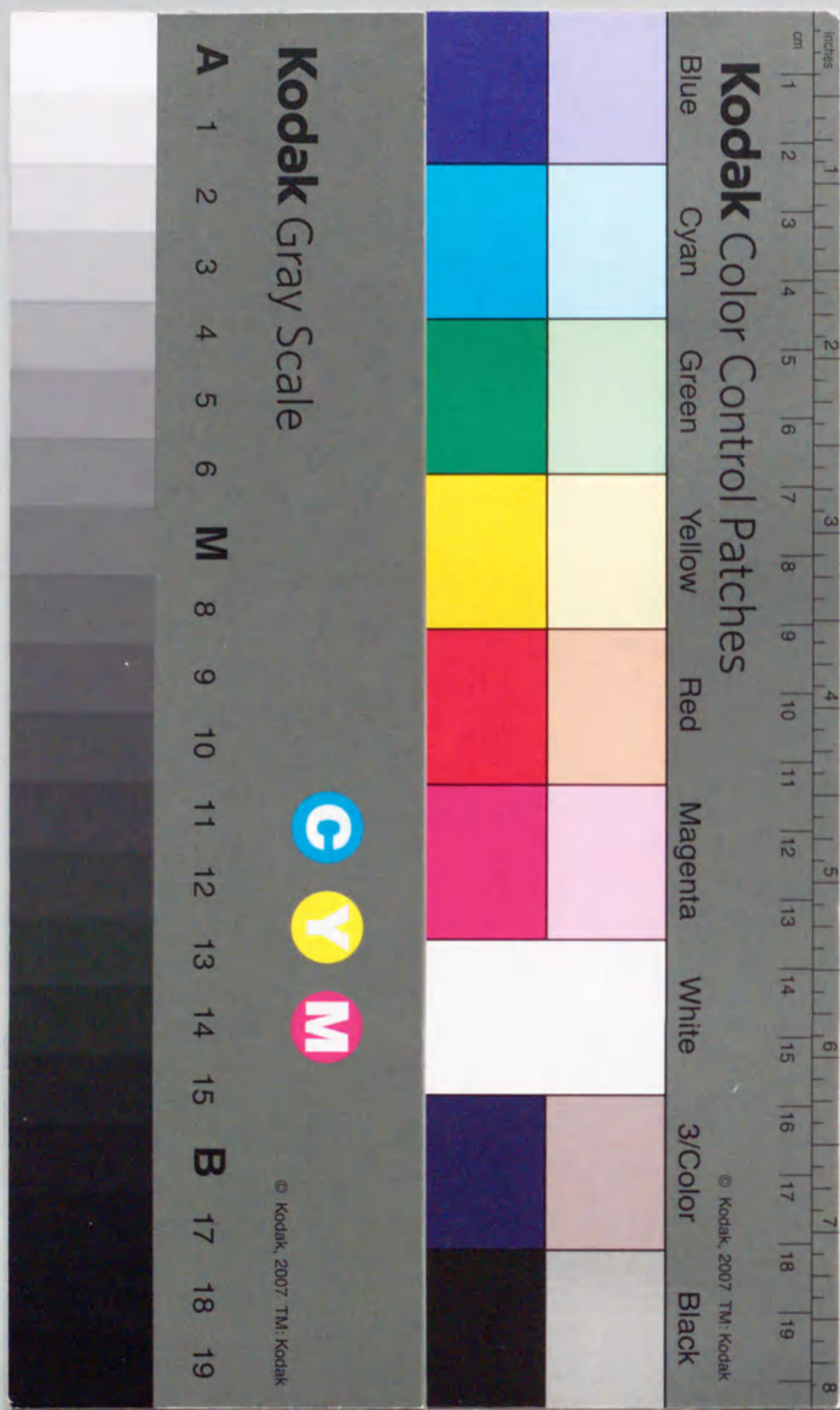


報告番号 甲 第 3246 号

境界要素法による 固有値決定法に関する研究

安 藤 英 司



①

境界要素法による
固有値決定法に関する研究

1995年

安藤英司

目 次

1 緒論	1
1.1 固有値問題と有限要素法	1
1.2 境界要素法	3
1.3 Helmholtz 方程式と固有値問題	3
1.4 境界要素法による固有値解析	5
1.5 この論文の要旨	6
2 従来の固有値解析の問題点	11
2.1 一般的な複素定式	11
2.1.1 Helmholtz 作用素の基本解と境界積分方程式	11
2.1.2 一般的な複素定式による固有値問題	12
2.1.3 一般的な複素定式による固有値解析の問題点	16
2.2 間接法境界要素法定式	16
2.3 境界要素と内部セルによる定式化	17
2.3.1 Laplace 作用素の基本解と領域積分項を含む積分方程式	17
2.3.2 内部セル法による固有値問題	18
2.3.3 内部セル法による固有値解析の問題点	19
2.4 2重相反定式	20
2.4.1 2重相反法	20
2.4.2 2重相反定式による固有値問題	22
2.4.3 2重相反定式による固有値解析の問題点	23
2.5 多重相反定式	23
2.5.1 高次の基本解	23

2.5.2	多重相反法	24
2.5.3	多重相反定式による固有値問題	25
2.5.4	多重相反定式による固有値解析の問題点	26
3	多重相反定式に関する数理的考察	29
3.1	領域積分項の収束	29
3.2	多重相反定式の境界積分方程式と一般的な複素定式の積分方程式の関係	34
3.3	分解された境界積分方程式の固有値問題	39
3.4	新しい複素定式	43
4	多重相反定式の固有値問題の解法	51
4.1	境界値問題を利用した新しい固有値決定式	51
4.2	多重相反定式の固有値問題の Newton 法反復解法	53
4.3	解析例	54
4.4	多重相反定式による固有値解析の問題点	62
4.5	まとめ	64
5	新しい複素定式による固有値問題の解法	69
5.1	行列式の極小値まわりの Newton 法	69
5.2	解析例	71
5.3	まとめ	74
6	多重相反定式による固有値問題の標準形固有値問題への変換	75
6.1	多項式行列の固有値問題と標準形の固有値問題	75
6.2	解析例	77
6.3	まとめ	79
7	多重相反定式のアダプティブメッシュ	81
7.1	誤差評価と要素の細分割	81
7.2	解析例	85
7.3	まとめ	86

8	新しい複素定式のアダプティブメッシュ	95
8.1	誤差評価と要素の細分割	95
8.2	解析例	97
8.3	まとめ	102
9	結論	103
	謝辞	107
	付録	108

第 1 章

緒論

1.1 固有値問題と有限要素法

構造物の動的振舞いを、固有振動について考えることは重要である。固有振動の観点から構造物の運動をみると、一見複雑に見える動きも様々な固有振動の重ね合わせにすぎないことが理解できる。また、固有周波数は構造物の運動を周波数領域でみたときの特異点であり、構造物を固有周波数と同じ周波数の力で加振すると、構造物の振動は発散し(共振)、その構造物が直接破壊されることさえある。また、共振による振動が小さく直接破壊につながらない場合でも、共振による繰り返し応力で疲労破壊することもある。共振による振動がより小さい場合でも、共振による振動で騒音が発生し問題となることや、制御系との共振により十分な精度での制御が実現されなかったり、機械が暴走することもある。したがって、構造物や機器を設計する際には、安全面から共振を避けることは重要である。また、機器や構造物の振動や騒音は、製品の質を左右する重要な要因であり、近年では環境問題の面から、より静粛な製品が求められるようになってきている。

これらの理由から、固有振動は構造物や機器の品質を左右する重要な要因と考えられ、計算機による固有振動の解析法も様々なものが提案されてきた。そのうち有限要素法(FEM)による固有振動解析は最も広く利用されており、これは以下に挙げる有限要素法の利点による[6]。

- 様々な大きさの有限要素を容易に作ることができるので、解析領域(物体の形状)を詳細に表現できる。

- 境界条件の扱いが容易である。

振動に限らず一般に、機械工学の問題は偏微分方程式で表現することができる。有限要素法では解析の対象となる領域を、有限要素と呼ばれる小さな領域の結合で表す。そして、有限要素内で内挿関数を用いて関数分布を近似し、偏微分方程式を変分原理によって連立方程式の形に表現し、境界条件を与えてこれを解く。固有値問題としては、振動問題、音響問題を問わず最終的に次の形の方程式を扱うことになる[1]。

$$Kx = -\omega^2 Mx \quad (1.1)$$

ここで、 M , K はそれぞれ、慣性マトリクス、剛性マトリクスとよばれる対称な実バンドマトリクスである。現在では、このような対称な実バンドマトリクスの固有値解析のサブルーチンは、様々な形で提供されており、これを用いて容易に固有値を求めることができる。市販の有限要素法ソフトウェアでは、一般に部分空間同時反復法、Lanczos 法などの方法により固有値を求める[2]。

有限要素法では、固有値解析サブルーチンや連立方程式を解くためのサブルーチンなど固有値解析そのものの環境(ソフトウェア)がすでに整っており、結果を得るプログラムを容易に作り上げることができる。また、NASTRAN, ANSYS などの完成された著名な有限要素法プログラムも提供されている。しかし、解析精度を保つために十分細かい有限要素(メッシュ)で解析を行う必要がある場合には、有限要素法においては解析モデルの作成に非常に大きな労力を必要とする。これは、有限要素法がもつ“解析のためには対象としている物体の内部までメッシュ分割する必要がある”という性質による。このため近年では、有限要素法のための自動メッシュ生成法が開発され利用されている[3]。

しかし、自動メッシュ生成で得られた有限要素モデルは要素数が不必要に増えたり、ゆがんだ要素が生成され解析精度が悪化したり、計算不能になったりするなどの理由から、現実には、要素の断面形状のみを与えてからそれを引き伸ばして3次元の要素を作るか、自動メッシュ生成で得られた要素を手作業で修正するなどの、半自動メッシュ生成の方法がとられている。これらの理由から、自動メッシュ生成や半自動メッシュ生成を用いても、メッシュ作成には非常に多くの労力を必要とする。結果として、現在でも有限要素法のメッシュ作成には多くの労力を必要としている。これは、有限要素法さえあれば、解析は全てこれで行えばすむということにならないことを意味している。

1.2 境界要素法

このようなメッシュ作成における労力のより少ない解析法に境界要素法(BEM)がある。以下に境界要素法の利点をあげる[7]。

- 多くの場合境界だけのモデル化だけで解析ができ、扱う連立方程式の大きさが小さくなる。
- 扱う微分方程式の解である境界積分方程式に直接数値積分を適用するため、数値解の精度が高い。
- 放射条件を満たす(無限遠で0に収束する)基本解を用いて境界積分方程式を導くことで、無限領域の問題を有限の境界だけで解析することができる。

このうち最も重要と考えられるのは、“解析のためには対象としている物体の境界(表面)のみを要素分割するだけでよい”という点で、このためメッシュ作成に要する労力は有限要素法に比べて非常に少なくすむ。一般のエンジニアたちが有限要素法の解析を行うとき、最も苦勞を強いられているのはメッシュ作成の作業である。普通、コンピューターによる計算時間そのものよりも、はるかに多くの時間をさいてメッシュ作成を行い解析を行っている。コンピューターの計算時間が多少長くなっても、解析の前準備(preprocess)に必要な作業はできるだけ少ない方がよい。また、境界要素法の自動メッシュ生成には、すでに完成された Delauney の三角分割法などの2次元の有限要素法の自動メッシュ生成技術がそのまま転用可能である。3次元問題を考える場合でも分割する要素は2次元(面要素)であるため、要素形状の視覚的理解のし易さから、メッシュ分割の修正を必要とする場合でも短時間で簡単に行うことができる。これらの点から境界要素法では、より簡単にメッシュ作成が可能であり、境界要素法による数値解析法の進展と実用化が望まれている。

1.3 Helmholtz 方程式と固有値問題

上に挙げたような境界要素法の利点に着目し、固有値解析(固有振動解析)の分野でも境界要素法による解析が試みられてきたが[4, 6]、本論文では特に、定常音響問題、膜の振動などの基礎方程式として知られる Helmholtz 方程式の固有値問題を取り上げる。下に示

すのが Helmholtz 方程式である.

$$\nabla^2 u + k^2 u = 0 \quad (k = 2\pi f/c) \quad (1.2)$$

ここで, $\nabla^2 \equiv \partial^2/\partial x_i \partial x_i$ は Laplace の微分作用素である. 音響問題では, u は音圧と呼ばれるスカラー値のポテンシャル量で, 音波による媒体の振動の振幅を意味する. k は波数と呼ばれる定数であり, f は音の周波数, c は音速である. Helmholtz 方程式を取り上げる理由は次の2つである.

- 境界要素法により方程式を離散化するとき, 弾性体の振動問題の場合ではベクトル場の問題を扱うことになるが, Helmholtz 方程式ではスカラー場の問題となるため基本的であり, しかも扱いが容易である.
- 弾性体の振動問題も Helmholtz 方程式の問題も, 固有値問題の形, 性質, 解法の過程における問題点は同じである. したがって, Helmholtz 方程式の固有値問題の解法は, 弾性体の振動問題にも容易に適用することができる.

式(1.2)は, 拡散音場などの無限領域の解析にも, 閉じた有限領域の解析にも, 用いることができる. 無限領域には固有値が存在しないので, 以下では, 有限領域の固有値問題に限定して考える.

式(1.2)を図1.1に示すような, 境界 Γ で囲まれた有限な領域 Ω で解くことを考える. 境界条件は, Γ の一部 Γ_1 において $u = 0$, 残りの Γ_2 において $\partial u/\partial n = 0$ と与える. このような境界条件を同次な境界条件と呼ぶ.

$$\left. \begin{array}{ll} u = 0 & (\text{on } \Gamma_1) \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & (\text{on } \Gamma_2) \end{array} \right\} \quad (1.3)$$

ただし, $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ とする. ここで, n は境界上にとった単位外向き法線ベクトルであり, $\partial/\partial n$ はその方向への方向微分を意味する. $\Gamma = \Gamma_1$ (境界上の全ての点で $u = 0$) のとき Dirichlet 問題, $\Gamma = \Gamma_2$ (境界上の全ての点で $\partial u/\partial n = 0$) のとき Neumann 問題と呼ばれる. このような境界条件では, 方程式(1.2)は, 波数 k がある値をとるときに限り, 意味のある解 ($u \neq 0$) を持つことができる. このときの $k = k_e$ を固有値, $u = u_e$ を固有関数と呼ぶ. k_e あるいは u_e を求めることを固有値問題というが, ここでは k_e を求めることのみを考える. (k_e が定まれば, そのあとで u_e を決定することは容易である.) 領域 Ω は, 実際の解析では, 複雑な形状を考えるので, 式(1.2)を解析的に解くことはできない. しかし, 領域

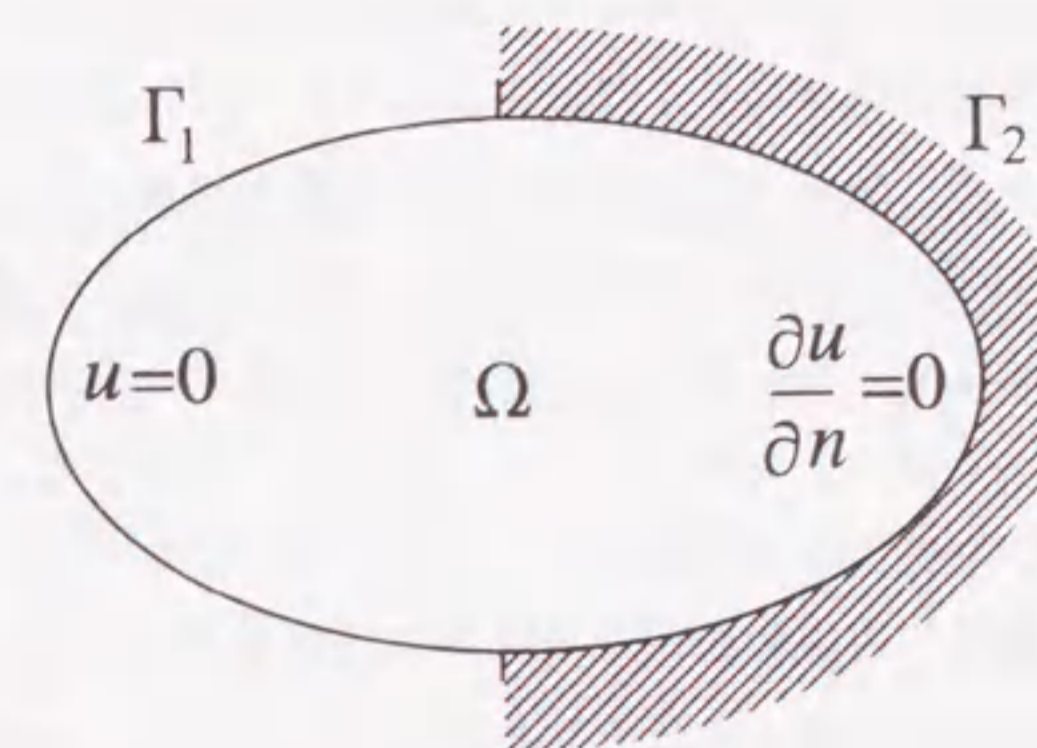


図 1.1: 解析領域 Ω と同次な境界条件

の形状が長方形の場合は, 式(1.2)を変数分離することで, 解析解を得ることができる. あとで示す数値解析における結果を解析解と比較して検討するために用いる目的で, 本論文末尾に付録として, 境界条件と共にその固有値を示しておく.

1.4 境界要素法による固有値解析

境界要素法により Helmholtz 方程式を離散定式化すると, 最終的に次の固有値問題が得られる(2.1節参照).

$$\mathbf{A}(k)\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (1.4)$$

Helmholtz 方程式に限らず境界要素法による固有値問題は, 上の式の形に帰着される. ここで, 固有値は係数マトリクス $\mathbf{A}(k)$ の行列式が0(実際には極小値)となる波数 k であり, 次式を解くことにより得られる.

$$\det \mathbf{A}(k) = 0 \quad (1.5)$$

しかし, $\mathbf{A}(k)$ は周波数成分 $k = \omega/c$ を陰に含み, 一般に複素数の値をとるため, 有限要素法の固有値解析で使われる一般化固有値問題の解析法を用いることができず, 係数マトリ

タスの行列式 $\det \mathbf{A}(k)$ が 0 となるところを, k を少しずつ変えて探し出すという非効率的な方法がとられてきた [4~6, 8~10]. またこれとは別の方法で, 境界積分に加えて領域積分を用いる境界要素法 (internal cell method, mass matrix approach) [11] では, 固有値問題が標準固有値問題となるが, 物体の内部まで要素分割する必要がある, 有限要素法に代えてまでこの方法を用いる利点がない.

以上のような理由から, 最近まで“境界要素法は固有値解析には不適”と考えられてきて, 一般的には, 定常振動問題の“境界値問題”に適用が限られてきた. 最近, 弾性体の定常振動と音響の連成問題を, 有限要素法と境界要素法を組み合わせる解析方法が開発され一部実用化に至っている. この方法では, 弾性体を有限要素法で離散化し, そのまわりの音場を境界要素法で解析する手法用いられている. この手法によれば, 有限な物体と無限な領域の連成問題を, 有限要素法と境界要素法を組み合わせる解析することで, 各々の利点を活かしつつ難点を克服することができる. しかし, この場合でも, 弾性体と音場を一体とした固有値問題を解くことは難しく, 周波数を少しずつ変えて弾性体の振動変位や音場の音圧の周波数応答を計算して, そのピーク値から固有値を求める方法に頼るしかない (様々な周波数に対する“境界値問題”を解いているに過ぎない).

このような従来の境界要素法みられる固有値解析効率の問題点を取り除く目的で, 2 重相反定式 (Dual Reciprocity Method, DRM) [13, 14] による境界要素法を用いた固有値解析法が, 最近 Partridge らによって提案された. この方法は, 境界要素に加えて物体の内部にいくつかの内点を取り, 内挿関数を用いて, 境界要素上の節点と内点の上での関数値を近似するものである. この方法によれば, 固有値問題は一般化固有値問題となるが, “境界要素だけでなくいくつかの内点を補助的に必要とし, 固有値の精度を保つためには内点の数を多くする必要がある”ことと, “内挿関数の定義に理論的裏付けがない”などの点から疑義がある.

1.5 この論文の要旨

以上述べたような研究の現状に基づき, この論文では, Helmholtz 方程式の境界要素法による固有値解析法を取り上げ, 境界積分方程式の定式化に Nowak らの提案した多重相反法 (Multiple Reciprocity Method, MRM) [16, 17] を用いることで, 境界要素法のメッシュ作成における利点を活かしつつ (境界のみを分割する), より効率的に固有値解析を行う方法を提案する.

まず第2章では, 過去に試みられてきた様々な境界要素法の定式化の方法と, それによる固有値解析の問題点を明らかにする. また, これまで Helmholtz 方程式の多重相反定式を用いた解析例は, 境界値問題に関するものがみられるだけであり, しかも, 定式化についての理論的裏付けがなされていない. そこで, 第3章では Helmholtz 方程式の多重相反定式による境界要素法の根幹である次の2点を証明し, 解析の理論的裏付けを行う.

- 多重相反定式による積分方程式は, 境界積分の級数と領域積分の和で表されるが, 境界積分の級数の項数を無限個とれば領域積分項は 0 に収束する. したがって, 境界積分の級数の項数を十分多くとれば, 有限項の境界積分の和で近似できる.
- 多重相反定式による境界積分方程式は, 従来一般的に用いられてきた境界要素法の積分方程式 (複素数値) の, 実数部のみを扱っていることに対応する.

上記第2項から, 多重相反定式による固有値問題は見かけの固有値を含んでおり, これを除くためには虚数部の固有値問題も考慮しなければならないことについて述べ, 見かけの固有値を含まない虚数部を考慮した新しい複素定式を提案する.

次に, 上に記した理論的裏付けをもとに, 多重相反定式と新しい複素定式によって得られる固有値問題の係数マトリクスが, 周波数の多項式を成分とする“多項式行列 (λ -Matrix)”となることに着目して,

- 多重相反定式の固有値問題の Newton 法による反復解法 (第4章)
- 新しい複素定式の固有値問題の Newton 法による反復解法 (第5章)
- 多重相反定式の固有値問題を一般化固有値問題に変換して解析を行う方法 (第6章)

の3つの解析法を提案する.

また, 反復解法を用いた固有値解析にアダプティブメッシュ (適応要素) 生成法を適用し, 要素分割に依存せず精度良く固有値を得る解析法の提案を行う. アダプティブ法は数学的および数値実験的立場から研究が進み, 有限要素法の境界値問題においては一部実用化されるまでに到っている. しかし有限要素法においても固有値解析に関するものは極めて少ない. この理由は, 固有値が要素ごとの値ではなく, 対象となる領域全体について定められる値であるので, 通常の問題の解析とは異なった誤差評価を行わなければならないこと, および固有値が対応するモード (固有関数分布) ごとにアダプティブ要素分布は変更されることによる. Friberg ら [18, 19] は階層的アダプティブ法を用いた方法を誘導しており,

また Cook ら [20] は運動エネルギーとひずみエネルギーに基づくアダプティブ法を構成している。現在のところ有限要素法によるものは、著者の知る限りこれらだけである。

従来境界要素法におけるアダプティブ法を考えると、有限要素法におけるものを流用することがしばしば行われた。しかし、元来境界要素法は有限要素法とは異なる基本原理に基づいて定式化がなされたものであり、その上固有値は要素や節点値に直接付随するものでないので、別の考えに基づくアダプティブ要素の構成を考えなければならない。そこで、アダプティブ要素を構成する方法を含む、Helmholtz 方程式の境界要素法固有値解析を効果的に行う方法を新たに考える。ここでは、

- 第4章で提案した固有値解析法に関連して、固有値の決定精度に与える要素分割の効果に基づくアダプティブ h 法 (要素細分化法)(第7章)。
- 第5章で提案した固有値解析法に関連して、第7章と同様の方法で誤差評価を行うアダプティブ法 (第8章)。

を提案し、いくつかの解析例によってそれらを比較検討する。

9章はまとめである。

これら一連の研究で提案された方法および解析は、境界だけで問題を扱う境界要素法が固有値を決定する解析手段として有効に作用することをはじめて示すものである。

参考文献

- [1] Zienkiewicz, O.C. and Taylor, R.L., The Finite Element Method, McGraw-Hill, 1989.
- [2] Bathe, K.J., Finite Element Procedures in Engineering Analysis, Prentice-Hall, 1982.
- [3] George, P.L., Automatic Mesh Generation, John Wiley and Sons., 1991.
- [4] Niwa, Y., Kobayashi, S., and Kitahara, M., Determination of Eigenvalues by Boundary Element Methods, Chapter 7, Developments in Boundary Element Methods, Vol. 2, Banerjee, P.K., and Shaw, R. eds., Applied Science Pub., 143-176, 1982.

- [5] Niwa, Y., Kobayashi, S., and Kitahara, M., Applications of the boundary integral equation method to eigenvalue problems of elastodynamics, Proc. 4th Int. Conf. Bound. Elms., Brebbia, C.A. ed., Springer Ver., 297-311, 1982.
- [6] Beskos, D. ed., Boundary Element Methods in Mechanics, North Holland, 1987.
- [7] Manolis, G.D. and Beskos, D.E. eds., Boundary Element Methods in Elastodynamics, Unwin Hyman, 1988.
- [8] DeMey, G., Calculation of eigenvalues of the Helmholtz equation by integral equation, Int. J. Num. Meth. Eng., **10**, 59-66, 1976.
- [9] DeMey, G., A simple integral equation method for the calculation of the eigenvalues of Helmholtz equation, Int. J. Num. Meth. Eng., **11**, 1340-1342, 1977.
- [10] Zhou, J., Computations of eigenfunctions and eigenfrequencies of two-dimensional vibrating structures by the boundary element method, Proc. 28th Conf. Decision and Control, IEEE, 2045-2049, 1989.
- [11] Bezine, G., A mixed boundary integral - finite element approach to plate vibration problems., Mech. Res. Comm., **7**, 141-150, 1980.
- [12] Kirkup, S.M., and Amini, S., Solution of the Helmholtz eigenvalue problem via the boundary element method, Int. J. Num. Meth. Eng., **36**, 321-330, 1993.
- [13] Nardini, D., and Brebbia, C.A., A new approach to free vibration analysis using boundary elements, Proc. 4th Int. Conf. Bound. Elms., Brebbia C.A. ed., Springer Ver., 313 - 326, 1982.
- [14] Partridge, P.W., and Brebbia, C.A., The dual reciprocity boundary element method for the Helmholtz equation, Proc. Int. Bound. Elms. Symp., Brebbia, C.A. and Chaudouet - Miranda, A. eds., Comp. Mech. Pub. / Springer Ver., 543 - 555, 1990.
- [15] Banerjee P.K., Ahmad S. and Wang H.C., A new BEM formulation for the acoustic eigenfrequency analysis, Int. J. Num. Meth. Eng., **26**, 1299 - 1309, 1988.

- [16] Nowak, A.J., Temperature fields in domains with heat sources using boundary only formulations, Proc. 10th BEM Conference, Brebbia, C.A. ed., Springer Ver., / Comp. Mech. Pub., Vol. 2, 233 - 247, 1988.
- [17] Nowak, A.J. and Brebbia, C.A., Solving Helmholtz equation by boundary elements using the multiple reciprocity method, Computers and Experiments in Fluid Flow, Carlomagno, G.M. and Brebbia, C.A. eds., Comp. Mech. Pub./ Springer Ver., 265 - 270, 1989.
- [18] Friberg P. O., An error indicator for the generalized eigenvalue problem using the hierarchical finite element method, Int. J. Num. Meth. Eng., **23**, 91-98, 1986.
- [19] Friberg P. O., Möller P., Makovička D. and Wiberg N. E., An adaptive procedure for eigenvalue problem using the hierarchical finite element method, Int. J. Num. Meth. Eng., **24**, 319-335, 1987.
- [20] Cook R. D. and Avrashi J., Error estimation and adaptive meshing for vibration problems, Comp. Struct., **44**, 619-626, 1992.

第 2 章

従来の固有値解析の問題点

ここでは、Helmholtz 方程式から境界積分方程式導くために用いられるいくつかの異なる定式化法について説明する。また、境界積分方程式を離散化して得られる連立方程式のもつ特徴と、それらに境界条件を代入して得られる固有値問題を解析する上での問題点について述べる [17~20]。

2.1 一般的な複素定式

はじめに、Helmholtz 方程式の境界積分定式化において従来から一般的に用いられてきた方法について説明する。この方法は Green の公式を用いており、境界要素法においては一般に直接法と呼ばれ、Helmholtz 作用素の基本解を用いて定式化を行う。この定式化の方法を、一般的な複素定式と呼ぶことにする。

2.1.1 Helmholtz 作用素の基本解と境界積分方程式

Helmholtz 作用素の基本解 v^* は、つぎのように与えられる [1]。

$$\nabla^2 v^*(\xi, x) + k^2 v^*(\xi, x) + \delta(\xi, x) = 0 \quad (2.1)$$

$$v^*(\xi, x) = \begin{cases} -\frac{i}{4} H_0^{(2)}(kr) & (2\text{Dim.}) \\ \frac{1}{4\pi r} \exp(-ikr) & (3\text{Dim.}) \end{cases} \quad (2.2)$$

ここで、 $i = \sqrt{-1}$ は虚数単位である。 r はソース点 ξ と観測点 x との距離 (ξ, x とも 3 次元あるいは 2 次元空間の点とする)、 δ は Dirac のデルタ関数を意味する。また、 $H_0^{(2)}$ は 0 次の

第2種 Hankel 関数である。従来から用いられてきた定式化の方法では、これらの基本解を、波数 k を陰な形で含む関数として扱うのが一般的である。また、これら Helmholtz 作用素の基本解は複素数の値をとる関数である。

基本解 v^* を重み関数とする Helmholtz 方程式 (1.2) の重み付き残差式はつぎのようになる。

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 u(x) + k^2 u(x)) v^*(\xi, x) d\Omega = 0 \quad (2.3)$$

この式を Green の定理により変形し、式 (2.1) を代入すると、次に示す複素定式による境界積分方程式が得られる。

$$c(\xi)u(\xi) + \int_{\Gamma} \frac{\partial v^*}{\partial n}(\xi, x)u(x)d\Gamma - \int_{\Gamma} v^*(\xi, x)\frac{\partial u}{\partial n}(x)d\Gamma = 0 \quad (2.4)$$

ここで、 $\partial/\partial n$ は、境界上にとった外向き法線ベクトルの方向への微分を意味する作用素である。また、 $c(\xi)$ は式 (2.4) が適用されるソース点 ξ の位置によって決まる定数で、境界が滑らかなときは、次のように与えられる。

$$c = \begin{cases} 1 & (\xi \text{ は } \Omega \text{ 内}) \\ 1/2 & (\xi \text{ は } \Gamma \text{ 上}) \\ 0 & (\xi \text{ は } \Omega \text{ の外}) \end{cases} \quad (2.5)$$

なお、 ξ が滑らかでない境界上にあるとき、 c は境界の形状によって決定される [16]。

2.1.2 一般的な複素定式による固有値問題

式 (2.4) を境界上の点に適用し、境界要素を用いて離散化すると、次の連立方程式が得られる。

$$Hu - Gq = 0 \quad (2.6)$$

ここで、 u と q は、境界要素上にとった節点での関数値 u および $q \equiv \partial u / \partial n$ を成分に持つベクトルである。係数マトリクス H 、 G は、未知関数を内挿する関数と基本解の積を境界上で積分して得られる。したがって、これらのマトリクスは複素数であり、その成分 h_{ij}, g_{ij} は波数 k を陰な形で含んでいる。

$$h_{ij} = h_{ij}(k), \quad g_{ij} = g_{ij}(k) \quad (2.7)$$

式 (2.6) に境界条件 (1.3) を代入すると、次のようになる。

$$\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.8)$$

ここで $H_{ij}, G_{ij} (i, j = 1, 2)$ は H, G の部分マトリクスである。未知数を左辺に、既知数 (ここでは 0) を右辺に移項すると、

$$\begin{bmatrix} -G_{11} & H_{12} \\ -G_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -H_{11} & G_{12} \\ -H_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} \quad (2.9)$$

となる。この式は次のように表すことができる。

$$Ax = Bx = 0 \quad (2.10)$$

この連立方程式が、離散化された形での固有値問題である。この方程式が意味のある解 $x \neq 0$ をもつためには、係数マトリクスの行列式が 0、すなわち、

$$\det A = 0 \quad (2.11)$$

となることが必要である。式 (2.11) がこの定式化での固有方程式となる。式 (2.10) の第2項のベクトル 0 の係数マトリクス B の影響を考慮して、固有方程式を

$$\det A / \det B = 0 \quad (2.12)$$

とする考え方もあるが、式 (2.11) で考えるのが一般的である。式 (2.12) を用いて評価する理由を以下に示す。式 (2.11) で求めた固有値 k_e に対して、

$$\det B = 0 \quad (2.13)$$

となる場合、次の方程式は $y = 0$ 以外の解をもつことができ、

$$\begin{aligned} By &= 0 \\ y &\neq 0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

したがって、

$$\begin{aligned} Ax &= By = 0 \\ y &\neq 0 \end{aligned} \quad (2.15)$$

となり、連立方程式に境界条件を代入して得られた固有値問題 (2.10) と矛盾する。このため、式 (2.11) で求められる固有値から、式 (2.13) を満たすものを取り除く目的で、式 (2.12)

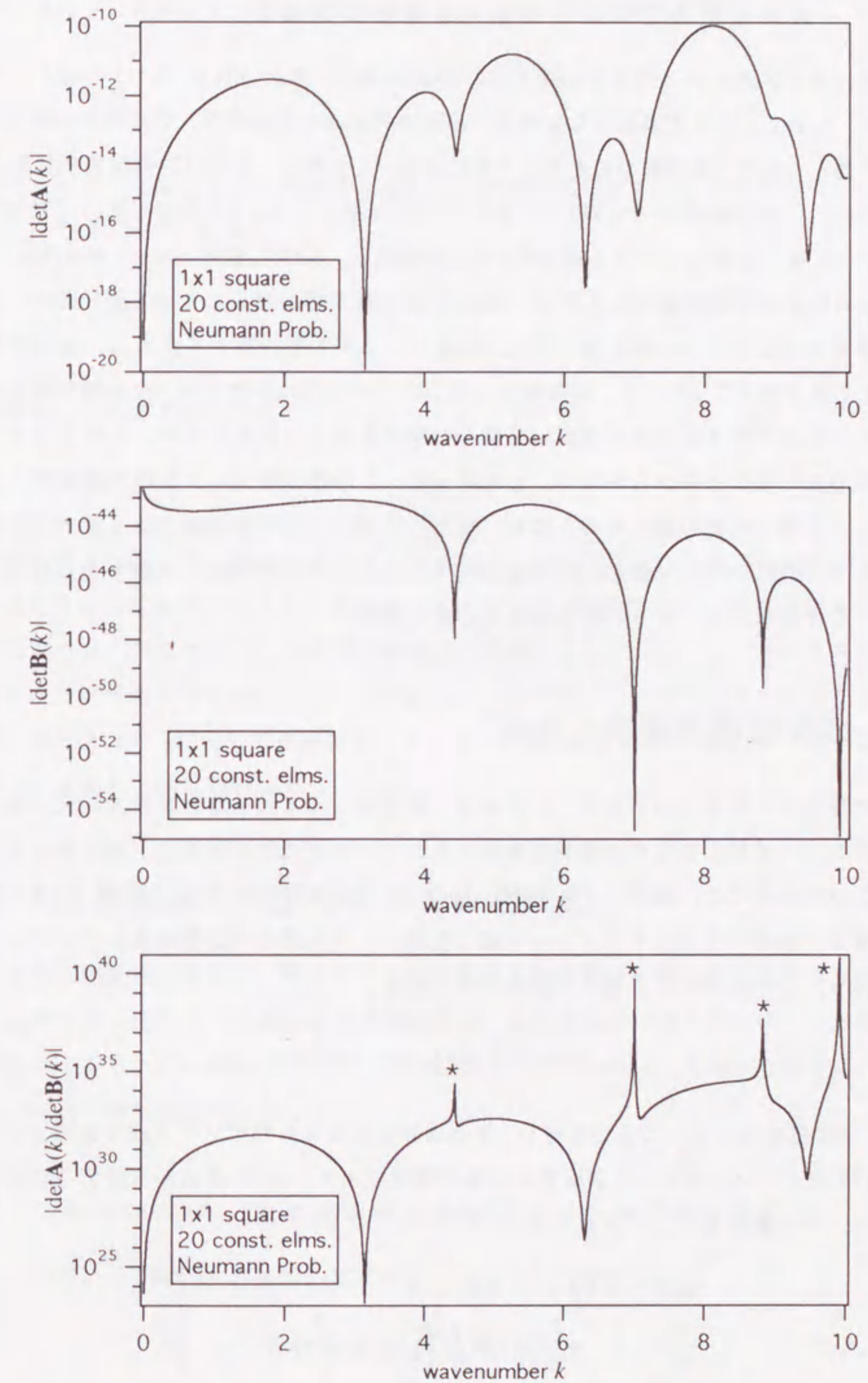
表 2.1: $\det \mathbf{A} = 0$ の解; 1×1 の正方形領域の Neumann 問題の固有値

m	n	E.V.	m	n	E.V.
1	0	3.14	1	2	7.02
0	1	3.14	2	2	8.88
1	1	4.44	3	0	9.42
2	0	6.28	0	3	9.42
0	2	6.28	3	1	9.93
2	1	7.02	1	3	9.93

