である。まず、この近似のもと上記の状態ベクトルの対応関係を調べる。そのためにまず準粒子の真空 $|0\rangle_F$ とボソンの真空 $|0\rangle_B$ を一対一に対応させる：

$$|0\rangle_F \leftrightarrow |0\rangle_B. \tag{2.6}$$

式 (2.5)、(2.6) より、1 準粒子励起状態に関しては、

$$|\alpha\beta\rangle_F = A^\dagger_{\alpha\beta}|0\rangle_F \leftrightarrow b^\dagger_{\alpha\beta}|0\rangle_B = |\alpha\beta\rangle_B, \tag{2.7}$$

なる一対一の対応関係を得る。しかしながら、2 準粒子対励起状態でその対応関係はすでに一対一ではない。具体的には、

$$|\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2\rangle_F = \left\{ \begin{array}{l} A^\dagger_{\alpha_1\beta_1}A^\dagger_{\alpha_2\beta_2}|0\rangle_F \to b^\dagger_{\alpha_1\beta_1}b^\dagger_{\alpha_2\beta_2}|0\rangle_B = |\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2\rangle_B \\ A^\dagger_{\alpha_1\beta_2}A^\dagger_{\beta_1\alpha_2}|0\rangle_F \to b^\dagger_{\alpha_1\beta_2}b^\dagger_{\beta_1\alpha_2}|0\rangle_B = |\alpha_1\beta_2\beta_1\alpha_2\rangle_B \end{array} \right., \tag{2.8}$$

となる。これはフェルミオンの状態ベクトル、$|\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2\rangle_F$ に、イデアルボソンの独立な状態ベクトル $|\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2\rangle_B$ と $|\alpha_1\beta_2\beta_1\alpha_2\rangle_B$ が対応していることを示す。この様な事態を引き起こした原因は、ボソン近似において無視されたパウリ原理の効果である。

式 (2.3) の状態ベクトルが、その添え字に対して完全反対称になっているのに対して、式 (2.4) は不完全である。これは、このイデアルボソンの状態ベクトルが、もともとのフェルミオンの状態ベクトルのパウリ原理を部分的にしか取り入れていないからである。そこで、式 (2.4) の状態ベクトルから添え字が完全反対称になる次の規格直交ベクトル、

$$\begin{gathered} |N;\alpha\beta\rangle\rangle_B \equiv |\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2\cdots\alpha_N\beta_N\rangle\rangle_B \equiv \tfrac{1}{\sqrt{(2N-1)!!}}\textstyle\sum_P{}'(-)^P|N;\alpha\beta\rangle_B, \\ ((2N-1)!! \equiv (2N-1)\cdot(2N-3)\cdots 1), \end{gathered} \tag{2.9}$$

をつくると、これがまさしく$|N;\alpha\beta\rangle_F$に一対一に対応するイデアルボゾンの状態ベクトルとなる。以上のことからわかるように、フェルミオンの基底ベクトルに一対一に対応するのは、イデアルボゾンの基底ベクトル全体ではなく、それらの特殊な組み合わせ、すなわち完全反対称化された状態ベクトルである。このようにフェルミオンの基底ベクトルに対応するイデアルボゾンの状態ベクトルのことを物理的状態ベクトル、またそれらに直交する状態ベクトルのことを非物理的状態ベクトルと呼ぶ。また、フェルミオン空間に対応するイデアルボゾンの部分空間のことを物理的部分空間と呼び、その補空間を非物理的部分空間と呼ぶ。

ボゾン空間の中にパウリ原理を完全に取り入れた部分空間をつくることができることがわかった。そこで、次にフェルミオン対演算子をボゾンで表すためにも、状態ベクトル間の一対一の対応関係をもとに、次のような変換演算子をフェルミオン空間とイデアルボゾンボゾン空間の直積空間で定義する。

$$U \equiv \sum_N \sum_{\alpha\beta}{}' |N;\alpha\beta\rangle\rangle_B |0\rangle_{F\,F}\langle N;\alpha\beta|_B\langle 0|. \tag{2.10}$$

この演算子は次の関係式を満たす:

$$UU^\dagger = P_F^{(e)} \cdot \Lambda_B; \quad U^\dagger U = \Lambda_F \cdot P_B. \tag{2.11}$$

ただし、$P_F^{(e)}$はフェルミオン空間において粒子数が偶数である空間への射影演算子、P_Bはイデアルボゾン空間の物理的部分空間への射影演算子、Λ_F、Λ_Bはそれぞれフェルミオン、イデアルボゾンの真空への射影演算子で、具体的には次のように与えられる：

$$\begin{array}{ll} P_F^{(e)} \equiv \sum_N \sum'_{\alpha\beta} |N;\alpha\beta\rangle_{F\,F}\langle N;\alpha\beta|, & P_B \equiv \sum_N \sum'_{\alpha\beta} |N;\alpha\beta\rangle\rangle_{B\,B}\langle\langle N;\alpha\beta|, \\ \Lambda_F \equiv |0\rangle_{F\,F}\langle 0|, & \Lambda_B \equiv |0\rangle_{B\,B}\langle 0|. \end{array} \tag{2.12}$$

フェルミオン空間からボゾン空間への写像は次のように与えられる：

$$\begin{array}{l} |\psi\rangle_F \leftrightarrow |0;\psi\rangle \equiv |0\rangle_B|\psi\rangle_F \leftrightarrow \overline{|0;\psi\rangle} \equiv U|0;\psi\rangle = |\psi;0\rangle \leftrightarrow |\psi\rangle_B, \\ O_F \leftrightarrow O \equiv \Lambda_B \cdot O_F \leftrightarrow \overline{O} \equiv UOU^\dagger = O_B \cdot \Lambda_F \leftrightarrow O_B. \end{array} \tag{2.13}$$

$|\psi\rangle_F$、O_Fは、それぞれフェルミオンの状態ベクトルと、演算子である。添え字が違うものはそれぞれの対応物を示している。このようにフェルミオン空間からからボゾン空間への写像は、一旦それらの直積空間を介して行われる。直積空間とフェルミオン空間、ボゾン空間の各々には自明な対応関係をつける。その自明な部分を省略して、直接フェルミオン空間からボゾン空間への写像を定義することが多い。たとえば、式(2.10)、(2.11)、(2.13)は次のように書く：

$$U \equiv \sum_N \sum_{\alpha\beta}{}' |N;\alpha\beta\rangle\rangle_{B\,F}\langle N;\alpha\beta|, \tag{2.14}$$

$$UU^\dagger = P_F^{(e)}; \quad U^\dagger U = P_B, \tag{2.15}$$

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_B &= U|\psi\rangle_F, \\ O_B &= UO_F U^\dagger. \end{aligned} \tag{2.16}$$

以後特に必要のない限りこの省略型を使う。

ここまでで、フェルミオン空間からイデアルボゾン空間の物理的部分空間への一対一の写像を状態ベクトルの対応関係をもとに定義することができたことになる。式 (2.16) より具体的な形を求めてみればわかるように、ボゾン展開形式を求めるには、ボゾンの真空への射影演算子Λ_Bを展開形式で表すことが必要である。イデアルボゾンの基底ベクトルの完全性の条件を使えばそれは、

$$\Lambda_B =: \exp\{-\sum_{\alpha<\beta} b^\dagger_{\alpha\beta} b_{\alpha\beta}\}:, \tag{2.17}$$

と書けることがわかる。ここで$: \cdots :$は、ボゾンに関して正規順序を取ることを意味する。展開の具体例として$A_{\alpha\beta}$のそれをここに示しておく：

$$(A_{\alpha\beta})_B = b_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(\sum_{\alpha'\beta'} b^\dagger_{\alpha'\beta'} b_{\alpha'\beta'}\right) b_{\alpha\beta} - \frac{1}{\sqrt{3}}\sum_{\alpha'\beta'} b^\dagger_{\alpha\alpha'} b_{\beta\beta'} b_{\alpha'\beta'} + \cdots. \tag{2.18}$$

粒子数が奇数の場合について簡単にふれておく。状態ベクトル$|\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2\cdots\alpha_N\beta_N\alpha\rangle_F$と$|\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2\cdots\alpha_N\beta_N\rangle_B|\alpha\rangle_F$を添え字に関して完全反対称化し規格化した状態ベクトルの対応をとる。この状態ベクトルからわかるように、フェルミオンの励起は1粒子状態のみで、他はすべてボゾン励起として取り扱うことになる。そして偶数系の場合と同様にまず自明な写像によってフェルミオン空間からボゾン・フェルミオン空間に移り、その空間で同様につくられた変換演算子を使って最終的な形を得る。

2.2 修正された丸森・山村・徳永の方法

MYT の方法は物理的状態ベクトルの構成方法を見てもわかるように、フェルミオンの世界をボゾンのそれに忠実に再現することから出発した。特にボゾン展開法を写像として明確に捉えた点は大きな意義がある。しかしながら、この方法で与えられる展開は収束性が悪く、そのままでは実用的ではない。式 (2.18) の第2項に着目してみると、そこには$\sum_{\alpha'\beta'} b^\dagger_{\alpha'\beta'} b_{\alpha'\beta'}$なる演算子が含まれるが、これはボゾン数演算子であり、ボゾン励起数が増えるとともに増加する。この様にボゾン数演算子を含む項が、さらに高次の展開においても現れる。また、物理的状態ベクトルがイデアルボゾンの基底ベクトルそのものではなく、

それらをもとに添え字に関して反対称化された状態ベクトルである点もボソンをわざわざ導入する利点をなくしている。

準粒子対演算子 $A_{\alpha\beta}$、$A^{\dagger}_{\alpha\beta}$はボソン的な性質を備えていない演算子であることは、自身の多重励起状態が特に既に2重励起状態が完全にパウリ原理により許されないことから明らかである。ボソン展開法の観点からはボソン近似はその第ゼロ近似たるべきものである。しかしながらこれらの対演算子に対してはボソン近似は悪い近似となっている。

そこで、系のダイナミクスを考慮して、フェルミオン空間を集団的部分空間と非集団的部分空間の2つの部分に分離する。そしてボソン的性質の濃厚な集団的部分空間のみをイデアルボソン空間に写像すれば、展開の収束性の問題のみならず、イデアルボソン空間の基底ベクトルが良い近似で物理的状態ベクトルとして使えることが期待できる[30]。

集団的励起モードは通常タム・ダンコフ近似 (TDA) を使って決定される。この近似がRPAに比べて有効相互作用の一部分しか取り上げていないにも拘らずボソン展開法において採用される理由は、平均場が変形した場合RPAの集団的励起モードがゼロモードとなるのに対して、TDAはRPAのそのような臨界点を越えた場合でもゼロモードとはならないという便宜的なものである。RPA型の相関はボソン展開後に採り上げることができるので、ダイナミクスをフェルミオンの部分空間を選ぶ段階でとり上げるという当初の目的は、とりあえずTDAで満たされていると言える。

TDAの励起モードの生成演算子のことをTDAフォノンと呼ぶ。RPAフォノンの生成演算子が、準粒子対演算子の生成消滅演算子の線形結合で与えられるのに対し、TDAフォノンのそれは、準粒子対演算子の生成演算子のみの線形結合で与えられる。その結合係数はTDA方程式によって決定されるのであるが、ここではその決定方法にかかわらず、それらのタイプのフォノンを総称してタム・ダンコフ (TD) 型フォノンと呼ぶことにする。なぜなら以下の議論は、集団性の強いモードが得られることで、十分であるからである。また、これ以降フォノンと言えばTD型フォノンを意味するものとする。

以後の議論に必要なため、記号の表記をここでより詳しく定義する。殻模型での一粒子状態の量子数は$\alpha \equiv \{n_a, l_a, j_a, m_a\}$, である。ここで、$n_a$ は動径量子数、l_a は軌道角運動量、j_a は粒子全角運動量、m_a はその磁気量子数、α はそれらの総称とする。軌道α の準粒子の生成消滅演算子をそれぞれ $a^{\dagger}_{\alpha}, a_{\alpha}$ で表すことに変わりはない。