表 2.2: $\det \mathbf{B} = 0$ の解; 1×1 の正方形領域の Dirichlet 問題の固有値

m	n	E.V.
1	1	4.44
2	1	7.02
1	2	7.02
2	2	8.88
3	1	9.93
1	3	9.93

を用いて評価する必要があると考えるからである。しかし、実際に $\det \mathbf{A} = \det \mathbf{B} = 0$ となる場合がある固有値問題に対して、波数 k に対する $|\det \mathbf{A}|$, $|\det \mathbf{B}|$, $|\det \mathbf{A}/\det \mathbf{B}|$ の分布を見ると、図 2.1 のようになる。なおこの例では、 1×1 の正方形領域の Neumann 問題を、等分割一定要素 (要素数 20) を用いて解析を行っている。式 (A.1) により求めたこの問題の解析解を、表 2.1 に示す。表中 E.V. は固有値、ここでは波数 k を表す。この問題で、式 (2.13) から得られる波数 k は、同じ領域に対する Dirichlet 問題の解であるから、式 (A.2) により求めることができる。 $\det \mathbf{B} = 0$ の解を、表 2.1.2 に示す。図 2.1 から、 $\det \mathbf{A} = \det \mathbf{B} = 0$ となる固有値に対しては、 $|\det \mathbf{A}/\det \mathbf{B}|$ が無限大に発散しており (* 印)、 $\det \mathbf{A}/\det \mathbf{B} = 0$ としても固有値を得ることができないことがわかる。逆に、 $\det \mathbf{A} = 0$ となる波数 k を求めれば、同時に $\det \mathbf{B} = 0$ となる場合でも固有値を得ることができる。このため、固有方程式には式 (2.11) を用いる。

図 2.1: 一般的な複素定式による係数マトリクス \mathbf{A} , \mathbf{B} の行列式の波数 k に対する分布

2.1.3 一般的な複素定式による固有値解析の問題点

連立方程式で表現された固有値問題 (2.10) の固有値は、固有方程式 (2.11) の解として定義される。しかし、ここで問題となるのは、マトリクス \mathbf{A} の成分が \mathbf{H} , \mathbf{G} と同様に波数 k を陰な形で含んでおり、複素数の値をとることにある。このため、式 (2.11) は解析的に解くことは不可能で、固有値を得るためには、 k を少しずつ変えて $\det \mathbf{A}$ の分布を求め、式 (2.11) を満たす k を探し出す方法によるほかない (直接探索法, direct determinant search)[1, 2]。実際には \mathbf{A} の成分は複素数であるから、 $\det \mathbf{A}$ の絶対値が極小値をとる k を探し出す。しかも、“ k を陰に含むため k を変えるたびに、係数マトリクスを計算するために、要素積分をやり直す必要がある”。その上、要素積分と式 (2.11) の左辺の計算には、複素数の計算を必要とする。積分方程式を実部と虚部に分解して解析を行う方法もあるが、このときも、行列式の極小値の探索は避けられない。したがって、この複素定式による境界要素法の固有値解析は、非常に効率の悪いものとなる。また、行列式の絶対値の極小値を求めて固有値を得るため、退縮した固有値 (重根) や近接した高次モードの固有値を分離することはむずかしく、そのためには、さらに計算時間を必要とする。

2.2 間接法境界要素法定式

前節で説明した定式化の方法は、いわゆる、直接法と呼ばれる境界要素方程式に基づくものである。一般的に知られる境界要素法のもう一つの定式化に間接法と呼ばれる方法がある。この定式化では、仮想ソース (virtual source) の分布を境界上に定義し、直接法と同じ基本解を、領域内の点のポテンシャル値と仮想ソースの間での影響関数として用いて定式化を行う。この結果、次の積分方程式が得られる。

$$u(\xi) = \int_{\Gamma} v^*(\xi, x) \sigma(x) d\Gamma \quad (2.16)$$

ここで、 ξ は領域内に取った点を意味し、 x は境界上に取った仮想ソース点を意味する。また、 σ は境界上での仮想ソース密度分布を表す関数である。点 ξ を滑らかな境界上に近づけていくと、その極限值として次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} u(\xi) &= \int_{\Gamma} v^*(\xi, x) \sigma(x) d\Gamma \\ \frac{\partial u(\xi)}{\partial n} &= -\frac{1}{2} \sigma(\xi) + \int_{\Gamma} \frac{\partial v^*}{\partial n}(\xi, x) \sigma(x) d\Gamma \end{aligned} \right\} \quad (2.17)$$

これらの式を、境界要素を用いて離散化すると、次の連立方程式を得る。

$$\left. \begin{aligned} u &= G\sigma \\ q &= H\sigma \end{aligned} \right\} \quad (2.18)$$

ここで、 u, q, σ は節点上での関数値 $u, q \equiv \partial u / \partial n, \sigma$ を成分とするベクトルである。同次な境界条件 (1.3) を代入すると

$$\left. \begin{aligned} G\sigma &= 0 & (\text{on } \Gamma_1) \\ H\sigma &= 0 & (\text{on } \Gamma_2) \end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$

これらを1つにまとめると次のように書くことができる。

$$\mathbf{A}\sigma = 0 \quad (2.20)$$

固有値は係数マトリクスの行列式が0となる波数 k として得られるが、この場合も、 \mathbf{A} は波数 k を陰に含む複素マトリクスである。したがって、間接法により固有値解析を行う上での問題点は、前節で説明した直接法の場合と同様である。また、この定式化を用いて反復法により固有値を得る方法についての報告が、DeMey[3, 4] と Zhou[5] によりなされているが、異なる波数 k についての係数マトリクスは計算 (数値積分) しなおす必要があり、直接法による場合と同じ問題がある。

2.3 境界要素と内部セルによる定式化

直接法と間接法に加えて、最もオーソドックスな境界積分方程式の定式化の方法の1つに、境界要素と内部セルを併用する方法がある。この定式化では、Helmholtz 方程式を非同時項 $k^2 u$ をもつ Poisson 方程式とみて定式化を行う。この場合、Laplace 作用素の基本解を用いて境界積分方程式をたてる。

2.3.1 Laplace 作用素の基本解と領域積分項を含む積分方程式

ここで用いる Laplace 作用素の基本解は、次のような関数である。

$$\nabla^2 u^*(\xi, x) + \delta(\xi, x) = 0 \quad (2.21)$$

$$u^*(\xi, x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r} & (2\text{Dim.}) \\ \frac{1}{4\pi r} & (3\text{Dim.}) \end{cases} \quad (2.22)$$

ここで、 r はソース点 ξ と観測点 x との距離である。この基本解は、波数 k を含んでおらず実数の値をとる。この Laplace 作用素の基本解を重み関数とする Helmholtz 方程式の重みつき残差式に Green の定理を適用すれば次式を得る。

$$c(\xi)u(\xi) + \int_{\Gamma} \frac{\partial u^*}{\partial n}(\xi, x)u(x)d\Gamma - \int_{\Gamma} u^*(\xi, x)\frac{\partial u}{\partial n}(x)d\Gamma = k^2 \int_{\Omega} u^*(\xi, x)u(x)d\Omega \quad (2.23)$$

この場合、先に述べた直接法や間接法による定式化とは異なり、積分方程式の中に領域積分項、すなわち、式(2.23)の右辺が現れる。

2.3.2 内部セル法による固有値問題

境界上にとったいくつかの選点に対する積分方程式(2.23)の右辺の領域積分を求めるには、図2.2に示すように領域を内部セルに分割する必要がある。内部セルでの関数 u の分布を内部セルにとった節点上での関数値 u_i により内挿し、境界 Γ を境界要素に分割して、要素積分を行うことで境界上の各点における方程式を導くと次の連立方程式が得られる。

$$Hu - Gq = k^2 Fu^i \quad (2.24)$$

ここで、 u^i は、領域内のセルの節点での関数値を成分に持つベクトルである。 u, q は、境界上の節点上での関数値 $u, q \equiv \partial u / \partial n$ を成分とするベクトルである。またマトリクス F は、各内部セル上で基本解と内挿関数の積についての領域積分を計算することで得られる。

また、領域内に取った節点に対しても式(2.23)をたてることができ、これを同様の方法で離散化すると次式を得る[6]。

$$u^i + H'u - G'q = k^2 F'u^i \quad (2.25)$$

上の2つの連立方程式に同次な境界条件(1.3)を代入し、 u, q のうち0でない項 x について整理すれば、

$$\left. \begin{aligned} Sx &= k^2 Fu^i \\ u^i S'x &= k^2 F'u^i \end{aligned} \right\} \quad (2.26)$$

上式から x を消去し、整理すると次の固有値問題を得る。

$$Au^i = \frac{1}{k^2} u^i \quad (2.27)$$

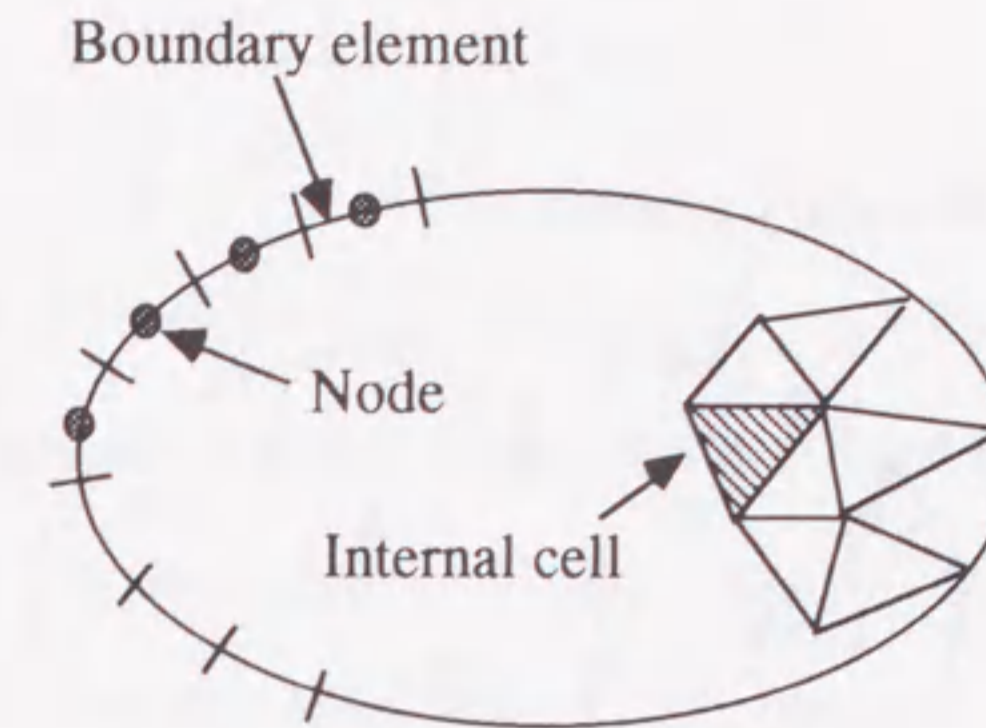


図 2.2: 境界要素分割と内部セル分割

ただし、 A は次のようなマトリクスである。

$$A = F' - S'S^{-1}F \quad (2.28)$$

2.3.3 内部セル法による固有値解析の問題点

式(2.27)は標準固有値問題の形をしているので、一般に提供される固有値解析のサブルーチンを用いて簡易に解析を行うことができる。しかし、 A は非対称の実、密マトリクスであることに注意しなければならない。この定式化によると、固有ベクトルは実数部についてのみ得られる。また、内部セルにより領域積分を行うので、領域の分割を必要とし境界要素法としての利点が十分に活かされていない。この方法を用いるのであれば、有限要素法を用いてもプリプロセスに要する労力は同じである。

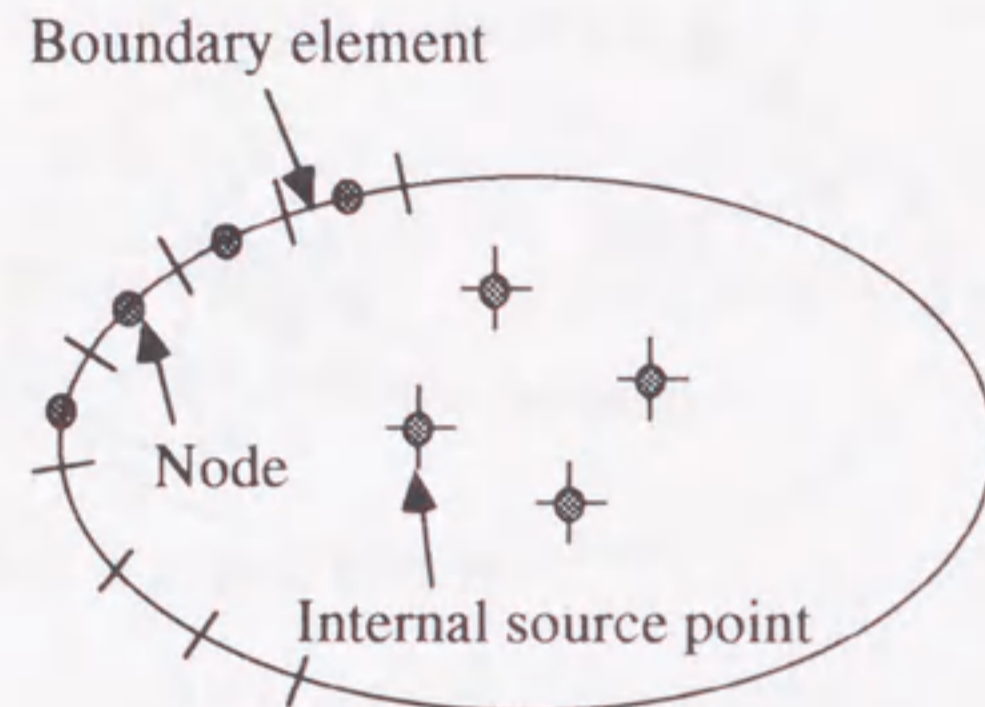


図 2.3: 境界要素分割と領域内ソース点

2.4 2重相反定式

次に、内部セルを用いた方法と同じく一般化固有値問題に帰着することのできる、2重相反法 (Dual Reciprocity Method, DRM) [8, 9] を用いた定式化法を説明する。この定式化法を2重相反定式と呼ぶ。この定式化でも、Helmholtz方程式の $k^2 u$ の項をLaplace方程式の非同次項とみて定式化を行う。この場合も、Laplace作用素の基本解が用いられる。

2.4.1 2重相反法

2重相反法はまず、前節と同様に式(2.23)を導く。次に、式(2.23)右辺の領域積分項中の u を、境界上にとった有限個の節点と領域内部にとった内点の上においた、仮想的なソースを用いて内挿する(図2.3)。

式(2.23)の右辺の領域積分項を RH で表すことにする。

$$RH = k^2 \int_{\Omega} u^*(\xi, x) u(x) d\Omega \quad (2.29)$$

2.4.2 2重相反定式

まず、領域積分項を境界積分に展開するため、次のような関数 ψ を定義する。

$$\nabla^2 \psi(x) = u(x) \quad (2.30)$$

これを式(2.29)に代入し、Greenの定理を用いて変形すると、

$$\begin{aligned} RH &= k^2 \int_{\Omega} u^*(\xi, x) \nabla^2 \psi(x) d\Omega \\ &= -k^2 \left[c(\xi) \psi(\xi) + \int_{\Gamma} \frac{\partial u^*}{\partial n}(\xi, x) \psi(x) d\Gamma - \int_{\Gamma} u^*(\xi, x) \frac{\partial \psi}{\partial n}(x) d\Gamma \right] \end{aligned} \quad (2.31)$$

となる。これを境界要素を用いて離散化すると、次の連立方程式が得られる。

$$Hu - Gq = -k^2 (H\psi - G\psi_n) \quad (2.32)$$

ここで、 ψ, ψ_n は、境界上での関数値 $\psi, \partial\psi/\partial n$ を成分に持つベクトルである。

つぎに、領域 Ω 内 (境界 Γ を含む) での、ポテンシャル u の内挿を行う。境界上にとった N 個の節点と領域内にとった L 個の内点に、仮想的なソース Φ を配置し、それらを用いて u を内挿する。領域内の $u(x)$ は、仮想ソース点を ξ^m 、内挿関数を $C(\xi^m, x)$ と表すことにすれば、

$$u(x) = \sum_{m=1}^{N+L} C(\xi^m, x) \Phi(\xi^m) \quad (2.33)$$

となる。式(2.33)を式(2.30)に代入し、 ψ について解くと、つぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned} \psi(x) &= \sum_{m=1}^{N+L} D(\xi^m, x) \Phi(\xi^m) \\ \frac{\partial \psi(x)}{\partial n} &= \sum_{m=1}^{N+L} \frac{\partial D}{\partial n}(\xi^m, x) \Phi(\xi^m) \equiv \sum_{m=1}^{N+L} T(\xi^m, x) \Phi(\xi^m) \end{aligned} \right\} \quad (2.34)$$

ただし、 $\nabla^2 D(\xi^m, x) = C(\xi^m, x)$ である。

$C(\xi^m, x)$ は、 ξ と x との距離だけで表せる関数で、例えば [9]

$$\begin{aligned} C(\xi^m, x) &= 1 + r^1 + r^2 \dots r^{Np} \\ &= \sum_{i=0}^{Np} r^i \end{aligned} \quad (2.35)$$

等が用いられる。ここで、 r は ξ^m と x の距離である。この場合、式(2.34)中の D, T は、

$$\left. \begin{aligned} D(\xi^m, x) &= \sum_{i=0}^{Np} \frac{r^{i+2}}{(i+2)^2} \\ T(\xi^m, x) &= \sum_{i=0}^{Np} \frac{r^{i+1}}{(i+2)} \frac{\partial r}{\partial n} \end{aligned} \right\} \quad (2.36)$$

となる。

式(2.33), (2.34)をいくつかの境界上の節点に適用し, 得られた式をマトリクス表示すれば,

$$u = C\Phi \quad (2.37)$$

$$\left. \begin{aligned} \psi &= D\Phi \\ \psi_n &= T\Phi \end{aligned} \right\} \quad (2.38)$$

となる。式(2.37)~(2.38)を式(2.32)に代入し, 変形すると, 次の式が得られる。

$$Hu - Gq = -k^2 Mu \quad (2.39)$$

ただし

$$M = (HD - GT)C^{-1} \quad (2.40)$$

と表した。基本解に Laplace 作用素の基本解(2.22)を用いているため, ここに現れるマトリクスの成分は, 波数 k を含まず実数となる。また, 変数として扱うのは, 境界節点上での u , $q \equiv \partial u / \partial n$ の値となる。内点の座標値は, マトリクス M の計算に必要となる。

2.4.2 2重相反定式による固有値問題

式(2.40)に境界条件(1.3)を代入すると,

$$\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ u_2 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ 0 \end{Bmatrix} = -k^2 \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (2.41)$$

この式を展開すると, 次の2組の連立方程式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} H_{12}u_2 - G_{11}q_1 &= -k^2 M_{12}u_2 \\ H_{22}u_2 - G_{21}q_1 &= -k^2 M_{22}u_2 \end{aligned} \right\} \quad (2.42)$$

この式から q_1 を消去すると,

$$(H_{22} - G_{21}G_{11}^{-1}H_{12})u_2 = -k^2(M_{22} - G_{21}G_{11}^{-1}M_{12})u_2 \quad (2.43)$$

となる。この式は次のように表すことができる。

$$Ax = k^2 Bx \quad (2.44)$$

この式が, 2重相反定式における連立方程式で表現された固有値問題である。ここで, マトリクス A , B は, k を含まず実数となり, 非対称である。式(2.44)は一般化固有値問題である。

2.4.3 2重相反定式による固有値解析の問題点

2重相反定式を用いた場合の固有値問題(2.44)は, 一般化固有値問題となるため, 複素定式での固有値問題(2.10)や, 次節で導く多重相反定式による固有値問題に比べて, 扱いが簡単である。一般化固有値問題の固有値解析の方法はすでに確立されており, さまざまな形で提供される固有値解析プログラムを用いて, 容易に行うことができる。

しかしながら2重相反定式は, “境界だけでの定式化”を行うための1つの方法であるが, 固有値の精度を保つためには, 内点の数を多くとらねばならず[9], 実際には境界だけでの解析とはほど遠いものになってしまう。また, 内挿関数 $C(\xi^m, x)$ の選択と, 内点の数と位置が解析の精度に大きく影響するにも関わらず, これらの選択についての明確な理論的指針が示されていない点が問題である。

また, これと似た定式化の方法に特別解積分法(Particular Integral Method)がある[10~13]。この定式化でも, Helmholtz 方程式を非同時項 $k^2 u$ を含む Poisson 方程式とみて定式化を行うが, 解を Laplace 方程式の一般解 u_c と非同次項が与えられたときの特別解 u_p の和とおいて解く。この場合, 定式化の過程が2重相反定式と異なるだけで, 最終的に得られる固有値問題は上で示したものと同一になる。

2.5 多重相反定式

最後に, 多重相反法(Multiple Reciprocity Method, MRM)[14, 15]を用いた Helmholtz 方程式の定式化を説明する。この定式化には, Laplace 作用素の基本解と, それから導かれる高次の基本解と呼ばれる実数の関数を用いる。

2.5.1 高次の基本解

2重相反法では, Laplace 作用素の基本解(2.22)を用いた場合に, 積分方程式(2.23)に現れる領域積分項(2.29)を, Green の定理を用いて境界積分に展開するため, ポテンシャル u に対し式(2.30)を満たす, より高次の関数 ψ を導入した。ここでは, 式(2.30)と類似の関係を, u ではなく Laplace 作用素の基本解 u^* (ここでは u_0^* と表す)に適用する。その関係式から得られる関数に, 同じ関係式を当てはめ, さらに高次の基本解を導出するという様に, 次々に, より高次の基本解を導き出す。

j 番目の高次の基本解 u_j^* と $j+1$ 番目の高次の基本解 u_{j+1}^* の式 (2.30) に対応する関係式は次のようになる。

$$\nabla^2 u_{j+1}^* = u_j^* \quad (j = 0, 1, \dots) \quad (2.45)$$

ここで、 u_0^* は Laplace 作用素の基本解 (2.22) である。上式を解くと、2次元問題では [15]

$$u_j^*(\xi, x) = -\frac{1}{2\pi 4^j (j!)^2} r^{2j} (\ln r - s_j) \quad (2.46)$$

となる。 r はソース点 ξ と観測点 x の距離を意味し、 s_j は次のような定数である。

$$s_j = \begin{cases} 0 & (j = 0) \\ \sum_{l=1}^j \frac{1}{l} & (j \geq 1) \end{cases} \quad (2.47)$$

また、3次元問題では、次のように与えられる [17]。

$$u_j^*(\xi, x) = \frac{1}{4\pi (2j)!} r^{2j-1} \quad (2.48)$$

これらの基本解は、変数を r とする実数値関数で、波数 k を含まない。

2.5.2 多重相反法

まず、2重相反法と同様に、Laplace 作用素の基本解 (2.22) を用いて、Helmholtz 方程式 (1.2) から積分方程式 (2.23) を導く。そして、領域積分項 (2.29) (DI_0 とする) の $u^*(=u_0^*)$ に式 (2.45) で $j=0$ としたものを代入し、Green の定理を用いて変形すると、次のようになる。

$$\begin{aligned} DI_0 \equiv RH &= k^2 \int_{\Omega} \nabla^2 u_1^*(\xi, x) u(x) d\Omega \\ &= k^2 \left[\int_{\Gamma} \frac{\partial u_1^*}{\partial n}(\xi, x) u(x) d\Gamma - \int_{\Gamma} u_1^*(\xi, x) \frac{\partial u}{\partial n}(x) d\Gamma \right] + k^2 \int_{\Omega} u_1^*(\xi, x) \nabla^2 u(x) d\Omega \end{aligned} \quad (2.49)$$

ここに現れる領域積分を DI_1 とし、これに、式 (1.2) と (2.45) で $j=1$ としたものを代入し、Green の定理を用いて変形すると次のようになる。

$$\begin{aligned} DI_1 &\equiv k^2 \int_{\Omega} u_1^*(\xi, x) \nabla^2 u(x) d\Omega \\ &= -k^4 \int_{\Omega} \nabla^2 u_2^*(\xi, x) u(x) d\Omega \\ &= -k^4 \left[\int_{\Gamma} \frac{\partial u_2^*}{\partial n}(\xi, x) u(x) d\Gamma - \int_{\Gamma} u_2^*(\xi, x) \frac{\partial u}{\partial n}(x) d\Gamma \right] - k^4 \int_{\Omega} u_2^*(\xi, x) \nabla^2 u(x) d\Omega \end{aligned} \quad (2.50)$$

2.5 多重相反定式

このように高次の基本解を用いて、領域積分項を次々に展開していく。 m 回の展開の後には、次の領域積分項を含んだ形の、積分方程式が得られる。

$$c(\xi)u(\xi) + \sum_{j=0}^m (-k^2)^j \int_{\Gamma} \frac{\partial u_j^*}{\partial n}(\xi, x) u(x) d\Gamma - \sum_{j=0}^m (-k^2)^j \int_{\Gamma} u_j^*(\xi, x) \frac{\partial u}{\partial n}(x) d\Gamma = DI_m \quad (2.51)$$

ここで、右辺の領域積分項 DI_m は

$$DI_m \equiv (-1)^m (k^2)^{m+1} \int_{\Omega} u(x) u_m^*(\xi, x) d\Omega \quad (2.52)$$

であり、 $m \rightarrow \infty$ のとき $DI_m \rightarrow 0$ となる。したがって、十分大きな m に対して、 DI_m が収束したとみなして、次の近似式を得る (3.1 節参照)。

$$c(\xi)u(\xi) + \sum_{j=0}^m (-k^2)^j \int_{\Gamma} \frac{\partial u_j^*}{\partial n}(\xi, x) u(x) d\Gamma - \sum_{j=0}^m (-k^2)^j \int_{\Gamma} u_j^*(\xi, x) \frac{\partial u}{\partial n}(x) d\Gamma = 0 \quad (2.53)$$

上式を、境界要素を用いて離散化することにより、次の連立方程式を得る。

$$\sum_{j=0}^m (-k^2)^j \mathbf{H}_j \mathbf{u} - \sum_{j=0}^m (-k^2)^j \mathbf{G}_j \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (2.54)$$

ここで、 \mathbf{H}_j 、 \mathbf{G}_j は、 j 番目の基本解に対応する係数マトリクスである。係数マトリクスは、次のように表すことができる。

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{H} &= \mathbf{H}_0 - k^2 \mathbf{H}_1 + \dots + (-k^2)^m \mathbf{H}_m \\ \mathbf{G} &= \mathbf{G}_0 - k^2 \mathbf{G}_1 + \dots + (-k^2)^m \mathbf{G}_m \end{aligned} \right\} \quad (2.55)$$

したがって、

$$\mathbf{H} \mathbf{u} - \mathbf{G} \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (2.56)$$

を得る。

2.5.3 多重相反定式による固有値問題

係数マトリクス \mathbf{H} 、 \mathbf{G} は、各成分が波数 k の有限な多項式となる多項式行列 (polynomial matrix, λ -matrix) である。高次の基本解は、実数の関数であるから、 \mathbf{H} 、 \mathbf{G} は、波数 k を陽な形で含む、実数のマトリクスとなる。

式 (2.56) に境界条件 (1.3) を代入し、移項すると、

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{B} \mathbf{0} \quad (2.57)$$

となる。これが意味のある解 $x \neq 0$ を持つためには、

$$\det A(k) = 0 \quad (2.58)$$

となる必要がある。しかしこれだけでは十分ではない。これについては次の章で詳しく述べる。また、式(2.58)において、 $A(k)$ は波数 k の多項式行列である。

2.5.4 多重相反定式による固有値解析の問題点

多重相反定式による固有値問題(2.57)の係数マトリクスは、実数となる。また、各成分が、波数 k の陽な関数(有限な多項式)となっているため、 k を変えた場合でも、複素定式のように要素積分を再度行う必要もなく、多項式の演算だけですむという利点がある。しかし、この固有値問題は、係数マトリクスの成分が波数 k の有限な多項式となっているため、一般の固有値解析の方法で固有値を決定することができない。

上に述べた理由から、多重相反定式は、これまで固有値解析に用いられたことはなく、境界値問題への適用に限られてきた。また、多重相反定式による積分方程式は、境界積分の級数と領域積分の和で表されるが、解析の前提として必要な領域積分項の収束についての証明がなされていない。さらに、多重相反定式による境界積分方程式の理論的裏付けとして必要な従来の一般的な複素定式による境界積分方程式との関係が明らかにされておらず、理論的には不十分な点が多い。そこで、次章では上記の2点の証明を行い、多重相反定式の理論的裏付けとするとともに、従来の複素定式による境界積分方程式との関係から、多重相反定式による固有値問題が見かけの固有値と呼ばれる、実際には存在しない固有値を含んでいることを示す。さらに、見かけの固有値を取り除くことのできる、新しい複素定式による固有値問題を提案する。

参考文献

- [1] Niwa, Y., Kobayashi, S., and Kitahara, M., Determination of Eigenvalues by Boundary Element Methods, Chapter 7, Developments in Boundary Element Methods, Vol. 2, Banerjee, P.K., and Shaw, R. eds., Applied Science Pub., 143-176, 1982.
- [2] Beskos, D. ed., Boundary Element Methods in Mechanics, North Holland, 1987.

- [3] DeMey, G., Calculation of eigenvalues of the Helmholtz equation by integral equation, Int. J. Num. Meth. Eng., **10**, 59-66, 1976.
- [4] DeMey, G., A simple integral equation method for the calculation of the eigenvalues of Helmholtz equation, Int. J. Num. Meth. Eng., **11**, 1340-1342, 1977.
- [5] Zhou, J., Computations of eigenfunctions and eigenfrequencies of two-dimensional vibrating structures by the boundary element method, Proc. 28th Conf. Decision and Control, IEEE, 2045-2049, 1989.
- [6] Bezzine, G., A mixed boundary integral - finite element approach to plate vibration problems., Mech. Res. Comm., **7**, 141-150, 1980.
- [7] Kirkup, S.M., and Amini, S., Solution of the Helmholtz eigenvalue problem via the boundary element method, Int. J. Num. Meth. Eng., **36**, 321-330, 1993.
- [8] Nardini, D., and Brebbia, C.A., A new approach to free vibration analysis using boundary elements, Proc. 4th Int. Conf. Bound. Elms., Brebbia C.A. ed., Springer Ver., 313 - 326, 1982.
- [9] Partridge, P.W., and Brebbia, C.A., The dual reciprocity boundary element method for the Helmholtz equation, Proc. Int. Bound. Elms. Symp., Brebbia, C.A. and Chaudouet - Miranda, A. eds., Comp. Mech. Pub. / Springer Ver., 543 - 555, 1990.
- [10] Ahmad, S., and Banerjee, P.K., Free vibration analysis by BEM particular integrals, J. Eng. Mech., ASCE, **112**, 682 - 695, 1986.
- [11] Banerjee P.K., Ahmad S. and Wang H.C., A new BEM formulation for the acoustic eigenfrequency analysis, Int. J. Num. Meth. Eng., **26**, 1299 - 1309, 1988.
- [12] Coyette, J.P., and Fyfe, K.R., An improved formulation for acoustic eigenmode extraction from boundary element models, Trans. ASME, J. Vib. Acoust., **112**, 392-398, 1990.
- [13] Ali, A., Rajakumar, C., and Yunus, S.M., On the formulation of the acoustic boundary element eigenvalue problems., Int. J. Num. Meth. Eng., **31**, 1271-1282, 1991.

- [14] Nowak, A.J., Temperature fields in domains with heat sources using boundary only formulations, Proc. 10th BEM Conference, Brebbia, C.A. ed., Springer Ver., / Comp. Mech. Pub., Vol. 2, 233 - 247, 1988.
- [15] Nowak, A.J. and Brebbia, C.A., Solving Helmholtz equation by boundary elements using the multiple reciprocity method, Computers and Experiments in Fluid Flow, Carlomagno, G.M. and Brebbia, C.A. eds., Comp. Mech. Pub./ Springer Ver., 265 - 270, 1989.
- [16] 加川幸雄, 開領域問題のための有限 / 境界要素法, サイエンス社, 1983.
- [17] Kamiya, N., and Andoh, E., Eigenvalue analysis by boundary element method, Proc. BEM 14, Brebbia, C.A., Dominguez, J. and Paris, F. eds., Comp. Mech. Pub. / Elsevier Appl. Sci. Pub., 673 - 690, 1992.
- [18] 神谷紀生, 安藤英司, 境界要素法による固有値解析 (1), 機械の研究, 44 巻, 7 号, 749 - 753, 1992.
- [19] 神谷紀生, 野替一義, 安藤英司, 境界型固有値決定法とその比較, BEM・テクノロジー・コンファレンス論文集, 4 巻, 51 - 56, 1994.
- [20] Kamiya, N., Andoh, E. and Nogae, K., Application to Helmholtz eigenvalue problem Chapter 5, The Multiple Reciprocity Boundary Element Method, Computational Mechanics Publications, 1994.

第 3 章

多重相反定式に関する数理的考察

2.5.2節で説明したように, 多重相反定式による積分方程式 (2.51) は, 原理的には, 1つの領域積分項 (2.52) と境界積分の無限級数で表される. しかし, 今までに行われた数値解析においては, 便宜的に領域積分項を無視し, 境界積分の級数項を有限項で打ち切っている (式 (2.53)). そこで, 領域積分項が高次の基本解を無限次までとったときに 0 に収束することを証明し, それを根拠として領域積分項を無視し, 境界積分の級数項を有限項で打ち切って計算することの妥当性を示す. また, 領域積分の収束を仮定すれば, 1つの物理現象 (Helmholtz 方程式で表される) に対し, 複数の境界積分方程式による表現 (一般的な複素定式による複素数式 (2.4) と多重相反定式による実数式 (2.53)) が存在することになる. そこで, さらに, 一般的な複素定式による境界積分方程式と, 多重相反定式による境界積分方程式との関連を明らかにし, 多重相反定式による積分方程式がもつ意味を明らかにし, 多重相反定式による固有値問題の性質について述べる.