これ以降使用するフェルミオンの準粒子対演算子は、角運動量結合を考慮したもので、次のように定義する。

$$\begin{cases} A^{\dagger}_{JM}(ab) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{m_a m_b} \langle j_a m_a j_b m_b | JM \rangle a^{\dagger}_{\alpha} a^{\dagger}_{\beta} \\ B^{\dagger}_{JM}(ab) \equiv \sum_{m_a m_b} \langle j_a m_a j_b m_b | JM \rangle a^{\dagger}_{\alpha} \widetilde{a_{\beta}} \end{cases} \tag{2.19}$$

ここで$\widetilde{a_\beta}$は、a_βの時間反転を取ったものを表す。

さて、TD 型フォノンは準粒子対演算子 $A^\dagger_{JM}(ab)$ の重ね合わせとして次のように定義される。

$$X^\dagger_{\mu JM} \equiv \sum_{ab} \psi_J^{(\mu)}(ab) A^\dagger_{JM}(ab). \tag{2.20}$$

ここでμはモードの種類を表す。$\psi_J^{(\mu)}(ab)$ は、2 準粒子状態間の直交変換の係数となっており次の規格直交条件と完全性の条件を満たす。

$$\begin{aligned} &\textstyle\sum_{ab} \psi_J^{(\mu)}(ab)\psi_J^{(\mu')}(ab) = \delta_{\mu\mu'}, \\ &\textstyle\sum_{\mu} \psi_J^{(\mu)}(ab)\psi_J^{(\mu)}(a'b') = \frac{1}{2}\{1 - \theta(abJ)P_{ab}\}\delta_{aa'}\delta_{bb'}, \\ &\theta(abJ) = (-1)^{j_a+j_b+J}. \end{aligned} \tag{2.21}$$

ここで P_{ab}は、a と b とを入れ換える演算子である。

この関係を使うと、式 (2.21) より、準粒子対演算子は逆に、

$$A^\dagger_{JM}(ab) = \sum_{\mu} \psi_J^{(\mu)}(ab) X^\dagger_{\mu JM}, \tag{2.22}$$

と表される。この関係を使えば準粒子対演算子で書かれたハミルトニアンは、TD 型フォノン演算子と $B_{JM}(ab)$ で表されることになる。

TD 型フォノン演算子と、いわゆる散乱演算子と呼ばれる $B_{JM}(ab)$ との交換関係は、

$$\begin{cases} [X_{\mu_1}, X^\dagger_{\mu_2}] = \delta_{\mu_1\mu_2} - \sum_{q_3} \Gamma^{\mu_1\mu_2}_{q_3} B_{q_3}, \\ [B_{q_3}, X^\dagger_{\mu_1}] = \sum_{\mu_2} \Gamma^{\mu_1\mu_2}_{q_3} X^\dagger_{\mu_2}, \end{cases} \tag{2.23}$$

ここで次のような省略記号を使った。

$$\mu \equiv \{\mu JM\},\ q \equiv \{abJM\}. \tag{2.24}$$

また

$$\begin{aligned} &\Gamma^{\mu_1\mu_2}_{q_3} \equiv \Gamma^{\mu_1 J_1 M_1;\mu_2 J_2 M_2}_{(a_3 b_3 J_3 M_3)} \equiv \langle J_1 M_1 J_2 M_2 | J_3 M_3 \rangle \hat{\Gamma}^{\mu_1 J_1;\mu_2 J_2}_{(a_3 b_3 J_3)}, \\ &\hat{\Gamma}^{\mu_1 J_1;\mu_2 J_2}_{(a_3 b_3 J_3)} \equiv 2\textstyle\sum_a \psi_{J_1}^{(\mu_1)}(a_3 a)\psi_{J_2}^{(\mu_2)}(b_3 a)\hat{J}_2\hat{J}_3 W(j_{a_3} j_a J_3 J_2; J_1 j_{b_3}), \\ &\hat{J} \equiv \sqrt{2J+1}. \end{aligned} \tag{2.25}$$

係数$\psi_J^{(\mu)}(ab)$ は、TD 型フォノンの従う運動方程式によって決定される。以下ではモードの種別を表す記号を、c は集団的モード、n は非集団的モード、またμはその両方を表すものとする。

式 (2.23) の交換関係で、フォノン演算子に対してボソン近似がどの程度良い近似か調べてみよう。このとき式 (2.25) で与えられている$\Gamma^{\mu_1\mu_2}_{q_3}$の大きさが問題となる。$\Gamma^{\mu_1\mu_2}_{q_3}$に含まれているラカー係数 $W(j_{a_3} j_a J_3 J_2; J_1 j_{b_3})$ は、準粒子全角運動量 jが大きな値を取るとき

$$\begin{aligned} &W(j_{a_3} j_a J_3 J_2; J_1 j_{b_3}) \sim (2j+1)^{-\frac{1}{2}} \langle J_2 j_{b_3} - j_a J_3 j_{a_3} - j_{b_3} | J_1 j_{a_3} - j_a \rangle, \\ &(2j+1)^3 \equiv (2j_{a_3}+1)(2j_{b_3}+1)(2j_a+1), \end{aligned} \tag{2.26}$$

なる漸近型を持つ。注目すべきは、このとき、この中にスモールパラメータ $(2j+1)^{-\frac{1}{2}}$ が含まれていることである。よって今、$\Gamma_{q_3}^{\mu_1\mu_2}$ の大きさを象徴的に ϵ で表すと、$\epsilon \sim (2j+1)^{-\frac{1}{2}}$ と見て良い。このとき式 (2.23) の交換関係から、演算子の大きさのオーダーは、

$$X_\mu \sim O(1); \quad B_q \sim O(\epsilon), \tag{2.27}$$

とみなすことができる。しかしながらここで問題なのは、原子核の殻構造を見ればわかるように、粒子全角運動量 j_a は必ずしも大きな量ではないことである。そこで再び、式 (2.25) の $\Gamma_{q_3}^{\mu_1\mu_2}$ を見てみると、それはラカー係数に $\psi_J^{(\mu)}(ab)$ をかけて 1 粒子準位の量子数に関して和を取ったものになっている。$\psi_J^{(\mu)}(ab)$ は、$\mu = n$ の場合、すなわちモードが非集団的な場合、比較的特定の (ab) の場合のみゼロでない値を持つのに対して、$\mu = c$ の場合、すなわちモードが集団的な場合、多数の (ab) に値が散らばっている。このような $\psi_J^{(\mu)}(ab)$ の性質を考慮すると、$\Gamma_{q_3}^{n_1n_2}$ 以外はスモールパラメータになっていることが期待できる。従って、スモールパラメータ展開の第ゼロ近似で交換関係式 (2.23) を部分的に、

$$\begin{cases} [X_{c_1}, X_{c_2}^\dagger] \approx \delta_{c_1c_2}, \\ [X_c, X_n^\dagger] \approx 0, \quad [X_n, X_c^\dagger] \approx 0 \end{cases} \tag{2.28}$$

と近似するとそれが良い近似であることが期待できる。このように、フェルミオンの演算子として、TD 型のフォノンを用意すれば、集団的モードに対してはボゾン近似が良い近似となることがわかった。

フェルミオン空間の部分空間は多フォノン状態ベクトルをもとに構成される。フォノン N 個からなる N フォノン状態を次のように表記する事にする：

$$|N;\mu\rangle_F \equiv |\mu_1\mu_2\cdots\mu_N\rangle_F \equiv X_{\mu_1}^\dagger X_{\mu_2}^\dagger \cdots X_{\mu_N}^\dagger |0\rangle_F. \tag{2.29}$$

ここで $|0\rangle_F$ はフェルミオンの真空状態ベクトルを表す。写像する部分空間は、多フォノン状態ベクトルのモードに着目して構成される。ここで一般性をもたせるために、部分空間を集団的部分空間に限定せずに理論を定式化して行くことにする [16][4]。そのために、モードの種別する新しい記号を導入する。採用するモードを t で表す。その他のモードは $\bar{t}$ で表す。また、採り上げる部分空間のことを T 空間と呼ぶことにする。

t モードの TD 型フォノンにそのボゾン近似で対応するイデアルボゾンを導入する：

$$[b_{t_1}, b_{t_2}^\dagger] = \delta_{t_1t_2} \tag{2.30}$$

そして、この空間の直交系を次のように表すことにする：

$$|N;t\rangle_B \equiv |t_1t_2\cdots t_N\rangle_B \equiv b_{t_1}^\dagger b_{t_2}^\dagger \cdots b_{t_N}^\dagger |0\rangle_B. \tag{2.31}$$

ここで $|0\rangle_B$ はイデアルボゾンの真空状態ベクトルを表す。イデアルボゾンの規格直交系を次のように表す：

$$|N;t\rangle\rangle_B \equiv |t_1 t_2 \cdots t_N\rangle\rangle_B \equiv \mathcal{N}_B^{-1}(N;t)|N;t\rangle_B. \tag{2.32}$$

ここで $\mathcal{N}_B^2(N;t)$ は式 (2.31) の状態ベクトルのノルムであり、

$$\mathcal{N}_B^2(N;t) \equiv \mathcal{N}_B^2(t_1 t_2 \cdots t_N) \equiv {}_B\langle N;t|N;t\rangle_B, \tag{2.33}$$

で定義される。

さて、部分空間を構成するに当たって採用する多フォノン状態ベクトルにボゾンの規格化を行ったものを、

$$|N:t\rangle\rangle_F \equiv \mathcal{N}_B{}^{-1}(N;t)|N;t\rangle_F \tag{2.34}$$

で定義する。

そうするとボゾン近似のもとで $|N;t\rangle\rangle_F$はイデアルボゾンの基底ベクトル $|N;t\rangle\rangle_B$ に一対一に対応する：

$$|N;t\rangle\rangle_F \leftrightarrow |N;t\rangle\rangle_B. \tag{2.35}$$

しかしながら正確な交換関係 (2.23) のもとでは、$|N;t\rangle\rangle_F$は、規格直交系ではない。そこで $|N;t\rangle\rangle_F$ を規格直交化した状態ベクトルを T 空間を構成する基底ベクトルとする。変換演算子はその基底ベクトルとそれに対応するボゾンの状態ベクトルから構成される。まず $|N;t\rangle\rangle_F$ を規格直交化するために、そのノルム行列、

$$(Z_F^2(N))_{t_1 t_2} \equiv {}_F\langle\langle N;t_1|N;t_2\rangle\rangle_F \tag{2.36}$$

を固有方程式、

$$\sum_{t'}\{(Z_F^2(N))_{tt'} - z_k{}^2(N)\}u_k{}^{t'}(N) = 0 \tag{2.37}$$

を解いて対角化する。ここで $z_k{}^2(N)$ はノルム行列の固有値、$u_k{}^t(N)$ はその固有ベクトルである。固有値 $z_k{}^2(N)$ の値は正またはゼロである。そこでゼロ固有値を持つ場合を k_0で表すことにする。また固有ベクトルは次の規格直交条件と完全性条件を満たす：

$$\begin{cases} \sum_t u_{k_1}{}^t(N)u_{k_2}{}^t(N) = \delta_{k_1 k_2}, \\ \sum_k u_k{}^{t_1}(N)u_k{}^{t_2}(N) = \delta_{t_1 t_2}. \end{cases} \tag{2.38}$$

式 (2.37) の結果を使うと、T 空間の規格直交系は

$$|N;k\rangle\rangle\rangle_F \equiv \sum_t z_k{}^{-1}(N)u_k{}^t(N)|N;t\rangle\rangle_F; \quad (k \neq k_0), \tag{2.39}$$

で与えられる。また、状態ベクトル、

$$|N;k_0\rangle\rangle\rangle_F \equiv \sum_t u_{k_0}{}^t(N)|N;t\rangle\rangle_F, \tag{2.40}$$

はゼロベクトルである：

$${}_F\langle\langle\langle N;k_0|N;k_0\rangle\rangle\rangle_F = 0 \rightleftharpoons |N;k_0\rangle\rangle\rangle_F = 0. \tag{2.41}$$

この様に一般的に多フォノン状態ベクトルは互いに非直交のみならず、一次従属の関係にある。これはとりもなおさずパウリ効果の影響に他ならない。

式(2.39)に対応するイデアルボゾンの規格直交ベクトルを得るために、イデアルボゾンの基底ベクトルを、ノルム行列の固有ベクトルを使って変換したものを、

$$|N;k\rangle\rangle\rangle_B \equiv \sum_t u_k{}^t(N)|N;t\rangle\rangle_B, \tag{2.42}$$