3.1 領域積分項の収束

多重相反定式を用いて, Helmholtz 方程式のポテンシャル解析 (境界値問題) を行った Nowak ら [1] は, 領域 Ω の最大寸法を 1 以下としたとき比較的小さい k に対しては, 高次の基本解を比較的小さい次数までとった場合にも, 係数マトリクスの成分が小さくなることを例題によって確かめ, 有効性の実用的な根拠としている. しかしこのような考えによると, 後で述べるように高次の基本解はソース点と観測点の距離 r と波数 k の積を引き数とする Bessel 関数の変形であるため, 領域 Ω の最大寸法が 1 以下でも k を大きくとった場合で

は収束の保証がないことになる。ここでは、寸法の仮定を行うことなしに、高次の基本解の次数を十分大きくとったときに、領域積分が0に収束することを示す[3~9]。

2次元問題の場合

固有値問題では Ω は有界な2次元領域を考えるので、ソース点と積分点の距離 r は有限である。また、波数 k は有限とする。多重相反定式による積分方程式(2.51)の、領域積分項(2.52)の絶対値はつぎようになる。

$$\begin{aligned} |DI_m| &= |(-1)^m (k^2)^{m+1} \int_{\Omega} u u_m^* d\Omega| \\ &\leq (k^2)^{m+1} |u|_{\max} |u_m^*|_{\max} \int_{\Omega} d\Omega \end{aligned} \quad (3.1)$$

上式について J をつぎのようにおく。

$$J = (k^2)^{m+1} |u_m^*|_{\max} \quad (3.2)$$

2次元問題の場合、高次の基本解 u_m^* は式(2.46)に与えられている。 m が十分大きいとき

$$|\ln r - s_m| = s_m - \ln r \quad (3.3)$$

となる。 $|u_m^*|_{\max}$ を与える r は、

$$r = \exp(s_m - \frac{1}{2m}) \rightarrow \infty \quad (m \rightarrow \infty) \quad (3.4)$$

となる。したがって、 m が十分大きいとき、 $|u_m^*|_{\max}$ は、領域内にとった2点間の最大距離 r_{\max} によって与えられる。ここで、改めて $r = r_{\max}$ とし、式(3.3)を考慮すれば、式(3.2)は

$$J = \frac{r^{2m} (k^2)^{m+1}}{2\pi 4^m (m!)^2} (s_m - \ln r) \quad (3.5)$$

となる。ここで式(3.5)の各項の大きさを調べる。まず s_m は

$$\begin{aligned} s_m &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{m} \\ &< \int_1^m \frac{dx}{x} + 1 = \ln m + 1 \end{aligned} \quad (3.6)$$

$m!$ について

$$\begin{aligned} \ln m! &= \ln 1 + \ln 2 + \ln 3 + \dots + \ln m \\ &> \int_1^m \ln x dx = \frac{m^m e}{e^m} \end{aligned} \quad (3.7)$$

3.1. 領域積分項の収束

となるので、これにより

$$\frac{1}{m!} < \frac{1}{e} \left(\frac{e}{m}\right)^m \quad (3.8)$$

式(3.6)と(3.8)を(3.5)に代入すればつぎようになる。

$$\begin{aligned} J &< \frac{k^2}{2\pi e^2} \left\{ \left(\frac{rke}{2}\right)^m \frac{1}{m^m} \right\}^2 (\ln m + 1 - \ln r) \\ &= \frac{r^2 k^4}{8\pi} \left\{ \left(\frac{rke}{2}\right)^{m-1} \frac{1}{m^{m-1}} \right\}^2 \left(\frac{\ln m}{m^2} + \frac{1}{m^2} - \frac{\ln r}{m^2} \right) \\ &= \frac{r^2 k^4}{8\pi} K^2 L \end{aligned} \quad (3.9)$$

ここで

$$C = \frac{1}{2} rke \quad (3.10)$$

$$K = \left(\frac{C}{m}\right)^{m-1} \quad (3.11)$$

$$L = \frac{\ln m}{m^2} + \frac{1}{m^2} - \frac{\ln r}{m^2} \quad (3.12)$$

C と K にはつぎの関係がある。

$$\ln K = (m-1) \ln \left(\frac{C}{m}\right) \quad (3.13)$$

右辺第2項は $m \rightarrow \infty$ について

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{C}{m}\right) = -\infty \quad (3.14)$$

したがって

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \ln K = -\infty \quad (3.15)$$

ゆえに

$$\lim_{m \rightarrow \infty} K = 0 \quad (3.16)$$

さらに

$$\lim_{m \rightarrow \infty} L = 0 \quad (3.17)$$

は明かであるから、式(3.16)と(3.17)を(3.9)に用いれば

$$\lim_{m \rightarrow \infty} J = 0 \quad (3.18)$$

この結果から、式(3.1)についてつぎのようになる。

$$\lim_{m \rightarrow \infty} |DI_m| = 0 \quad (3.19)$$

以上で、2次元の場合の領域積分項は十分大きい m について 0 に収束することが証明された。

3次元問題の場合

3次元問題の場合、高次の基本解 u_m^* は式(2.48)に与えられている。 $|u_m^*|_{\max}$ を与える r は、基本解の形から、領域内にとった2点間の最大距離 r_{\max} によって与えられることはあきらか。したがって、 $r = r_{\max}$ とすれば、 J は次のようになる。

$$J = \frac{(k^2)^{m+1}}{4\pi(2m)!} r^{2m-1} \quad (3.20)$$

式(3.8)を用いれば、次式を得る。

$$\begin{aligned} J &< \frac{1}{4\pi e} \left(\frac{e}{2m} \right)^{2m} \\ &= \frac{k^2}{4\pi r e} \left(\frac{ekr}{2m} \right)^{2m} \\ &= \frac{k^2}{4\pi r e} M \end{aligned} \quad (3.21)$$

ここで、

$$D = \frac{ekr}{2} \quad (3.22)$$

$$M = \left(\frac{D}{m} \right)^{2m} \quad (3.23)$$

M について、対数をとると

$$\ln M = 2m \ln \left(\frac{D}{m} \right) \quad (3.24)$$

ここで、式(3.14)を用いれば

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \ln M = -\infty \quad (3.25)$$

ゆえに、

$$\lim_{m \rightarrow \infty} M = 0 \quad (3.26)$$

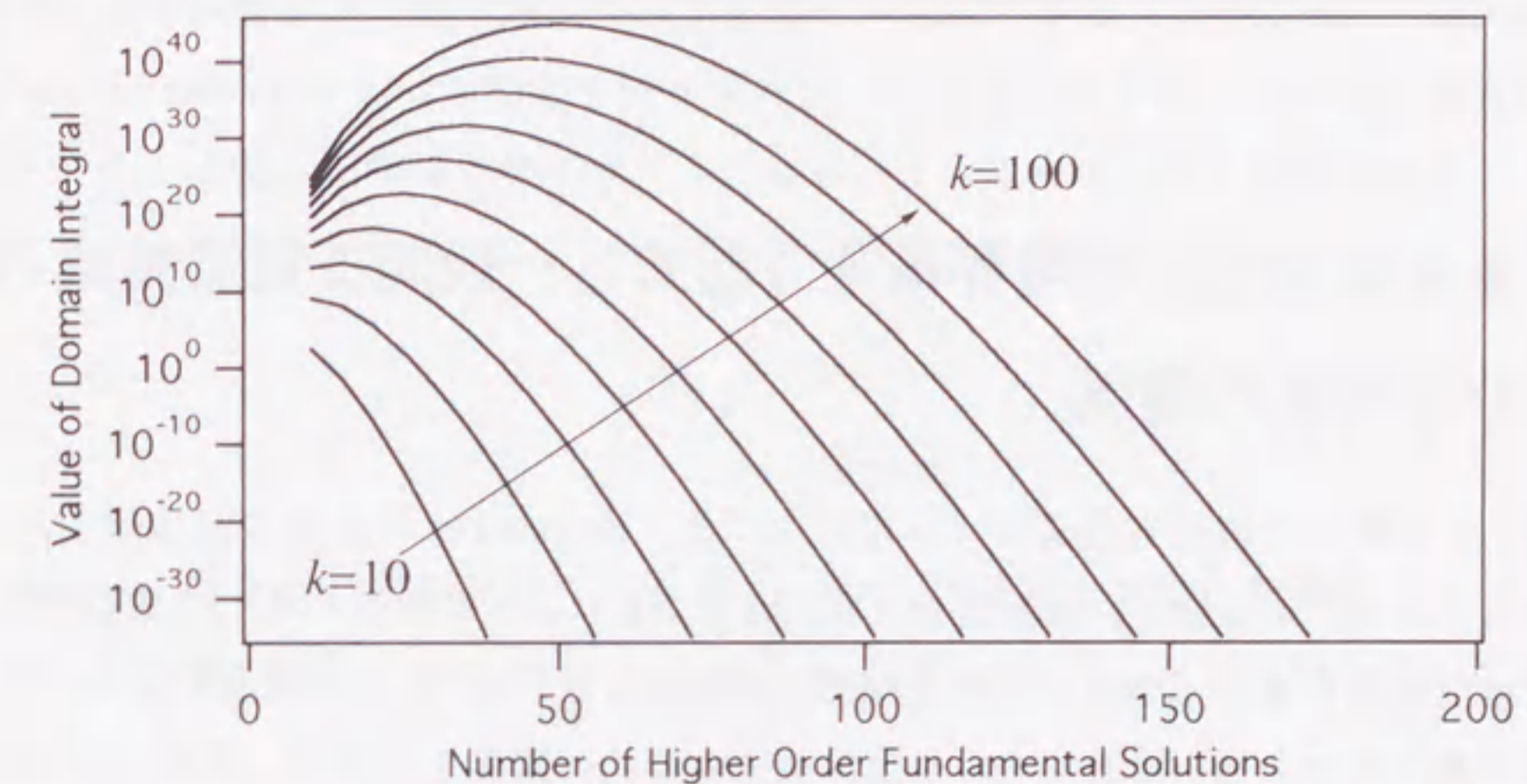


図 3.1: 2次元問題の領域積分項の収束 (領域内最大距離を1とし波数 k を $k=10 \sim 100$ まで10ごとに变化させた)。

式(3.21)と(3.26)から、2次元の場合と同様に

$$\lim_{m \rightarrow \infty} J = 0 \quad (3.27)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} |DI_m| = 0 \quad (3.28)$$

となる。3次元の場合も領域積分項は、十分大きい m について、0 に収束することが証明された。

以上のように、境界積分方程式(2.51)の領域積分項は、十分大きい m について、0 に収束することがわかった。 k と r は有限であるとして、上の証明を行ったが、 r (領域内にとった2点間の最大距離)の具体的寸法について制限はない。どのような寸法の領域にでも、閉じた有限領域であれば、この証明は成立する。しかし、実際の解析においては、極端に小さい寸法や、大きい寸法のまま解析を行うのは数値誤差の増大の原因となるため、好ましくない。このような場合、領域寸法のスケールリングを行い、幾何学的に相似な領域で解析を行うのがよい。幾何学的に相似な領域 A (代表寸法 L_A) と B (代表寸法 L_B) には、対応する固有値 k_A , k_B の間に $k_A L_A = k_B L_B$ なる関係があるので、これを用いれば所望の形状の

固有値を求めることができる。実際に、 $r=1$ の場合について k を 10 ~ 100 まで変えたときの 2 次元問題の J の収束の様子は、図 3.1 のようになる。図から $kr=100$ となるような場合でも、高次の基本解の次数を十分大きくとれば、領域積分項が 0 に収束することがわかる。

3.2 多重相反定式の境界積分方程式と一般的な複素定式の積分方程式の関係

Helmholtz 方程式の積分方程式による定式化には、Helmholtz 作用素の基本解を用いるのが一般的である。この場合、境界積分方程式は複素数によって表される (2.1 節参照)。一方、多重相反定式を用いる場合、積分方程式は実数表示される。1 つの問題に対し、2 つの積分表現が存在するため、これら 2 つの境界積分方程式の関係を明らかにする [7~12]。また、ここで明らかにした 2 つの積分方程式の関係から、多重相反定式による境界積分方程式がもつ特徴と解析上の問題点について説明する。

Helmholtz 作用素の基本解 (2.2) を用いて定式化を行った場合の境界積分方程式 (2.4) で、 u と $q \equiv \partial u / \partial n$ は、複素数であるから、実部と虚部に分ける。

$$\left. \begin{aligned} u &= \operatorname{Re}(u) + i\operatorname{Im}(u) \\ q &= \operatorname{Re}(q) + i\operatorname{Im}(q) \end{aligned} \right\} \quad (3.29)$$

さらに、基本解 v^* 、 $\partial v^* / \partial n$ についても同様の分解を行い、 $q^* = \partial v^* / \partial n$ と置き換える。この結果、式 (2.4) は次のようになる。

$$c\operatorname{Re}(u) + \int_{\Gamma} [\operatorname{Re}(u)\operatorname{Re}(q^*) - \operatorname{Im}(u)\operatorname{Im}(q^*) - \operatorname{Re}(q)\operatorname{Re}(v^*) + \operatorname{Im}(q)\operatorname{Im}(v^*)] d\Gamma = 0 \quad (3.30)$$

$$c\operatorname{Im}(u) + \int_{\Gamma} [\operatorname{Im}(u)\operatorname{Re}(q^*) + \operatorname{Re}(u)\operatorname{Im}(q^*) - \operatorname{Im}(q)\operatorname{Re}(v^*) - \operatorname{Re}(q)\operatorname{Im}(v^*)] d\Gamma = 0 \quad (3.31)$$

v^* と共役な関数 $\overline{v^*}$ を用いて同様の定式化を行うことができる。 $\overline{v^*}$ も v^* と同様に式 (2.1) を満たすことが知られている。具体的な $\overline{v^*}$ の形は次式で与えられる。ここで、 $H_0^{(1)}(kr)$ は 0 次第 1 種の Hankel 関数である。

$$\overline{v^*}(\xi, x) = \begin{cases} -\frac{i}{4} H_0^{(1)}(kr) & (2\text{Dim.}) \\ \frac{1}{4\pi r} \exp(ikr) & (3\text{Dim.}) \end{cases} \quad (3.32)$$

$\overline{v^*}$ は Sommerfeld の放射条件を満たさないで、無限領域問題 (拡散場) の定式化に用いることはできず、有限領域のみに適用可能である。これに対し、 v^* は Sommerfeld の放射条件を満たすので、無限・有限両方の問題の定式化に適用できる。このため、一般的に境界要素法では Sommerfeld の放射条件を満たす v^* を用いて定式化を行う。一方、固有値問題に限定するならば閉じた領域で考えればよいので、 $\overline{v^*}$ による定式化も可能である。

$\overline{v^*}$ をそのまま用いる代わりに、つぎのような関数を基本解にとる。

$$\begin{aligned} v_{re}^* &= \frac{v^* + \overline{v^*}}{2} \\ &= \operatorname{Re}(v^*) \end{aligned} \quad (3.33)$$

この関数は、 $\overline{v^*}$ と v^* の線形結合であるから、式 (2.1) を満たすが、無限遠での条件は満たさない。基本解 (3.33) は基本解 (2.2) の実数部に相当する。この基本解を用いた積分方程式はつぎのようになる。

$$cu + \int_{\Gamma} (uq_{re}^* - v_{re}^* q) d\Gamma = 0 \quad (3.34)$$

ただし、 $q_{re}^* \equiv \partial v_{re}^* / \partial n$ とおいた。式 (3.34) を実部と虚部に分ければ

$$c\operatorname{Re}(u) + \int_{\Gamma} [\operatorname{Re}(u)q_{re}^* - \operatorname{Re}(q)v_{re}^*] d\Gamma = 0 \quad (3.35)$$

$$c\operatorname{Im}(u) + \int_{\Gamma} [\operatorname{Im}(u)q_{re}^* - \operatorname{Im}(q)v_{re}^*] d\Gamma = 0 \quad (3.36)$$

式 (3.33) によって

$$\operatorname{Re}(v^*) = v_{re}^*, \quad \operatorname{Re}(q^*) = q_{re}^* \quad (3.37)$$

の関係が成り立つから、式 (3.30) と (3.35) 及び式 (3.31) と (3.36) によってつぎの 2 式を得る。

$$\int_{\Gamma} [\operatorname{Re}(u)\operatorname{Im}(q^*) - \operatorname{Re}(q)\operatorname{Im}(v^*)] d\Gamma = 0 \quad (3.38)$$

$$\int_{\Gamma} [\operatorname{Im}(u)\operatorname{Im}(q^*) - \operatorname{Im}(q)\operatorname{Im}(v^*)] d\Gamma = 0 \quad (3.39)$$

2 次元問題の場合

基本解中の Hankel 関数は 0 次の第 1 種および第 2 種 Bessel 関数 J_0 、 Y_0 を用いて次のように表される。

$$\left. \begin{aligned} H_0^{(1)}(z) &= J_0(z) + iY_0(z) = \overline{H_0^{(2)}(z)} \\ H_0^{(2)}(z) &= J_0(z) - iY_0(z) \end{aligned} \right\} \quad (3.40)$$

したがって、この場合は次のようになる。

$$\begin{aligned} v_{re}^* &= \operatorname{Re}(v^*) \\ &= \frac{1}{4} Y_0(kr) \end{aligned} \quad (3.41)$$

$$\begin{aligned} v_{im}^* &= \operatorname{Im}(v^*) \\ &= -\frac{1}{4} J_0(kr) \end{aligned} \quad (3.42)$$

式(3.38)と式(3.39)に基本解(3.42)を代入すると

$$\int_{\Gamma} [\operatorname{Re}(u) \frac{\partial}{\partial n} J_0(kr) - \operatorname{Re}(q) J_0(kr)] d\Gamma = 0 \quad (3.43)$$

$$\int_{\Gamma} [\operatorname{Im}(u) \frac{\partial}{\partial n} J_0(kr) - \operatorname{Im}(q) J_0(kr)] d\Gamma = 0 \quad (3.44)$$

式(3.35)に基本解(3.42)を代入すれば

$$c \operatorname{Re}(u) - \frac{1}{4} \int_{\Gamma} [\operatorname{Re}(u) \frac{\partial}{\partial n} Y_0(kr) - \operatorname{Re}(q) Y_0(kr)] d\Gamma = 0 \quad (3.45)$$

ここで、Bessel関数 $J_0(kr)$, $Y_0(kr)$ はつぎのように級数展開できる [2].

$$J_0(kr) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(j!)^2 4^j} (kr)^{2j} \equiv \sum_{j=0}^{\infty} F_j r^{2j} \quad (3.46)$$

ここに

$$F_j = \frac{(-1)^j k^{2j}}{(j!)^2 4^j} \quad (3.47)$$

$$\begin{aligned} Y_0(kr) &= \frac{2}{\pi} J_0(kr) \left(\gamma + \ln \frac{kr}{2} \right) - \frac{2}{\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(j!)^2 4^j} (kr)^{2j} \sum_{l=1}^j \frac{1}{l} \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\gamma + \ln \frac{k}{2} \right) J_0(kr) + \frac{2}{\pi} \sum_{j=0}^{\infty} F_j (\ln r - s_j) r^{2j} \end{aligned} \quad (3.48)$$

ただし

$$s_j = \sum_{l=1}^j \frac{1}{l} \quad (3.49)$$

$$\gamma = \lim_{j \rightarrow \infty} \left(\sum_{l=1}^j \frac{1}{l} - \ln j \right) \quad (3.50)$$

これらの級数表示を式(3.45)に代入し、式(3.43)の関係をを用いるとつぎのようになる。

$$c \operatorname{Re}(u) - \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} [\operatorname{Re}(u) \frac{\partial}{\partial n} \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} F_j (\ln r - s_j) r^{2j} \right\} - \operatorname{Re}(q) \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} F_j (\ln r - s_j) r^{2j} \right\}] d\Gamma = 0 \quad (3.51)$$

これを書き換えて整理すれば

$$c \operatorname{Re}(u) + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-k^2)^j}{-2\pi 4^j (j!)^2} \int_{\Gamma} [\operatorname{Re}(u) r^{2j-1} \{2j(\ln r - s_j) + 1\} \frac{\partial r}{\partial n} - \operatorname{Re}(q) r^{2j} (\ln r - s_j)] d\Gamma = 0 \quad (3.52)$$

を得る。また同様の手続きを式(3.36)に対して行えば

$$c \operatorname{Im}(u) + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-k^2)^j}{-2\pi 4^j (j!)^2} \int_{\Gamma} [\operatorname{Im}(u) r^{2j-1} \{2j(\ln r - s_j) + 1\} \frac{\partial r}{\partial n} - \operatorname{Im}(q) r^{2j} (\ln r - s_j)] d\Gamma = 0 \quad (3.53)$$

を得ることができる。また式(3.43), (3.44)にBessel関数 $J_0(kr)$ の級数表示式(3.46)を代入すれば、

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-k^2)^j}{4^j (j!)^2} \int_{\Gamma} [2j \operatorname{Re}(u) r^{2j-1} \frac{\partial r}{\partial n} - \operatorname{Re}(q) r^{2j}] d\Gamma = 0 \quad (3.54)$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-k^2)^j}{4^j (j!)^2} \int_{\Gamma} [2j \operatorname{Im}(u) r^{2j-1} \frac{\partial r}{\partial n} - \operatorname{Im}(q) r^{2j}] d\Gamma = 0 \quad (3.55)$$

を得ることができ、一般的な複素定式による積分方程式を波数 k について多項式展開できる(式(3.52)~(3.55))。

一方、2次元問題の多重相反定式の場合では、高次の基本解 u_j^* は式(2.46)に与えられ、境界上での法線方向微分 $q_j^* = \partial u_j^* / \partial n$ は

$$q_j^* = -\frac{1}{2\pi 2^{2j} (j!)^2} r^{2j-1} [2j(\ln r - s_j) + 1] \frac{\partial r}{\partial n} \quad (3.56)$$

となる。これらを、多重相反定式による境界積分方程式(2.53)に代入すると次式を得る。

$$cu + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-k^2)^j}{-2\pi 4^j (j!)^2} \int_{\Gamma} [u r^{2j-1} \{2j(\ln r - s_j) + 1\} \frac{\partial r}{\partial n} - q r^{2j} (\ln r - s_j)] d\Gamma = 0 \quad (3.57)$$

多重相反定式では、一般に変数 u および $q \equiv \partial u / \partial n$ を実数として扱うので、上式は式(3.52)と同一の方程式である。このことから、多重相反定式による境界積分方程式は、Helmholtz作用素の基本解(v^* および $\overline{v^*}$)を用いた定式化による境界積分方程式を実数部と虚数部に分解して得られる境界積分方程式の一部分に相当することがわかる。

3次元問題の場合

3次元の場合は、多重相反定式と一般的な複素定式との関係をより容易に導くことができる。基本解に、Helmholtz作用素の基本解の実部を用いて定式化した境界積分方程式(3.34)の実部(3.35)が、多重相反定式による境界積分方程式に対応する。

3次元 Helmholtz 作用素の基本解の実部および虚部は、次のようになる。

$$\begin{aligned} v_{re}^* &= \operatorname{Re}(v^*) \\ &= \frac{1}{4\pi r} \cos(kr) \end{aligned} \quad (3.58)$$

$$\begin{aligned} v_{im}^* &= \operatorname{Im}(v^*) \\ &= -\frac{1}{4\pi r} \sin(kr) \end{aligned} \quad (3.59)$$

これを式 (3.35), (3.36), (3.38), (3.39) に代入すると次式を得る。

$$c\operatorname{Re}(u) + \int_{\Gamma} [\operatorname{Re}(u) \frac{\partial}{\partial n} \left\{ \frac{\cos(kr)}{4\pi r} \right\} - \operatorname{Re}(q) \frac{\cos(kr)}{4\pi r}] d\Gamma = 0 \quad (3.60)$$

$$c\operatorname{Im}(u) + \int_{\Gamma} [\operatorname{Im}(u) \frac{\partial}{\partial n} \left\{ \frac{\cos(kr)}{4\pi r} \right\} - \operatorname{Im}(q) \frac{\cos(kr)}{4\pi r}] d\Gamma = 0 \quad (3.61)$$

$$\int_{\Gamma} [\operatorname{Re}(u) \frac{\partial}{\partial n} \left\{ \frac{\sin(kr)}{4\pi r} \right\} - \operatorname{Re}(q) \frac{\sin(kr)}{4\pi r}] d\Gamma = 0 \quad (3.62)$$

$$\int_{\Gamma} [\operatorname{Im}(u) \frac{\partial}{\partial n} \left\{ \frac{\sin(kr)}{4\pi r} \right\} - \operatorname{Im}(q) \frac{\sin(kr)}{4\pi r}] d\Gamma = 0 \quad (3.63)$$

ここで、 $\cos(kr), \sin(kr)$ を 0 点まわりで Taylor 展開すると、上式は次のように書き換えられる。

$$c\operatorname{Re}(u) + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j k^{2j}}{4\pi(2j)!} \int_{\Gamma} [(2j-1)\operatorname{Re}(u)r^{2j-2} \frac{\partial r}{\partial n} - \operatorname{Re}(q)r^{2j-1}] d\Gamma = 0 \quad (3.64)$$

$$c\operatorname{Im}(u) + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j k^{2j}}{4\pi(2j)!} \int_{\Gamma} [(2j-1)\operatorname{Im}(u)r^{2j-2} \frac{\partial r}{\partial n} - \operatorname{Im}(q)r^{2j-1}] d\Gamma = 0 \quad (3.65)$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j k^{2j+1}}{4\pi(2j+1)!} \int_{\Gamma} [2j\operatorname{Re}(u)r^{2j-1} \frac{\partial r}{\partial n} - \operatorname{Re}(q)r^{2j}] d\Gamma = 0 \quad (3.66)$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j k^{2j+1}}{4\pi(2j+1)!} \int_{\Gamma} [2j\operatorname{Im}(u)r^{2j-1} \frac{\partial r}{\partial n} - \operatorname{Im}(q)r^{2j}] d\Gamma = 0 \quad (3.67)$$

式 (3.66) と (3.67) については、 k で割って次式を得る。

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j k^{2j+1}}{4\pi(2j+1)!} \int_{\Gamma} [2j\operatorname{Re}(u)r^{2j-1} \frac{\partial r}{\partial n} - \operatorname{Re}(q)r^{2j}] d\Gamma = 0 \quad (3.68)$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j k^{2j+1}}{4\pi(2j+1)!} \int_{\Gamma} [2j\operatorname{Im}(u)r^{2j-1} \frac{\partial r}{\partial n} - \operatorname{Im}(q)r^{2j}] d\Gamma = 0 \quad (3.69)$$

2次元の場合と同様、一般的な複素定式の積分方程式を波数 k について多項式展開できる。

一方、多重相反定式による境界積分方程式は、式 (2.53) に 3次元の高次の基本解 (2.48) を代入して

$$cu + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j k^{2j}}{4\pi(2j)!} \int_{\Gamma} [(2j-1)ur^{2j-2} \frac{\partial r}{\partial n} - qr^{2j-1}] d\Gamma = 0 \quad (3.70)$$

2次元の場合と同様、多重相反定式の境界積分方程式は、Helmholtz 作用素の基本解を用いた定式化によるものの一部分となっていることがわかる。

3.3 分解された境界積分方程式の固有値問題

2次元あるいは3次元の一般的な複素定式の積分方程式を、実部と虚部に分解し波数 k について多項式展開した境界積分方程式 (2次元の場合 (3.52)~(3.55), 3次元の場合 (3.64), (3.65), (3.68), (3.69)), を境界要素により離散化すると、

$$\mathbf{H}_{re}(k)\mathbf{u}_{re} = \mathbf{G}_{re}(k)\mathbf{q}_{re} \quad (3.71)$$

$$\mathbf{H}_{im}(k)\mathbf{u}_{re} = \mathbf{G}_{im}(k)\mathbf{q}_{re} \quad (3.72)$$

$$\mathbf{H}_{re}(k)\mathbf{u}_{im} = \mathbf{G}_{re}(k)\mathbf{q}_{im} \quad (3.73)$$

$$\mathbf{H}_{im}(k)\mathbf{u}_{im} = \mathbf{G}_{im}(k)\mathbf{q}_{im} \quad (3.74)$$

が得られる。ここで、 $\mathbf{H}_{re}(k), \mathbf{H}_{im}(k), \mathbf{G}_{re}(k), \mathbf{G}_{im}(k)$ はいずれも、マトリクスの成分が波数 k の多項式となる多項式行列である。これらの式に同次な境界条件 (1.3) を与えて書き直すと、

$$\mathbf{A}_{re}(k)\mathbf{x}_{re} = \mathbf{B}_{re}(k)\mathbf{o} = \mathbf{o} \quad (3.75)$$

$$\mathbf{A}_{im}(k)\mathbf{x}_{re} = \mathbf{B}_{im}(k)\mathbf{o} = \mathbf{o} \quad (3.76)$$

$$\mathbf{A}_{re}(k)\mathbf{x}_{im} = \mathbf{B}_{re}(k)\mathbf{o} = \mathbf{o} \quad (3.77)$$

$$\mathbf{A}_{im}(k)\mathbf{x}_{im} = \mathbf{B}_{im}(k)\mathbf{o} = \mathbf{o} \quad (3.78)$$

これらの式全体が Helmholtz 方程式の固有値問題となる。多重相反定式では、上の4つの固有値問題のうち式 (3.75) のみを扱っていることになる。一方、一般的な複素定式による固有値問題は、4つの固有値問題を1つの複素固有値問題として同時に解いているが、実際には固有値問題 (3.75) と (3.77), 固有値問題 (3.76) と (3.78) のそれぞれは同一であるから、固有値問題 (3.75) と (3.76) を同時に複素固有値問題として解いているといえる。しか

し、2つの実固有値問題 (3.75) と (3.76) の連立として固有値を求めても、複素定式による固有値問題の固有値とは一致しない、というのは、以下の関係があるからである。

$$\begin{aligned}
 & \det \mathbf{A} = 0 \\
 & \Updownarrow \\
 & \left. \begin{aligned} \det(\mathbf{A}_{re} + i\frac{2}{\pi}(\gamma + \ln \frac{k}{2})\mathbf{A}_{im}) &= 0 & (2\text{Dim.}) \\ \det(\mathbf{A}_{re} + ik\mathbf{A}_{im}) &= 0 & (3\text{Dim.}) \end{aligned} \right\} \\
 & \Updownarrow \\
 & \left. \begin{aligned} \det \mathbf{A}_{re} &= 0 \\ \det \mathbf{A}_{im} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.79)
 \end{aligned}$$

ここで、 \mathbf{A} は一般的な複素定式による係数マトリクスを意味する。式 (3.79) の2次元と3次元で場合分けされた第2式を導出するためには、一般的な複素定式による境界積分方程式を波数 k について多項式展開した過程を逆にたどればよい。

2次元の場合について、式 (3.79) の関係を計算例を用いて具体的に説明しよう。1×0.6の正方形領域について、境界条件を境界上の全ての点で $q \equiv \partial u / \partial n = 0$ と与えた場合について、一般的な複素定式と多重相反定式の係数マトリクスの行列式の変化の様子を、波数 $k = 0 \sim 10$ の範囲で計算した結果を図3.2に示す。なお、この例では要素数32の等分割一定要素を用いている。また、一般的な複素定式については係数マトリクスの行列式の絶対値の2乗の変化の様子を示した。この問題の解析解を表3.1に示す。図からわかるように、一般的な複素定式による固有値問題の係数マトリクスの行列式の0点が解析解の固有値と一致するのに対し、多重相反定式による固有値問題の係数マトリクスの行列式の0点の中には解析解の固有値と一致しないもの(*印)がある。これは、多重相反定式による固有値問題が一般的な複素定式による固有値問題の実数部分のみを扱っていることにより現れるもので、見かけの固有値 (fictitious eigenvalue) と呼ばれる。したがって、多重相反定式による実固有値問題を解く場合には、計算によって得られた固有値が正しいものであるかどうかは別の方法で確認する必要がある。また、一般的な複素定式による固有値が係数マトリクスの行列式の絶対値の極小値として得られるのに対して、多重相反定式による固有値は、0クロスの点と極小値の両方が混在している。このことから、多重相反定式の固有値をNewton法などの反復解法により求める場合には、行列式の0点を求める場合と行列式の導関数の0点を求める場合について、場合分けが必要となる。上の例では固有値が重

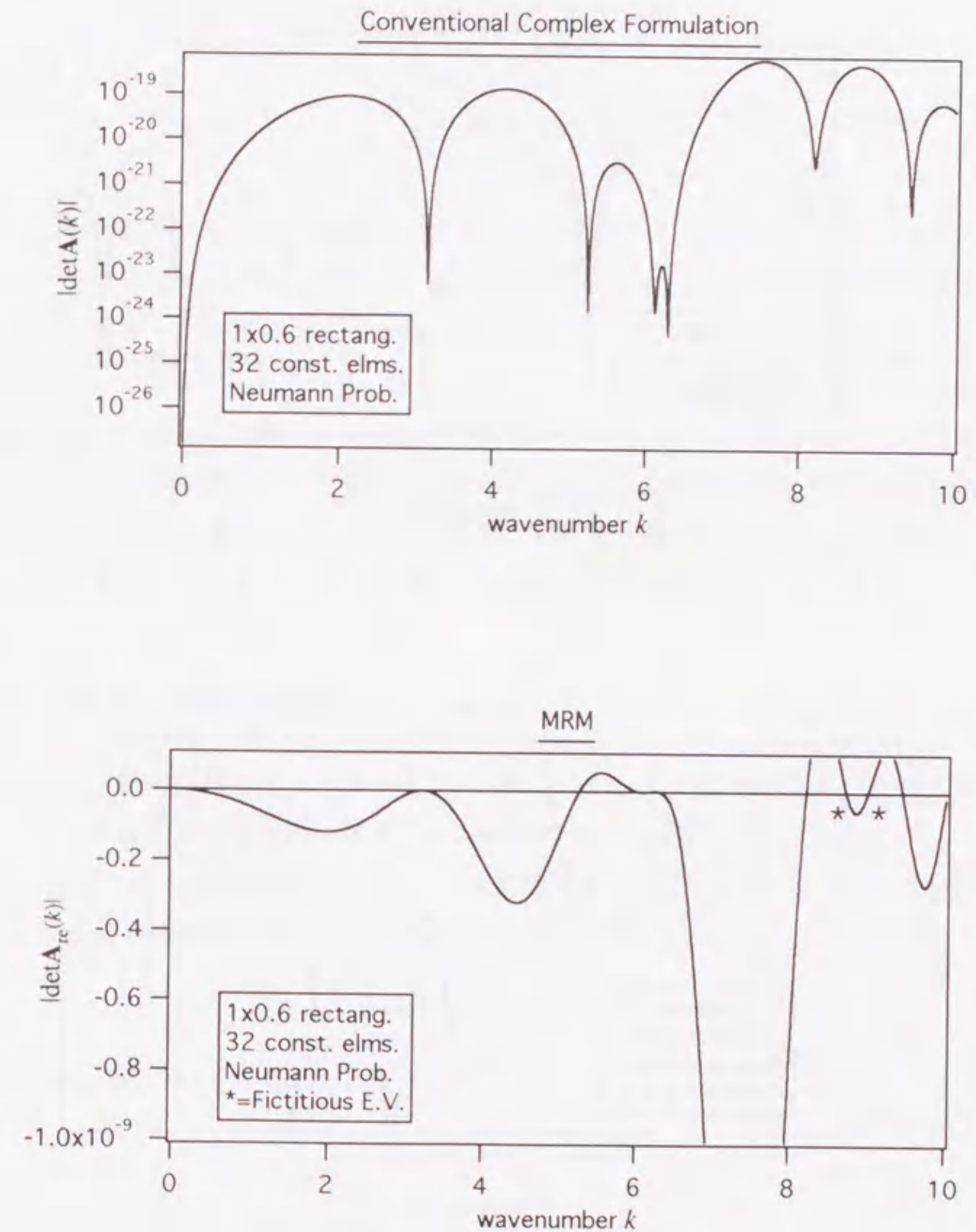


図 3.2: 一般的な複素定式の行列式と多重相反定式の行列式

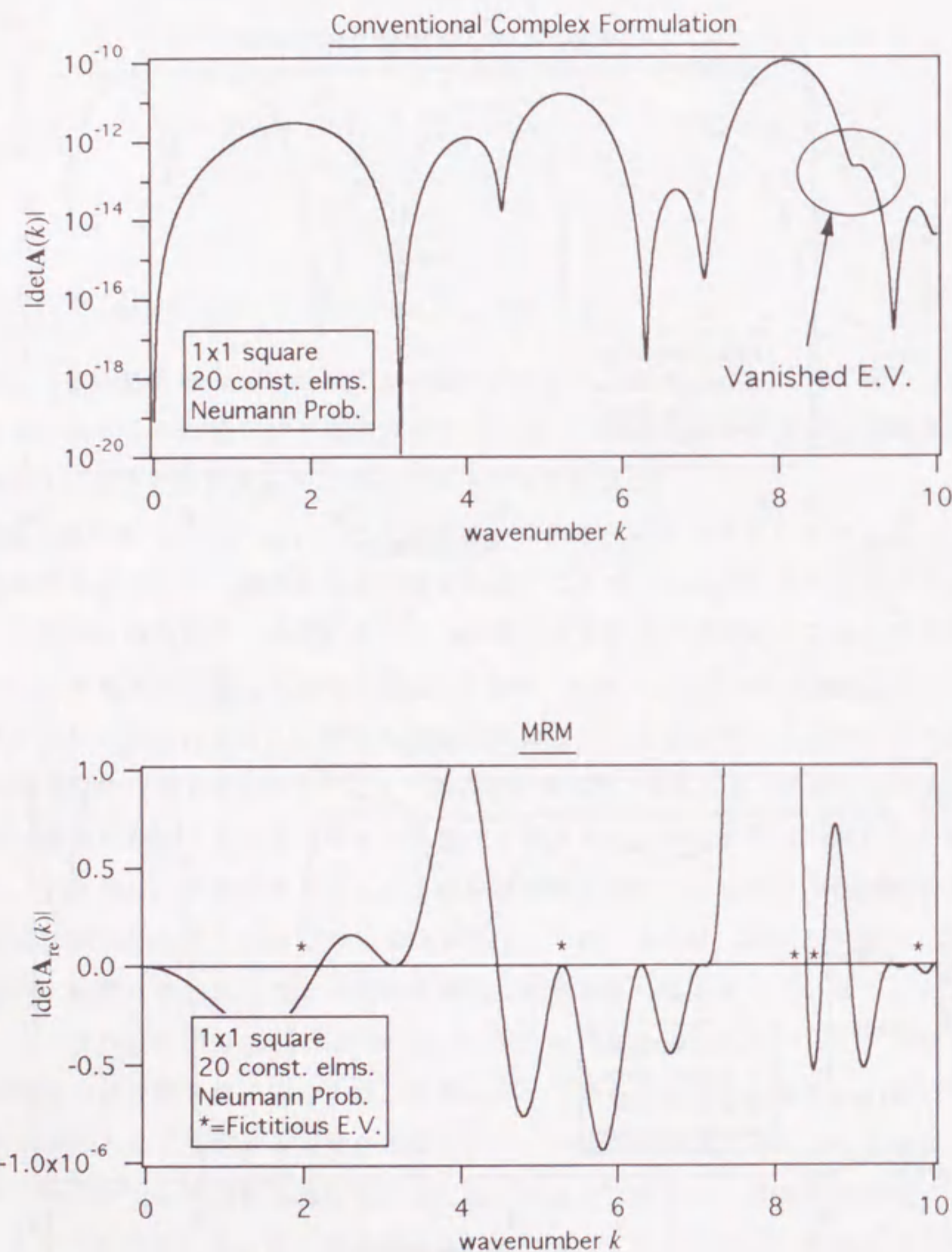


図 3.3: 一般的な複素定式の行列式と多重相反定式の行列式 (重根の場合)

表 3.1: 1×0.6 の長方形領域の Neumann 問題の固有値

m	n	E.V.
1	0	3.14
0	1	5.23
1	1	6.10
2	0	6.28
2	1	8.17
3	0	9.42

根とならない場合であるが、固有値が重根となる場合では、それぞれの定式化による係数マトリックスの行列式の変化の様子は、図 3.3 のようになる。この解析例では、 1×1 の正方形領域の境界上の全ての点で $q \equiv \partial u / \partial n = 0$ と境界条件を与え、要素数 20 の等分割一定要素を用いて解析を行っている。図からわかるように、一般的な複素定式では (要素分割と比較して) 大きい固有値に対しては行列式が 0 とならない場合がある。一方多重相反定式では、大きい固有値に対しても行列式が 0 となっている。次の章でも例を挙げて示すが、一般的な複素定式では波数 k が大きくなると、固有値に対応するところで行列式の 0 点が現れなくなる場合がある (O 印)。なお、この場合の解析解は表 3.2 を参照されたい。

3.4 新しい複素定式

ここでは、前節で導出した 4 つの固有値問題から、一般的な複素定式の固有値問題とは異なった形の複素固有値問題を導き、その特徴について述べる [10, 13~15]。

波数 k について多項式展開された 4 つの固有値問題 (3.75)~(3.78) は次のように変形できる。式 (3.75) に式 (3.77) を i 倍して加えると

$$\mathbf{A}_{re}(\mathbf{x}_{re} + i\mathbf{x}_{im}) = 0 \quad (3.80)$$

式 (3.76) に式 (3.78) を i 倍して加えると

$$\mathbf{A}_{im}(\mathbf{x}_{re} + i\mathbf{x}_{im}) = 0 \quad (3.81)$$

式 (3.80) に式 (3.81) を i 倍して加えると

$$(\mathbf{A}_{re} + i\mathbf{A}_{im})(\mathbf{x}_{re} + i\mathbf{x}_{im}) = 0 \quad (3.82)$$

これを書き換えて,

$$(\mathbf{A}_{re}\mathbf{x}_{re} - \mathbf{A}_{im}\mathbf{x}_{im}) + i(\mathbf{A}_{im}\mathbf{x}_{re} + \mathbf{A}_{re}\mathbf{x}_{im}) = 0 \quad (3.83)$$

を得る. したがって,

$$\mathbf{A}_{re}\mathbf{x}_{re} - \mathbf{A}_{im}\mathbf{x}_{im} = 0 \quad (3.84)$$

$$\mathbf{A}_{im}\mathbf{x}_{re} + \mathbf{A}_{re}\mathbf{x}_{im} = 0 \quad (3.85)$$

であるから, これらをまとめて1つのマトリクスとして表示すると

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{re} & -\mathbf{A}_{im} \\ \mathbf{A}_{im} & \mathbf{A}_{re} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_{re} \\ \mathbf{x}_{im} \end{Bmatrix} = 0 \quad (3.86)$$

となる.