と定義する。これらの状態ベクトルは規格直交系であることは言うまでもない。ここで状態ベクトル $|N;k_0\rangle\rangle\rangle_B$ に着目してみる。多フォノン状態ベクトルの場合と違って、そのノルムは

$${}_B\langle\langle\langle N;k_0|N;k_0\rangle\rangle\rangle_B = 1, \tag{2.43}$$

であり、これはゼロベクトルではない。この状態ベクトルはフェルミオンのＴ空間に対応物はない、すなわち非物理的状態ベクトルである。他の状態ベクトルはそれぞれ、式(2.39)の状態ベクトルと一対一に対応する。このように多フォノン状態ベクトルをもとにしたボゾン展開法を得るときには、パウリ効果はそのノルム行列の固有値と固有ベクトルを通してフェルミオン、イデアルボゾン各々の空間に反映される。

以上の議論から写像演算子は、

$$U = \sum_N \sum_{k \neq k_0} |N;k\rangle\rangle\rangle_{BF}\langle\langle\langle N;k| \tag{2.44}$$

で与えられることがわかる。また U は次の関係式を満たす：

$$UU^\dagger = T_B; \quad U^\dagger U = T_F. \tag{2.45}$$

ここで T_F、T_B は、フェルミオン空間、ボゾン空間でのＴ空間への射影演算子である：

$$T_F \equiv \sum_N \sum_{k \neq k_0} |N;k\rangle\rangle\rangle_{FF}\langle\langle\langle N;k|; \quad T_B \equiv \sum_N \sum_{k \neq k_0} |N;k\rangle\rangle\rangle_{BB}\langle\langle\langle N;k|. \tag{2.46}$$

T_B はまた、イデアルボゾン空間の物理的部分空間への射像演算子でもある。

この演算子を使って、フェルミオンの演算子 O_F は、

$$O_B = UO_FU^\dagger = \sum_{N_1 N_2} \sum_{k_1 k_2 \neq k_0} {}_F\langle\langle\langle N_1; k_1|O_F|N_2; k_2\rangle\rangle\rangle_F \, |N_1; k_1\rangle\rangle\rangle_{BB}\langle\langle\langle N_2; k_2|, \qquad (2.47)$$

で与えられる。

さてここで、具体的な展開形式を求める前に、この修正によってイデアルボゾンの基底ベクトル $|N;t\rangle\rangle_B$ が物理的状態ベクトルとして良い近似として使える条件を調べてみる。はじめに述べたように、このベクトルを基底ベクトルとして使えることが、ボゾン展開法の利点である。そうでなければ、フェルミオンで扱うことと大差はない。物理的空間への写影演算子は $P_B \equiv T_B$ であるから、物理的的状態ベクトルの混じり具合は

$${}_B\langle\langle N;t|P_B|N;t\rangle\rangle_B = \sum_{k \neq k_0} \{u_k{}^t(N)\}^2 = 1 - \sum_{k_0}\{u_{k_0}{}^t(N)\}^2. \qquad (2.48)$$

で与えられる。この式から、イデアルボゾンの基底ベクトルが物理的状態ベクトルであるための条件は、ノルム行列の固有値にゼロノルムを含まないことであることがわかる。右辺の量は、T 空間の大きさに依存する。T 空間の大きさは次の 2 種類で決まる。一つはすでに述べたように幾種類のモードを取るかであり、もう一つはあからさまには述べていないが、採用するフォノンの数の上限である。前者は t で表した。後者の上限を N_{max} と表すことにする。$t = c$ の場合、十分大きい N_{max} まで、ノルムの固有値はゼロを含まないことが期待できる。さらに非集団的励起モードも含める形で t を広げれば広げるほど、そのような N_{max} は小さくなる。あるところまで t を広げると $N_{max} = 2$ で既にゼロ固有値を含む事態が生じるであろう。以上の議論から明かなように、イデアルボゾンの基底状態ベクトル $|N;t\rangle\rangle_B$ が物理的状態ベクトルとして使えるためには、フォノン励起モードの種類とフォノン励起数を制限することが必然となる。

式 (2.47) の展開形式を具体的に求めよう。さきに述べたように、この為には、真空の射影演算子を展開形式で表したもの、今の場合は、

$$\Lambda_B =: \exp\{-\sum_t b_t^\dagger b_t\} := 1 - \sum_t b_t^\dagger b_t + \frac{1}{2}\sum_{t_1 t_2} b_{t_1}^\dagger b_{t_2}^\dagger b_{t_1} b_{t_2} - \cdots, \qquad (2.49)$$

で与えられる、を式 (2.47) に代入して求める。MYT 展開の収束性が悪かったのはこの展開が原因である。$\hat{N} \equiv \sum_t b_t^\dagger b_t$ と定義すると $\hat{N}$ は全ボゾン数演算子であり、式 (2.49) はこの演算子を使って、

$$\Lambda_B = 1 - \hat{N} + \frac{1}{2}\sum_t b_t^\dagger \hat{N} b_t - \cdots, \qquad (2.50)$$

と表され、$\hat{N}$ が原因で展開の収束性が悪くなっていることがわかる。従って単にこの展開形式を使うのみでは、収束性の問題は残されたままとなる。

展開の収束性の問題は、イデアルボソンの基底ベクトルが物理的状態ベクトルとして使えるかどうかという問題と密接に関係している。後者の使用可能条件は、多フォノン状態ベクトルのノルム行列にゼロ固有値が存在しないことである。このときノルム行列 Z_F^2 の逆行列が存在する。Z_F もまたしかりである。ここで状態ベクトル、

$$|N;t\rangle\rangle\rangle_F \equiv \sum_k u_k{}^t(N)|N;k\rangle\rangle\rangle_F, \tag{2.51}$$

を定義すると、これは規格直交系で $|N;t\rangle\rangle_B$ に一対一に対応する：

$$|N;t\rangle\rangle\rangle_F \leftrightarrow |N;t\rangle\rangle_B. \tag{2.52}$$

この状態ベクトルはまた、$Z_F(N)$ の逆行列を使って

$$|N;t\rangle\rangle\rangle_F = \sum_{t'}(Z_F{}^{-1}(N))_{tt'}|N;t'\rangle\rangle_F, \tag{2.53}$$

と表される。結局ゼロ固有値が存在しない場合、式 (2.46)、(2.47) は次のように書き換えることができる：

$$U = \sum_{N\leq N_{max}} \sum_t |N;t\rangle\rangle_{BF}\langle\langle\langle N;t|, \tag{2.54}$$

$$\begin{aligned} O_B \;&= \textstyle\sum_{N_1N_2\leq N_{max}} \sum_{t_1t_2} {}_F\langle\langle\langle N_1;t_1|O_F|N_2;t_2\rangle\rangle\rangle_F \, |N_1;t_1\rangle\rangle_{BB}\langle\langle N_2;t_2|, \\ &= \textstyle\sum_{N_1N_2\leq N_{max}} \sum_{t_1t_2} \sum_{t'_1t'_2} (Z_F{}^{-1}(N_1))_{t_1t'_1}{}_F\langle\langle N_1;t'_1|O_F|N_2;t'_2\rangle\rangle_F (Z_F{}^{-1}(N_2))_{t'_2t_2} \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad |N_1;t_1\rangle\rangle_{BB}\langle\langle N_2;t_2|. \end{aligned} \tag{2.55}$$

式 (2.49) の真空の射影演算子の展開の第 2 項以降の様な項を umlinked term と呼ぶ。式 (2.55) に式 (2.49) を代入すると同時に、$Z_F{}^{-1}(N)$ を展開すると、各々の展開からでてくる umlinked term が互いに打ち消しあうことが示されている [16]。すなわち、ノルム行列を、

$$Z_F{}^2(N) \equiv 1(N) - Y(N), \tag{2.56}$$

（ここで $1(N)$ は単位行列）の形に書き $Z_F{}^{-1}(N)$ を

$$Z_F{}^{-1}(N) = (1(N) - Y(N))^{-\frac{1}{2}} = 1(N) - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(2j-1)!!}{2^j j!} Y^j(N), \tag{2.57}$$

のように、$Y(N)$ に関して展開したものを同時に代入すればよい。この様な手続きを経て得られる展開を X_t、$X_{\bar{t}}$、B_q に対して具体的に示めすと、それらは次のように与えられる：

$$\begin{aligned} (X_t)_B =&\; b_t - \tfrac{1}{4}\textstyle\sum_{t_1t_2t_3} Y(tt_3t_2t_1) b^\dagger_{t_1} b_{t_2} b_{t_3} + O(\epsilon^4) \\ (X_{\bar{t}})_B =&\; -\tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{t_1t_2t_3} Y(\bar{t}t_3t_2t_1) b^\dagger_{t_1} b_{t_2} b_{t_3} + O(\epsilon^4) \\ (B_q)_B =&\; \textstyle\sum_{t_1t_2} \Gamma_q^{t_2t_1} b^\dagger_{t_1} b_{t_2} \\ &\; -\tfrac{1}{4}\textstyle\sum_{t_1t_2t_3t_4} \sum_{\bar{t}} \{\Gamma_q^{\bar{t}t_1} Y(\bar{t}t_4t_3t_2) + \Gamma_q^{t_4\bar{t}} Y(\bar{t}t_1t_2t_3)\} b^\dagger_{t_1} b^\dagger_{t_2} b_{t_3} b_{t_4} + O(\epsilon^5) \end{aligned} \tag{2.58}$$

ここで、

$$Y(t_1t_2t_3t_4) \equiv \sum_q \Gamma_q^{t_1t_3}\Gamma_q^{t_3t_4} = {}_B\langle t_3t_2|t_1t_4\rangle_B - {}_F\langle t_3t_2|t_1t_4\rangle_F. \tag{2.59}$$

また、ϵは、先に定義したように$\Gamma_q^{\mu_1\mu_2}$の大きさを象徴したものである。この展開形式ではボソンの演算子の添え字に関する和は必ず$\Gamma_q^{\mu_1\mu_2}$からなる係数に結びつく。このような項を linked term と呼ぶ。MYT 展開においてそれに相当する項は、式 (2.18) の第 3 項である。

以上、イデアルボソンの基底ベクトルを物理的状態ベクトルとして使用可能で、しかも展開の収束性の問題、具体的には unlinked term の除去を解決するために、MYT の方法がどの様に修正されたかについて述べた。

最後にダイソン型ボソン展開法について簡単にふれておく [17][18][19]。これまで、取り扱ってきた BET が無限級数展開になるのに対して、この展開は非エルミート型展開ながら、有限級数展開となる点で有力視されている。すなわち、これまでのような演算子の展開の収束性は問題とならない。しかしながら、イデアルボソンの基底ベクトルが物理的状態ベクトルとして使える条件がこれまで取り扱ってきた BET と同等であることが次のようにしてわかる。ダイソン型ボソン展開法を得るには式 (2.44) の代わりに変換演算子として、

$$\begin{cases} U_1 = \sum_N \sum_{k\neq k_0} z_k(N)|N;k\rangle\rangle\rangle_{BF}\langle\langle\langle N;k|, \\ U_2 = \sum_N \sum_{k\neq k_0} z_k{}^{-1}(N)|N;k\rangle\rangle\rangle_{BF}\langle\langle\langle N;k|, \end{cases} \tag{2.60}$$

を使えばよい。この演算子は式 (2.44) に対応する次の関係式を満たす：

$$U_1U_2^\dagger = T_F; \quad U_2^\dagger U_1 = T_B. \tag{2.61}$$

この 2 つの式から明らかなように、イデアルボソンの基底ベクトルが使える条件はやはりノルム行列がゼロ固有値を持たないことである。したがって、すべての励起モードをボソン化する訳にはいかないことに変わりはない。

3 ボゾン・フェルミオン展開法

第2節で見たようにボゾン展開法 (BET) はフェルミオン空間をボゾン空間に写像する方法である。従って第2.2小節で述べた方法で集団的部分空間のみを写像するならば、極めて有力な方法であることは想像に難くない。しかしながら第1節で述べたことから、遷移領域核の集団運動を記述するには非集団的励起モードの寄与が不可欠であることが予想され、事実ボゾン展開法による解析ではその必要性が指摘されている [3]。従ってボゾン的性質が強くない非集団的励起モードもボゾンで表さなくてはならず、その展開の収束性が問題視される。収束性の問題を避けるために導入されたダイソン型 BET もイデアル・ボゾンの基底ベクトルが物理的状態ベクトルであるためには、ボゾン化するモードに制限が付くのに変わりはない。この様な事態に至る原因は、性質の違う集団的励起モードと非集団的励起モードをボゾンで一元的に表現するところにあると考えられる。そこで両者の性質の違いを考慮して、第ゼロ近似で集団的励起モードはボゾンで、非集団的励起モードはフォノンのままで表現すれば、モードに制限なく収束性の良い展開が得られることが期待できる。この様な動機のもとに提出された方法がボゾン・フェルミオン展開法 (BFET) である。

BET はフェルミオン空間をボゾン空間に写像する方法である。これに対応して、まず3.1小節において BFET をフェルミオン空間からボゾン・フェルミオン空間の写像として捉えたときの一般論を与える。次に3.2小節では、展開の出発点となる最低次の近似のもと BFET を具体的に呈示する。3.3小節では、高次の展開を求める一般的な方法を与える。3.4小節では、BFET を式 (2.58) に対応するオーダーまで、具体的に提示する。

3.1 ボゾン・フェルミオン写像

2.1小節で述べた様にボゾン展開法におけるフェルミオン空間からボゾン空間への写像は、(2.13) 式で象徴的に示しているように、いったんボゾン・フェルミオン空間を通して行われる。変換演算子 U もその空間で定義されている。したがって、フェルミオンをボゾンとフェルミオンで表現するには、変換演算子を変更すれば良いことになる。BET の変換演算子はフェルミオンとボゾンの状態ベクトルをもとに構成された。BFET は BET の場合と異なり、フェルミオンをボゾンとフェルミオンで表すことをめざす。したがってそのような構成方法は BET と違って複雑なものとなる。そこで、適当な条件のもと、その条件を満たす変換演算子をまず探し、しかる後状態ベクトルについて議論するのが妥当であろう。

変換演算子を U とする。まずボゾン・フェルミオン空間において U がユニタリー演算子であることを要請する：

$$UU^\dagger = U^\dagger U = 1; \quad 1 \equiv 1_F \cdot 1_B. \tag{3.1}$$

ここで1_F、1_Bはそれぞれフェルミオン空間、ボソン空間での単位演算子である。この要請のもとで、BFET はエルミート型の写像となる。物理的な要請としては式 (2.28) を前提に次の条件をおく：

$$\begin{cases} \overline{X}_c \equiv U X_c U^\dagger \approx b_c, \\ \overline{X}_n \equiv U X_n U^\dagger \approx X_n, \end{cases} \tag{3.2}$$

これは式 (2.28) の前提を、第ゼロ近似で集団的励起モードのみボソンで表すことで再現すると同時に、非集団的励起モードを変換後も自身で表す、すなわちフェルミオンで表すことにより、パウリ原理の効果を変換後も温存することを意味する。すなわち、この様な要請を課すことにより、具体的な展開形式を求める際に、たとえ BET と同様に$\Gamma_q^{\mu_1\mu_2}$を非集団的励起モードを含む場合についても、形式的にスモール・パラメータと仮定して展開しても、BET に比べてその展開の収束性が改善されることを期待している訳である。さらに次の条件を課す：

$$\begin{cases} U|0\rangle = U^\dagger|0\rangle = |0\rangle, \\ U|\alpha\rangle = U^\dagger|\alpha\rangle = |\alpha\rangle, \\ |0\rangle \equiv |0\rangle_B|0\rangle_F, \quad |\alpha\rangle \equiv a_\alpha^\dagger|0\rangle_B|0\rangle_F. \end{cases} \tag{3.3}$$

この条件を課すことにより、演算子の展開形式は粒子数の偶奇に係わらず共通に使用できることになる。すなわち、偶数系の真空を 1 準粒子状態に読み替えれば奇数系が取り扱え、その逆もまたしかりである。したがって、展開形式は対演算子に対して求めるだけで十分である。また、以後特に必要のない限り状態ベクトルなどは偶数系のみを取り上げて説明する。

写像としての BET を表す (2.13) 式に対応する BFET のそれは、

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_F &\leftrightarrow |0;\psi\rangle \leftrightarrow \overline{|0;\psi\rangle} \equiv U|0:\psi\rangle = |\psi_1;\psi_2\rangle, \\ O_F &\leftrightarrow \mathcal{O} \equiv \Lambda_B \cdot O_F \leftrightarrow \overline{\mathcal{O}} \equiv U\mathcal{O}U^\dagger = \overline{\Lambda}\cdot\overline{O}, \end{aligned} \tag{3.4}$$

となる。

ただしここで、

$$\Lambda \equiv \Lambda_B \cdot 1_F, \quad O \equiv 1_B \cdot O_F, \tag{3.5}$$

と定義した。なお今後、(3.5) 式の様な場合の1_B、1_Fは省略する。

ボソン展開法で使った物理的、非物理的なる用語を BFET においても同じ意味で使うことにする。たとえば、$|\psi_1;\psi_2\rangle$ は、フェルミオンの状態ベクトル $|\psi\rangle_F$に対応するボソン・フェルミオン空間の状態ベクトルであるので、物理的状態ベクトルである。それに対して、ボソン・フェルミオン空間の一般的な状態ベクトルは非物理的状態を含んでいる。

(3.4) 式の O_Fとして、1_Fを取ればわかるように、$\overline{\Lambda}$は物理的空間への射影演算子である：

$$\overline{\Lambda} \equiv U\Lambda U^\dagger =: \exp\{-\sum_c \overline{b}_c^\dagger \overline{b}_c\}, \tag{3.6}$$

ただしここで、$\overline{b}_c = U b_c U^\dagger$、である。したがって、物理的状態ベクトルに対しては、

$$\overline{\Lambda}|\psi_1\psi_2\rangle = |\psi_1\psi_2\rangle, \tag{3.7}$$

すなわち、$\overline{\Lambda} = 1$となる。また、任意の状態ベクトル$|\xi;\eta\rangle$から、$\overline{\Lambda}$を作用させることにより、物理的状態ベクトル

$$|\xi;\eta\rangle_{phys} \equiv \overline{\Lambda}|\xi;\eta\rangle, \tag{3.8}$$

をつくることができる。したがって、物理的条件は状態ベクトルの方に課すと、(3.5) 式の演算子の対応関係の最終部分で$\overline{\Lambda} = 1$としても良く、今後そのようにする。また式 (3.4) を見ればわかるようにすべての$\overline{b}_c$に対して

$$\overline{b}_c|\psi_1\psi_2\rangle = 0, \tag{3.9}$$

ならば、$|\psi_1\psi_2\rangle$は物理的状態ベクトルである。この条件は、状態ベクトルが物理的かどうか判定する基準として使用できる。また、

$$\hat{N}_{sp} \equiv \sum_c \overline{b}_c^\dagger \overline{b}_c, \tag{3.10}$$

なる演算子は非物理的励起モードの数演算子である。この演算子を使えば非物理的励起がどれだけ混じっているか簡単に評価できる。

3.2 最低次の近似の場合

BFET と BET の違いは、近似の出発点で集団的モードと非集団的モードをどの様に表すかにある。また BFET の変換演算子Uは最低次の近似で条件式 (3.2) を満足しなくてはならない。ここでは変換演算子Uの具体的な形を決定する。また最低次の近似で基本的な対演算子の変換後の具体的な形を示し、物理的状態ベクトルとしてどの様なものを取れば良いかを議論する。これらは次の第 3.2小節の高次の展開の出発点となるべきものである。BET との違いはこの近似の枠内でも既に現れる。

変換演算子Uを求めるために、つぎの様な演算子、

$$U(\theta) \equiv e^{-\theta F} = \sum_k \frac{(-1)^k}{k!}\theta^k F^k; \qquad F \equiv \sum_c (X_c^\dagger b_c - b_c^\dagger X_c), \tag{3.11}$$

を導入しよう。演算子Fは次の式、

$$F^\dagger = -F, \tag{3.12}$$

$$\begin{cases} F|0\rangle = 0, \\ F|\alpha\rangle = 0, \end{cases} \tag{3.13}$$

を満たし、したがって、$U(\theta)$ は式 (3.1)、(3.3) の条件を満たす。

ボゾン・フェルミオン空間における任意の演算子を O、それを $U(\theta)$ で変換したものを $O(\theta)$ とすると両者の関係は

$$O(\theta) \equiv U(\theta) O U^{\dagger}(\theta) \equiv \sum_{k} \frac{1}{k!} \theta^{k} \overbrace{[\cdots[}^{k \text{ times}} O, F \overbrace{], \cdots F]}^{k \text{ times}}, \tag{3.14}$$

で与えられる。そこでこの式を利用して $X_\mu(\theta)$ を求め、この演算子が式 (3.2) の条件を満たすかどうか調べてみる。その際、式 (2.23) の交換関係に対する近似として式 (2.28) を要請すると、$X(\theta)_\mu$、$b_c(\theta)$ は具体的に、

$$\begin{cases} b_c(\theta) \approx b_c \cos\theta - X_c \sin\theta, \\ \\ X_c(\theta) \approx b_c \sin\theta + X_c \cos\theta, \end{cases} \tag{3.15}$$

$$X_n(\theta) \approx X_n, \tag{3.16}$$

と求めることができる。式 (3.15)、(3.16) より、$\theta = \frac{\pi}{2}$とおくと $U(\theta)$ は条件式 (3.2) を満足することがわかる。

この様にして演算子 $U(\frac{\pi}{2})$ が BFET の変換演算子の条件をすべて満足することがわかった。そこでこの演算子を変換演算子として採用する：

$$U = U(\frac{\pi}{2}). \tag{3.17}$$

式 (2.23) の交換関係のうち、ここまで使った近似は式 (2.28) のみである。

この Uによって変換される基本的な演算子のうち$\overline{B}_q$以外のものをまとめて示すと、

$$\begin{aligned} \overline{X}_c &\approx b_c, \\ \overline{b}_c &\approx -X_c, \\ \overline{X}_n &\approx X_n, \end{aligned} \tag{3.18}$$

となる。この式を見ると、X_nは当初の要請どうり変換後も変わらないのに対して、変換によって X_c、b_cはその役割が交代している。このことから状態ベクトル

$$|N'; c\rangle_B |N - N'; n\rangle_F, \tag{3.19}$$

が BFET の物理的状態ベクトルであることが直ちにわかる。すなわち、物理的状態ベクトルの条件である、式 (3.9) を満たす：

$$\overline{b}_c |N'; c\rangle_B |N - N'; n\rangle_F \approx -X_c |N'; c\rangle_B |N - N'; n\rangle_F = 0. \tag{3.20}$$

この状態ベクトルは多フォノン状態ベクトル $|c_1 \cdots c_{N'} n_{N'+1} \cdots n_N\rangle_F$ と最低次の近似の範囲内で一対一に対応する：

$$
\begin{aligned}
|c_1 \cdots c_{N'} n_{N'+1} \cdots n_N\rangle_F &\leftrightarrow |0\rangle_B |c_1 \cdots c_{N'} n_{N'+1} \cdots n_N\rangle_F \\
&\leftrightarrow U|0\rangle_B |c_1 \cdots c_{N'} n_{N'+1} \cdots n_N\rangle_F \\
&\approx |N'; c\rangle_B |N - N'; n\rangle_F.
\end{aligned}
\tag{3.21}
$$

BET はその変換演算子を作る上でフェルミオンの規格直交系を必要とした。その際、多フォノン状態ベクトルは集団的励起モード、非集団的励起モードの区別なくモード全般にわたり規格直交化される。それに対して BFET ではモードの特性を最初から考慮し、まず集団的励起モードのみボゾンで表すことによって部分的に規格化を行い、非集団的励起モードに対しては変換後あらためてその取扱いが行えるようになっている。

3.3 高次の展開の一般的取扱い

この小節では、演算子の展開形式を与える方法を提示するとともに、基底ベクトルについて一般的に議論する。BFET と BET では最低次の近似での写像の方法に大きな違いがある。第 2.2小節において BET の高次の展開を求めるに当たって、$\Gamma_q^{\mu_1\mu_2}$ を形式的に展開の small parameter とみなした。最低次の近似での写像の方法の違いは、同じ形式的な small parameter を使った展開でもその展開の収束性を改善する方向に作用することが期待できる。そこで BFET においても $\Gamma_q^{\mu_1\mu_2}$ を同様に取扱い、その大きさを ϵ とみなすことにする。