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{re} & -\mathbf{A}_{im} \\ \mathbf{A}_{im} & \mathbf{A}_{re} \end{bmatrix} \quad (3.87)$$

とすると固有値問題と固有方程式は

$$\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (3.88)$$

$$\det \tilde{\mathbf{A}} \equiv \begin{vmatrix} \mathbf{A}_{re} & -\mathbf{A}_{im} \\ \mathbf{A}_{im} & \mathbf{A}_{re} \end{vmatrix} = 0 \quad (3.89)$$

と表される. ここで, $\mathbf{A}_{re}(k), \mathbf{A}_{im}(k)$ が多項式行列なので, $\tilde{\mathbf{A}}(k)$ も多項式行列となる. したがって, 多重相反定式による固有値問題と同様, 一般的な固有値解析の方法は使用できない.

ここで, 行列式 $\det \tilde{\mathbf{A}}$ の値の取り得る範囲について考える. 式 (3.89) の2行目に i を掛けたものを1行目に加えると,

$$\det \tilde{\mathbf{A}} = \begin{vmatrix} \mathbf{A}_{re} + i\mathbf{A}_{im} & i\mathbf{A}_{re} - \mathbf{A}_{im} \\ \mathbf{A}_{im} & \mathbf{A}_{re} \end{vmatrix} \quad (3.90)$$

となり, さらに1列目に i を掛けたものを2列目から引くと

$$\det \tilde{\mathbf{A}} = \begin{vmatrix} \mathbf{A}_{re} + i\mathbf{A}_{im} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_{im} & \mathbf{A}_{re} - i\mathbf{A}_{im} \end{vmatrix} \quad (3.91)$$

となり, 次のように書くことができる.

$$\begin{aligned} \det \tilde{\mathbf{A}} &= \det(\mathbf{A}_{re} + i\mathbf{A}_{im}) \cdot \det(\mathbf{A}_{re} - i\mathbf{A}_{im}) \\ &= \det\{(\mathbf{A}_{re} - i\mathbf{A}_{im})^t \cdot (\mathbf{A}_{re} + i\mathbf{A}_{im})\} \end{aligned} \quad (3.92)$$

$\det \tilde{\mathbf{A}}$ は Gram の行列式となるので, その性質より,

$$\det \tilde{\mathbf{A}} \geq 0 \quad (3.93)$$

である. したがって, $\det \tilde{\mathbf{A}}$ の0点は極小値であることが示される.

複素固有値問題を波数 k について多項式展開して得られる4つの固有値問題 (3.75)~(3.78) から導出できる複素固有値問題 (3.82) は, 同じように4つの固有値問題から導出できる一般的な複素固有値問題 (2.11) とは一致しない. これは, 境界積分方程式を実部と虚部に分解する過程で, 基本解の実部による積分方程式から, 式 (3.48) 第1項に関する積分項を消去しているためである. しかし, 実部と虚部に分解し多項式展開した4つの固有値問題から, 境界積分方程式を分解する過程を逆にたどり, 一般的な複素固有値問題にも帰着できる. また, 固有値問題 (3.75)~(3.78) からは, 式 (3.82) に変形した後, 固有値問題 (3.88) にも帰着できる. 同じ4つの固有値問題を基にして, 2つの複素固有値問題を導くことができるので, これら2つの固有値問題の関係についても触れておく. 前節で取り上げた固有値が重根となる2次元問題 (1×1 の正方形領域の Neumann 問題) について, 要素数を32とし波数 k を0~25と変えて解析を行った. 一般的な複素定式による固有値問題 (2.10) の係数マトリクスの行列式の絶対値の2乗と, 多項式展開した4つの固有値問題を1つにまとめた複素固有値問題 (3.88) の係数マトリクスの行列式の波数 k に対する変化の様子を, 図3.4に示す. この場合の解析解は, 表3.2に示すとおりである. 図からわかるように, 一般的な複素定式では, 固有値の値が大きくなると行列式が0とならない場合がある (O 印). これは, ある固有値の周囲での行列式の落ち込みに対して, 別の固有値の周囲での行列式の落ち込みが少ないため結果として落ち込みの大きい固有値だけが際だってしまうことによると考えられる. また, 行列式の落ち込みの大きい固有値同士が接近している場合, 固有値でないところに比べて近接した固有値のまわりで行列式が広い範囲でかなり小さい値をとる. このため, 固有値の探索を行う場合に波数 k の刻みのとり方によっては, 落ち込みの大きい固有値を見逃す結果となることが多くなり, 固有値を探し出すために波数 k の刻みを小さくする必要がある. これに対し, 多項式展開した4つの固有値問題を1つにまとめた方では, いずれの固有値でも同じように行列式が落ち込むため, 固有値を見逃すこ

表 3.2: $\det \mathbf{A} = 0$ の解; 1×1 の正方形領域の Neumann 問題の固有値

m	n	E.V.	m	n	E.V.	m	n	E.V.	m	n	E.V.
0	1	3.14	0	4	12.6	5	2	16.9	0	7	22.0
1	0	3.14	4	0	12.6	4	4	17.8	7	0	22.0
1	1	4.44	4	1	13.0	3	5	18.3	1	7	22.2
0	2	6.28	1	4	13.0	5	3	18.3	5	5	22.2
2	0	6.28	3	3	13.3	0	6	18.8	7	1	22.2
2	1	7.02	4	2	14.0	6	0	18.8	6	4	22.7
1	2	7.02	2	4	14.0	6	1	19.1	4	6	22.7
2	2	8.89	4	3	15.7	1	6	19.1	2	7	22.9
0	3	9.42	0	5	15.7	6	2	19.9	7	2	22.9
3	0	9.42	3	4	15.7	2	6	19.9	3	7	23.9
1	3	9.93	5	0	15.7	5	4	20.1	7	3	23.9
3	1	9.93	1	5	16.0	4	5	20.1	5	6	24.5
3	2	11.3	5	1	16.0	6	3	21.1	6	5	24.5
2	3	11.3	2	5	16.9	3	6	21.1			

とがない。また、波数 k を $0 \sim 25$ と広い範囲にわたって解析を行っているが、この範囲内では多重相反定式のような見かけの固有値は現れていない。

このように、2つの固有値問題 (2.10) と (3.88) は、どちらも見かけの固有値を含まない。しかし、同じように4つの固有値問題から導出できるにもかかわらず、その性質は異なり、多項式展開した固有値問題の方は波数 k が大きくなっても解析が可能であり、固有値解析には適している。この違いは、積分方程式を実部と虚部に分解する過程で、基本解の実部 $Y_0(kr)$ に含まれる基本解の虚部 $J_0(kr)$ の項を消去していることによる。また、ここで導入した固有値問題 (3.88) は多重相反定式による固有値問題と同様、多項式行列による固有値問題となる。その定式化の方法は、一般的な複素定式による複素固有値問題を実数表現し、係数マトリクスを波数 k の多項式で表現した4つの固有値問題を、改めて複素固有値問題の形に構成するものである。例に示したように、固有値問題 (3.88) では、4つの固有値問題を同時に扱うことにより見かけの固有値は現れていない。一方、多重相反定式の固有値問題は、一般的な複素定式による複素固有値問題を実部と虚部に分解し、係数マトリクスを波数 k の多項式で表現したものの1部分のみを扱った、いわば省略形である。このため多重相反定式による固有値問題は見かけの固有値を含んでいる。一般的な複素定式による固有値問題と多重相反定式による固有値問題と新しい複素定式による固有値問題の特徴

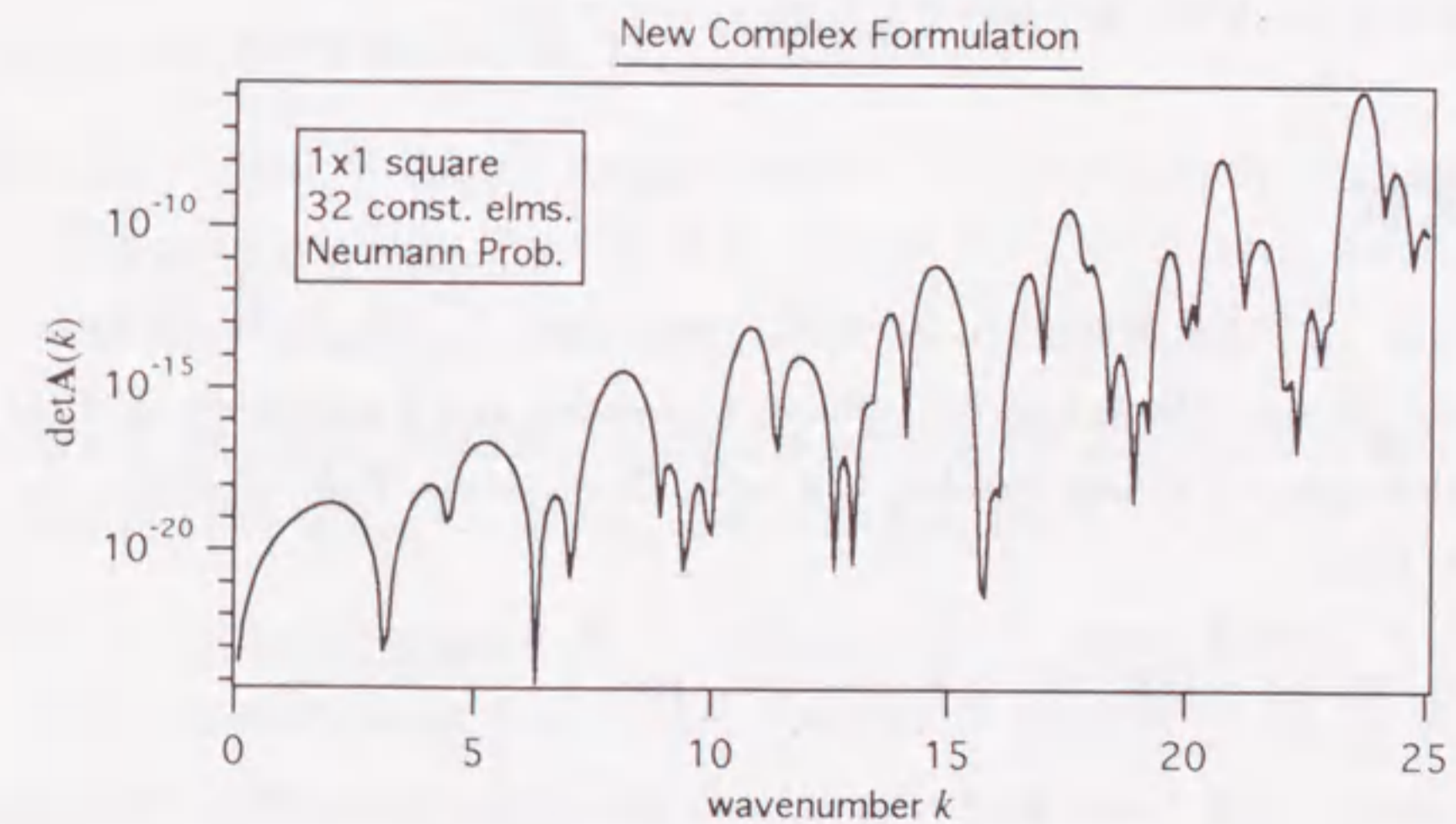
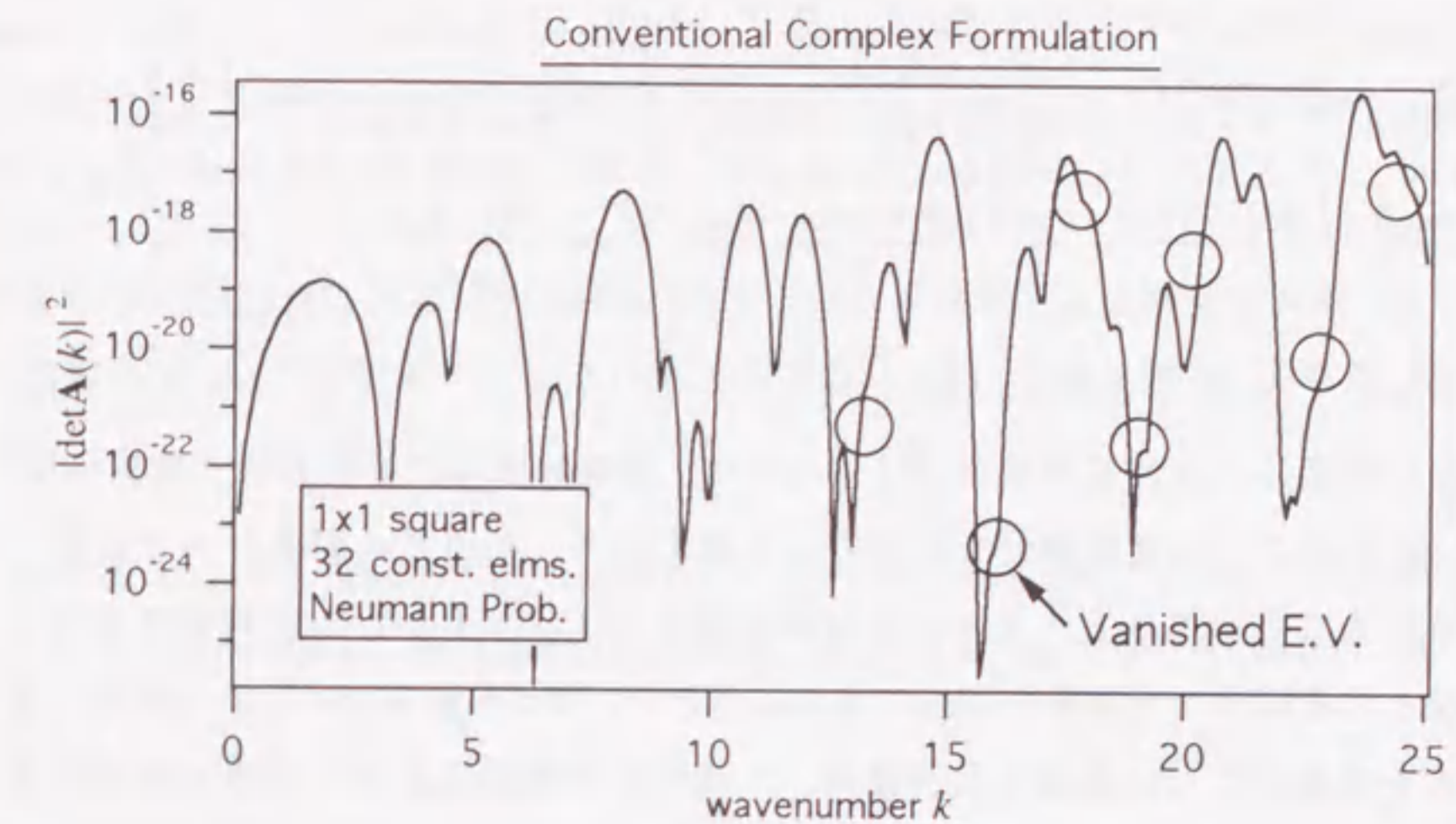


図 3.4: 一般的な複素定式の行列式と新しい複素定式の行列式

表 3.3: 各定式化による固有値問題の比較 (2次元問題)

Formulation type	Size of matrix	Structure of matrix	Definition of E.V.	Fict. E.V.	Degenerate E.V.
Conventional	$N \times N$	complex implicit func. of k	min. of $ \det \mathbf{A} $	Non	N.G.
M.R.M.	$N \times N$	real polynomial of k	min. or zero of $\det \mathbf{A}_{re}$	Exist	O.K.
New Complex	$2N \times 2N$	real polynomial of k	min. of $\det \tilde{\mathbf{A}}$	Non	O.K.

を整理すると、表 3.3 のようになる。

この節で提案した固有値問題 (3.88) によれば、複素数演算の必要がなく実数演算のみで、波数 k が変わるとに要素積分を計算する必要もなく、多項式の演算のみで係数マトリクスを計算することができる。また、多重相反定式のように見かけの固有値を含まず、固有値が重根となる場合でも解析が可能である。ただし、1つの波数 k に対する係数マトリクスの行列式を求めるために必要な計算量は、一般的な複素定式と同じで多重相反定式の4倍となる。この複素定式による固有値問題の多項式行列による表現を、“新しい複素定式”と呼ぶことにする。

以下の章では、多重相反定式の固有値問題と新しい複素定式の固有値問題を、多項式行列の特徴を活かし反復計算で解析する方法について説明する。

参考文献

- [1] Nowak, A.J. and Brebbia, C.A., Solving Helmholtz equation by boundary elements using the multiple reciprocity method, Computers and Experiments in Fluid Flow, Carlomagno, G.M. and Brebbia, C.A. eds., Comp. Mech. Pub./ Springer Ver., 265 - 270, 1989.
- [2] 森口, 宇田川, 一松編, 数学公式, 岩波書店, 1960.
- [3] Kamiya N., and Andoh E., A note on multiple reciprocity boundary element method : Neglect of domain term, Eng. Anal. Bound. Elms., **10**, 273-275, 1992.
- [4] Kamiya, N., Andoh, E., and Nogae, K., Eigenvalue analysis by boundary element method: New developments, Eng. Anal. Bound. Elms., **12**, 151-162, 1993.

- [5] Kamiya, N., and Andoh, E., Robust boundary element scheme for Helmholtz eigenvalue equation, Proc. BEM 13, Brebbia, C.A. and Gipson, G.S. eds., Comp. Mech. Pub. / Elsevier Appl. Sci. Pub., 839 - 850, 1991.
- [6] 神谷紀生, 安藤英司, 多重相反境界要素法の検討と応用について, 境界要素法論文集, **8**, 167 - 170, 1991.
- [7] 安藤英司, 野替一義, 神谷紀生, Helmholtz 方程式の境界要素法固有値解析 (第2報, 三次元問題と定式化の理論的検討), 日本機械学会論文集 (C編), 58巻, 554号, 2934-2938, 1992.
- [8] Kamiya, N., and Andoh, E., Multiple reciprocity boundary integral formulation for the three-dimensional Helmholtz equation, Bound. Elms. Abst. Newslett., **3**, 147-149, 1992.
- [9] Kamiya, N., and Andoh, E., A note on multiple reciprocity formulation for the Helmholtz equation, Comm. Num. Meth. Eng., **9**, 9-13, 1993.
- [10] 神谷紀生, 野替一義, 安藤英司, 極小値直接探索による, Helmholtz 方程式の境界要素法固有値解析, 境界要素法論文集, **11**, 41 - 45, 1994.
- [11] Kamiya, N., and Andoh, E., Relation between multiple reciprocity formulation and conventional formulation, Proc. BEM 14, Brebbia, C.A., Dominguez, J. and Paris, F. eds., Comp. Mech. Pub. / Elsevier Appl. Sci. Pub., 605 - 612, 1992.
- [12] 安藤英司, 神谷紀生, Helmholtz 方程式の多重相反境界要素法について, 構造工学における数値解析シンポジウム論文集, 16巻, 541 - 546, 1992.
- [13] 野替一義, 神谷紀生, 安藤英司, 新しい複素定式を用いた, 境界要素法による Helmholtz 方程式の固有値解析 (第1報, 定式化), 日本機械学会論文集 (C編), 60巻, 579号, 3854-3858, 1994.
- [14] Kamiya, N., Andoh, E. and Nogae, K., A new complex-valued formulation and eigenvalue analysis of the Helmholtz equation by boundary element method, International Journal of Numerical Methods in Engineering (Submitted).

- [15] Kamiya, N., Andoh, E. and Nogae, K., Iterative local minimum search for eigenvalue determination of the Helmholtz equation by boundary element method, Proc. International Conference on Computational Acoustics, 1995 (Submitted).

第 4 章

多重相反定式の固有値問題の解法

本章では，多重相反定式の係数マトリクスが多項式行列となることを利用して，固有値を決定するための方程式（固有値決定式）を Newton 法により解く方法を説明する [5~14]．

前章で説明したように，多重相反定式の固有値問題の係数マトリクスの行列式の波数 k に対する分布は，波数 k が固有値となるところで 0 クロスする場合と極小値となる場合が混在する．このため，反復計算で固有方程式 (2.58) を解くときには場合分けが必要となる．また，この定式化による固有値問題は見かけの固有値を含んでいる．しかし，係数マトリクスの計算には実数演算のみを必要とし，行列式の計算のためには一般的な複素定式の固有値問題の $1/4$ の計算量で済む．したがって，反復計算には工夫が必要であるが，少ない計算量で行列式を求めることができるため，効率のよい解析が可能である．ここで提案する方法によれば，一般的な複素定式による固有値解析の約 $1/5$ の計算時間で固有値を得ることができる．

4.1 境界値問題を利用した新しい固有値決定式

ここでは，多重相反定式の固有方程式 (2.58) を 0 クロスする場合と極小値となる場合で場合分けすることなく，Newton 法による反復計算で求める方法について説明する．

多重相反定式の固有値問題 (2.57) で固有値 $k = k_e$ が得られたとし，解 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_e \neq \mathbf{0}$ (固有ベクトル) を求めることを考える．式 (2.57) は同次方程式であるので，これを解いて得られるのは \boldsymbol{x} の各成分の比のみである．そこで式 (2.57) において \boldsymbol{x} のうち 1 つの成分に値を与えた後，残りの成分についての連立方程式を解けば解を得ることができる．式 (2.57) にお

いて、節点数を N とし \mathbf{x} の成分の l 番目に $x_l = 1$ を与え、右辺の 0 ベクトル \mathbf{o} の l 番目の成分を η と置き換える。ただし l は任意 ($1 \leq l \leq N$) である。この結果、式 (2.57) は次のようになる。

$$\mathbf{A} \begin{Bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{l-1} \\ 1 \\ x_{l+1} \\ \vdots \\ x_N \end{Bmatrix} = \mathbf{B} \begin{Bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \eta \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.1)$$

上式を移項し、 η について解くと次のようになる。

$$\eta = \frac{\det \mathbf{A}}{\det \mathbf{R}} \quad (4.2)$$

ここで、 \mathbf{R} は次のようなマトリクスである。

$$\mathbf{R} = [\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_{l-1}, -\mathbf{b}_l, \mathbf{a}_{l+1} \dots \mathbf{a}_N] \quad (4.3)$$

\mathbf{a}_i はマトリクス \mathbf{A} の i 番目の列ベクトルで、 \mathbf{b}_l はマトリクス \mathbf{B} の l 番目の列ベクトルである。したがって、 \mathbf{R} は \mathbf{A} の l 番目の列ベクトルを $-\mathbf{b}_l$ で置き換えたマトリクスである。ここで $\eta = 0$ 、即ち

$$(\eta \equiv) \frac{\det \mathbf{A}}{\det \mathbf{R}} = 0 \quad (4.4)$$

となれば、連立方程式 (4.1) は固有値問題 (2.57) と同一視できる。またこのとき式 (2.58) が成立し、したがって式 (2.57) は意味のある解をもつことができる。即ち、式 (4.4) を満たす k を得ることができればそれを固有値とすることができるので、上式を固有値決定式としてよい。

これを示すために、図 4.1 に k と η の関係を示す。この例では、図 3.3 と同じ問題について、同じ条件で解析を行っているが、図 3.3 とは違い、関数は全ての固有値のところで 0 クロスしていて、Newton 法を適用し易い関数分布となっている。全ての固有値で η が 0 クロスしているので、場合分けをすることなしに、 η に Newton 法を適用できる。図中、Fictitious E.V. で示したところは、前章で説明した見かけの固有値である。 η により固有値を求めれば、理論的には見かけの固有値を消去できると考えられが、実際には数値の丸め誤差などの影響で見かけの固有値を完全に消去することは困難である。この問題については後で詳しく述べる。

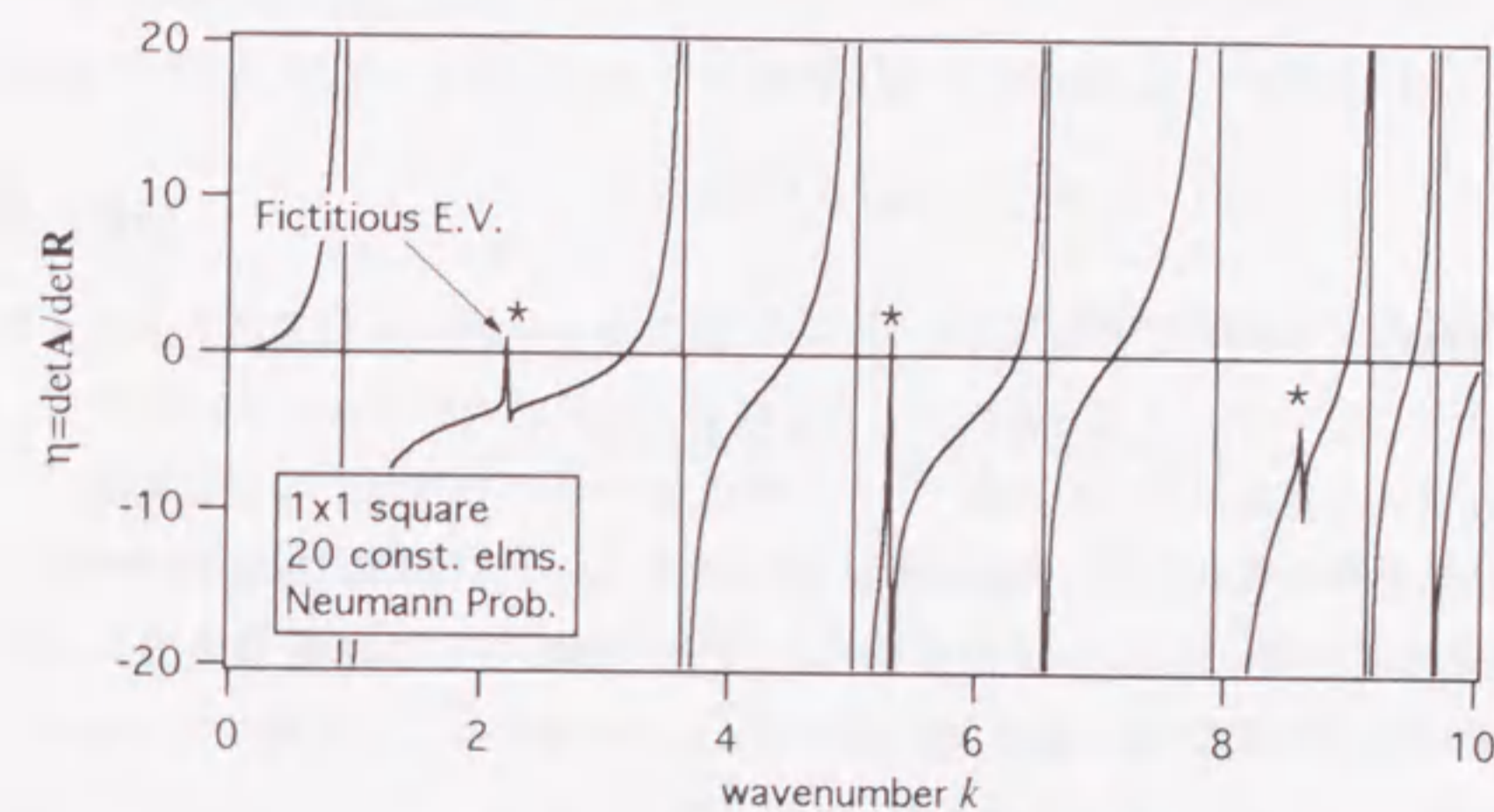


図 4.1: η の分布

4.2 多重相反定式の固有値問題の Newton 法反復解法

前節で導出した固有値決定式 (4.4) の 0 点が固有値に対応するが、これを η の分布から直接探索して求めたのでは、効率が悪い。ここでは、効率よく固有値を求めることを可能とするために、Yang の方法 [3] に基づき、固有値決定式に対する Newton 法の漸化式を与える。

固有値決定式 (4.4) に対して、Newton 法を適用すると

$$k_{s+1} = k_s - \eta(k_s) / \frac{d\eta}{dk}(k_s) \quad (s = 0, 1, 2, \dots) \quad (4.5)$$

となる。ただし s は s 番目の反復計算ステップでの値であることを示す添字である。右辺第 2 項に現れる $d\eta/dk$ は

$$\begin{aligned} \frac{d\eta}{dk}(k_s) &= \frac{d}{dk} \left(\frac{\det \mathbf{A}(k_s)}{\det \mathbf{R}(k_s)} \right) \\ &= \frac{\det \mathbf{A}(k_s)}{\det \mathbf{R}(k_s)} \left(\frac{\frac{d}{dk} \det \mathbf{A}(k_s)}{\det \mathbf{A}(k_s)} - \frac{\frac{d}{dk} \det \mathbf{R}(k_s)}{\det \mathbf{R}(k_s)} \right) \end{aligned} \quad (4.6)$$

である。Yang[3]によれば次のようになる。

$$\frac{d}{dk} \det \mathbf{A}(k_s) = \det \mathbf{A}(k_s) \operatorname{tr} \mathbf{E}_a(k_s) \quad (4.7)$$

ここで \mathbf{E}_a は、 $\mathbf{A}(k_s)$ (添字 a をつける) の LU 分解

$$\mathbf{P}_a \mathbf{A}(k_s) = \mathbf{L}_a(k_s) \mathbf{U}_a(k_s) \quad (4.8)$$

を用いて、次のように定義されるマトリクスである。

$$\mathbf{E}_a(k_s) = \mathbf{L}_a(k_s)^{-1} \mathbf{P}_a \frac{d}{dk} \mathbf{A}(k_s) \mathbf{U}_a(k_s)^{-1} \quad (4.9)$$

ただし \mathbf{P}_a は LU 分解の際のピボットリング (行の入れ替え) の情報を含む並べ替えマトリクス (Permutation Matrix) である。また作用素 tr はマトリクスの trace を意味する。 $\mathbf{R}(k_s)$ についても同様の手続きを行い (添字 r をつける)

$$\mathbf{P}_r \mathbf{R}(k_s) = \mathbf{L}_r(k_s) \mathbf{U}_r(k_s) \quad (4.10)$$

$$\mathbf{E}_r(k_s) = \mathbf{L}_r(k_s)^{-1} \mathbf{P}_r \frac{d}{dk} \mathbf{R}(k_s) \mathbf{U}_r(k_s)^{-1} \quad (4.11)$$

$$\frac{d}{dk} \det \mathbf{R}(k_s) = \det \mathbf{R}(k_s) \operatorname{tr} \mathbf{E}_r(k_s) \quad (4.12)$$

を得る。式 (4.6)~(4.12) を式 (4.5) に代入し変形すると

$$k_{s+1} = k_s - \frac{1}{\operatorname{tr} \mathbf{E}_a(k_s) - \operatorname{tr} \mathbf{E}_r(k_s)} \quad (s = 0, 1, 2, \dots) \quad (4.13)$$

となる。適当な初期推定値 k_0 と収束基準を与え、式 (4.13) を繰り返し、収束したところで固有値を得る。

4.3 解析例

ここでは、厳密解のある問題および他の方法で解が求められている 2 次元問題について前節で示した方法を用いて解析を行い、精度および計算時間について比較し、本法の妥当性を検討する。

固有値解析の条件についてはどの例題も同じとし、境界要素には要素上での関数値を一定値で近似する一定要素を用い、要素積分は Gauss-Legendre の 10 点積分を用いた。高次の基本解に対する係数マトリクスは、指定された解析範囲 (波数 k の範囲) の全てにわたり、係

数マトリクス \mathbf{H} , \mathbf{G} の精度が 10^{-12} まで保証できるところまでとっている。また、Newton 法の初期推定値については、解析範囲内で、 k を 0.1 刻みで変えて、式 (4.4) の η の分布を求め、 η が k 軸と交わる近似点での k を用いた。Newton 法の収束判定は、式 (4.13) の補正量 (右辺第 2 項) が 10^{-3} より小さくなるまでとした。

解析の精度

例題 4.1: 長方形領域の Neumann 問題 1×0.6 の 2 次元長方形領域で、境界上の全ての点で $q \equiv \partial u / \partial n = 0$ のように境界条件を与えたときの固有値を求める (図 A.1(a) 参照)。ただし、境界要素は、要素数 48 の一定要素を用い、固有値解析の範囲を $k = 0.1 \sim 8.0$ とした。高次の基本解に対応するマトリクスは、この場合、式 (2.55) で $m = 22$ までとることになる。表 4.1 に解析結果を厳密解とともに示す。表中の Rough Est. は初期推定値、Iter. は Newton 法の繰り返し数を意味する。この固有値問題の厳密解は、式 (A.1) によって与えられ、また表中のモード数 m , n は、式 (A.1) のそれに対応している。表に示すとおり、比較的少ない繰り返し数 (Iter. 3 ~ 4) で精度よく固有値を得ている。