3.3.1 演算子の展開形式

変換された演算子の最低次の項を得る分には、式 (3.14) を直接利用すれば良いことは、式 (3.11) の変換演算子の形と、採用する近似が式 (2.28) であることから直ちにわかる。しかしながら高次の展開項を求めるにはその様な方法は見通しが良いとは言えない。そこで代わりに $O(\theta)$ が次の微分方程式を満足することに着目する：

$$
\frac{d}{d\theta} O(\theta) = [O(\theta), F(\theta)]. \tag{3.22}
$$

この方程式から、$b_c(\theta)$、$X_c(\theta)$、$X_n(\theta)$、$B_q(\theta)$ に対する一連の方程式を得る：

$$
\begin{cases}
\frac{d^2}{d\theta^2} b_c(\theta) = -b_c(\theta) + R_c(\theta), \\
X_c(\theta) = -\frac{d}{d\theta} b_c(\theta),
\end{cases}
\tag{3.23}
$$

$$
X_n(\theta) = X_n - \int_0^\theta d\phi R_n(\phi), \tag{3.24}
$$

$$B_q(\theta) = B_q + \int_0^\theta d\phi S_q(\phi), \tag{3.25}$$

ここで $R_\mu(\theta)$、$S_q(\theta)$ は、

$$\begin{aligned} R_\mu(\theta) &\equiv \sum_{cq} \Gamma_q^{\mu c} B_q(\theta) b_c(\theta), \\ S_q(\theta) &\equiv \sum_{c\mu} \int_0^\theta \{\Gamma_q^{\mu c} b_c^\dagger(\theta) X_\mu(\theta) + \Gamma_q^{c\mu} X_\mu^\dagger(\theta) b_c(\theta)\}, \end{aligned} \tag{3.26}$$

と定義した。この方程式を解いた上で$\theta = \frac{\pi}{2}$とおくことにより求める演算子の表現を得ることができる。

さきに述べたように各々の演算子の対してこの方程式をこのパラメータϵに対する展開形式で解く。式 (2.27) に注意すると、各々の演算子は

$$\begin{aligned} b_c(\theta) &= b_c^{(0)}(\theta) + b_c^{(2)}(\theta) + \cdots, \\ X_\mu(\theta) &= X_\mu^{(0)}(\theta) + X_\mu^{(2)}(\theta) + \cdots, \\ B_q(\theta) &= B_q^{(1)}(\theta) + B_q^{(3)}(\theta) + \cdots, \end{aligned} \tag{3.27}$$

の様な展開になる。ここで、各々の演算子の肩の数字でϵのオーダーを表した。この式を式 (3.23)、(3.24)、(3.25) に代入すると、各オーダーに関する一連の方程式を得る。$b_c^{(0)}$、$X_c^{(0)}$ は次の方程式を満たす：

$$\begin{cases} \frac{d^2}{d\theta^2} b_c^{(0)}(\theta) = -b_c^{(0)}(\theta) \\ X_c^{(0)}(\theta) = -\frac{d}{d\theta} b_c^{(0)}(\theta). \end{cases} \tag{3.28}$$

これは調和振動子の方程式で、その解は、

$$\begin{cases} b_c^{(0)}(\theta) = b_c \cos\theta - X_c \sin\theta, \\ X_c^{(0)}(\theta) = b_c \sin\theta + X_c \cos\theta, \end{cases} \tag{3.29}$$

となり、先に第 3.2小節で求めた式 (3.15) の解と同じである。また、式 (3.24) から

$$X_n^{(0)}(\theta) = X_n, \tag{3.30}$$

となり、やはり最低次の近似で求めた解と同等の $X_n^{(0)}(\theta)$ を得る。これらの結果を式 (3.25) に代入すると $B_q^{(1)}(\theta)$ を得る：

$$\begin{aligned} B_q^{(1)}(\theta) \;=\; & B_q - \tfrac{1}{2}(1-\cos 2\theta) \textstyle\sum_{c_1 c_2} \Gamma_q^{c_2 c_1} X_{c_1}^\dagger X_{c_2} \\ & -(1-\cos\theta) \textstyle\sum_{cn} (\Gamma_q^{nc} X_c^\dagger X_n + \Gamma_q^{cn} X_n^\dagger X_c) \\ & +\tfrac{1}{2}(1-\cos 2\theta) \textstyle\sum_{c_1 c_2} \Gamma_q^{c_1 c_2} b_{c_1}^\dagger b_{c_2} \\ & +\sin\theta \textstyle\sum_{cn} (\Gamma_q^{nc} b_c^\dagger X_n + \Gamma_q^{cn} X_n^\dagger b_c) \\ & +\tfrac{1}{2}\sin 2\theta \textstyle\sum_{c_1 c_2} \Gamma_q^{c_2 c_1} (b_{c_1}^\dagger X_{c_2} + X_{c_1}^\dagger b_{c_2}). \end{aligned} \tag{3.31}$$

以上各演算子の最低次の項を求めることができた。

$b_c(\theta)$、$X_c(\theta)$ の高次の項は次の方程式を満たす：

$$
\begin{cases}
\frac{d^2}{d\theta^2} b_c^{(2k)}(\theta) = -b_c^{(2k)}(\theta) + R_c^{(2k)}(\theta), \\
\\
X_c^{(2k)}(\theta) = -\frac{d}{d\theta} b_c^{(2k)}(\theta), \quad (k = 1, 2, 3, \cdots).
\end{cases}
\tag{3.32}
$$

たとえば、$k = 1$ の場合を見ればわかるように、$R_c^{(2k)}(\theta)$ は、低次の解から構成されている。したがって、$b_c^{(2k)}$ を求めるに当たって、$R_c^{(2k)}$ はすでに求められたものであり、この方程式は強制振動の方程式となる。$R_c^{(2k)}$ は、強制力として働き、式 (3.28) と比べると、パウリ原理の効果が方程式では強制力として逐次取り入れられていることがわかる。この方程式の解は簡単に求めることができる。したがって、高次の展開は一連の次の漸化式によって与えられることになる：

$$
\begin{cases}
b_c^{(2k)}(\theta) = -\frac{i}{2}\{e^{i\theta}\int_0^\theta d\phi e^{-i\phi} R_c^{(2k)}(\phi) - e^{-i\theta}\int_0^\theta d\phi e^{i\phi} R_c^{(2k)}(\phi)\}, \\
X_c^{(2k)}(\theta) = -\frac{1}{2}\{e^{i\theta}\int_0^\theta d\phi e^{-i\phi} R_c^{(2k)}(\phi) + e^{-i\theta}\int_0^\theta d\phi e^{i\phi} R_c^{(2k)}(\phi)\},
\end{cases}
\tag{3.33}
$$

$$
X_n^{(2k)}(\theta) = -\int_0^\theta d\phi R_n^{(2k)}(\phi), \tag{3.34}
$$

$$
B_q^{(2k+1)}(\theta) = \int_0^\theta d\phi S_q^{(2k+1)}(\phi), \tag{3.35}
$$

$$
\begin{cases}
R_\mu^{(2k)}(\theta) = \sum_{cq} \Gamma_q^{\mu c} \sum_{l=0}^{k-1} B_q^{(2l+1)}(\theta) b_c^{(2k-2l-2)}(\theta), \\
\\
S_q^{(2k+1)}(\theta) = \sum_{c\mu} \sum_{l=0}^{k} \{\Gamma_q^{\mu c} b_c^{(2l)\dagger}(\theta) X_\mu^{(2k-2l)}(\theta) + \Gamma_q^{c\mu} X_\mu^{(2l)\dagger}(\theta) b_c^{(2k-2l)}(\theta)\},
\end{cases}
\tag{3.36}
$$

$$
(k = 1, 2, 3, \ldots).
$$

以上、演算子の展開形式を得るための公式を与えた。ここで展開の収束性を調べてみる。展開はパラメータϵに関する展開であった。この展開が形式的のみならず真に small parameter 展開であることが期待できる為には、展開係数に集団モードが関与していなければならない。BET において非集団的励起モードを取り入れた場合、すなわち式 (2.58) の t に n が含まれる場合、$Y(nnnn)$ のように非集団的励起モードの添え字のみで構成される展開係数が現れる。それに対して、BFET の展開係数は必ず添え字 c を含んだ形となることは上記の漸化式から明かである。これは、第ゼロ近似で、非集団的励起モードをフェルミオンで表した効果であり、収束性が改善される結果となっている。また、BET 同様 unlinked term が出てこないことも明かである。

3.3.2 状態ベクトルの取扱い

式 (3.21) を見れば明らかなように、最低次の近似ではボソンと非集団的励起モードのフォノンからなる状態ベクトル $|N';c\rangle_B|N-N';n\rangle_F$ は物理的状態ベクトルであり、かつフェルミオン空間の多フォノン状態ベクトルに対応するベクトルである。従ってそれは最低次の近似のもとで完全系を成し、それをもとに規格直交化された基底をつくることができる。展開の次数を上げた場合、むろんそのベクトルは物理的状態ベクトルではない。第 3.1 小節で述べたように、式 (3.6) の物理的状態ベクトルへの写影演算子を作用させることにより、それから物理的状態ベクトルをつくることができる：

$$|N';c\rangle_B|N-N';n\rangle_{Fphys} \equiv \overline{\Lambda}|N';c\rangle_B|N-N';n\rangle_F. \tag{3.37}$$

この状態ベクトルが完全系を作ることは次のようにして示すことができる。ボソン・フェルミオン空間の完全系は、集団的フォノン励起を含めた状態ベクトル $|N';c\rangle_B|N-N';\mu\rangle_F$ で与えられる。従ってそれに写影演算子 $\overline{\Lambda}$ を作用させた状態ベクトル

$$|N';c\rangle_B|N-N';\mu\rangle_{Fphys} \equiv \overline{\Lambda}|N';c\rangle_B|N-N';\mu\rangle_F. \tag{3.38}$$

を取れば物理的部分空間の完全系が得られる。従って、この状態ベクトルが式 (3.37) の線形結合で書けることを示せば証明が終わる。今簡単の為に $|N';c\rangle_B|N-N';\mu\rangle_F$ の形式の状態ベクトルを $|\phi\rangle$ と書き、$|N';c\rangle_B|N-N';n\rangle_F$ を $|\psi\rangle$ と書く。$|\phi\rangle$ は $|\psi\rangle$ に $X_c^\dagger$ を作用させることによって作ることができる:

$$|\phi\rangle = \sum_{c_1\cdots c_m} X_{c_1}^\dagger \cdots X_{c_m}^\dagger |\psi\rangle. \tag{3.39}$$

ここで式 (3.18) と高次の展開を与える形式から明らかなように、

$$X_c^\dagger \equiv -\overline{b}_c^\dagger + \Delta_c^\dagger, \tag{3.40}$$

と書くことができる。そのとき $\Delta_c^\dagger$ は b_c、$b_c^\dagger$、X_μ、$X_\mu^\dagger$、B_q で表され、しかも $\Delta_c^\dagger \sim O(\epsilon^2)$ となる。よって、

$$\overline{\Lambda}|\phi\rangle = \sum_{c_1\cdots c_m} \overline{\Lambda}\Delta_{c_1}^\dagger \cdots \Delta_{c_m}^\dagger |\psi\rangle, \tag{3.41}$$

となる。$\Delta_{c_1}\cdots\Delta_{c_m}^\dagger|\psi\rangle$ は $|\phi\rangle$ で表される。再び同じ手続きを繰り返すことにより、(3.38) の状態ベクトルが (3.37) の状態ベクトルで表されるという結論に達する。従って、物理的状態ベクトルの完全系をつくるには (3.37) 式型の状態ベクトルを用意すれば良いことになる。

次に、$\overline{\Lambda}$ の取扱いについて論ずる。$\overline{\Lambda}$ は一般には展開の収束性が良くないことは式 (2.49)、(2.50) からわかる。従って一見、射影演算子を導入する高次の展開の取扱いは複雑なように

見える。しかしながら、この演算子は式 (3.38) の様に一般的な状態ベクトルに作用するのではなく、第ゼロ近似で物理的状態ベクトルである式 (3.19) に作用する。その場合展開の収束性が良く取扱いが簡単となる。収束性が良くなることは、式 (3.19) の状態ベクトルに非物理的状態ベクトルがどの様な形で含まれるかを見ればわかる。そのためには、$b_c^\dagger$、$X_n^\dagger$ を逆にバー付きの演算子すなわち、変換された演算子で表した場合を調べれば良い。

$$O = U^\dagger \overline{O} U = \overline{U}^\dagger \overline{O}\,\overline{U}, \tag{3.42}$$

となることに注意すると、この逆展開の構造は基本的に先に述べた高次の展開と同等となる。すなわち、非物理的励起モードの生成演算子である$\overline{b}_c^\dagger$を含む項は高次の展開項であり、しかも含まれる数が増せば増すほど展開の次数も増える。射影演算子$\overline{\Lambda}$の展開の取るべき項数は、非物理的状態ベクトルの励起数に比例して増大するが、そのような成分は式 (3.19) に高次のものとして含まれている。従って収束性は良くなることになる。

この様に物理的状態空間への射影演算子が明確な形で与えられかつ簡単に取り扱えることは注目に値する。なぜなら、BET では基本的にこの様なチェックは多フォノン状態ベクトルのノルム行列を解いてはじめて得られるのに対し、展開の要求される次数で物理的状態ベクトルが定式上作ることができ、また実際どれほどの良い近似でもって物理的部分空間で作業しているかどうか簡単にチェックできるからである。

3.4 具体的な展開形式

前小節で与えた一般的な方法にもとづき、ここでは具体的な展開形式を示す。具体的に求める展開のオーダーとしては $O(\epsilon^3)$ まで取る。これは式 (2.58) の BET と同じオーダーのものである。

まず最初に状態ベクトルについて調べよう。第ゼロ近似で物理的な状態ベクトルに射影演算子$\overline{\Lambda}$を作用させた場合、その収束性は良いことは先に示した。さらに、ここで問題にするオーダーまででは、$\overline{\Lambda} = 1$ とみなすことができる。すなわち、今、任意のフェルミオンの演算子を O_F、対応するボゾン・フェルミオン演算子を$\overline{O} = UO_FU^\dagger$とし、第ゼロ近似で物理的である状態ベクトルを $|\psi\rangle$ で表したとき、

$$\langle\psi|\overline{\Lambda}\,\overline{O}\,\overline{\Lambda}|\psi'\rangle = \langle\psi|\overline{O}|\psi'\rangle + O(\epsilon^4), \tag{3.43}$$

となることを示すことができる。そのために、まず $|\psi\rangle$ を次のように物理的な部分と非物理的な部分とにわける：

$$|\psi\rangle = \overline{\Lambda}|\psi\rangle + (1-\overline{\Lambda})|\psi\rangle. \tag{3.44}$$

そうすると前者のオーダーは $O(1)$、後者は $O(\epsilon^2)$ となることは今までの議論から明かである。従って、

$$\begin{aligned} \langle\psi|\overline{O}|\psi'\rangle &= \langle\psi|\overline{\Lambda}\,\overline{O}\,\overline{\Lambda}|\psi'\rangle \\ &\quad +\langle\psi|\overline{\Lambda}\,\overline{O}\,(1-\overline{\Lambda})|\psi'\rangle + \langle\psi|(1-\overline{\Lambda})\,\overline{O}\,\overline{\Lambda}|\psi'\rangle \\ &\quad +\langle\psi|(1-\overline{\Lambda})\,\overline{O}\,(1-\overline{\Lambda})|\psi'\rangle, \end{aligned} \tag{3.45}$$

の第 2、3 項のオーダーは $O(\epsilon^2)$、第 4 項のオーダーは $O(\epsilon^4)$ となる。ところがここで、

$$[\overline{O},\overline{\Lambda}] = 0, \tag{3.46}$$

が成り立つので、第 2、3 項はゼロとなる。したがって、(3.43) が成り立つことになり、$O(\epsilon^3)$ までのオーダーでは (3.19) 式の状態ベクトルを物理的なものとして使用することができる。

次にフェルミオンの対演算子の具体的な展開形式を与えよう。まず、各演算子について最低次の展開項をまとめて表示すると、

$$\begin{aligned} \overline{X}_c^{(0)} &= b_c, \\ \overline{X}_n^{(0)} &= X_n, \\ \overline{B}_q^{(1)} &= B'_q + \textstyle\sum_{c_1c_2}\Gamma_q^{c_2c_1} b^\dagger_{c_1} b_{c_2} + \sum_{cn}(\Gamma_q^{nc} b^\dagger_c X_n + \Gamma_q^{cn} X^\dagger_n b_c), \end{aligned} \tag{3.47}$$

となる。ただしここで、

$$B'_q \equiv B_q - \sum_{c_1c_2}\Gamma_q^{c_2c_1} X^\dagger_{c_1} X_{c_2} - \sum_{cn}(\Gamma_q^{nc} X^\dagger_c X_n + \Gamma_q^{cn} X^\dagger_n X_c), \tag{3.48}$$

と置いた。これらは式 (3.29)~(3.31) で$\theta = \frac{\pi}{2}$と置くと得られる。

ここで新たに定義した演算子 B'_qに着目すると、それは次の交換関係を満たすことがわかる：

$$\begin{aligned} &[B'_q, X^\dagger_c] = O(\epsilon^3), \\ &[B'_1, X^\dagger_n] = \textstyle\sum_{n'}\Gamma_q^{nn'} X_{n'} + O(\epsilon^3). \end{aligned} \tag{3.49}$$

この交換関係から、最低次のボゾン・フェルミオン展開においては、非集団的モードのフォノンの交換関係が閉じることがわかる。したがって、このオーダーでは BFET において変換後 $X^\dagger_c$、X_cは B'_qの中に繰り込むことができた訳である。よってこのオーダーではフェルミオン空間の基本的な対演算子の組、$\{X^\dagger_c, X_c, X^\dagger_n, X_n, B_q\}$ に対応する BFET の演算子の組は $\{b^\dagger_c, b_c, X^\dagger_n, X_n, B'_q\}$ となる：

$$\{X^\dagger_c, X_c, X^\dagger_n, X_n, B_q\} \leftrightarrow \{b^\dagger_c, b_c, X^\dagger_n, X_n, B'_q\}. \tag{3.50}$$

次のオーダーの展開項は各々以下の様に与えられる：

$$\begin{aligned} \overline{X}_c^{(2)} = &-\tfrac{1}{4}\textstyle\sum_{c_1c_2c_3} Y(cc_3c_2c_1) b^\dagger_{c_1} b_{c_2} b_{c_3} \\ &-\tfrac{1}{3}\textstyle\sum_{c_1c_2n} Y(cnc_2c_1) b^\dagger_{c_1} b_{c_2} X_n \\ &-\tfrac{1}{3}\textstyle\sum_{c_1c_2n} Y(cc_2c_1n) X^\dagger_n b_{c_1} b_{c_2} \\ &-\tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{c'q}\Gamma_q^{cc'} B'_q b_{c'} \\ &+\Delta\overline{X}_c^{(2)}, \end{aligned} \tag{3.51}$$

$$
\begin{aligned}
\overline{X}_n^{(2)} = \;& -\tfrac{1}{3}\textstyle\sum_{c_1c_2c_3} Y(nc_3c_2c_1)b_{c_1}^\dagger b_{c_2} b_{c_3} \\
& -\tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{c_1c_2n_1} Y(nn_1c_2c_1)b_{c_1}^\dagger b_{c_2} X_{n_1} \\
& -\tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{c_1c_2n_1} Y(nc_2c_1n_1)X_{n_1}^\dagger b_{c_1} b_{c_2} \\
& -\textstyle\sum_{cq} \Gamma_q^{nc} B_q' b_c \\
& +\Delta\overline{X}_n^{(2)},
\end{aligned}
\tag{3.52}
$$

$$
\begin{aligned}
\overline{B}_q^{(3)} = \;& -\tfrac{1}{12}\textstyle\sum_{c_1c_2c_3c_4}\sum_n\{\Gamma_q^{nc_1}Y(nc_4c_3c_2)+\Gamma_q^{c_4n}Y(nc_1c_2c_3)\}b_{c_1}^\dagger b_{c_2}^\dagger b_{c_3} b_{c_4} \\
& -\tfrac{1}{12}\textstyle\sum_{c_1c_2c_3c_4}[\sum_n 2\{\Gamma_q^{nc_1}Y(nn_1c_3c_2)+\Gamma_q^{c_3n}Y(nc_1c_2n_1)\} \\
& \qquad\qquad -\textstyle\sum_{c'}\Gamma_q^{n_1c'}Y(c'c_1c_2c_3)]b_{c_1}^\dagger b_{c_2}^\dagger b_{c_3} X_{n_1} \\
& -\tfrac{1}{12}\textstyle\sum_{c_1c_2c_3n_1}[\sum_n 2\{\Gamma_q^{nc_1}Y(nc_3c_2n_1)+\Gamma_q^{c_3n}Y(nn_1c_1c_2)\} \\
& \qquad\qquad -\textstyle\sum_{c'}\Gamma_q^{c'n_1}Y(c'c_3c_2c_1)]X_{n_1}^\dagger b_{c_1}^\dagger b_{c_2} b_{c_3} \\
& +\tfrac{1}{6}\textstyle\sum_{c_1c_2n_1n_2}\sum_{c'}\{\Gamma_q^{n_2c'}Y(c'n_1c_1c_2)+\Gamma_q^{c'n_1}Y(c'n_2c_2c_1)\}b_{c_1}^\dagger b_{c_2} X_{n_1}^\dagger X_{n_2} \\
& +\tfrac{1}{6}\textstyle\sum_{c_1c_2n_1n_2}\sum_{c'}\{\Gamma_q^{n_2c'}Y(c'c_1c_2n_1)b_{c_1}^\dagger b_{c_2}^\dagger X_{n_1} X_{n_2} \\
& \qquad\qquad +\Gamma_q^{c'n_1}Y(c'c_2c_1n_2)X_{n_1}^\dagger X_{n_2}^\dagger b_{c_1} b_{c_2}\} \\
& +\Delta\overline{B}_q^{(3)}
\end{aligned}
\tag{3.53}
$$

$\Delta\overline{X}_c^{(2)}$、$\Delta\overline{X}_n^{(2)}$、$\Delta\overline{B}_q^{(3)}$、はそれぞれ$X_c^\dagger$または$X_c$を正規順序で含む項を表す。この様に最低次のオーダーと違ってこのオーダーになると$X_c^\dagger$、X_cは特定の演算子に繰り込むことはもはやできない。しかしながら$X_c \approx \overline{b}_c$であるのでそれらは非物理的励起となり、演算子の中に正規順序で含まれている限り、最低次のオーダーで物理的な状態ベクトルに対する寄与はさらに高次のオーダーとなる。したがって、3次までの展開ではそれらを無視できることになり、式(3.50)の対応関係が再び成り立つ。

以上3次のオーダーのボソン・フェルミオン展開法では、式(3.47)、(3.51)～(3.53)で具体的に与えた展開と、式(3.19)の状態ベクトルを使えばよいことを示した。

4 ボゾン展開法とボゾン・フェルミオン展開法の比較検討

第2節で述べた様に、BET はフェルミオン空間をボゾン空間に写像する方法である。その方法は、式 (2.13) に示した通り一旦ボゾン・フェルミオン空間を介して行われる。すなわち、まず自明な写像によって、フェルミオン空間からボゾン・フェルミオン空間に移り、それを変換演算子で変換したのち、最終的にボゾン空間に写像する。変換演算子はボゾン・フェルミオン空間において、フェルミオン励起のみからなる部分空間をボゾン励起のみの部分空間に一対一に対応づける。これが BET の写像の基本であることはすでに示した。また第2.1小節で述べた実用的な BET ではフェルミオン空間全体を写像するのではなく、その部分空間を写像する。その様な制限は変換演算子に織り込まれている。一方 BFET はフェルミオン空間をボゾン・フェルミオン空間に写像する方法である。そのボゾン・フェルミオン空間の変換演算子は BET と違ってフェルミオン励起のみからなる部分空間をボゾン・フェルミオン双方の励起を許す部分空間に変換する。その変換演算子は BET の様にフェルミオン空間を制限するものではなく、第ゼロ近似で集団的励起モードをボゾン化するものである。