例題 4.2: 長方形領域の混合境界条件固有値問題 0.9×0.4 の 2 次元長方形領域で、短い方の 1 辺で $u = 0$ とし、それ以外の境界では $\partial u / \partial n = 0$ と境界条件を与えたときの固有値を求める (図 A.1(c-1) 参照)。境界要素は、要素数 (a) 44 と (b) 26 の一定要素を用い、固有値解析の範囲を $k = 0.1 \sim 13.0$ とした。高次の基本解に対応するマトリクスは、この場合、式 (2.55) で $m = 27$ までとった。表 4.2 に解析結果を厳密解とともに示す。ただし、§印のついた固有値は、上で示した方法による初期推定値では、Newton 法が収束しなかったため、解析範囲をその近傍にしばり、 k の刻みを 0.05 としてあらためて初期推定値を決定し、2 回目の計算結果を示した。この固有値問題の厳密解は、式 (A.3) によって与えられ、表中の m , n は、式 (A.3) のそれに対応している。(a) では解析を 2 度に分ける結果となったが、(a)(b) どちらの要素分割もかなり高次のモードの固有値まで精度のよい結果を得た。また、要素分割の粗い (b) の場合では、最初に与えた初期推定値で収束を得ていることから、収束性と要素数との間には直接の関係がないと考えられる。

同表中に示した DRM は、Partridge ら [2] による 2 重相反法 (DRM) を用いた解析法による結果である。2.4.3 節でもふれたが、2 重相反法による固有値解析では、精度のよい固有値を得るためには内点の数を多くとるの必要があり、これが十分でない場合には精度のよい固有値を得ることができない (この引用例では境界要素数を 44、内点数を 24 としてい

表 4.1: 例題 4.1 の結果

m	n	Anal.Sol	Present	Rough Est.	Iter.
1	0	3.14	3.14	3.10	4
0	1	5.23	5.23	5.20	4
1	1	6.10	6.11	6.10	3
2	0	6.28	6.28	6.30	3

表 4.2: 例題 4.2 の結果

m	n	Anal.Sol.	DRM[2]	Present	
				44 elms.	26 elms.
1	0	1.74	1.74	1.74	1.74
2	0	5.23	5.24	5.24	5.25
0	1	8.04	-	8.06 ^s	8.06
3	0	8.72	8.80	8.73	8.74
2	1	9.43	-	9.45	9.45
3	1	11.74	-	11.75	11.76
4	0	12.21	12.56	12.22	12.25

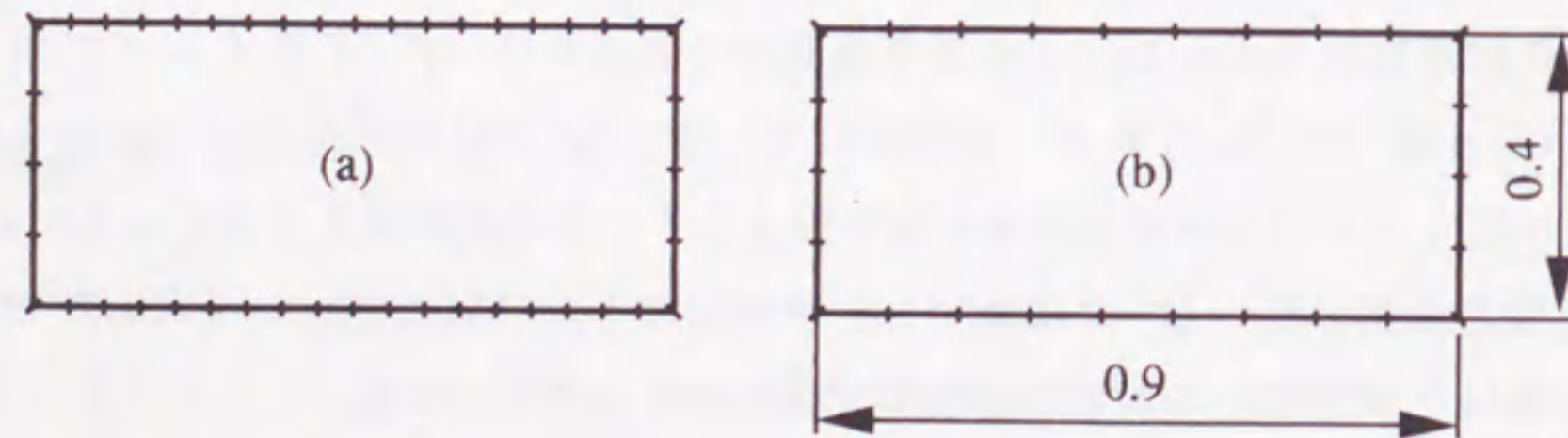


図 4.2: 例題 4.2 の境界要素分割

る)。この理由から、表中の空欄(-印)に対応する固有値が精度よく得られないと報告されている。一方、ここで提案した解析法では、要素数の少ない(b)の場合でも、全ての固有値で引用した2重相反法の解析例よりも精度よく結果を得ている。多重相反定式を用いた本解析法は、境界だけで解析を行っているにも関わらず、領域内にも点を考える2重相反法よりも、精度の点において優れているといえる。ただし、この例にみられるように、 η の分布の仕方によっては、反復計算が収束しないこともある。この理由については後で詳しく述べる。

計算の効率

次に解析の効率を検討するため、従来境界要素法で一般的に用いられてきた、複素定式による固有値解析と、ここで提案した方法とを比較する。ただし、ここでは見かけの固有値と、列ベクトルの選び方で現れない固有値がないことを前提とする。

例題 4.3: 計算時間の比較 解析の対象となる領域の形状および境界条件は、例題 2 と同じとし、解析の範囲を $k = 0.1 \sim 5.0$ とする。境界条件とそのほかの条件は、上の 2 つの例題

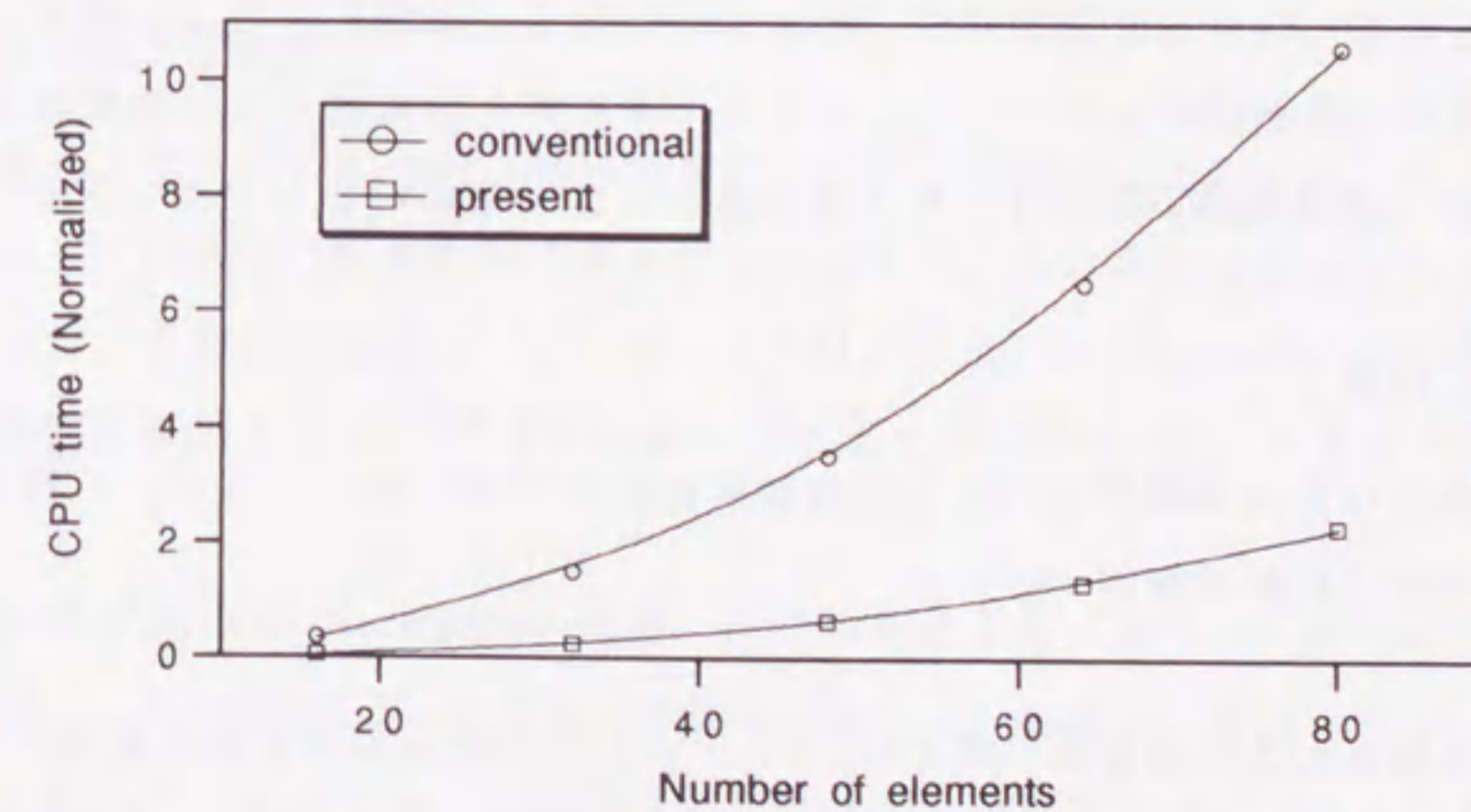


図 4.3: 計算時間の比較 (例題 4.3)

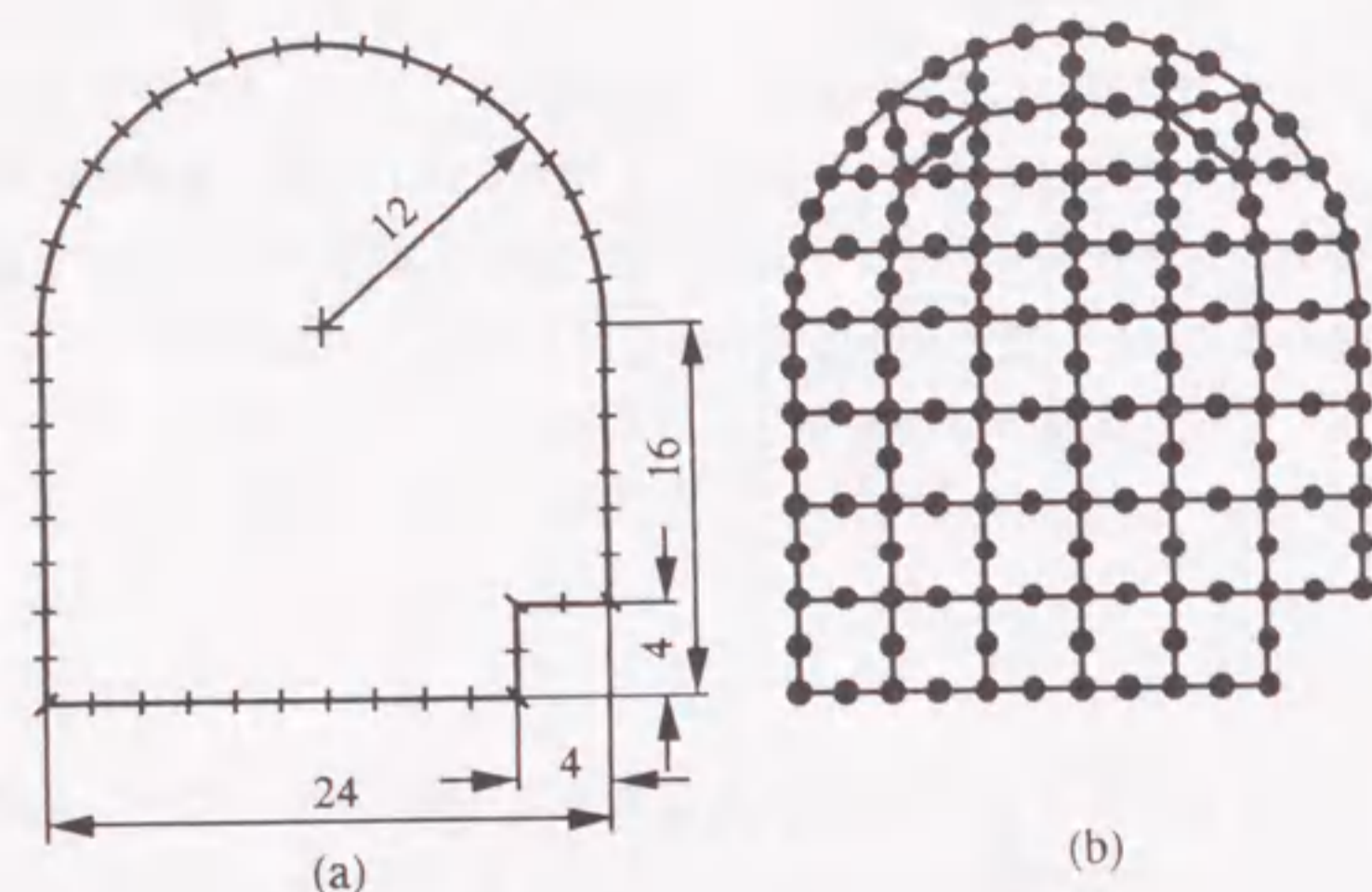


図 4.4: 例題 4.4 の境界要素と有限要素: (a) 寸法 (ft) と境界要素分割, (b) 有限要素分割

と同じである。要素数 N を 16, 32, 48, 64, 80 と変えて複素定式による解析と計算時間を比較した。解析を行った結果を図 4.3 に示す。なお、複素定式による解析 [1] では、2.1 節で述べたように、未知数ベクトルに掛かる係数マトリクスのみで解析を行っているが、多重相反定式による例では、0 ベクトルに掛かる係数マトリクスについても全てを計算している。この場合、解析の範囲に存在する固有値は、 $k = \pi$ のただ 1 つである。したがって、本解析法では、1 つの固有値に対する計算時間が、要素数に関係なく複素定式による解析法の約 $1/5$ となり、効率の改善が認められた。したがって、より多く固有値を含む波数の範囲を解析する場合には、計算時間の差はさらに大きなものとなって現れると予想できる。

複雑な境界形状の問題

つぎに、より複雑な形状の解析を行い、固有値解析において一般によく用いられる、有限要素法による結果と比較し検討する。

例題 4.4: トンネル断面形状の固有値 図 4.4 に示すトンネルの断面形状の固有値解析を行った。同図中に、形状寸法 (ft) ならびに境界要素分割 (要素数 48 の一定要素) と有限要素分割を示す。この場合、解析に際しては、領域の代表寸法 (高さ) が 1 となるように、問題をスケールしている。このような条件のもとで、解析範囲を $k = 0.1 \sim 9.0$ として解析を行っ

表 4.3: 例題 4.4 の結果 (in Hz)

Present	FEM[4]
22.01	22.00
25.35	25.35
36.73	36.65
41.04	41.14
48.48	48.71
53.34	53.38
55.55	55.54

た。その他の条件はこれまでの解析例と同じである。表 4.3 に、解析結果を Burnett[4] の有限要素法による解析結果と比較して示す。ただし、音速 $c = 1127 \text{ ft/sec} (= 343.51 \text{ m/sec})$ として、固有値を固有周波数に変換してある。どの固有値も有限要素法による解とよく一致している。この有限要素法による例では、解析の精度を確保するために、2 次要素 (要素数 45, 節点数 158) を用いている。一方、多重相反定式による解析では、この例でも単純な一定要素を用いている。このため、有限要素法の場合に比べ、少ない労力で入力データの作成が可能である。特に、3 次元問題では、入力データの作成に要する労力が解析全体に占める割合が大きく、解析対象を境界上に限定できるのは、大きな利点となる。

3 次元問題への応用

提案した方法を、3 次元の解析解が知られている問題に応用して、本法の適用可能性を調べた [6, 11~14]。要素の形状は平面四角形とし、その重心を節点とする一定要素を用いた。なお、固有値のおおよその目安は k の刻みを 0.1 として η の概略の 0 点から求め、その値を初期推定値として 10^{-3} まで正確に求まるまで Newton 法による反復計算を行った。

例題 4.6: 直方体の Neumann 問題 最初の例として、図 4.5 に示すような各辺の長さが $L_x = 0.6$, $L_y = 0.8$, $L_z = 1.0$ の直方体領域をとりあげる。境界条件は、全ての境界面上で $q \equiv \partial u / \partial n = 0$ とする。このとき、固有値の解析解はつぎのようになる。

$$k_e = \pi \sqrt{\left(\frac{l}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{s}{L_y}\right)^2 + \left(\frac{t}{L_z}\right)^2} \quad (l, s, t = 0, 1, 2, \dots) \quad (4.14)$$

ここで, l, s, t はそれぞれ x, y, z 方向のモード数である. 図のように各境界面を 0.2×0.2 の正方形パッチ (合計 94 個) によって境界要素分割して得られる結果を, 最初の 4 つの固有値について表 4.4 に示す. 初期推定値は Rough Est. として示され, 反復回数 Iter. は 4 であった. 要素分割はかなり粗いが, 表に示すように 2% 以下の誤差で固有値が計算されている.

例題 4.7: 直方体の 3 次元混合境界値問題 第 2 の例として, 形状と寸法は先の例と同じであるが, z 軸に垂直な 1 つの面だけで $u=0$, 他は $q=0$ の混合境界条件について要素分割をかえて計算を行った (図 4.6). このときの固有値の解析解はつぎのようになる.

$$k_e = \pi \sqrt{\left(\frac{l}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{s}{L_y}\right)^2 + \left(\frac{t+1/2}{L_z}\right)^2} \quad (l, s, t = 0, 1, 2, \dots) \quad (4.15)$$

境界要素分割は 1 つの面を 4 個のパッチに分け, 合計 24 個の長方形一定要素を用いた場合 (図 4.6(a)) と先の例題における正方形一定要素 (合計 94 個) を用いた場合 (図 4.6(b)) であり, 結果を表 4.5 に示す. きわめて粗い分割である 24 要素で最大誤差 5%, また 94 要素で最大誤差 2% で固有値を求めることができた.

表 4.4: 3 次元 Neumann 問題の厳密解と数値解

l	s	t	Anal.Sol.	Present	Error(%)	Rough Est.	Iter.
0	0	1	3.14	3.18	1.3	3.20	4
0	1	0	3.93	3.98	1.3	4.00	4
0	1	1	5.03	5.12	1.8	5.10	4
1	0	0	5.24	5.34	1.9	5.30	4

表 4.5: 3 次元混合境界値問題の厳密解と数値解

l	s	t	Anal.Sol.	Present 94 elms.		Present 24 elms.	
				Num.Sol.	Error(%)	Num.Sol.	Error(%)
0	0	0	1.57	1.59	1.3	1.64	4.5
0	1	0	4.23	4.28	1.2	4.44	5.0
0	0	1	4.71	4.71	0.0	4.76	1.1
1	0	0	5.47	5.58	2.0	5.60	2.4

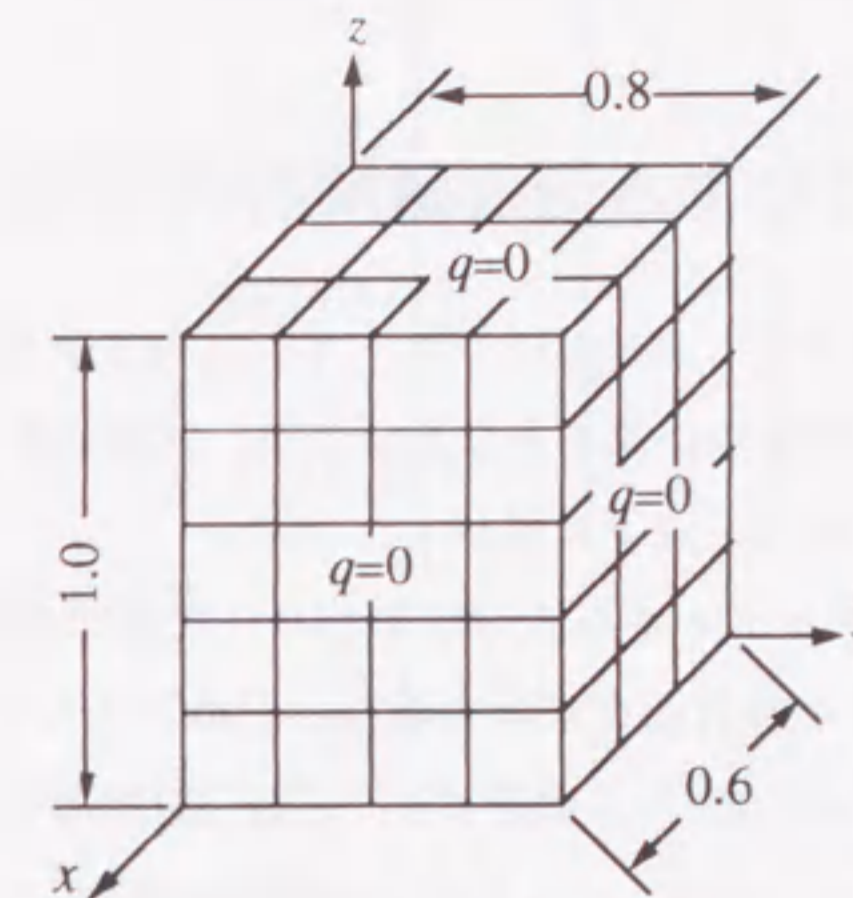
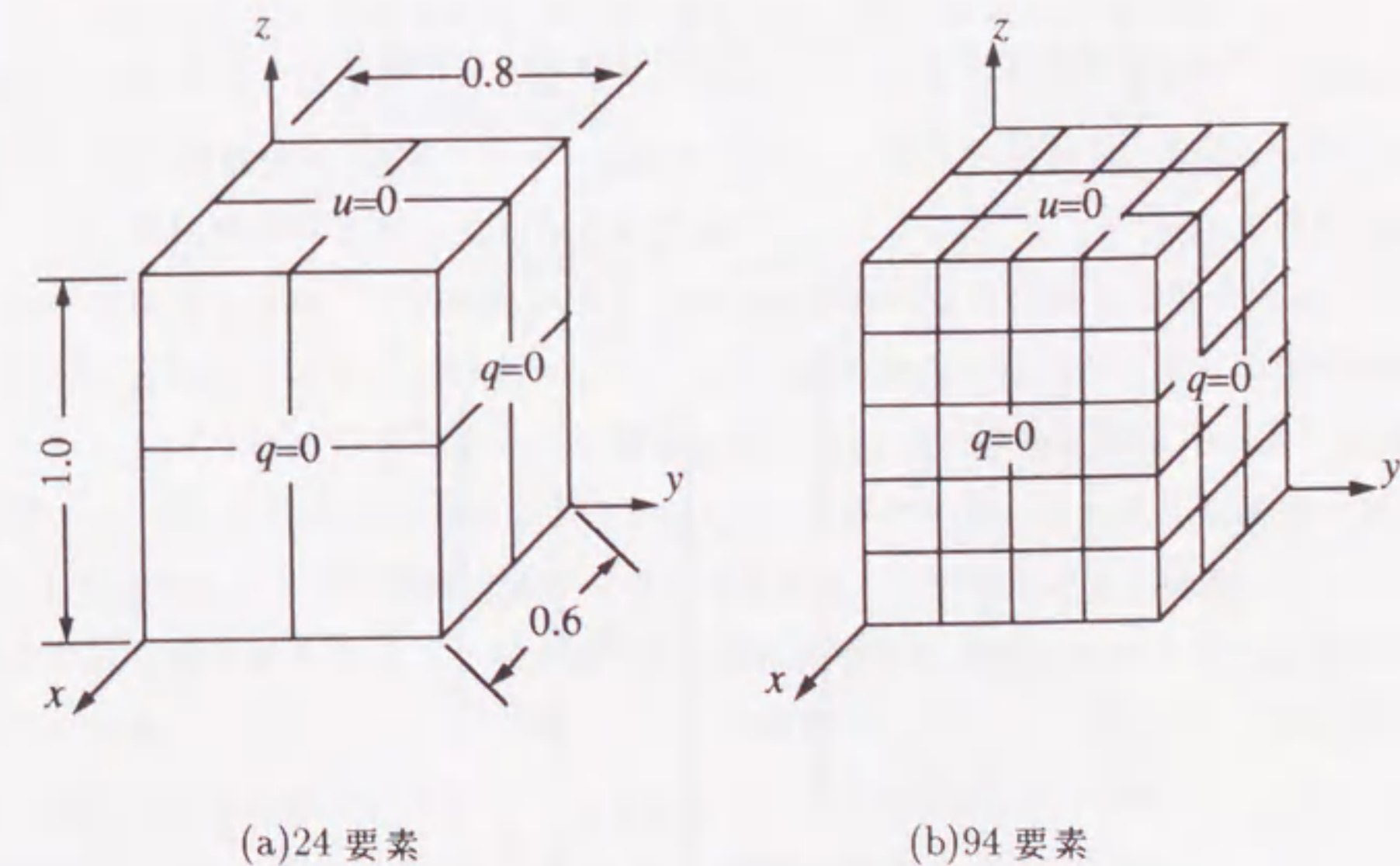


図 4.5: 3 次元 Neumann 問題 (94 要素)



(a) 24 要素

(b) 94 要素

図 4.6: 3 次元混合境界値問題

これらの解析は、EWS 上で行ったのであまり多くの要素をとっていないが、これらの結果から、本方法で3次元の固有値解析を行いうることが示されたものと考えられる。さらに精度を向上させ、また実際例に応用するためには要素を多くする必要がある。

4.4 多重相反定式による固有値解析の問題点

前節の例題中に示したように、式(4.3)でマトリクス R を求める際に入れ換える列ベクトルの選び方によっては、固有値が得られなかったり、反復計算が収束しないことがある。この点が本法の難点で、原因を以下に述べる。

式(4.1)において、未知数ベクトルの成分を1とおいた点での関数の値が(固有ベクトル x_e の成分が)0となるモードの固有値を求める場合、どのようなことが起こるだろうか。このような固有値の付近でも、当然 η は0に近づく。波数 k を変えて η の分布を求めるとき、固有値に対応する波数 k のまわりでは、 η は非常に小さく0に近い。仮にこの時の η を

$$\eta = \epsilon_\eta \quad (4.16)$$

とおく。一方このような η が得られる波数 k に対応するベクトル x は、近似的に固有ベクトルとすることができる。

$$x \simeq x_e (\neq 0) \quad (4.17)$$

このとき、 x_e の η に対応する成分 x_l が、 η と同じ程度小さい値をとるとする。

$$\begin{aligned} x_l &= \epsilon_x \\ O(\epsilon_x) &\simeq O(\epsilon_\eta) \end{aligned} \quad (4.18)$$

したがって、

$$A \begin{Bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{l-1} \\ \epsilon_x \\ x_{l+1} \\ \vdots \\ x_N \end{Bmatrix} = B \begin{Bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \epsilon_\eta \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.19)$$

ところが、式(4.1)において、 x_l を1とおいているので、

$$A \begin{Bmatrix} x_1/\epsilon_x \\ \vdots \\ x_{l-1}/\epsilon_x \\ 1 \\ x_{l+1}/\epsilon_x \\ \vdots \\ x_N/\epsilon_x \end{Bmatrix} = B \begin{Bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \epsilon_\eta/\epsilon_x \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.20)$$

となる。ここで、式(4.18)により、

$$\epsilon_\eta/\epsilon_x \gg 0 \quad (4.21)$$

となる。上式の左辺を η と見て計算を行うことになるので、このような場合では、 $\eta \neq 0$ となり、固有値を見つけることができない。

このことを解析例を用いて説明する。問題を 1×1 の正方形領域のNeumann問題とする。境界を要素数44の等分割の一定要素により分割する。要素分割を図4.7に示す。式(4.3)で入れ換える列ベクトルを、正方形の1辺の中点の節点に対応する $-b_l$ に選ぶ($l=5$)。このとき η は、固有ベクトルの節点 l に対応する成分に相当する。この問題の固有値は解析的に求めることができるが、その値は表3.2を参照していただきたい。このような条件で、波数 k が0~6での η の分布を計算したものを図4.8に示す。図からわかるように、モード(1,1)の固有値4.44が現れておらず、この場合この固有値を求めることができない。このモード(1,1)での、固有関数分布(固有モード)を図4.9に示す。モード図から、節点 $l=5$ に対応するところで関数値が0となっていることがわかる。このように、式(4.3)で R を計算するときに入れ換える列ベクトルの対応する節点での固有関数の値が0となると、 η の分布からは固有値を見つけることができない。また、辺の中点の節点のとなりの点に対応する列ベクトルを入れ換える列ベクトルに選ぶと($l=4$)、 η の分布は図4.10のようになる。この場合、モード(1,1)の固有値のまわりで η は急激な変化する。このような関数に対してNewton法を適用すると、初期推定値からの収束性が悪く、初期推定値の精度によっては反復計算が発散し固有値を得ることができない。以上のような問題点を除くには、経験則ではあるが入れ換える列ベクトルを、領域のかどに隣接する節点か、境界条件の変わり目に隣接する節点に選ぶと良い。かどのとなりの節点に対応する列ベクトルを選ぶと($l=0$)、 η の分布は図4.11のようになる。この場合では、固有値が消えることはなく、反復計算も収

束し易い関数分布となっている。

また、数値計算の丸め誤差により、見かけの固有値のまわりで η の分布が急激な変化をし、結果として、 $\eta=0$ の点が現れる。これは、図4.1の k と η の関係に見ることができる。 k が見かけの固有値となるところのまわりで η が急激に変化し、 η が0となっていることがわかる。これは、式(4.4)で離散化誤差や数値の丸め誤差により、分子と分母の0点がわずかにずれることによるものである。理論的には、分子と分母の0点は一致し、見かけの固有値は消去されると考えられるが、数値計算上は完全に取り除くことができない。

4.5 まとめ

多重相反定式のNewton法固有値解析には上に述べたような問題点がある。しかし、この解析法の利点は、その解析効率の良さにある。従来の一般的な複素定式による固有値問題で、固有値の直接探索により固有値を求める方法に比べて約1/5の時間で固有値を得ることができる。したがって、初期推定値の決定は次の節でも説明する一般的な複素定式の $f(k)$ の分布から求め、Newton法による反復計算を多重相反定式を用いて行うことで、この問題は解決できる。このような方法によれば、固有値を見逃すこともなく、見かけの固有値と真の固有値の判別に悩まされることもない。