これら両者の写像を比べてみると、BFET のボゾン化された部分が BET とどの様な関係があるかが興味深い問題として浮かび上がってくる。そこで、展開の次数 $O(\epsilon^3)$ まで求めた両者の展開を利用して比較検討することを試みる。

第3.3小節で求めた BFET の演算子の展開式のボゾン化された部分は、

$$\begin{aligned}
(\overline{X}_c)_B =&\ b_c - \tfrac{1}{4}\textstyle\sum_{c_1c_2c_3} Y(cc_3c_2c_1)b^\dagger_{c_1}b_{c_2}b_{c_3} + O(\epsilon^4),\\
(\overline{X}_n)_B =&\ -\tfrac{1}{3}\textstyle\sum_{c_1c_2c_3} Y(nc_3c_2c_1)b^\dagger_{c_1}b_{c_2}b_{c_3} + O(\epsilon^4),\\
(\overline{B}_q)_B =&\ \textstyle\sum_{c_1c_2}\Gamma_q^{c_2c_1}b^\dagger_{c_1}b_{c_2}\\
&-\tfrac{1}{12}\textstyle\sum_{c_1c_2c_3c_4}\sum_n\{\Gamma_q^{nc_1}Y(nc_4c_3c_2)+\Gamma_q^{c_4n}Y(nc_1c_2c_3)\}b^\dagger_{c_1}b^\dagger_{c_2}b_{c_3}b_{c_4} + O(\epsilon^5),
\end{aligned} \tag{4.1}$$

となる。これらの式の左辺の定義は、式 (3.5) の記号を使うと、

$$(\overline{O})_B \equiv {}_F\langle 0|\overline{O}|0\rangle_F, \tag{4.2}$$

である。このようにして得られた結果は、一旦ボゾン・フェルミオン展開を行った後、フェルミオンの自由度を消去し、式 (3.2) に見るように、第ゼロ近似で集団的フォノン励起に対応するものとして導入されたボゾン励起のみで変換された演算子を表現するものである。一方 BET は変換演算子を作る上でもまずフェルミオン空間の部分空間を選ぶ必要があった。第2.2小節でその選ばれた空間のことを T 空間と呼んだ。その T 空間をどの様に取るかは、式 (2.29) の多フォノン状態ベクトルを規格直交化してその基底ベクトルとする事を前提のもとに、どのモードのフォノンを採用するかにかかってくる。採用されるモードは

t で、それ以外は $\bar{t}$ で表した。したがって、式 (4.1) と式 (2.58) とを比べる場合、後者において t として c を採用しなければならない。当然この場合 $\bar{t}$ は n である。式 (2.58) を比較すべきものに書き換えると、

$$\begin{aligned} (X_c)_B =& \ b_c - \tfrac{1}{4}\textstyle\sum_{c_1c_2c_3} Y(cc_3c_2c_1)b^\dagger_{c_1}b_{c_2}b_{c_3} + O(\epsilon^4), \\ (X_n)_B =& -\tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{c_1c_2c_3} Y(nc_3c_2c_1)b^\dagger_{c_1}b_{c_2}b_{c_3} + O(\epsilon^4), \\ (B_q)_B =& \textstyle\sum_{c_1c_2} \Gamma_q^{c_2c_1} b^\dagger_{c_1}b_{c_2} \\ & -\tfrac{1}{4}\textstyle\sum_{c_1c_2c_3c_4}\sum_n\{\Gamma_q^{nc_1}Y(nc_4c_3c_2) + \Gamma_q^{c_4n}Y(nc_1c_2c_3)\}b^\dagger_{c_1}b^\dagger_{c_2}b_{c_3}b_{c_4} + O(\epsilon^5), \end{aligned} \tag{4.3}$$

となる。

式 (4.1) と (4.3) を比較すると、非常に似た構造をしていることがわかる。特に集団的フォノン X_c をみると、その各々の対応する展開、$(\overline{X}_c)_B$、$(X_c)_B$ は一致する。また X_n に関しては、その違いは数因子の違いのみであり、$(\overline{X}_n)_B$ が $-\frac{1}{3}$ であるのに対して $(X_n)_B$ は $-\frac{1}{2}$ である。B_q については、最低次の項は両者一致し、高次の項は数因子が $(\overline{B}_q)_B$ が $-\frac{1}{12}$ であるのに対して $(B_q)_B$ は $-\frac{1}{4}$ となる。

この様に極めて類似した構造を示しながら、微妙な食い違いがあるのは何に原因があるのであろうか。この問に答えるために両者の違いがどこで生じているか調べてみると、何れも非集団的励起モード n を含む項のみに現れていることがわかる。非集団的励起モードは BFET では第ゼロ近似でフェルミオンで表されるモードであり、BET では、今の場合 $\bar{t}$ モードであり、第ゼロ近似で切り捨てられるモードである。

BET では T 空間は多フォノン状態ベクトルのモードに着目して選択した。第ゼロ近似すなわち、フォノンの交換関係をボゾンのそれとみる近似では、たとえば集団的励起モードのみからなる多フォノン状態ベクトルは、非集団的励起モードを含むそれと完全に直交する。しかしながら、近似の精度を次の段階まで上げると、その直交関係は破られる。そこでは、フォノンのいわゆる２重交換関係、

$$[X_{\mu_1}, [X_{\mu_2}, X^\dagger_{\mu_3}]] = \sum_\mu Y(\mu\mu_1\mu_2\mu_3)X_\mu, \tag{4.4}$$

が効いてくる。その大きさは $O(\epsilon^2)$ のオーダーである。ここで、この式の左辺のフォノンのモードを集団的励起モードに限った場合を示すと、

$$[X_{c_1}, [X_{c_2}, X^\dagger_{c_3}]] = \sum_c Y(cc_1c_2c_3)X_c + \sum_n Y(cc_1c_2c_3)X_n \neq \sum_c Y(cc_1c_2c_3)X_c, \tag{4.5}$$

となり、２重交換関係が集団的励起モードの中で閉じない。これが直交しない原因となる。このことからわかるようにフェルミオン空間における T 空間、たとえば今の場合は集団的部分空間はあくまで第ゼロ近似の対応のもとに構成されていると見るべきである。すなわ

ち、モードの種別t、$\bar{t}$で空間を特徴づけることができるのはあくまでも第ゼロ近似に限った場合である。そうするとT空間を構成するには、式(2.34)の状態ベクトルに限らず一般に

$$|N;t\rangle\rangle'_F \equiv |N;t\rangle\rangle_F + \sum_{\bar{t}} u^{(2)}(t,\bar{t})|N;\bar{t}\rangle\rangle_F, \tag{4.6}$$

を取って良いことになる。ただし、ここで$u^{(2)}(t,\bar{t}) \sim O(\epsilon^2)$である。T空間、今の場合は集団的部分空間の作り方は一通りではなく、したがって、展開の高次の項の係数はどの$u^{(2)}(t,\bar{t})$を採用するかに依存する。先に紹介したBETはたまたま$u^{(2)}(t,\bar{t}) = 0$と取っているに過ぎない。BFETは、その変換演算子の条件を式(3.2)、(3.3)で与えているが、前者は第ゼロ近似のもとで要請されている条件である。これらの条件を満たすものの一つとして式(3.11)を採用し、BFETの具体的展開式を求めた。従って、式(3.11)以外で条件を満足する変換演算子を採用すれば、展開の高次の項の係数がやはり変わることが予想される。したがって、BET、BFETともにボゾン化される空間は、第ゼロ近似を目安に選択されているに過ぎないことが、数因子の食い違いの原因と考えられる。

そこで、BFETの変換演算子として別の演算子を選ぶことにより、BETと同様の数因子が導出できるかどうか調べてみる。新しい変換演算子を次のように定義する：

$$U'(\Delta F) \equiv U e^{-\Delta F}. \tag{4.7}$$

Uは今まで採用してきた変換演算子とする。$U'(\Delta F)$がBFETの変換演算子であるためのΔFの条件は、

$$\begin{aligned} \Delta F^\dagger &= -\Delta F, \\ \Delta F &\approx O(\epsilon^2), \\ \Delta F|0\rangle &= \Delta F a_\alpha^\dagger|0\rangle = 0, \end{aligned} \tag{4.8}$$

であることはすぐにわかる。これらは、順に式(3.1)、(3.2)、(3.3)から導かれる。またこの変換演算子の変更で第3.3.2小々節や第3.4小節で述べた状態ベクトルの取扱いは変わらないことは言うまでもない。従って状態ベクトルとしてはボゾンの規格直交ベクトル$|N;c\rangle\rangle_B$を物理的状態ベクトルとして使用できる。この変換演算子によって任意の演算子Oは、

$$\begin{aligned} O(\Delta F) &\equiv U'(\Delta F) O U'^\dagger(\Delta F) \\ &= \exp\{-\Delta \overline{F}\}\overline{O}\exp\{\Delta\overline{F}\} \\ &= \overline{O} + [\overline{O}, \Delta\overline{F}] + \cdots, \end{aligned} \tag{4.9}$$

の様に変換される。$\Delta F \sim O(\epsilon^2)$であるので、上式の項までとれば十分で、

$$\Delta\overline{O} = [\overline{O}, \Delta\overline{F}], \tag{4.10}$$

とおくと、これが$\overline{O}$に対する修正項となる。ボゾン励起のみに着目するには、$(\Delta\overline{O})_B \equiv {}_F\langle 0|\Delta\overline{O}|0\rangle_F$ を見れば良い。そこで BET の展開項と同等のものを導出するという目的のもとに、αなるパラメータに任意性を残す形で以下のようにΔFを設定することにする：

$$\Delta F \equiv \alpha \sum_{nc_1c_2c_3} \{Y(nc_1c_2c_3)X^\dagger_{c_1}X^\dagger_{c_2}X_{c_3}X_n - Y(nc_3c_2c_1)X^\dagger_n X^\dagger_{c_1}X_{c_2}X_{c_3}\}. \tag{4.11}$$

$\Delta\overline{F}$は次のようになる：

$$\Delta\overline{F} \equiv \alpha \sum_{nc_1c_2c_3} \{Y(nc_1c_2c_3)b^\dagger_{c_1}b^\dagger_{c_2}b_{c_3}X_n - Y(nc_3c_2c_1)X^\dagger_n b^\dagger_{c_1}b_{c_2}b_{c_3}\} + O(\epsilon^4). \tag{4.12}$$

この結果、各演算子に対する修正項は次のように与えられる：

$$\begin{aligned}\Delta\overline{X}_c(\alpha) &= 2\alpha \textstyle\sum_{c_1c_2n} Y(cnc_2c_1)b^\dagger_{c_1}b_{c_2}X_n \\ &\quad -\alpha \textstyle\sum_{c_1c_2n} Y(cc_2c_1n)X^\dagger_n b_{c_1}b_{c_2},\end{aligned} \tag{4.13}$$

$$\Delta\overline{X}_n(\alpha) = -\alpha \textstyle\sum_{c_1c_2c_3} Y(nc_3c_2c_1)b^\dagger_{c_1}b_{c_2}b_{c_3}, \tag{4.14}$$

$$\begin{aligned}\Delta\overline{B}_q(\alpha) = & -\alpha \textstyle\sum_{c_1c_2c_3c_4}\sum_n \{\Gamma^{nc_1}_q Y(nc_4c_3c_2) + \Gamma^{c_4n}_q Y(nc_1c_2c_3)\}b^\dagger_{c_1}b^\dagger_{c_2}b_{c_3}b_{c_4} \\ & +\alpha \textstyle\sum_{c_1c_2c_3n}[\sum_{c'}\{2\Gamma^{c'c_1}_q Y(nc'c_2c_3) - \Gamma^{c_3c'}_q Y(nc_1c_2c')\} \\ & -\textstyle\sum_{n'}\Gamma^{nn'}_q Y(n'c_1c_2c_3)]b^\dagger_{c_1}b^\dagger_{c_2}b_{c_3}X_n \\ & +\alpha \textstyle\sum_{c_1c_2c_3n}[\sum_{c'}\{2\Gamma^{c_3c'}_q Y(nc'c_2c_1) - \Gamma^{c'c_1}_q Y(nc_3c_2c')\} \\ & -\textstyle\sum_{n'}\Gamma^{n'n}_q Y(n'c_3c_2c_1)]X^\dagger_n b^\dagger_{c_1}b_{c_2}b_{c_3} \\ & +2\alpha \textstyle\sum_{c_1c_2n_1n_2}\sum_{c'}\{\Gamma^{c'n_1}_q Y(n_2c'c_1c_2) + \Gamma^{n_2c'}_q Y(n_1c'c_2c_1)\}b^\dagger_{c_1}b_{c_2}X^\dagger_{n_1}X_{n_2} \\ & -\alpha \textstyle\sum_{c_1c_2n_1n_2}\sum_{c'}\Gamma^{n_1c'}_q Y(n_2c_1c_2c')b^\dagger_{c_1}b^\dagger_{c_2}X_{n_1}X_{n_2} \\ & -\alpha \textstyle\sum_{c_1c_2n_1n_2}\sum_{c'}\Gamma^{c'n_1}_q Y(n_2c_1c_2c')X^\dagger_{n_1}X^\dagger_{n_2}b_{c_1}b_{c_2}.\end{aligned} \tag{4.15}$$

したがって、

$$(\Delta\overline{X}_c(\alpha))_B = 0, \tag{4.16}$$

$$(\Delta\overline{X}_n(\alpha))_B = -\alpha \sum_{c_1c_2c_3} Y(nc_3c_2c_1)b^\dagger_{c_1}b_{c_2}b_{c_3}, \tag{4.17}$$

$$(\Delta\overline{B}_q(\alpha))_B = -\alpha \sum_{c_1c_2c_3c_4}\sum_n \{\Gamma^{nc_1}_q Y(nc_4c_3c_2) + \Gamma^{c_4n}_q Y(nc_1c_2c_3)\}b^\dagger_{c_1}b^\dagger_{c_2}b_{c_3}b_{c_4}, \tag{4.18}$$

となる。そこで$\alpha = \frac{1}{6}$とおくと、式 (4.1) は式 (4.3) とまったく同じ形に修正される。この様にして、BFET のボゾン化された部分は BET に対応することが $O(\epsilon^4)$ の展開項を無視する範囲で示すことができた。BFET、BET ともに状態ベクトルとしてはボゾンの規格直交ベクトル $|N;c\rangle\rangle_B$ を物理的状態ベクトルとして使用する。従ってこの範囲内で言えば、集団的励起モードのみ取り扱う場合は BFET と BET は同等である。

非集団的励起モードも含む場合については、その取扱いが異なることは明かである。このことは BET を次の様に拡張すると分かりやすい。今、$t = c$ と取った上で式 (2.44) の

BET の演算子を U_Bとおく。式 (2.44) を含め第 2.2小節では BET は省略形で書かれているが、BFET との対応を見るためにボゾン・フェルミオン空間で作業していることを強調して省略せずに書くことにする。そうすると式 (2.45) は次の様になる：

$$U_B U_B^\dagger = T_B \Lambda_F; \quad U_B^\dagger U_B = \Lambda_B T_F. \tag{4.19}$$

そこで次の様な演算子を導入してみる：

$$U_{ex} \equiv U_B + \Lambda_B(1_F - T_F). \tag{4.20}$$

するとこの演算子は次の関係を満たす：

$$\begin{aligned} U_{ex} U_{ex}^\dagger &= T_B \Lambda_F + \Lambda_B(1_F - T_F), \\ U_{ex}^\dagger U_{ex} &= \Lambda_B 1_F. \end{aligned} \tag{4.21}$$

そこでこの演算子を変換演算子として使用すると、

$$\begin{aligned} U_{ex} X_c U_{ex}^\dagger &= b_c + O(\epsilon^2), \\ U_{ex} X_n U_{ex}^\dagger &= X_n + O(\epsilon^2), \end{aligned} \tag{4.22}$$

となることがすぐにわかる。従ってこの拡張が BFET に相当するものであると言える。これを見ればボゾン化する部分は U_Bが担っていることがわかる。U_Bを作るためには、先に述べたように多フォノン状態ベクトルを規格直交化しなければならなく、BET では非集団的励起モードの取扱いも U_Bをもって行う。すなわち、t が n を含む形で非集団的励起モードを取り入れる。そうするとゼロ固有値の問題がその部分で生じる。U_{ex}を見れば、それはその様な問題を避けていることがわかる。また BFET は集団的励起モードに対応する多フォノン状態ベクトルのみ部分的に対角化する取扱いといって良く、非集団的励起モードに関しては使用すべき状態ベクトルは後から対角化しなければならないが、それはゼロ固有値の問題を非集団的励起モードの取扱いに閉じこめ、それを変換後にきちんと扱う余地を残しているといえる。BFET と BET のこの違いは非集団的励起モードが 1 つのみ励起している場合を考えるとさらに分かりやすい。BET では変換後の状態としてこの様に非集団的励起モードがせいぜい 1 つしか励起していない場合でも、演算子の展開形式の高次の項を得るためには 2 フォノン状態ベクトルのノルムを取り扱わなければならない。そこには当然非集団的励起モードが 2 重に励起している状態も含まれている。それが展開係数に $Y(n_1 n_2 n_3 n_4)$ が含まれる原因である。しかしながら BFET はそのような展開係数を含まない。それはまさに、先に述べたゼロ固有値の問題を変換後の非集団的励起モードの多フォノン状態ベクトルの対角化に温存している結果である。このように BFET は BET の有効な部分を含む形でそれを拡張した理論であるといえる。それは式 (4.20) で表されるように、BET では T 空間に含まれないとして切り捨てられる部分まで、フェルミオンを導入することで扱える拡張である。

5 結論

原子核の集団運動を解明する為の新しい多体問題的手法であるボゾン・フェルミオン展開法を呈示するのがこの論文の主な目的であった。

それに先立ち、現在まで使われたなかで最も有力な方法であると思われるボゾン展開法(BET)について第2節で触れた。そこでは、BETがフェルミオン空間をボゾン空間に写像する方法であることを強調し、収束性の良い展開を得るには、フェルミオン空間を予め集団的部分空間に限定して、その空間のみをボゾン空間に写像する必要があることを示した。このような限界は、関与するすべての励起モードをその性質によらずボゾンで表すことに起因した。

そこでそのような問題を改善するために、励起モードをボゾンとフェルミオンの展開形式で表す手法であるボゾン・フェルミオン展開法(BFET)を第3節で導入した。そこではBFETをまずボゾン空間からボゾン・フェルミオン空間への写像として呈示した。その写像は展開の最低次の項を集団的フォノンはボゾンで、非集団的フォノンはフェルミオンで表すものである。その様な目的のもとで求められた展開形式が系の粒子数の偶奇を問わず使用可能であるものとして容易に与えられることを示した。これはBETが基本的には粒子数が偶数の場合に適用される理論であり、奇数系はその拡張として捉えられるのに対して大きく異なっている。次に、演算子の展開形式を与える一般公式を導出した。その基本方程式は一連の微分方程式で与えられた。パウリ原理はこの方程式の非線形性に現れているといえる。これら一連の方程式を展開形式で解いた結果、各展開の次数における主要な方程式は強制振動の方程式で与えられる事が判明した。一方、状態ベクトルについて言えば、物理的空間への写影演算子が簡単な形で求めることができ、また非物理的励起モードの混合の度合いを簡単に評価できるという、BETにない大きな利点を得た。展開形式を与える一般的な方法をもとに、演算子の展開と状態ベクトルを具体的に与えた。

第4節では、BFETとBETの比較検討を行った。そこでは、BFETのボゾン化された部分がBETと一致することを先の節で求めた具体的展開のオーダーまで示した。その過程で、BETあるいはBFETの展開係数は、変換演算子の変更に対応して変わることを示した。これはBETの定式化の過程を見ればわかるように、BETの枠内では認識しがたい結果である。このような結果を得ることができたのは、BFETがBETに比べより柔軟な理論であることを示していると言えよう。また、BFETはBETの有効な部分を含みかつBETが切り捨てる部分をフェルミオンを導入することで扱えるよう拡張した方法であることを示した。

このようにBFETはBETに比べてより有力な手法であることが期待できる。この方法

を用いて、現実の原子核の集団運動を解析することは、今後の課題である。

謝辞

この論文は名古屋大学理学部の宮西氏との共同研究に基づいています。共同研究の機会を与えていただくとともに、論文作成にいたるまで懇切丁寧な指導、助言をいただきました。この場をおかりして感謝いたします。梶山氏にはダイソンボゾン展開法、ボゾン・フェルミオン展開法について、いろいろ貴重な意見をいただいたことに感謝いたします。杉山氏には貴重な助言をいただきました。安野氏、斉藤氏をはじめG研の皆様には終始暖かい励ましと助言をいただきました。理論共通の山田さんには、LaTeX の式番号の打ち方を教えていただき、またE研の原田氏には、LaTeX の便利な打ちだし形式をいただきました。ありがとうございました。また就職後、何とか論文を提出できたのは客員研究員の制度のおかげです。この様な有益な制度を支える物理教室の皆様に感謝いたします。鈴鹿医療科学技術大学の酒井氏には、論文作成にあたり深いご理解をいただいたことに御礼申し上げます。水谷先生、山本環さんをはじめ、鈴鹿の皆様にもはげましの言葉をいただきました。ありがとうございました。

参考文献

[1] P. Ring and P. Schuck, The Nuclear Many-Body Problem, Springer(1980)

[2] 岩波講座　現代物理学の基礎　9　原子核論 (1978)

[3] T. Kishimoto and T. Tamura, Nucl. Phys. **A270** (1976) 317.

[4] H. Sakamoto and T. Kishimoto, Nucl. Phys. **A486** (1988), 1.

[5] H. Sakamoto and T. Kishimoto, Nucl. Phys. **A528** (1991), 73.

[6] H. Tukuma, H. Thorn, and K. Takada, Nucl. Phsy.**A466** (1987) 70.

[7] K.Takada, K.Yamada and H.Tsukuma, Nucl.Phys. **A496** (1989) 224.

[8] K.Yamada, K.Takada and H.Tsukuma, Nucl.Phys. **A496** (1989) 239.

[9] K.Yamada and K.Takada, Nucl.Phys. **A503** (1989) 53.

[10] H. Sakamoto and T. Kishimoto, Nucl. Phys. **A501** (1989), 205, 242.

[11] H. Sakamoto and T. Kishimoto, Phys. Lett. **B245** (1990), 321.

[12] H. Sakamoto and T. Kishimoto, Nucl. Phys. **A528** (1991), 73.

[13] A. Klein and E. R. Marshalek, Rev. Mod. Phys. **63**(1991), 375.

[14] E. R. Marshalek, Nucl. Phys. **A347** (1980), 253.

[15] T.Marumori, M.Yamamura and T.Tokunaga, Prog. Theor. Phys. **31** (1964) 1009.

[16] T. Kishimoto and T. Tamura, Phys. Rev. **C27** (1983) 341.

[17] T. Tamura, Phys. Rev. **C28** (1983) 2480.

[18] K. Takada, Nucl. Phys. **A439** (1985) 489.

[19] K. Takada, T. Tamura and S. Tazaki, Phys. Rev. **C31** (1985) 1948.

[20] K. Taniguchi and Y. Miyanishi, Prog. Theor. Phys. **84** (1990), 568.

[21] K. Taniguchi and Y. Miyanishi, Prog. Theor. Phys. **86** (1991), 151.

[22] D. R. Bès et al., Nucl. Phys. **A260**(1976), 1, 27, 77.

[23] D. R. Bès et al., Nucl. Phys. **A293**(1977), 350.

[24] D. R. Bès et al., Nucl. Phys. **A307**(1978), 402.

[25] P. F. Bortigonon et al., Phys. Rep. **30**(1977), 305.

[26] T. Kishimoto, T. Tamura and T. Kammuri, Prog. Theor. Phys. Suppl. Nos. 74 & 75(1983), 170.

[27] T. Kishimoto and T. Kammuri, Prog. Theor. Phys. **82** (1989), 338.

[28] T. Kishimoto and T. Kammuri, Prog. Theor. Phys. **84** (1990), 470.

[29] T. Kishimoto, T. Kammuri and H. Sakamoto, Prog. Theor. Phys. **85** (1991), 1057.

[30] S. G. Lie and G. Holzwarth, Phys. Rev **C12** (1975) 1035.