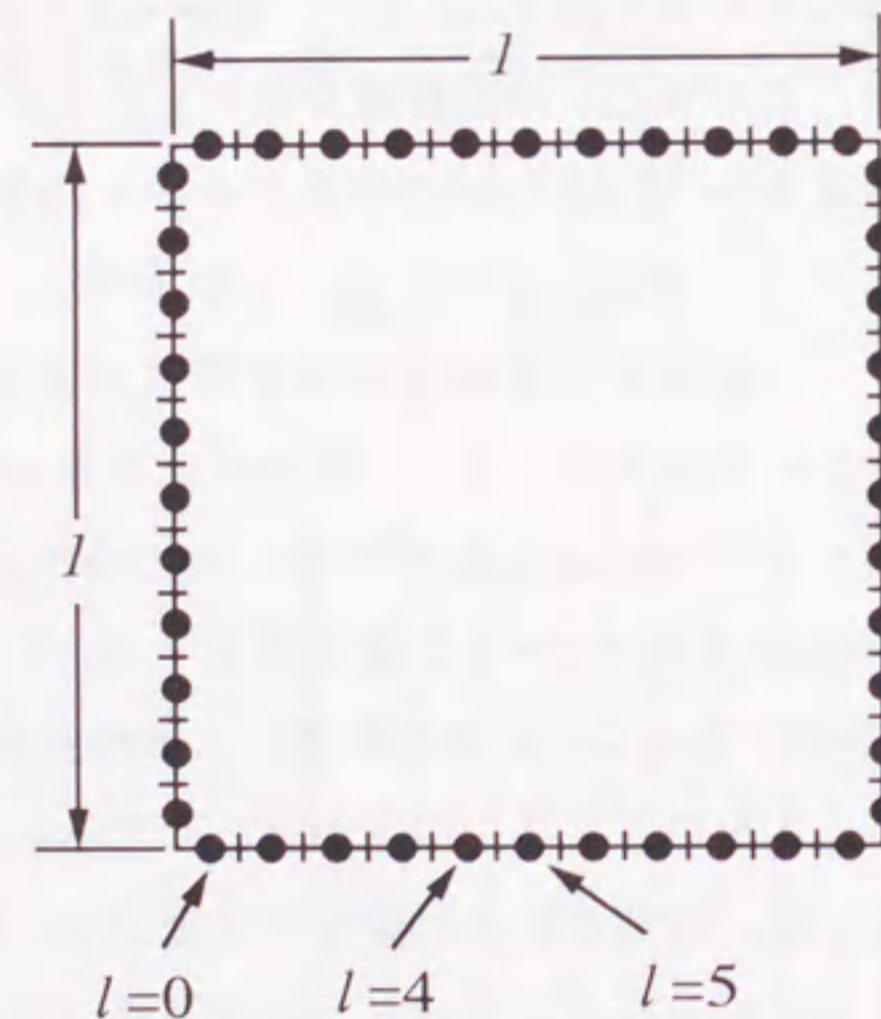


図4.7: 境界要素分割と交換する列ベクトルに対応する節点

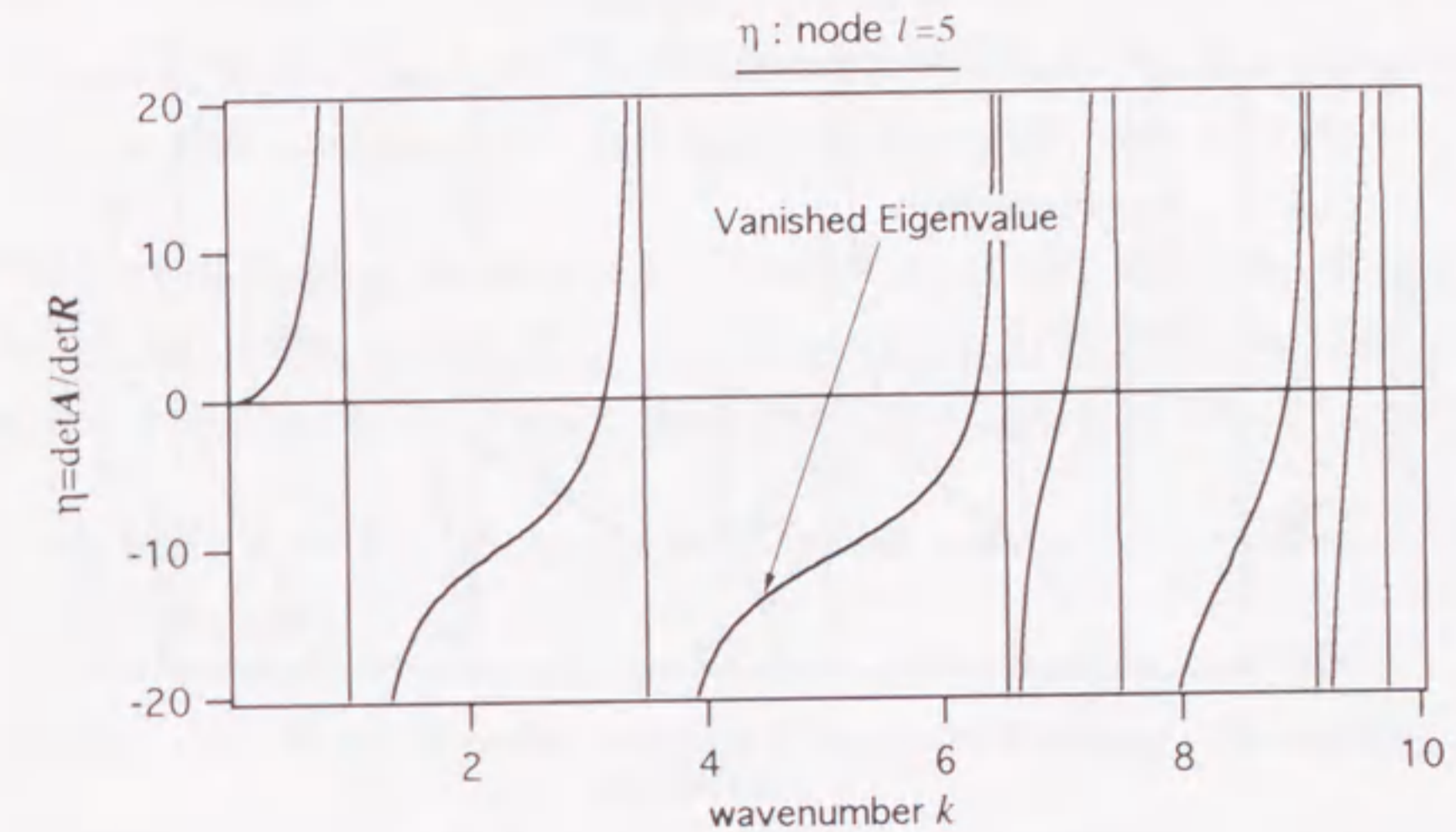


図4.8: モード(1,1)の節の節点 $l=5$ に対する η

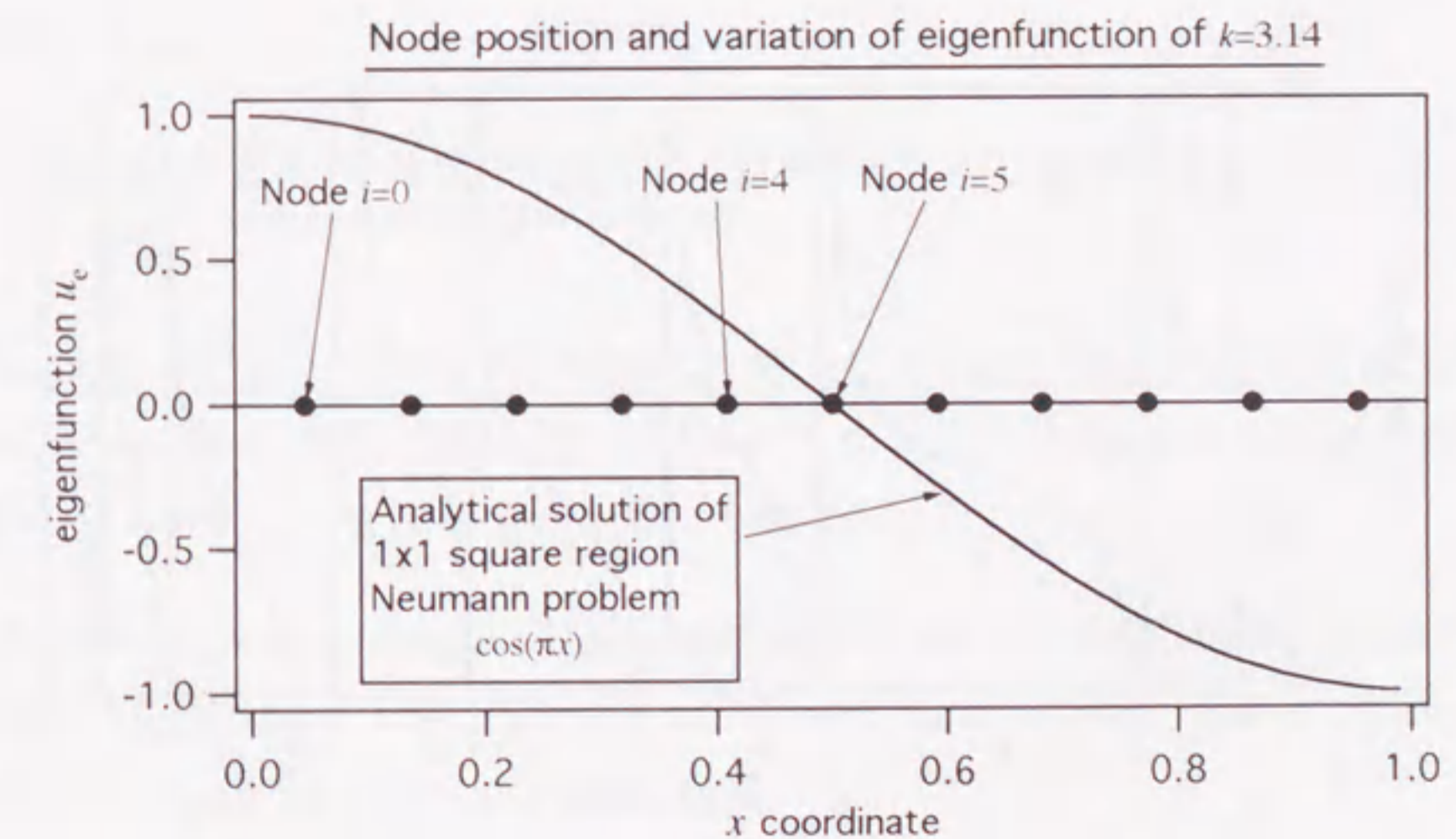
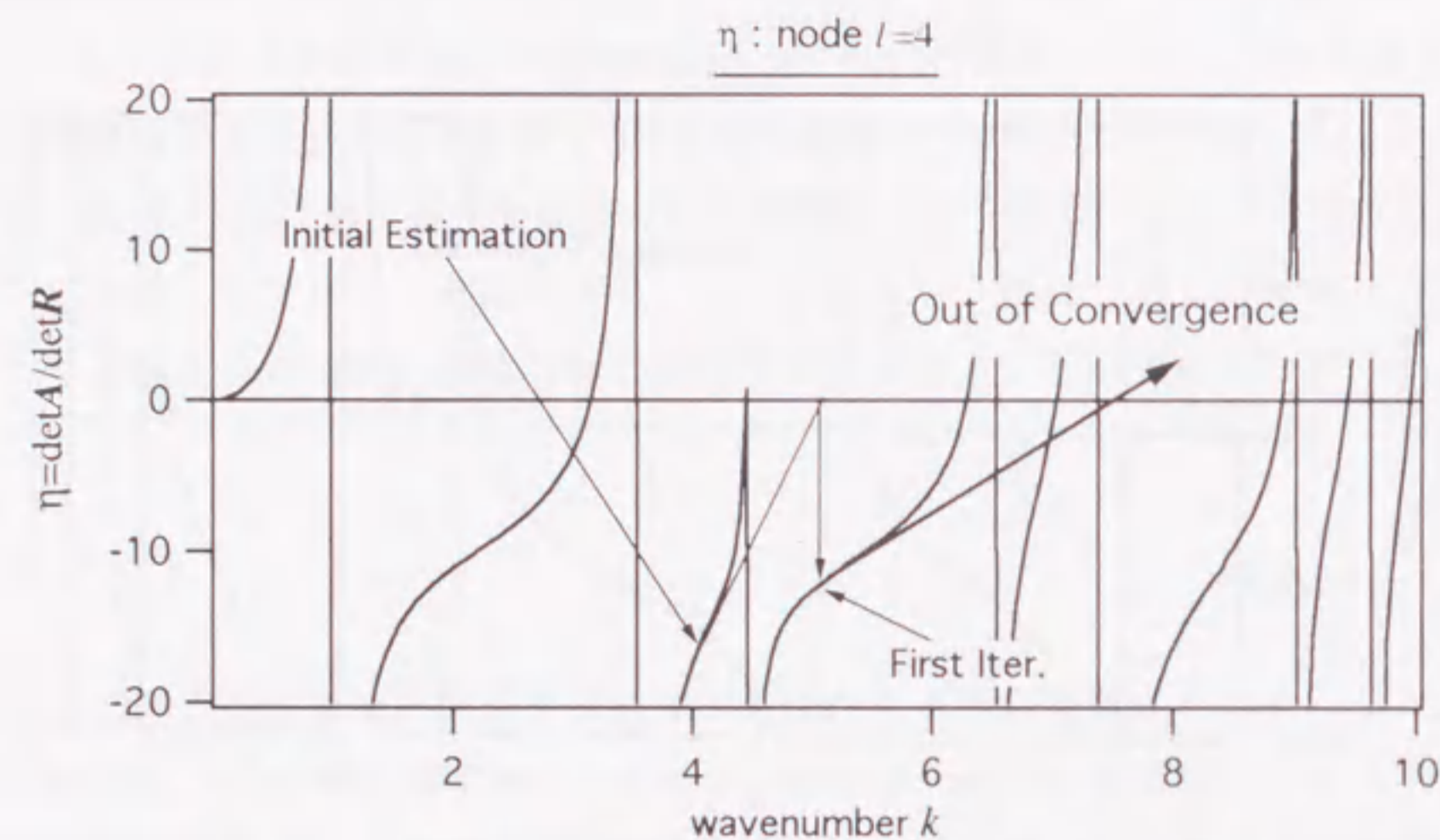
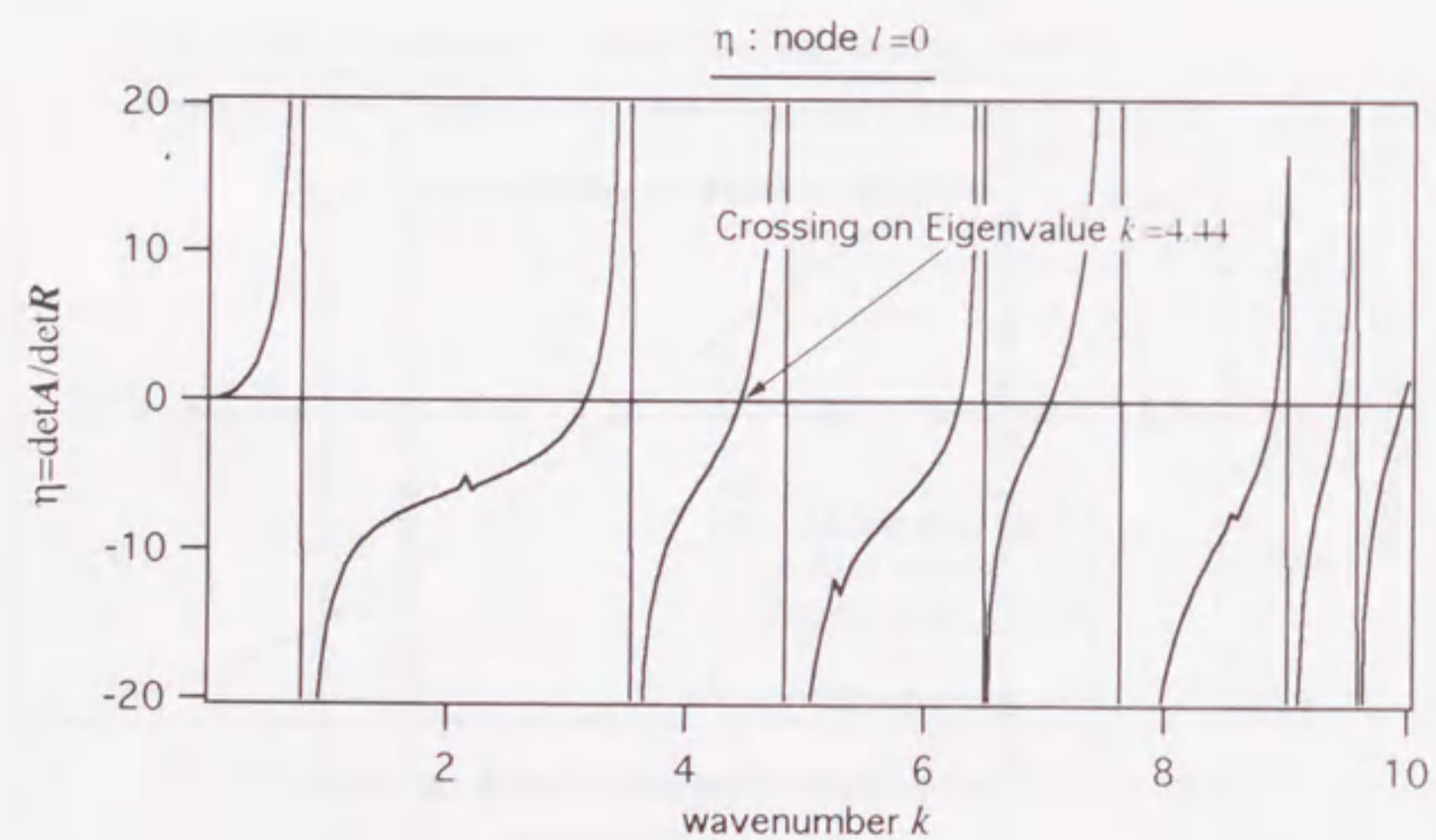


図4.9: モード(1,1)の節点 $l=0, 4, 5$ のある辺の上での固有モード

図 4.10: モード (1,1) の節のとなりの節点 $l=4$ に対する η 図 4.11: 領域のかどに隣接する節点 $l=0$ に対する η

参考文献

- [1] Niwa, Y., Kobayashi, S., and Kitahara, M., Determination of Eigenvalues by Boundary Element Methods, Chapter 7, Developments in Boundary Element Methods, Vol. 2, Banerjee, P.K., and Shaw, R. eds., Applied Science Pub., 143-176, 1982.
- [2] Partridge, P.W., and Brebbia, C.A., The dual reciprocity boundary element method for the Helmholtz equation, Proc. Int. Bound. Elms. Symp. Brebbia, C.A. and Chaudouet - Miranda, A. eds., Comp. Mech. Pub. / Springer Ver., 543 - 555, 1990.
- [3] Yang, W.H., A method for eigenvalues of sparse λ -matrices, Int. J. Num. Meth. Eng., **19**, 943-948, 1983.
- [4] Burnett, D.S., Finite Element Analysis, Chapter 14, Addison - Wesley Pub., 1987.
- [5] 安藤英司, 神谷紀生, Helmholtz 方程式の境界要素法固有値解析, 日本機械学会論文集 (C 編), 57 巻, 543 号, 3457-3462, 1991.
- [6] 安藤英司, 野替一義, 神谷紀生, Helmholtz 方程式の境界要素法固有値解析 (第 2 報, 三次元問題と定式化の理論的検討), 日本機械学会論文集 (C 編), 58 巻, 554 号, 2934 - 2938, 1992.
- [7] 神谷紀生, 安藤英司, 境界要素法による固有値解析 (2), 機械の研究, 44 巻, 8 号, 849 - 854, 1992.
- [8] Kamiya, N., and Andoh, E., Robust boundary element scheme for Helmholtz eigenvalue equation, Proc. BEM 13, Brebbia, C.A. and Gipson, G.S. eds., Comp. Mech. Pub. / Elsevier Appl. Sci. Pub., 839 - 850, 1991.
- [9] Kamiya, N., and Andoh, E., Eigenvalue analysis by boundary element method, Proc. BEM 14, Brebbia, C.A., Dominguez, J. and Paris, F. eds., Comp. Mech. Pub. / Elsevier Appl. Sci. Pub., 673 - 690, 1992.
- [10] Kamiya, N., and Andoh, E., Helmholtz eigenvalue analysis by boundary element method, J. Sound Vib., **160**, 279-287, 1993.

- [11] Kamiya, N., Andoh, E. and Nogae, K., Eigenvalue analysis by boundary elements method: New developments, Eng. Anal. Bound. Elms., **12**, 151-162, 1993.
- [12] Kamiya, N., and Andoh, E., Multiple reciprocity boundary integral formulation for the three-dimensional Helmholtz equation, Bound. Elms. Abst. Newslett., **3**, 147-149, 1992.
- [13] Kamiya, N., Andoh, E., and Nogae, K., Three-dimensional eigenvalue analysis of the Helmholtz equation by multiple reciprocity boundary element method, Adv. Eng. Software, **16**, 203-207, 1993.
- [14] Kamiya, N., Andoh, E. and Nogae, K., Application to Helmholtz eigenvalue problem Chapter 5, The Multiple Reciprocity Boundary Element Method, Computational Mechanics Publications, 1994.

第 5 章

新しい複素定式による固有値問題の解法

前章の解析例によって、多重相反定式では、見かけの固有値も完全には消去することができず、固有値決定式を定義するときに必要な係数マトリクス of 列ベクトルの入れ換えが固有値の決定に影響し、入れ換える列ベクトルによって一部の固有値が得られなかったり、収束が遅くなったりすることがあることがわかった。

しかし、ここで提案する新しい複素定式の固有値問題の反復解法によれば、見かけの固有値は現れない。また、列ベクトルの入れ替えも不要であることから、固有値が得られないようなことは起こらず、全ての固有値が正しく得られる。また、固有値は行列式の極小値のまわりで Newton 法を用いて決定する。前節の多重相反定式による固有値問題の Newton 法反復解法との組み合わせも考えられるが、ここでは新しい複素定式の固有値問題のみから固有値を求める方法を説明する [1]。

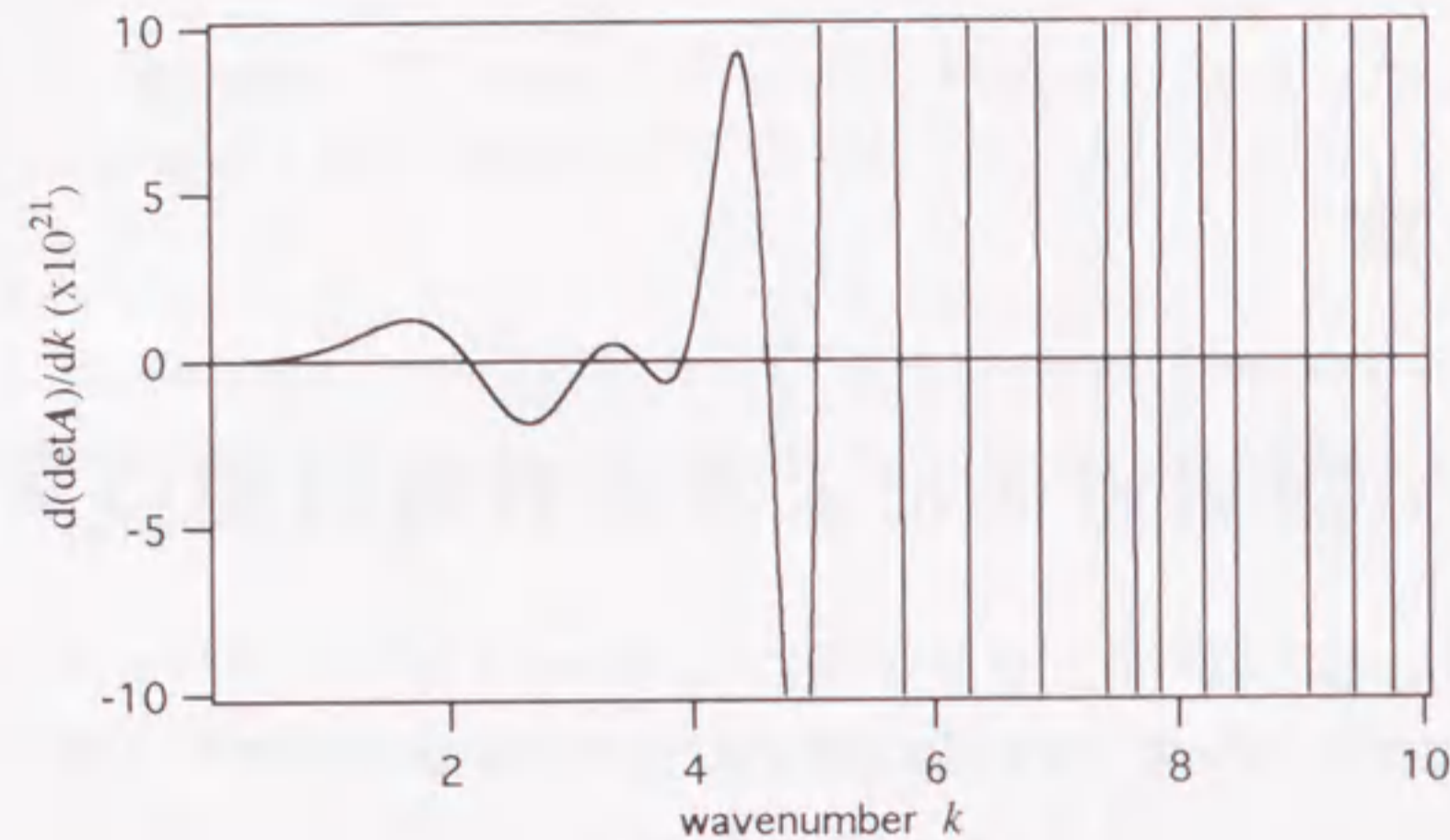
5.1 行列式の極小値まわりの Newton 法

図 3.4 からわかるように、 $\det \tilde{\mathbf{A}}(k)$ の分布は固有値のところで極小値をとる。したがって、 $\det \tilde{\mathbf{A}}(k)$ は k 軸と交わることがなく、0 点を求めにくい形になっている。そこで、 $\det \tilde{\mathbf{A}}$ の導関数の 0 点、つまり、

$$f(k) \equiv \frac{d}{dk} \det \tilde{\mathbf{A}}(k) = 0 \quad (5.1)$$

を求め、

$$\frac{d^2}{dk^2} \det \tilde{\mathbf{A}} \geq 0 \quad (5.2)$$

図 5.1: 新しい複素定式の固有値決定式 $f(k)$ の分布; 1×0.8 長方形領域

という条件を与えて極小値を求める。式 (5.1), (5.2) を満足する点が $\det \tilde{\mathbf{A}}(k)$ の極小値である。はじめに $f(k)$ の k に対する分布を求め、 $f(k) = 0$ に近い点で式 (5.2) を満たす k を初期推定値とし、Newton 法によって固有値を決定する。

そこで、式 (5.1) に Newton 法を適用すると漸化式は

$$k_{s+1} = k_s - f(k_s) / \frac{d}{dk} f(k_s) \quad (5.3)$$

となる。ただし、 s は s 番目の反復計算ステップ値であることを示す添字である。右辺第 2 項に現れる f および df/dk は次のように計算される。

$$f(k) = \det \tilde{\mathbf{A}}(k) \cdot \text{tr} \{ \tilde{\mathbf{A}}^{-1}(k) \cdot \frac{d}{dk} \tilde{\mathbf{A}}(k) \} \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{df(k)}{dk} &= \det \tilde{\mathbf{A}}(k) \cdot \left(\left[\text{tr} \{ \tilde{\mathbf{A}}^{-1}(k) \cdot \frac{d}{dk} \tilde{\mathbf{A}}(k) \} \right]^2 \right. \\ &\quad \left. + \text{tr} \left\{ \frac{d}{dk} \tilde{\mathbf{A}}^{-1}(k) \cdot \frac{d}{dk} \tilde{\mathbf{A}}(k) + \tilde{\mathbf{A}}^{-1}(k) \cdot \frac{d^2}{dk^2} \tilde{\mathbf{A}}(k) \right\} \right) \end{aligned} \quad (5.5)$$

ただし、

$$\frac{d}{dk} \tilde{\mathbf{A}}^{-1}(k) = -\tilde{\mathbf{A}}^{-1}(k) \cdot \left\{ \frac{d}{dk} \tilde{\mathbf{A}}(k) \right\} \cdot \tilde{\mathbf{A}}^{-1}(k) \quad (5.6)$$

式 (5.4), (5.5) を式 (5.1) に代入して、

$$\begin{aligned} k_{s+1} &= k_s - \text{tr} \{ \tilde{\mathbf{A}}^{-1}(k_s) \cdot \frac{d}{dk} \tilde{\mathbf{A}}(k_s) \} / \left(\left[\text{tr} \{ \tilde{\mathbf{A}}^{-1}(k_s) \cdot \frac{d}{dk} \tilde{\mathbf{A}}(k_s) \} \right]^2 \right. \\ &\quad \left. + \text{tr} \left\{ \frac{d}{dk} \tilde{\mathbf{A}}^{-1}(k_s) \cdot \frac{d}{dk} \tilde{\mathbf{A}}(k_s) + \tilde{\mathbf{A}}^{-1}(k_s) \cdot \frac{d^2}{dk^2} \tilde{\mathbf{A}}(k_s) \right\} \right) \end{aligned} \quad (5.7)$$

となる。また、後で示す例題について $f(k)$ の分布は k 軸と交わっていて、図 5.1 のように Newton 法を適用し易い形になっている。

5.2 解析例

解析の精度と効率

例題 5.1: 長方形領域の Neumann 問題 1.0×0.8 の長方形領域において境界条件を全ての境界で $q \equiv \partial u / \partial n = 0$ と与えた場合について、解析範囲を $k = 0.1 \sim 10.0$ として解析を行った。解析には一定要素を用い、行列 \mathbf{H} , \mathbf{G} の多項式の次数は成分の絶対値の最大値が解析範囲の上限で 10^{-12} より小さくなるまでとった。均一 18 要素と 36 要素を用いた結果を前章で説明した多重相反定式による固有値解析法による結果と比較して表 5.1 に示す。また、計算時間の比較を表 5.2 に示す。なお、表 5.1 の ‘-’ 印は解が収束しなかったことを示す。ただし、多重相反定式の場合も入れ換える列ベクトルを適切に選べば、すべての解を求めることができる。表 5.1 からわかるように、本法では精度良くすべての解を求めることができた。また、計算時間の比較では、本法の方がかなり効率が悪いことがわかる。

解析解の無い問題

例題 5.2: 特異な境界条件を持つ長方形 例題 5.1 と同じ形状の長方形領域に、特異な境界条件を与えたものを一定要素を用い、解析範囲を $k = 0.1 \sim 10.0$ として、 $\text{Max}(e_i^s)$ が 10^{-3} より小さくなるまで解析を行った。解析対象の領域形状と境界条件を図 5.2 に示す。行列 \mathbf{H}_j , \mathbf{G}_j の次数は成分の絶対値の最大値が解析範囲の上限で 10^{-12} より小さくなるまでとった。均一 72 要素のものについての解析結果を多重相反定式と比較して表 5.3 に示す。厳密解がないため、はっきりしたことはいえないが、本法を用いた場合はすべての解をきちんと求めているのに対し、多重相反定式の場合は 9.55 に相当する値を求めることができなかった。

表 5.1: 例題 5.1 の結果

m	n	Anal.Sol.	18elms		36elms	
			MRM	Present	MRM	Present
1	0	3.14	3.14	3.15	3.14	3.14
0	1	3.93	3.94	3.94	3.93	3.93
1	1	5.03	5.06	5.05	5.04	5.03
2	0	6.28	6.31	6.31	6.29	6.29
2	1	7.41	-	7.46	7.42	7.42
0	2	7.85	7.89	7.88	7.86	7.86
1	2	8.46	8.54	8.52	8.48	8.47
3	0	9.42	9.48	9.47	-	9.44

表 5.2: 例題 5.1 の計算時間 (名古屋大学大型計算機センター, 富士通 VP2600/10)

	18elms	36elms
MRM	6.20sec	21.04sec
Present	17.23sec	84.60sec

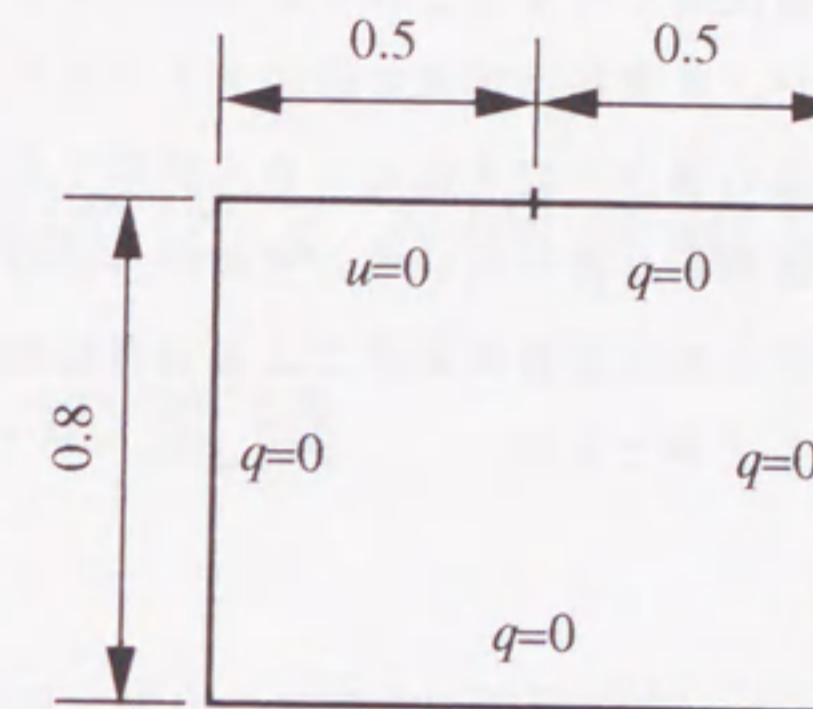


図 5.2: 例題 5.2 の境界条件

表 5.3: 例題 5.2 の結果

MRM	Present
1.50	1.50
3.40	3.40
4.59	4.59
6.25	6.25
6.53	6.55
8.01	8.01
8.33	8.33
-	9.55
9.91	9.91

5.3 まとめ

本章では、新しい複素定式の固有値問題を Newton 法により解析する方法について説明した。この方法の特徴は、新しい複素定式の固有値問題が見かけの固有値を含まず、波数 k の広い範囲で考えても固有値が消滅してしまうことがないため、初期推定値の決定さえうまくいけば、全ての固有値を精度良く得ることができる点にある。ただし、行列式を計算する係数マトリクスの大きさが、多重相反定式の係数マトリクスの 2 倍となるため、計算時間は多重相反定式の反復解法の場合の約 4 倍となる。前章でも述べたが、計算時間の面では多重相反定式による固有値解析が優れていることから、初期推定値の決定を新しい複素定式により行い、反復計算のみを多重相反定式による固有値問題で求めれば、両者の利点を組み合わせて難点を補うことができる。

参考文献

- [1] 野替一義, 神谷紀生, 安藤英司, 新しい複素定式を用いた, 境界要素法による Helmholtz 方程式の固有値解析 (第 1 報 定式化), 日本機械学会論文集 (C 編), 60 巻, 579 号, 3854-3858, 1994

第 6 章

多重相反定式による固有値問題の標準形固有値問題への変換

これまでに、多重相反定式による固有値問題 (2.57) は、係数マトリクスが波数 k の有限な多項式となる、特殊な固有値問題であることを示し、前章では、これに Newton 法を用いて効率よく解く方法を示した。ここでは、この問題に対するもう 1 つのアプローチとして、多重相反定式による固有値問題を標準形の固有値問題に変換して解析する方法を示す [1~6]。

6.1 多項式行列の固有値問題と標準形の固有値問題

変換のもととなる固有値問題は、式 (2.57) であるが、ここでは、右辺のマトリクス B を考慮しないで、単に 0 と置き換える。ここで、係数マトリクス A は、 H , G と同様、 k^2 の多項式となっている。まず、 $\lambda = k^2$ とすれば、式 (2.57) と A は次のように表現できる。

$$A(\lambda)x = 0 \quad (6.1)$$

$$A(\lambda) = A_0 + \lambda A_1 + \dots + \lambda^m A_m \quad (6.2)$$

ここで、 A_i は、 i 番目の高次の基本解に対応する係数マトリクスである。式 (6.1) に (6.2) を代入し、展開すると次のようになる。

$$A_0 x + \lambda A_1 x + \dots + \lambda^m A_m x = 0 \quad (6.3)$$

ここで、次のようにおく、

$$x_i = \lambda^i x \quad (6.4)$$

式(6.4)を(6.3)に代入すると、

$$A_0 x_0 + A_1 x_1 + \dots + A_m x_m = 0 \quad (6.5)$$

また、式(6.4)から、

$$x_{i+1} = \lambda x_i, \quad x_0 = x, \quad (i=0, 1, \dots, m-1) \quad (6.6)$$

式(6.5), (6.6)をまとめて、1つの連立方程式として表すと次のようになる、

$$\begin{bmatrix} A_{m-1} & \cdots & A_1 & A_0 \\ I & & 0 & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & I & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_{m-1} \\ \vdots \\ x_0 \end{Bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} -A_m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & I & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_{m-1} \\ \vdots \\ x_0 \end{Bmatrix} \quad (6.7)$$

上式を次のように表す、

$$\overline{A}\overline{x} = \lambda \overline{B}\overline{x} \quad (6.8)$$

ここで、 \overline{A} , \overline{B} は、 $mN \times mN$ の非対称マトリクスで、 \overline{x} は $mN \times 1$ のベクトルとなる、なお、 I は N 次の単位マトリクスである、このようにして得られた固有値問題(6.8)は、多重相反定式での固有値問題(6.1)と全く同値であるにも関わらず、その形は一般化固有値問題となっている、この場合、既存の固有値解析のサブルーチンを用いて、容易に固有値解析を行うことができる、ここでは、サブルーチンとして名古屋大学大型計算機センターの数値解析ライブラリー NUMPAC の HEQRVD を用いる、このサブルーチンは、 $Ax = \lambda x$ 型の固有値問題用のものである、式(6.8)をさらに次のように変形する、

$$Mx = \mu x \quad (6.9)$$

ここで、 $\mu = 1/\lambda$ であり、 $M = \overline{A}^{-1}\overline{B}$ である、また、 $\det \overline{A} = 0$ のときは、 \overline{B} を用いて \overline{A} をシフトして、

$$(\overline{A} - s\overline{B})\overline{x} = \lambda' \overline{B}\overline{x} \quad (6.10)$$

とした後に、式(6.7)のように変形する、この場合、 $\lambda = \lambda' + s$ で、 s はシフト値(実数)である、

また、ここでは、多重相反定式の固有値問題(2.57)の o に掛かるマトリクス B を考えていないため、標準形に変換した固有値問題の固有値には、みかけの固有値が含まれることになる、そこで、得られた固有値の前後で、多重相反定式の固有値決定式として用いた η の符号を調べ、異符号ならば真、同符号ならば偽とする、異符号のとき、 η は k 軸と交わることとなり、固有値決定式(4.4)が満たされる、このようにする理由は以下による、波数 k が小さいところでは、真の固有値どうしの間はある程度離れているので、固有値のところでは η は緩やかに k 軸と交わる、したがって、固有値のまわりにとった有限な波数 k の範囲の外側では、 η は異符号となる、一方前章の図4.1に示すように、見かけの固有値のまわりでは η は急激な変化をするため、見かけの固有値のまわりにとった有限な波数 k の範囲の外側では、同じ符号となる、波数 k が小さく固有値が密集していない場合に限られるが、この理由から上記の方法で見かけの固有値を判別することが可能である、もちろん前章で述べたように、計算によって得られた固有値のまわりでの、新しい複素定式の固有値判別式 $f(k)$ の分布を調べることで固有値の判別は可能である、この場合は、波数 k が大きいところでも固有値の判別は十分可能である、

6.2 解析例

ここでは、前節で提案した標準形固有値問題への変換により、実際に、厳密解のある問題を解析し、本法の有効性を検討する、

例題 6.1: 標準形固有値問題への変換による固有値解析 解析の対象となる領域の形状と境界条件および要素分割は、第4章の多重相反定式の反復解法の例題4.2と同じ 0.9×0.4 の長方形とする、ただし、解析の範囲を $k = 0.1 \sim 6.0$ とし、高次の基本解に対応する係数マトリクスは、指定された解析範囲の上限においても、係数マトリクス H , G の精度が 10^{-6} まで確保できるところまでとっている、解析結果を表6.1に示す、表中§印を付けたものは、固有値問題を未知数にかかる係数マトリクスだけで扱っているために現れるみかけの固有値であるが、前節で述べたように得られた固有値の付近での η の分布を用いて、取り除くことができたことを注意しておく、また、この場合マトリクス \overline{A} をシフトする必要はなかった、残りの2つの真の固有値については、どちらの要素分割についても厳密解とよく一致している、

表 6.1: 例題 6.1 の厳密解と数値解

Anal.Sol.	44 elms.	26 elms.
1.745	1.745	1.746
	4.808 ^{\$}	4.809 ^{\$}
5.235	5.240	5.254

表 6.2: 例題 6.2 の結果: (a) 1×0.99 , (b) 1×0.999 (a) 1×0.99

m	n	Anal.Sol.	Present
1	0	3.141	3.145
0	1	3.173	3.177

(b) 1×0.999

m	n	Anal.sol.	Present
1	0	3.141	3.145
0	1	3.144	3.148

例題 6.2: 近接した固有値 1×0.99 の長方形と, 1×0.999 の長方形で, 境界上の全ての点で $\partial u / \partial n = 0$ の境界条件を与えたときの固有値を求める. 要素数を 32 とし, 解析の範囲を $k = 0.1 \sim 4$ とした. その他の条件は上の例題と同じである. この場合, 厳密解は式 (A.1) によって与えられる. 解析結果を厳密解とともに表 6.1 に示す.

この例題のような固有値が非常に接近した問題では, 前章の Newton 法を用いた固有値解析では, 初期推定値を決定するためには, k の刻みを非常に細かくして η の分布を詳しく調べる必要がある. k の刻みを大きいまま分布を調べると, 2 つの固有値が存在することを確認することはできず, 結果的に, どちらか 1 つの固有値しか得られない. しかし, この章で提案した方法によれば, 表 6.1(a),(b) に示すように, 近接した固有値でも分離判別が可能で, そのために特別の配慮をする必要はない.

6.3 まとめ

固有値問題を標準形に変換する方法は, 変換された式 (6.7) に見られるように, 非常に大規模の固有値問題を解くことになる. このため, コンピューターでの計算においてはかなり大きい記憶容量必要とする点で, 第 4,5 章のマトリクス of LU 分解を用いた Newton 法による解法に比べ効率が劣る. しかし, 一般化固有値問題に変換したことにより, Newton 法のように初期推定値決定のために行列式 (η あるいは $f(k)$) の分布を調べる面倒が無く, 既存のサブルーチンを用いて非常に簡便に解析を行うことができる点は前の方法より優れているといえる. また, Newton 法を用いた解法により近接した固有値を含む問題の解析を行う場合では, η や f の分布を調べる必要があるのに対し, ここで提案した方法によれば, 特別の配慮をしなくても固有値の決定が可能である. ただし, この方法によると見かけの固有値が現れるため, 得られた固有値が正しい固有値であるかどうかを, 新しい複素定式の固有値問題を満たすかどうかで判定する必要がある. また, 見かけの固有値を取り除くもう 1 つの方法としては, 新しい複素定式による固有値問題を本章で示した方法で一般化固有値問題に変換する方法が考えられる.

前に示した 2 つの反復解法とここで提案した一般化固有値問題での解析は, どちらも精度の面では等しく優れているので, 解析を行う環境によって, どちらの解析法を用いるかを決定することが望ましい.

参考文献

- [1] 安藤英司, 神谷紀生, 境界要素定式に基づく Helmholtz 方程式の標準ルーチンによる固有値の決定, 日本機械学会論文集 (C 編), 58 巻, 553 号, 2664-2668, 1992.
- [2] 神谷紀生, 安藤英司, 標準ルーチンによる境界要素法固有値解析, 境界要素法論文集, 9, 121 - 124, 1992.
- [3] Kamiya, N., and Andoh, E., Standard eigenvalue analysis by boundary element method, Comm. Num. Meth. Eng., 9, 489-495, 1993.
- [4] Kamiya, N., Andoh, E. and Nogae, K., Eigenvalue analysis by boundary element method: New developments, Eng. Anal. Bound. Elms., 12, 151-162, 1993.

- [5] Kamiya, N., and Andoh, E., Boundary element eigenvalue analysis by standard routine, Proc. BEM 15, Brebbia, C.A. and Rencis, J.J. eds., Comp. Mech. Pub. / Elsevier Appl. Sci. Pub., Vol. 1, 375 - 383, 1993.
- [6] Kamiya, N., Andoh, E. and Nogae, K., Application to Helmholtz eigenvalue problem Chapter 5, The Multiple Reciprocity Boundary Element Method, Computational Mechanics Publications, 1994.

第 7 章

多重相反定式のアダプティブメッシュ

一般にアダプティブメッシュを構成するためには、解析の結果から何らかの方法で誤差を予測し(事後誤差評価)、その結果を基に、もとのメッシュの細分化(h法)を行うか、メッシュ内での関数の近似度を増すためにさらに高次の関数での内挿(p法)を行か、あるいは、メッシュポイントを移動させてメッシュの分布を変更する(r法)。本研究ではh法を取り上げ、本章と次章に、前述の Helmholtz 方程式の固有値問題の多重相反定式と新しい複素定式による反復解法におけるアダプティブメッシュの構成について述べる。以下では、多重相反定式の固有値問題の反復計算におけるアダプティブメッシュについて述べる。

3章で説明したように、多重相反定式の固有値問題は η を用いて固有値を求めても、厳密には見かけの固有値を消去できない場合がある。しかし、続く4,5,6章で述べたように、新しい複素定式の固有値決定式 $f(k)=0$ を用いることで見かけの固有値は消去できる。本章では、この点には特に触れず、4章で説明した多重相反定式による解析法により固有値を求めている。 $f(k)$ の情報をを用いることなく、固有値を求めアダプティブメッシュを構成しているが、かなり良好な結果を得ることができることをあらかじめ指摘しておく。

7.1 誤差評価と要素の細分割

与えられた要素分割に対応して連立方程式(2.56)が得られたとする。ここで、ある1つの境界要素(要素 m とする)を細分割したとき、式(2.56)は次のように変更される。

$$\bar{H}_m \bar{u}_m = \bar{G}_m \bar{q}_m \quad (7.1)$$

ここで

$$\bar{\mathbf{H}}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{(m-1)} & \bar{\mathbf{H}}_{(m-1, m_{\Gamma_m})} \\ \bar{\mathbf{H}}_{(m_{\Gamma_m}, m-1)} & \bar{\mathbf{H}}_{(m_{\Gamma_m}, m_{\Gamma_m})} \end{bmatrix} \quad (7.2)$$

$$\bar{\mathbf{G}}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{(m-1)} & \bar{\mathbf{G}}_{(m-1, m_{\Gamma_m})} \\ \bar{\mathbf{G}}_{(m_{\Gamma_m}, m-1)} & \bar{\mathbf{G}}_{(m_{\Gamma_m}, m_{\Gamma_m})} \end{bmatrix} \quad (7.3)$$

$$\bar{\mathbf{u}}_m = [\mathbf{u}_{m-1}, \bar{\mathbf{u}}_{m_{\Gamma_m}}] \quad (7.4)$$

$$\bar{\mathbf{q}}_m = [\mathbf{q}_{m-1}, \bar{\mathbf{q}}_{m_{\Gamma_m}}] \quad (7.5)$$

$\mathbf{H}_{(m-1)}, \mathbf{G}_{(m-1)}$ は最初のマトリクス \mathbf{H}, \mathbf{G} から m 番目の成分を除いたものであり, $\bar{\mathbf{H}}_{(m-1, m_{\Gamma_m})}, \bar{\mathbf{H}}_{(m_{\Gamma_m}, m-1)}, \bar{\mathbf{H}}_{(m_{\Gamma_m}, m_{\Gamma_m})}, \bar{\mathbf{G}}_{(m-1, m_{\Gamma_m})}, \bar{\mathbf{G}}_{(m_{\Gamma_m}, m-1)}, \bar{\mathbf{G}}_{(m_{\Gamma_m}, m_{\Gamma_m})}$ は細分化された要素によって新たに得られた係数である. $\mathbf{u}_{m-1}, \mathbf{q}_{m-1}$ は式 (2.56) から求められる \mathbf{u}, \mathbf{q} から m 番目の成分を除いたものであり, $\bar{\mathbf{u}}_{m_{\Gamma_m}}, \bar{\mathbf{q}}_{m_{\Gamma_m}}$ は細分化された要素で新たに求めるポテンシャルとフラックスである. また m_{Γ_m} は m 番目の要素 Γ_m 上での自由度を示す.

式 (7.1) に同次な境界条件を与えて書き直すと, 次のようになる.

$$\bar{\mathbf{A}}_m(k) \bar{\mathbf{x}}_m = \bar{\mathbf{B}}_m(k) \mathbf{o} \quad (7.6)$$

したがって, 1 つの要素 m を細分化したとき, 式 (4.4) と同様に, 固有値は次の式から求めることができる.

$$\eta_m \equiv \frac{\det \bar{\mathbf{A}}_m}{\det \bar{\mathbf{R}}_m} = 0 \quad (7.7)$$

なお, $\bar{\mathbf{R}}_m$ は \mathbf{R} を構成する方法と同様に $\bar{\mathbf{A}}_m$ から決定される. あらかじめ与えられた要素分割によって式 (4.4) から決定される固有値を \hat{k}_i とする.

$$\eta(\hat{k}_i) = 0 \quad (7.8)$$

ここで添字 i は i 番目のモードであることを示す. 次に, この \hat{k}_i を式 (7.7) の左辺に代入すれば, 一般に等号は成り立たず,

$$\eta_m(\hat{k}_i) \neq 0 \quad (7.9)$$

となる. そこで式 (7.9) に対応して次のような γ_{im} を定義する.

$$\gamma_{im} = \det \bar{\mathbf{A}}_m(\hat{k}_i) \quad (7.10)$$

この γ_{im} は $\det \mathbf{A}(\hat{k}_i)$ と $\det \bar{\mathbf{A}}_m(\hat{k}_i)$ の差を示す. つまり, 式 (7.7) を解いて得られる固有値を k_{im} とすると, γ_{im} は \hat{k}_i と k_{im} の差に直接関係する量である. 初期要素を細分割したものによって得られる結果は, より正解に近いものとするのは自然であるから, γ_{im} は要素 m を細分化したことによる解の修正度合を表すもの, 言い換えれば細分化される前の要素 m の固有値に対する誤差表示式であるといえる. なお, 誤差表示式として式 (7.10) のように定義し, $\gamma_{im} = \eta_m(\hat{k}_i)$ を用いないのは, $\eta_m(\hat{k}_i)$ を求める時, 要素 m が \mathbf{R}_m を構成するときに入れ換える列ベクトルに対応した要素であるか, そうでないかで, $\eta_m(\hat{k}_i)$ の値が異なってくるからである. つまり, 入れ換えた列ベクトルに対応する要素だけが, 全体からみて不自然な誤差を示す恐れがあるからである. $\det \bar{\mathbf{A}}_m(\hat{k}_i)$ を用いれば, そのような心配がない. 計算効率からも誤差表示式として式 (7.10) を用いた方が有利である.

γ_{im} は, すべての要素 $m = 1, \dots, M$ (境界要素数を M とする) について計算すれば, 個々の要素を細分化したとき, 固有値に及ぼす誤差の度合の分布を表すものとなる. したがって, この値の大きい要素を選択的に細分化することが考えられ, たとえば次のようになる. i 番目のモードにおける上記の誤差の平均値 $\gamma_{i,ave}$ は

$$\gamma_{i,ave} = \frac{\sum_{j=1}^M |\gamma_{ij}|}{M} \quad (7.11)$$

となるので,

$$|\gamma_{im}| > \gamma_{i,ave} \quad (7.12)$$

を満たすとき h 法により要素 m を細分割する. このような方法を順次繰り返し, 解の収束は, s と $s-1$ 回目の固有値の相対的割合が十分小さくなったかどうかを判断する.

$$\text{Max}(e_i^s) \equiv \frac{k_i^s - \hat{k}_i^{s-1}}{k_i^s} < \epsilon \quad (7.13)$$

次に具体的な解析の手順について説明する。

1. まず、形状、境界条件、波数 k の範囲を入力し、初期要素分割について多重相反定式による係数マトリクスを計算する。境界条件を代入し、指定された k の範囲内で η の分布から、Newton 法により固有値を決定する。このとき用いる初期要素分割は、理想的には問題を定義するのに必要な最も少ないものでよい。ある程度細かい要素を用いれば、最終結果を得るためにアダプティブイタレーションは少ない回数ですむ。
2. 次に誤差解析を行う。要素の細分割は最も単純な2等分割によるものとし、誤差解析は考える k の範囲で一番小さい固有値 ($i=0$) から始める。要素 m を2分割し、これに対応する $\gamma_{im}(i=0)$ を求める。初期要素分割のすべての要素について γ_{im} を求め、 $\gamma_{i,ave}$ を計算する。式 (7.12) の条件を満たす要素を2分割し、新しい要素分割を決定する。この要素分割において固有値を計算し、式 (7.13) より e_i を計算する。考える k の範囲内に含まれるすべてのモードについて e_i が ε より小さければ計算を終了し、そうでなければ e_i が最大の固有値に対して再び誤差解析を行い、すべての e_i が ε より小さくなるまで解析を繰り返す。

以上がここで用いたアダプティブ要素構成と固有値解析のプロセスであるが、注意すべき点は、誤差 e_i が最大となる固有値に対して誤差解析を行うという点である。内部モードの分布は固有値ごとに異なるから、各モードごとにアダプティブ要素分割を行うほうが精度がよくなるはずである。しかし、そのようにすると固有値の数と同じだけのアダプティブ要素が必要になるので、計算の効率が悪くなる。誤差の最も大きい固有値に対してアダプティブメッシュを逐次構成していけば、結果として、全ての固有値に対して収束条件以下の誤差で固有値を得ることができるメッシュを与えることができる。これらの考えのもとに、ある範囲の k に対するすべての固有値に対して共通の要素分割で高い精度を得、かつ効率をよくする目的で上で示した方法を用いた。

7.2 解析例

例題 7.1: 長方形領域のモードと要素分割 波数 k の範囲を決めたとき、その中には一般に複数の固有値、固有モードが存在する。まずはじめにそうでなく、特定のモードをきめたときにアダプティブ要素がどのように構成されるかを検討する。1.0×0.8の長方形領域において、境界条件を全ての境界で $q \equiv \partial u / \partial n = 0$ と与えて、モード (1,0) と (2,0) について解析を行った。解析には、一定要素を用い、初期要素は各辺を2等分し、合計8要素とした。モード (1,0) ($k=3.14$) のときは $k=3.0 \sim 3.5$ 、モード (0,2) ($k=6.28$) のときは $k=6.0 \sim 6.5$ の範囲で解析を行った。マトリクス \mathbf{H}_j , \mathbf{G}_j の次数は成分の絶対値の最大値が解析範囲の上限で 10^{-12} より小さくなるまでとった。また、 $\text{Max}(e_i^s)$ が 10^{-3} より小さくなるまで解析を行った。この時の固有値の解析解は式 (A.1) で与えられる。得られた固有値はそれぞれ 3.14 と 6.28 で、式 (A.1) による結果とよく一致した。最終要素分割とその時の内部モードを図 7.1, 7.2 に示す。解析結果から、固有値が対応するモードによってアダプティブ要素分布が変化し、モードの変化の大きい部分に小さい要素が配置されることがわかる。

例題 7.2: 長方形領域の Neumann 問題 例題 7.1 と同じ長方形領域を一定要素を用い、解析範囲を $k=0.1 \sim 15.0$ として、 $\text{Max}(e_i^s)$ が 10^{-2} より小さくなるまで解析を行った。マトリクス \mathbf{H}_j , \mathbf{G}_j の次数は成分の絶対値の最大値が解析範囲の上限で 10^{-12} より小さくなるまでとった。初期要素が4要素(最終要素124)のものと、本法を用いない均一72要素のものについての解析結果を表 7.1 に示す。また図 7.3 と表 7.2, 7.3 は改善の過程における要素分割とその時に得られた固有値を示したものである。ただし、表中の*はみかけの固有値か、モードの判別ができない固有値を示す。均一72要素と本法の解析結果を比較すると、精度はほぼ同等であるが、高次の固有値において、均一の要素分割では得られない固有値が本法では精度良く得られている(12.27 は両方で得られていないが、これは固有値の間隔が小さいため固有値のまわりでの η の分布が急激に変化するために、12.27 の固有値の初期推定値がうまくとらえられないことよると考えられる)。

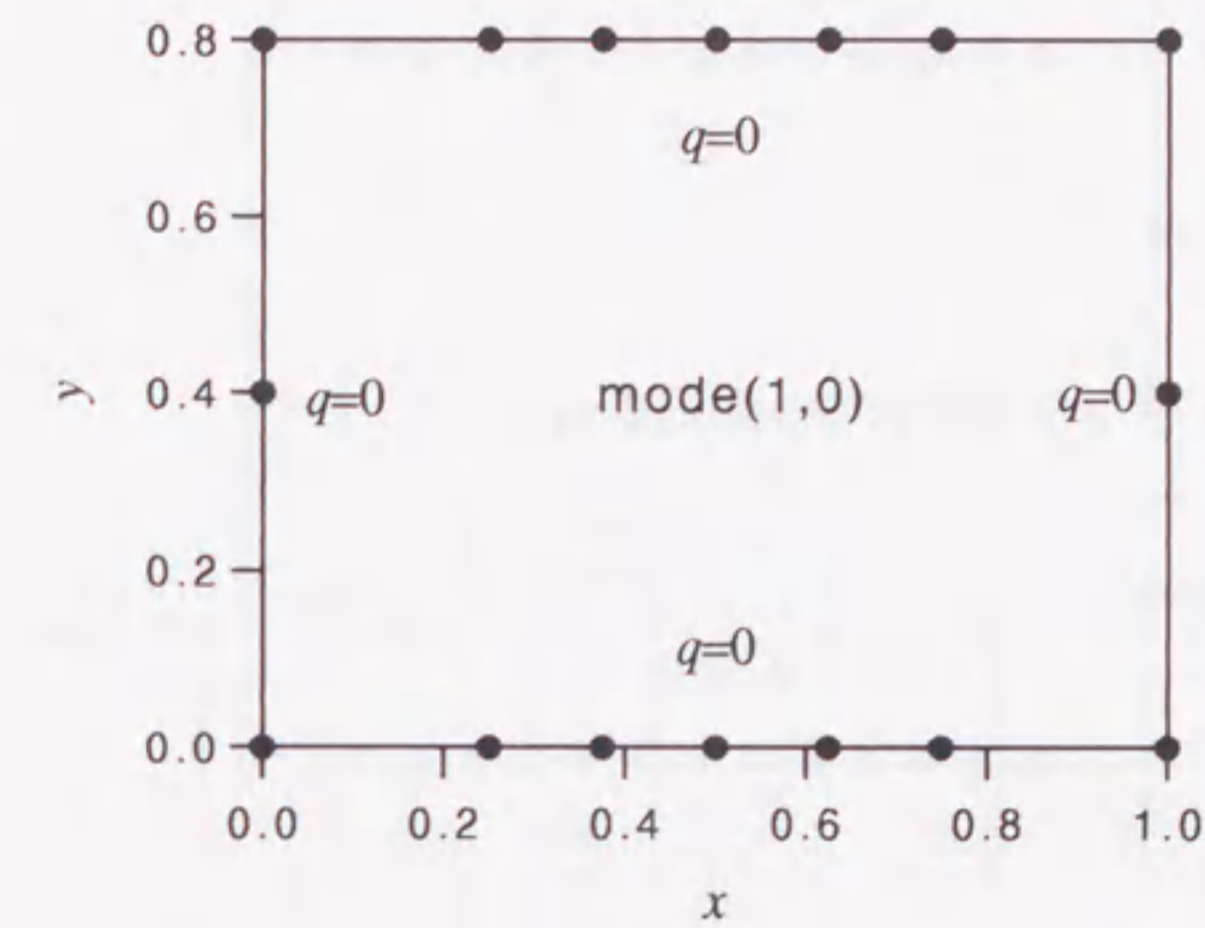
例題 7.3: 特異な境界条件を持つ長方形 例題 7.1 と同じ形状の長方形領域に、特異な境界条件を与えたものを、一定要素を用い、解析範囲を $k = 0.1 \sim 10.0$ として、 $Max(e_i^*)$ が 10^{-3} より小さくなるまで解析を行った。マトリクス H_j , G_j の次数は成分の絶対値の最大値が解析範囲の上限で 10^{-12} より小さくなるまでとった。初期要素が 4 要素 (最終要素 128) のものと、アダプティブ法を用いない均一 72 要素のものについての解析結果を表 7.4 に示す。また図 7.4 と表 7.5, 7.6 は改善の過程における要素分割とその時に得られた固有値を示したものである。厳密解がないため、はっきりしたことはいえないが、本法を用いた場合の最終要素分割は特異点の付近を細かく分割し、特異な状況を良く表していると考えられるから、均一 72 要素の結果と比較して精度は良いと推測される。

7.3 まとめ

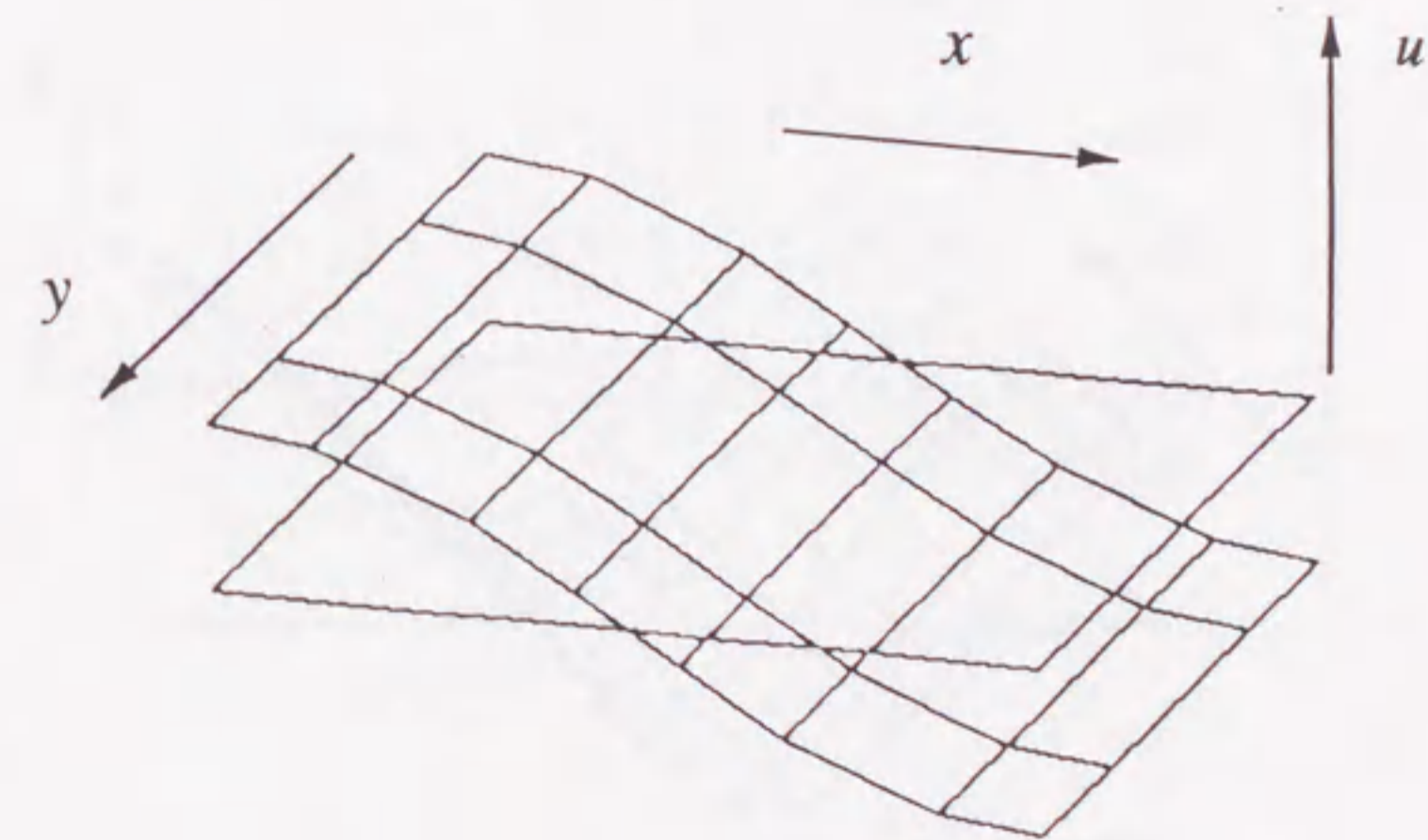
本章では Helmholtz 方程式の境界要素法固有値解析に対するアダプティブ要素構成法として、一つの要素を細分割して得られる新たな行列式 γ_{im} をその要素の固有値に対する誤差として定義し、アダプティブ h 法によって要素分割を行う方法を提案した。

固有値解析のアダプティブ法が他のアダプティブ法と異なる点は、固有値は領域全体の値であるので、要素に対応した固有値の誤差を表す量を定義しなければならないことと、固有値解析における最適要素分割はそれぞれの内部モード (固有値における領域内の関数分布) によって異なるという 2 点である。本方法はこれらの問題点をほぼ解決し、妥当な結果を得る方法であることが示された。

単純な境界条件については、均等分割によっても結果を得ることは可能であるが、複雑な境界条件については、アダプティブ要素を用いた方法に基づく解析が必要であると思われる。また、均等分割においてもどの位の要素数をとれば適切な結果を得ることができるかはあらかじめわからないので、本報のような方法を用いることは、解析に習熟しない者の助けとなる。

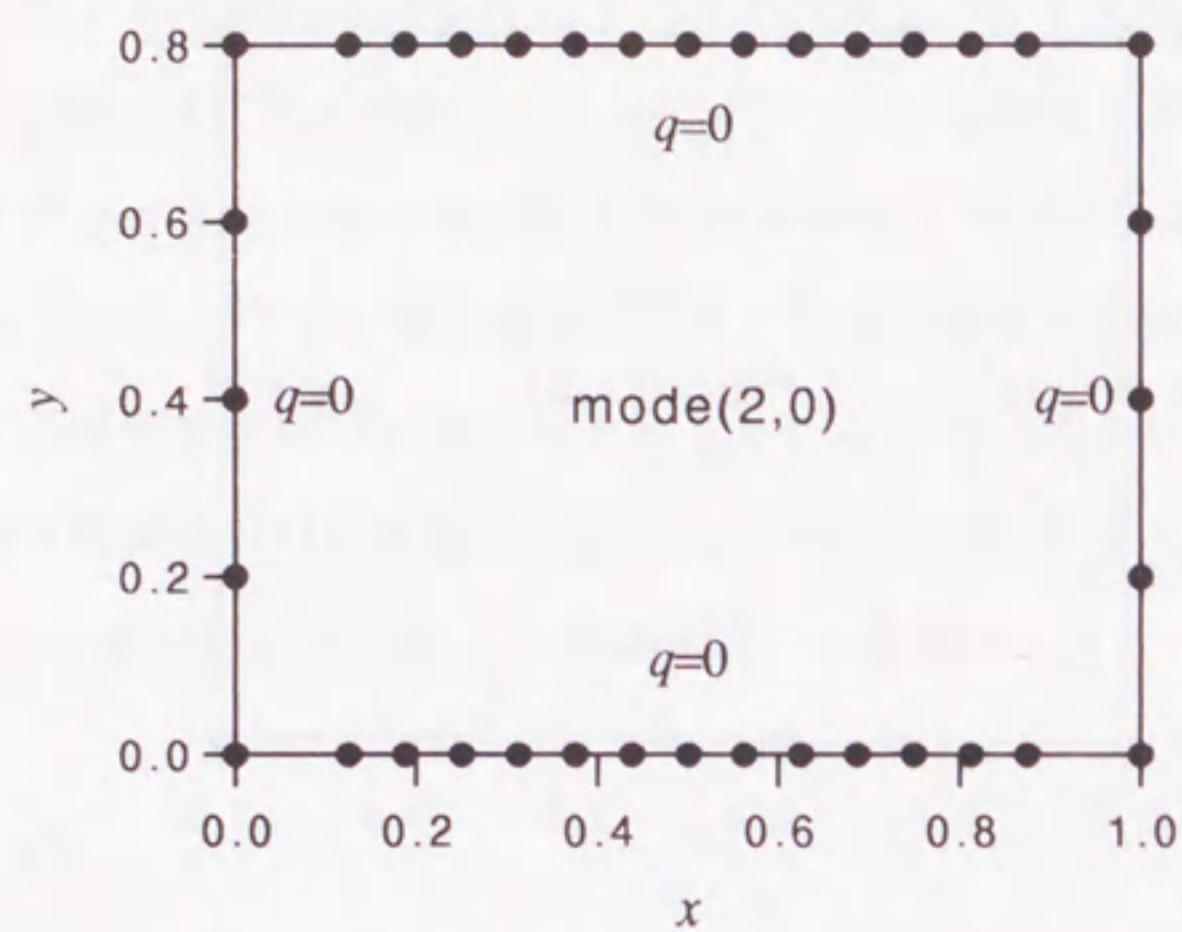


(a)

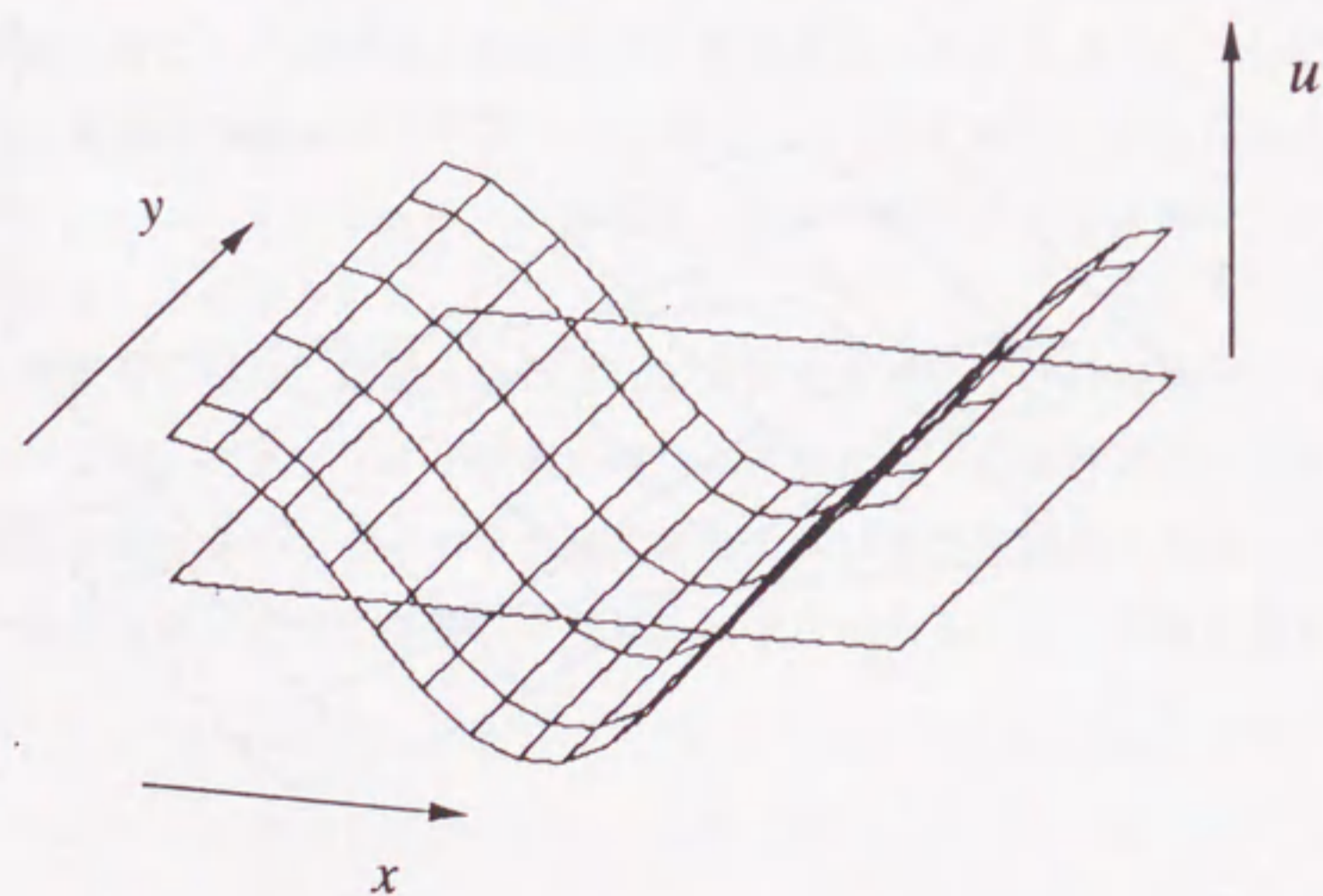


(b)

図 7.1: 例題 7.1: モード (1,0) の解析結果 (a) 最終要素 (b) 内部モード



(a)



(b)

図 7.2: 例題 7.1: モード (2,0) の解析結果 (a) 最終要素 (b) 内部モード

表 7.1: 例題 7.2 の解析結果

s	t	Anal.Sol.	Adaptive Anal.			Equal 72elms.
			9th	10th	Final	
1	0	3.14	3.14	3.14	3.14	3.14
0	1	3.93	3.93	3.93	3.93	3.93
1	1	5.03	5.03	5.03	5.03	5.03
2	0	6.28	6.29	6.29	6.28	6.29
2	1	7.41	7.41	7.41	7.41	7.41
0	2	7.85	7.86	7.85	7.85	7.86
1	2	8.46	8.47	8.46	8.46	8.46
3	0	9.42	9.43	9.43	9.43	9.43
2	2	10.06	10.07	10.06	10.06	10.06
3	1	10.21	10.22	10.22	10.22	10.22
0	3	11.78	11.79	11.78	11.78	11.78
1	3	12.19	12.21	12.20	12.20	12.20
3	2	12.27				
4	0	12.57	12.57	12.57	12.57	12.57
4	1	13.17		13.17	13.17	13.17
2	3	13.35	13.37	13.36	13.36	13.36
4	2	14.82	14.83	14.82	14.82	14.83
			*2.59			
			*10.60			

表 7.2: 例題 7.2:改善の過程の固有値 (1)

Original	1st	2nd	3rd	4th	5th
3.10	*2.89	3.16	*2.70	*2.70	3.15
4.72	3.21	*4.82	3.16	3.14	3.94
6.67	*4.48	*5.88	4.00	4.00	5.06
11.89	*6.00	*6.21	*5.66	*5.66	*5.61
13.14	6.19	6.32	*6.60	6.32	6.32
14.64	12.07	7.79	7.56	*6.60	7.89
	12.66	9.44	12.03	7.54	8.53
	13.16	10.50	12.62	10.79	10.23
	*14.34	12.06	14.57	12.04	10.44
	14.79	12.92	14.93	14.40	11.84
		13.76		14.66	12.33
					12.53
					14.50

表 7.3: 例題 7.2:改善の過程の固有値 (2)

6th	7th	8th	9th	10th	Final
3.15	3.15	*2.60	*2.59	3.14	3.14
3.94	3.94	3.14	3.14	3.93	3.93
5.05	5.05	3.93	3.93	5.03	5.03
6.29	6.30	5.03	5.03	6.29	6.28
7.89	7.44	6.29	6.29	7.41	7.41
8.53	7.87	7.42	7.41	7.85	7.85
9.44	9.44	7.86	7.86	8.46	8.46
10.13	10.09	8.47	8.47	9.43	9.43
11.85	10.26	9.43	9.43	10.06	10.06
12.35	11.78	10.08	10.07	10.22	10.21
12.60	12.20	10.23	10.22	11.78	11.78
13.23	12.32	11.80	*10.60	12.20	12.20
	12.60	12.58	11.79	12.57	12.57
		13.20	12.21	13.17	13.17
		14.87	12.57	13.36	13.36
			13.37	14.82	14.82
			14.83		

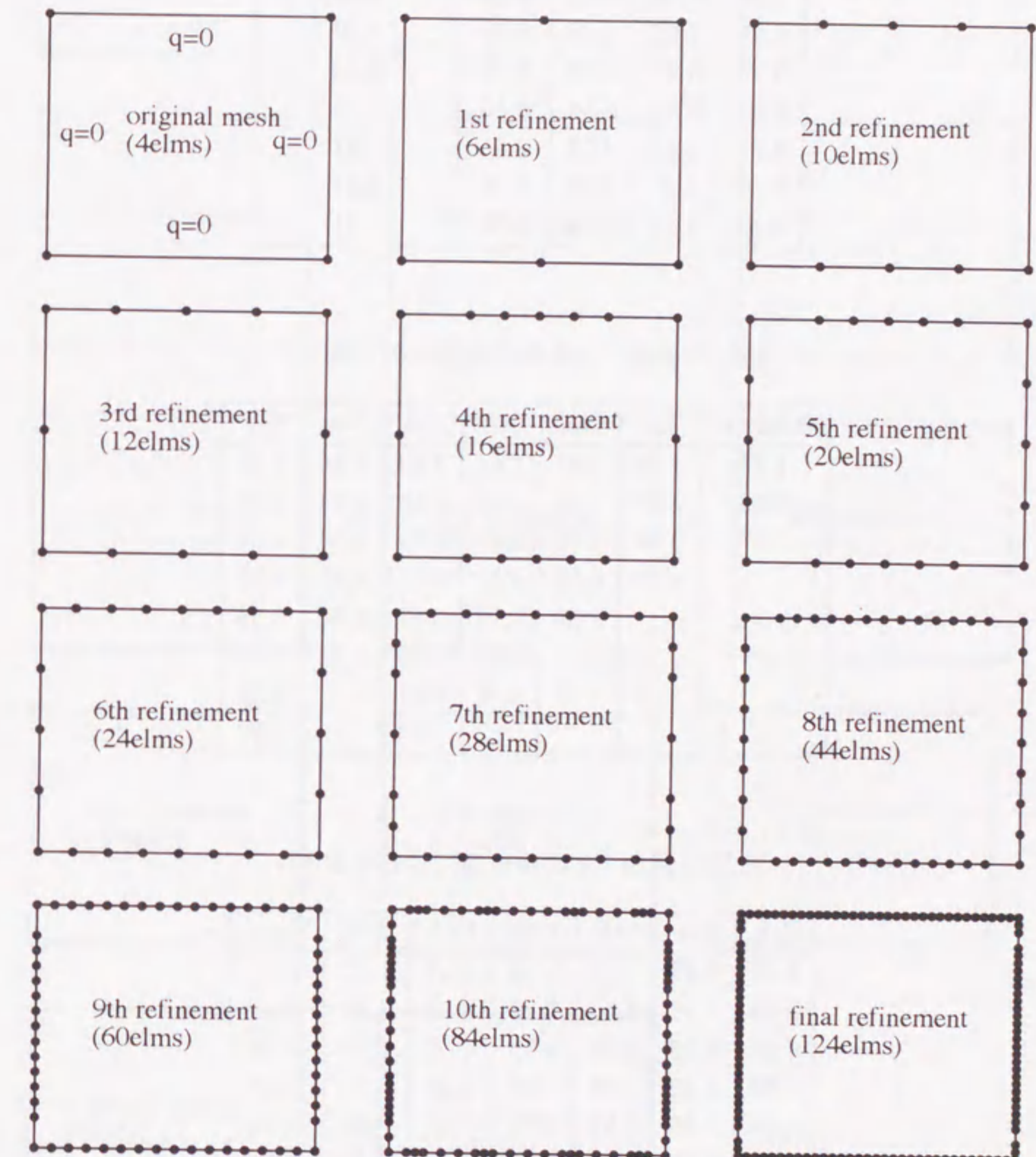


図 7.3: 例題 7.2:要素改善の過程

表 7.4: 例題 7.3 の解析結果

Adaptive Anal.				Equal 72elms.
10th	11th	12th	Final	
1.50	1.51	1.51	1.51	1.50
3.40	3.40	3.40	3.40	3.40
4.59	4.60	4.60	4.59	4.59
6.28	6.28	6.29	6.28	6.25
6.51	6.51	6.50	6.50	6.53
8.03	8.10	8.03	8.03	8.01
8.34	8.36	8.35	8.35	8.33
9.55	9.55	9.56	9.56	9.91

表 7.5: 例題 7.3:改善の過程の固有値 (1)

Original	1st	2nd	3rd	4th	5th	6th
1.38	1.41	1.42	1.42	1.42	1.46	1.46
3.03	2.92	2.84	2.70	2.68	2.64	3.39
3.97	3.94	3.80	3.41	3.39	5.60	4.58
	8.70	6.53	4.57	4.57	6.65	6.28
		9.35	5.70	5.67	8.60	6.54
			6.76	6.30	9.61	8.15
			8.26	6.61		9.59
						9.97

表 7.6: 例題 7.3:改善の過程の固有値 (2)

7th	8th	9th	10th	11th	12th	Final
1.46	1.47	1.49	1.50	1.51	1.51	1.51
3.39	3.39	3.40	3.40	3.40	3.40	3.40
6.28	6.29	4.58	4.59	4.60	4.60	4.59
7.99	6.49	6.28	6.28	6.28	6.29	6.28
8.15	7.98	6.51	6.51	6.51	6.50	6.50
	8.28	8.03	8.03	8.10	8.03	8.03
		8.32	8.34	8.36	8.35	8.35
		9.55	9.55	9.55	9.56	9.56

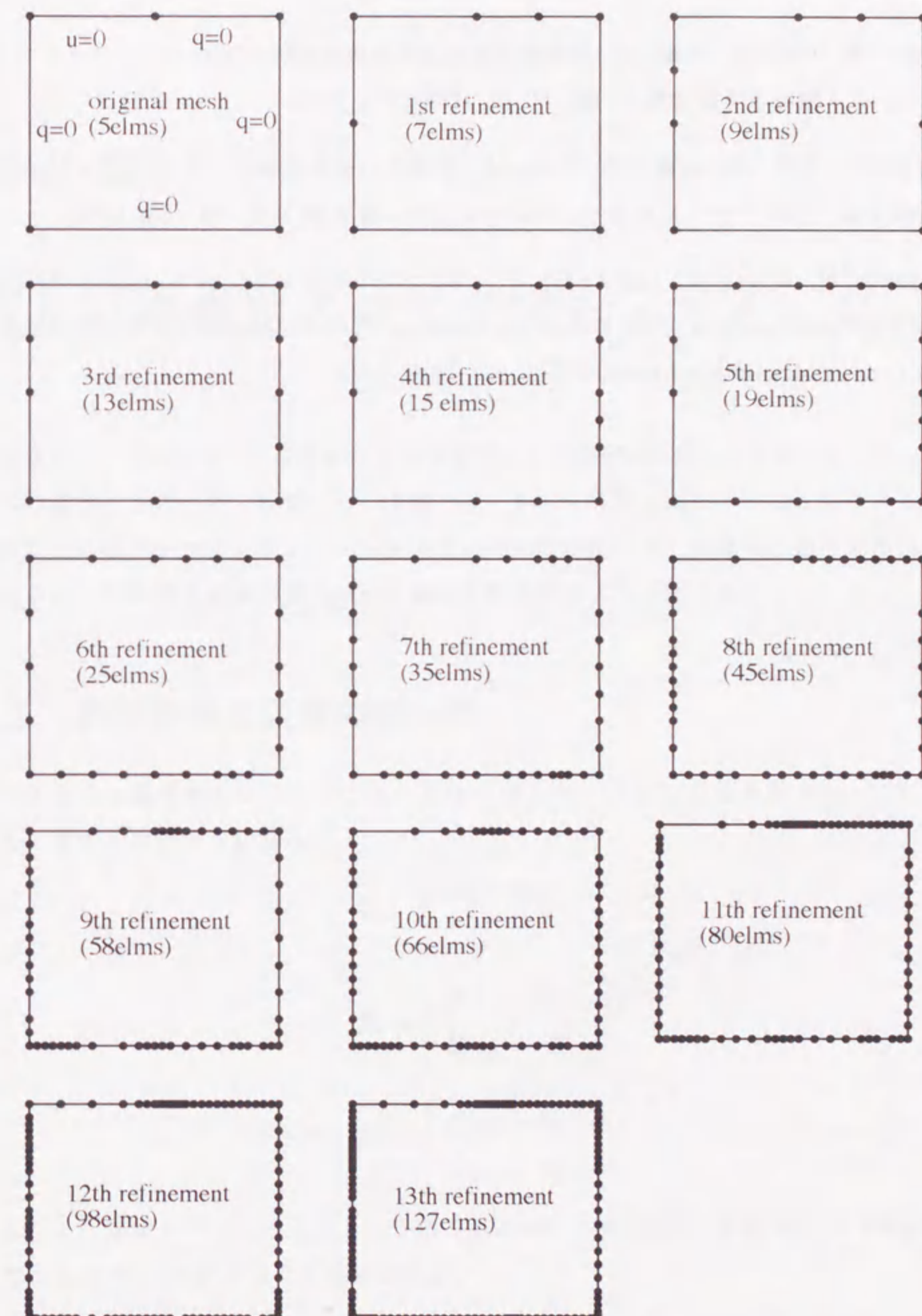


図 7.4: 例題 7.3:要素改善の過程

参考文献

- [1] 野替一義, 神谷紀生, 安藤英司, 境界要素法による固有値解析のためのアダプティブメッシュ, 日本機械学会論文集 (C 編), 59 巻, 3785-3791, 1993.
- [2] 神谷紀生, 野替一義, 安藤英司, Helmholtz 方程式の固有値解析のためのアダプティブ境界要素, BEM・テクノロジー・コンファレンス論文集, 4 巻, 45 - 50, 1994.
- [3] Kamiya, N., Nogae, K., and Andoh, E., Construction of adaptive boundary elements for eigenvalue analysis of the Helmholtz equation, Proceedings of 3rd World Congress on Computational Mechanics, Vol. 1, 927 - 928, 1994.

第 8 章

新しい複素定式のアダプティブメッシュ

前章では, Helmholtz 方程式の多重相反定式による固有値解析におけるアダプティブメッシュの構成方法について説明した. 本章では, 新しい複素定式の Newton 法による固有値解析におけるアダプティブメッシュ生成法について説明する. 前章の方法と考え方は同じであるが, 固有値決定法が異なるので新たな誤差表示式を定義する.

8.1 誤差評価と要素の細分割

与えられた要素分割に対応して連立方程式 (3.71)~(3.74) が得られたとし, これらをまとめて表すと次のようになる.

$$Hu = Gq \quad (8.1)$$

ただし,

$$H = \begin{bmatrix} H_{re} & -H_{im} \\ H_{im} & H_{re} \end{bmatrix} \quad (8.2)$$

$$G = \begin{bmatrix} G_{re} & -G_{im} \\ G_{im} & G_{re} \end{bmatrix} \quad (8.3)$$

ここで, 前章で示したのと同じように, ある 1 つの境界要素 (要素 m とする) を細分割したとき式 (8.1) は次のように変更される.

$$\bar{H}_{2m} \bar{u}_{2m} = \bar{G}_{2m} \bar{q}_{2m} \quad (8.4)$$

ここで

$$\bar{H}_{2m} = \begin{bmatrix} \bar{H}_{re_m} & -\bar{H}_{im_m} \\ \bar{H}_{im_m} & \bar{H}_{re_m} \end{bmatrix} \quad (8.5)$$

$$\bar{G}_{2m} = \begin{bmatrix} \bar{G}_{re_m} & -\bar{G}_{im_m} \\ \bar{G}_{im_m} & \bar{G}_{re_m} \end{bmatrix} \quad (8.6)$$

$\bar{H}_{re_m}, \bar{H}_{im_m}, \bar{G}_{re_m}, \bar{G}_{im_m}$ は要素 m が細分割されたことによって $H_{re}, H_{im}, G_{re}, G_{im}$ から新たに得られるマトリクスで、式(7.2), (7.3)と同様の形をしている。式(8.4)に境界条件(1.3)を与えて書き直すと

$$\bar{A}_{2m}(k)\bar{x}_m = \bar{B}_{2m}(k)o \quad (8.7)$$

となる。したがって、1つの要素 m を細分化したとき、固有値は次の式から求めることができる。

$$\frac{d}{dk} \det \bar{A}_{2m}(k) = 0 \quad (8.8)$$

あらかじめ与えられた要素分割によって式(3.89)から決定される固有値を \hat{k}_i とすれば、

$$\frac{d}{dk} \det \bar{A}(k_i) = 0 \quad (8.9)$$

ここで添字 i は i 番目のモードであることを示す。次に、この \hat{k}_i を式(8.8)の左辺に代入すれば、一般に等号は成り立たず、

$$\frac{d}{dk} \det \bar{A}_{2m}(k_i) \neq 0 \quad (8.10)$$

となる。そこで次のような誤差表示式 γ_{im} を定義する。

$$\gamma_{im} = \frac{d}{dk} \det \bar{A}_{2m}(k_i) \quad (8.11)$$

γ_{im} は、すべての要素 $m = 1, \dots, M$ (境界要素数を M とする) について計算すれば、個々の要素を細分化したとき、固有値に及ぼす誤差の度合の分布を表すものとなる。したがって、この値の大きい要素を選択的に細分化することが考えられ、たとえば次のようになる。 i 番目のモードにおける上記の誤差の平均値 $\gamma_{i,ave}$ は

$$\gamma_{i,ave} = \frac{\sum_{j=1}^M |\gamma_{ij}|}{M} \quad (8.12)$$

となるので、

$$|\gamma_{im}| > \gamma_{i,ave} \quad (8.13)$$

を満たすとき h 法により要素 m を細分割する。このような方法を順次繰り返し、解の収束は、 s と $s-1$ 回目の固有値の相対的割合が十分小さくなったかどうかを判断する。

$$\text{Max}(e_i^s) \equiv \frac{k_i^s - \hat{k}_i^{s-1}}{k_i^s} < \varepsilon \quad (8.14)$$

8.2 解析例

例題 8.1: 長方形領域の Neumann 問題 1.0×0.8 の長方形領域において、境界条件を全ての境界で $q \equiv \partial u / \partial n = 0$ と与える。一定要素を用い、解析の範囲を $k = 0.1 \sim 15.0$ として、 $\text{Max}(e_i^s)$ が 10^{-2} より小さくなるまで解析を行った。マトリクス H_j, G_j の次数は成分の絶対値の最大値が解析範囲の上限で 10^{-12} より小さくなるまでとった。初期要素が4要素(最終要素64要素)のものと、本法を用いない均一72要素のものについての解析結果を表8.1に示す。また図8.1と表8.2は改善の過程における要素分割とそのときに得られた固有値を示したものである。均一72要素と例題7.2と本法の解析結果を比較すると、本法は他の解析よりも要素数が少ないにもかかわらず、ほぼ同等の精度を得ることができた。

例題 8.2: 特異な境界条件を持つ長方形 例題8.1と同じ形状の長方形領域に特異な境界条件を与えたものを、一定要素を用いて $k = 0.1 \sim 10.0$ の範囲で解析を行った。収束条件は $\text{Max}(e_i^s)$ が 10^{-3} より小さくなるまでとして解析を行ったが収束が得られず、コンピュータのメモリーの制約により11回目のイタレーションまでしか解析できなかった。マトリクス H_j, G_j の次数は成分の絶対値の最大値が解析範囲の上限で 10^{-12} より小さくなるまでとった。初期要素が4要素のものと、本法を用いない均一72要素のものについての解析結果を表8.3に示す。また図8.2と表8.4, 8.5は改善の過程における要素分割とそのときに得られた固有値を示したものである。解析結果から本法は例題8.3では求めることができなかった9.91の解を求めることができた。しかし、1.50に相当する解が他解析とかなり異なっている。この原因としては解析が一つのモードではなく、いくつかのモードに対して行われているので、他のモードの誤差を低減するために行われたメッシュの細分化が、1.50のモードに対して悪影響を及ぼしているのではないかと考えられる。

表 8.1: 例 題 8.1 の解析結果

<i>m</i>	<i>n</i>	Anal.Sol.	Adaptive Anal.			Equal 72 elms.
			6th	7th	Final	
1	0	3.14	3.14	3.14	3.14	3.14
0	1	3.93	3.94	3.93	3.93	3.93
1	1	5.03	5.05	5.03	5.03	5.03
2	0	6.28	6.29	6.28	6.28	6.28
2	1	7.41	7.43	7.41	7.41	7.41
0	2	7.85	7.87	7.86	7.86	7.86
1	2	8.46	8.48	8.47	8.46	8.46
3	0	9.42	9.44	9.43	9.43	9.43
2	2	10.06	10.08	10.06	10.06	10.06
3	1	10.21	10.25	10.22	10.22	10.22
0	3	11.78	11.78	11.79	11.78	11.78
1	3	12.19	12.20	12.20	12.20	12.20
3	2	12.27	12.30	12.28	12.28	12.28
4	0	12.57	12.58	12.57	12.57	12.57
4	1	13.17	13.20	13.18	13.18	13.18
2	3	13.35	13.36	13.36	13.36	13.36
4	2	14.82	14.84	14.83	14.83	14.83

表 8.2: 例 題 8.1:改善の過程の固有値

Original	1st	2nd	3rd	4th	5th	6th	7th	Final
4.61	3.97	3.20	3.15	3.14	3.15	3.14	3.14	3.14
6.82	6.84	3.97	3.98	3.94	3.94	3.94	3.93	3.93
9.95	7.99	5.17	5.12	5.05	5.05	5.05	5.03	5.03
11.93	9.87	6.89	6.32	6.31	6.29	6.29	6.28	6.28
13.18	11.70	8.17	7.53	7.47	7.43	7.43	7.41	7.41
	12.67	9.40	8.24	7.88	7.87	7.87	7.86	7.86
		11.11	9.49	8.52	8.48	8.48	8.47	8.46
		12.13	10.40	9.52	9.52	9.44	9.43	9.43
		13.26	12.03	10.18	10.08	10.08	10.06	10.06
			12.73	10.37	10.24	10.25	10.22	10.22
			13.65	11.84	11.78	11.78	11.79	11.79
				12.31	12.20	12.20	12.20	12.20
				12.74	12.30	12.30	12.28	12.28
				13.39	12.59	12.58	12.57	12.57
					13.22	13.20	13.18	13.18
					13.37	13.36	13.36	13.36
					14.88	14.84	14.83	14.83

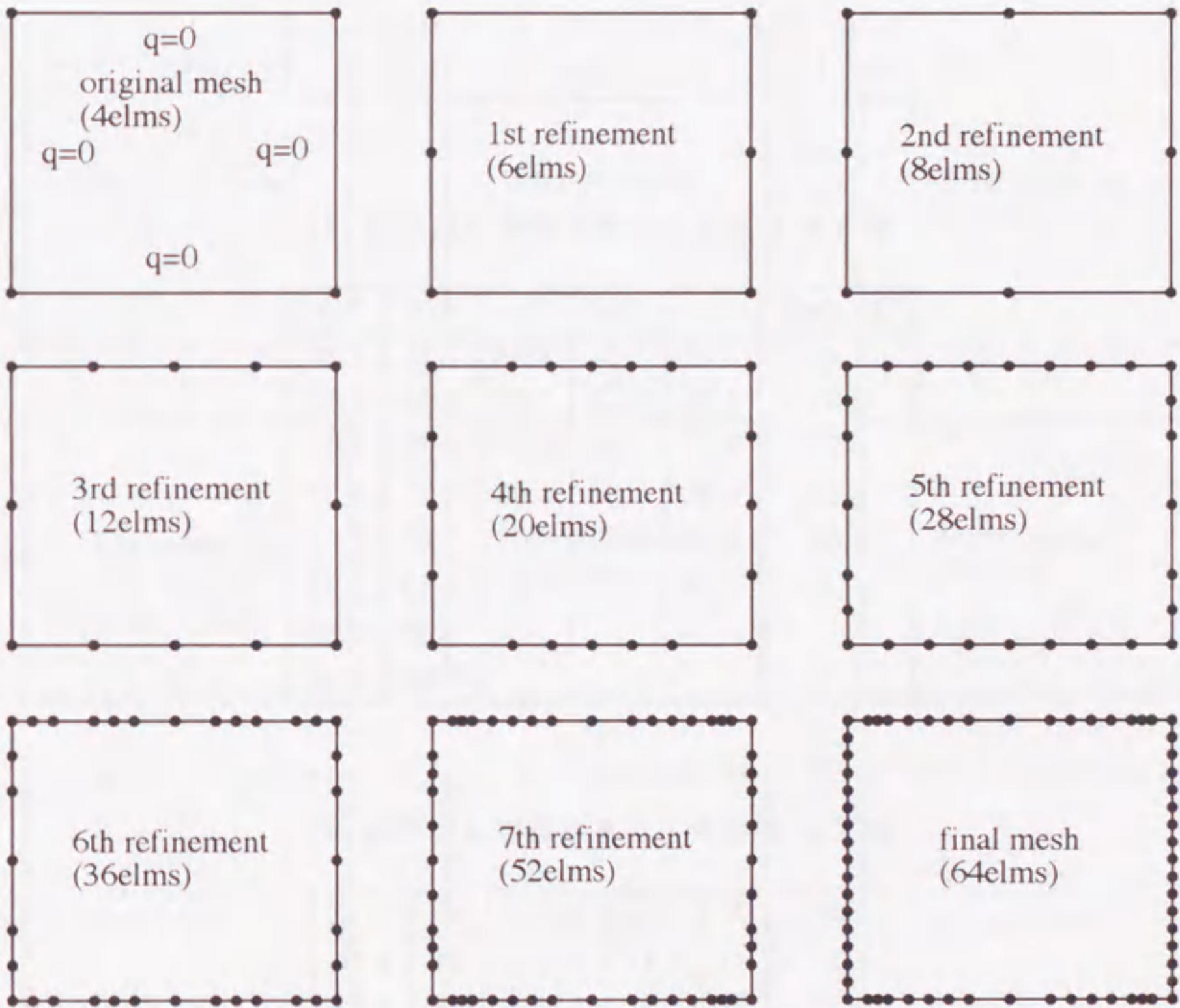


図 8.1: 例 題 8.1:要素改善の過程

表 8.3: 例題 8.2 の解析結果

Adaptive Anal.				Equal 72elms.
8th	9th	10th	11th	
1.41	1.44	1.44	1.46	1.50
3.37	3.38	3.38	3.39	3.40
4.53	4.55	4.55	4.56	4.59
6.24	6.24	6.24	6.24	6.25
6.53	6.54	6.54	6.54	6.55
7.97	8.01	8.01	8.01	8.01
8.22	8.29	8.29	8.32	8.33
9.55	9.56	9.56	9.55	9.55
9.89	9.90	9.90	9.91	9.91

表 8.4: 例題 8.2:改善の過程の固有値 (1)

Original	1st	2nd	3rd	4th	5th
1.45	1.42	1.41	1.38	1.35	1.35
3.84	3.78	3.67	3.37	3.35	3.35
5.78	5.72	4.90	4.55	4.48	4.46
6.75	6.86	6.68	6.40	6.35	6.27
8.84	8.80	9.82	8.57	7.69	7.62
10.00	9.65		9.95	8.19	8.21
				9.57	9.55
				9.96	9.90

表 8.5: 例題 8.2:改善の過程の固有値 (2)

6th	7th	8th	9th	10th	11th
1.37	1.41	1.41	1.44	1.44	1.46
3.34	3.37	3.37	3.38	3.38	3.39
4.50	4.52	4.53	4.55	4.55	4.56
6.36	6.24	6.24	6.24	6.24	6.24
7.60	6.52	6.53	6.54	6.54	6.54
8.21	7.99	7.79	8.01	8.01	8.01
9.54	8.23	8.22	8.29	8.29	8.32
9.92	9.56	9.55	9.56	9.56	9.55
	9.91	9.89	9.90	9.90	9.91

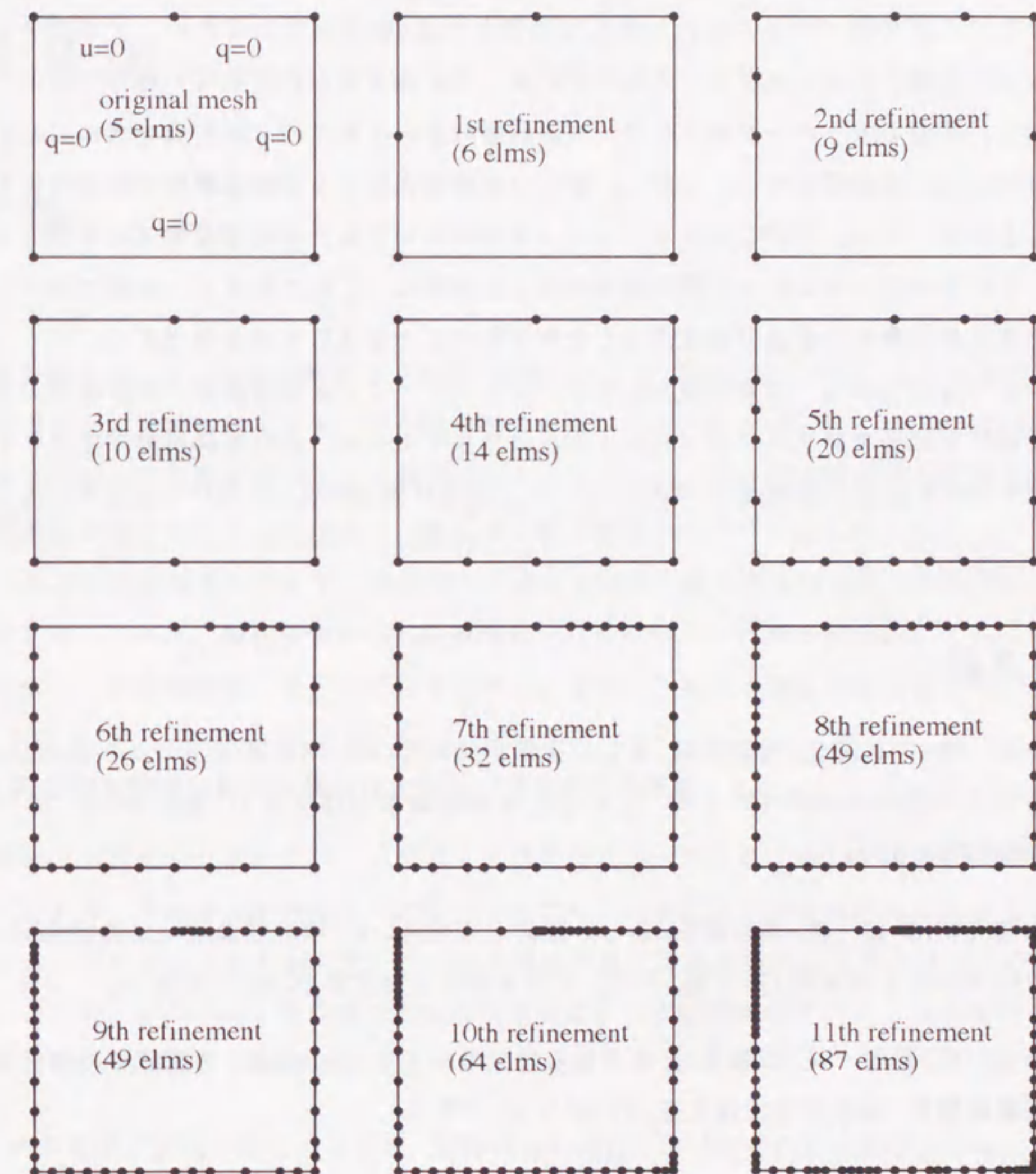


図 8.2: 例題 8.2:要素改善の過程

8.3 まとめ

前章で説明した多重相反定式によるアダプティブメッシュ生成法と、本章で説明した新しい複素定式によるアダプティブメッシュ生成法を比較すると、前者は、固有値の決定に係数マトリクスの列ベクトルの入れ換えを必要とする η を用いているため、アダプティブメッシュを使用しても、ベクトルの選び方によっては固有値が得られない場合がある。これに対し、後者は扱うマトリクスのサイズが前者の倍となるため、固有値を求めるための計算時間は約4倍必要となる。しかし、新しい複素定式による固有値解析では固有値を見逃すことがないため、アダプティブメッシュ生成においても、多重相反定式のアダプティブメッシュでは得られなかった固有値を得ることができた。これに加えて、前者に比べて少ない反復計算で最終の要素分割を得ることができたことも注目すべき点である。

このようなことから、本章で提案したアダプティブメッシュ生成法が、計算時間の面では多重相反定式のアダプティブメッシュ生成法に劣るものの、固有値解析の安定性とそれに付随する解析結果の信頼度(この場合メッシュと固有値の両者)において優れているといえる。

参考文献

- [1] 野替一義, 神谷紀生, 安藤英司, 新しい複素定式を用いた, 境界要素法による Helmholtz 方程式の固有値解析 (第1報, 定式化), 日本機械学会論文集 (C 編), 60 巻, 579 号, 3854-3858, 1994.
- [2] 安藤英司, 野替一義, 神谷紀生, 新しい複素定式を用いた, 境界要素法による Helmholtz 方程式の固有値解析 (第2報, 応用), 日本機械学会論文集 (C 編), (投稿中).
- [3] 神谷紀生, 野替一義, 安藤英司, 極小値直接探索による, Helmholtz 方程式の境界要素法固有値解析, 境界要素法論文集, 11, 41 - 45, 1994.

第9章

結論

境界要素法による固有値解析は、従来、係数マトリクスの行列式が極小値をとる波数 k を直接探索する方法に頼ってきたため解析効率が悪かった。したがって、境界要素法がブリプロセスの面で有限要素法よりも優れているにもかかわらず、固有値解析の分野では、境界要素法が注目されることはなく、最近まで深い研究がなされてこなかった。

このような状況をふまえて、本研究では固有値問題の最も基本的な形である Helmholtz 方程式をとりあげ、最近提案された多重相反定式を取り入れた境界要素法による固有値解析の新しい方法を提案した。以下に本研究の成果をまとめ、本論文の結論とする。

(1) 多重相反定式の数理的裏付けと新しい複素定式の提案

本研究で提案した解析法は、いずれも多重相反定式と呼ばれる新しい境界要素定式に基づいている。Helmholtz 方程式の問題についてもこの定式化による解析がこれまでいくつかなされているにもかかわらず、その数理論理的裏付けはあいまいで不十分なものであった。そこで、Helmholtz 方程式の多重相反定式による境界要素法の次の2点を証明し、解析の数理論理的裏付けを行った。

- 多重相反定式の積分方程式は、境界積分の級数と領域積分の和で表されるが、境界積分の級数の項数を無限個とれば領域積分項は0に収束する。したがって、境界積分の級数の項数を十分多くとれば、有限項の境界積分の和で近似できる。
- 多重相反定式の境界積分方程式は、従来一般的に用いられてきた境界要素法の積分方程式(複素数値)の実数部のみを扱っているものに対応する。

さらに、上記第2項から、多重相反定式による固有値問題は見かけの固有値を含んでおり、これを除くためには虚数部の固有値問題も考慮しなければならないことについても述べ、見かけの固有値を含まない虚数部を考慮した新しい複素定式を提案した。

次に、これらの理論的裏付けをもとに、次の3つの固有値解析法を提案し、例題によりその有効性を確認した。

(2) 多重相反定式による固有値解析法

多重相反定式による Helmholtz 方程式の固有値問題の新しい固有値決定式を導出し、これに Newton 法を適用した反復解法を提案した。この方法では、従来の一般的な複素定式に比べて約 1/5 の計算時間で固有値を求めることができ、これまで提案されてきた他の境界要素定式による固有値解析と同等以上の精度で固有値を得ることができた。しかし、この方法によると多重相反定式による固有値問題のもつ見かけの固有値を完全に消去することが難しい場合がある。また、固有値決定式の構成に用いられる係数マトリクスの列ベクトルの選び方によっては固有値を見逃す恐れがあり、これらの点が問題である。

(3) 新しい複素定式による固有値解析法

この解析法では、本研究で提案した新しい複素定式に基づき固有値解析を行う。この定式化によれば、固有値問題は見かけの固有値を含まず、波数 k の大きい範囲まで考える場合や、固有値どうしの近接する場合においても、固有値を見逃すことはない。また、固有値決定式に Newton 法を適用した解析法によれば、上の多重相反定式による固有値解析法と同じ精度で固有値を求めることができた。ただし、この定式化では多重相反定式による固有値解析法の約 4 倍の計算時間を必要とする。これは、扱うマトリクスの大きさが次数にして多重相反定式の 2 倍となるためである。

(4) 一般化固有値問題への変換による解析

この解析法では、多重相反定式の固有値問題の係数マトリクスが多項式行列となることを利用し、固有値問題を一般化固有値問題の形に変換し、一般に提供される固有値解析のサブルーチンにより解析を行う。もともになる固有値問題が多重相反定式の固有値問題そのものであるため、多重相反定式による固有値解析と同じ精度で固有値を求めることができ

た。また、近接した固有値の解析も特別な配慮は必要なく、固有値を見逃すことはない。ただし、この解析法では多重相反定式の固有値問題に基づいているため、解析結果に見かけの固有値が現れる。また、一般化固有値問題に変換したとき、大規模マトリクスの固有値問題となるため、計算機による解析では大きな記憶容量が必要とされる。

(2)~(4) の固有値解析法はいずれも定式化に、多重相反定式または新しい複素定式を用いているので、従来法では避けられなかった複素数演算の必要がない。さらに注目すべきは、これらの方法は境界上のみを解析の対象としているにもかかわらず、領域内にも補助的に点を考える 2 重相反法や領域を要素分割して解析する有限要素法と比べて、精度的には同等かもしくはそれ以上の結果を得ることができた点である。3 つの解析法は精度的には同じように優れているので、どちらの方法を用いて固有値解析を行うかは、解析を行う環境によって決定できる。また、これらの解析法の発展形として、初期推定値の決定には新しい複素定式による固有値問題を用い、反復計算を多重相反定式による固有値解析を用いる方法と、一般的な複素定式による固有値問題を一般化固有値問題に変換する方法が考えられる。これらの方法によれば、固有値を見逃すことはなく、見かけの固有値に悩まされることもない。

さらに本研究では、アダプティブ要素を構成する方法を含む、Helmholtz 方程式における境界要素法による 2 つの効果的固有値解析法を提案し、それらの相互の比較を行った。

(5) 多重相反定式による固有値問題のアダプティブメッシュ

多重相反定式による固有値解析法を用いて、固有値の決定精度に与える要素分割の効果に基づくアダプティブ法を提案した。この方法によれば、次に述べる新しい複素定式のアダプティブメッシュ生成法に比べて、少ない計算時間でメッシュを得ることができる。これは、定式化に多重相反定式を用いているためである。ただし、この方法によると固有値決定式を構成するために行われる係数マトリクスの行ベクトルの入れ換えが、解に悪影響を及ぼす場合がある。

(6) 新しい複素定式による固有値問題のアダプティブメッシュ

新しい複素定式による固有値問題の次数は、多重相反定式の 2 倍となるため計算が多くなり効率は悪くなる。しかし、係数マトリクスの行の入れ換えのような不安要因はない。

(6), (7) のアダプティブ法では, 各要素における固有値に対する誤差を指標とする誤差評価を用い, 解析例ではかなり良い結果が得られた. 以上のことから, 2つのアダプティブ法にはそれぞれ特色があるが, 係数マトリクスの行の入れ換えによる影響を持たない複素定式を用い, 固有値に対応した誤差評価を行う後の方がより優れているといえる. ただし, 2つの方法はどちらも固有値の改善度を予測しながら要素分布のアダプティブ化を進めていくので, アダプティブの対象とする固有値の数が多くなると計算量大きくなるため効率の改善が必要である.

(7) 今後の課題

本論文では, Helmholtz 方程式の固有値問題に限定して解析法の開発を行い, 2次元問題を主として単純な形状の問題についての解析を行った. 今後の課題としては, 次の2つが挙げられる.

- 3次元問題を含むより複雑な問題について解析を行い, 有限要素法による結果と比較を行うことで提案した方法が有効に機能することを確認する.
- 弾性体を含む他の固有値問題についても多重相反定式の数理理論的裏付けを行い解析を行う.

ただし, これらの課題を達成するためには, 数値計算において必要とされる計算機の記憶容量の縮小化と, 計算時間を短縮するための解析効率向上が必要である. また, 本論文で提案した解析法にとどまらず, より高効率で安定した固有値解析法を開発することも必要である.

最後に, 本論文で示した一連の解析方法は, 境界のみを解析の対象とする境界要素法が固有値解析の手段として有効に機能することを, 著者らの研究を通じてはじめて示したものである.

謝辞

本研究を遂行するにあたり, 名古屋大学工学部 大野信忠教授には懇切な御指導を賜りました. ここに深く謝意をあらわします.

また, 本論文の内容に関し貴重な御助言をいただいた名古屋大学工学部 村上澄男教授, 太田 博教授には, 厚くお礼申し上げます.

さらに, 本研究を遂行するにあたり幾年にわたり御指導いただき, 修士修了後在職中であった私に本論文を作成する機会を与えて下さった名古屋大学情報文化学部 神谷紀生教授には心から感謝いたします.

また, 本研究の遂行にあたり御協力いただいた名古屋大学工学部機械情報システム工学科 機械情報処理講座に在学の方々ならびに同講座の卒業生の皆様に感謝いたします. なかでも, 本研究の遂行に協力していただいた野替一義氏 (平成4年度卒業, 現三菱自動車工業株式会社勤務), さらに, 諸事にわたり御指導下さった名古屋大学工学部 北 栄輔講師, 川口 健氏 (昭和64年度卒業, 現YHP勤務) に厚くお礼申し上げます.

また, 本研究に際し, 名古屋大学大型計算機センターを利用したことを付記し, 感謝します. 最後に, 本論文を作成する機会を与えて下さった三菱電機株式会社 稲沢製作所の皆様に感謝いたします.

1995年1月

名古屋大学工学部機械情報システム工学科
安藤 英司

付 録

長方形領域の固有値

図 1.1 で示した領域 Ω は、実際の解析では、複雑な形状を考えるので、式 (1.2) を解析的に解くことはできない。しかし、領域の形状が長方形の場合は、式 (1.2) を変数分離することで、解析解を得ることができる。以下に境界条件と共にその固有値を示す。

長方形の縦横の辺の長さを L_y , L_x としたとき、Helmholtz 方程式を xy 座標系で変数分離により解くと、固有値は境界条件により次のように与えられる。ただし、 m , n はそれぞれ x , y 方向のモードを表す整数とする。

Neumann 問題 (図 A.1(a))

$$k_e = \pi \sqrt{\left(\frac{m}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{n}{L_y}\right)^2} \quad (m \geq 0, n \geq 0) \quad (\text{A.1})$$

Dirichlet 問題 (図 A.1(b))

$$k_e = \pi \sqrt{\left(\frac{m}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{n}{L_y}\right)^2} \quad (m \geq 1, n \geq 1) \quad (\text{A.2})$$

混合境界条件 1. (図 A.1(c-1))

$$k_e = \pi \sqrt{\left(\frac{m+1/2}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{n}{L_y}\right)^2} \quad (m \geq 0, n \geq 0) \quad (\text{A.3})$$

混合境界条件 2. (図 A.1(c-2))

$$k_e = \pi \sqrt{\left(\frac{m}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{n}{L_y}\right)^2} \quad (m \geq 1, n \geq 0) \quad (\text{A.4})$$

混合境界条件 3. (図 A.1(c-3))

$$k_e = \pi \sqrt{\left(\frac{m+1/2}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{n+1/2}{L_y}\right)^2} \quad (m \geq 0, n \geq 0) \quad (\text{A.5})$$

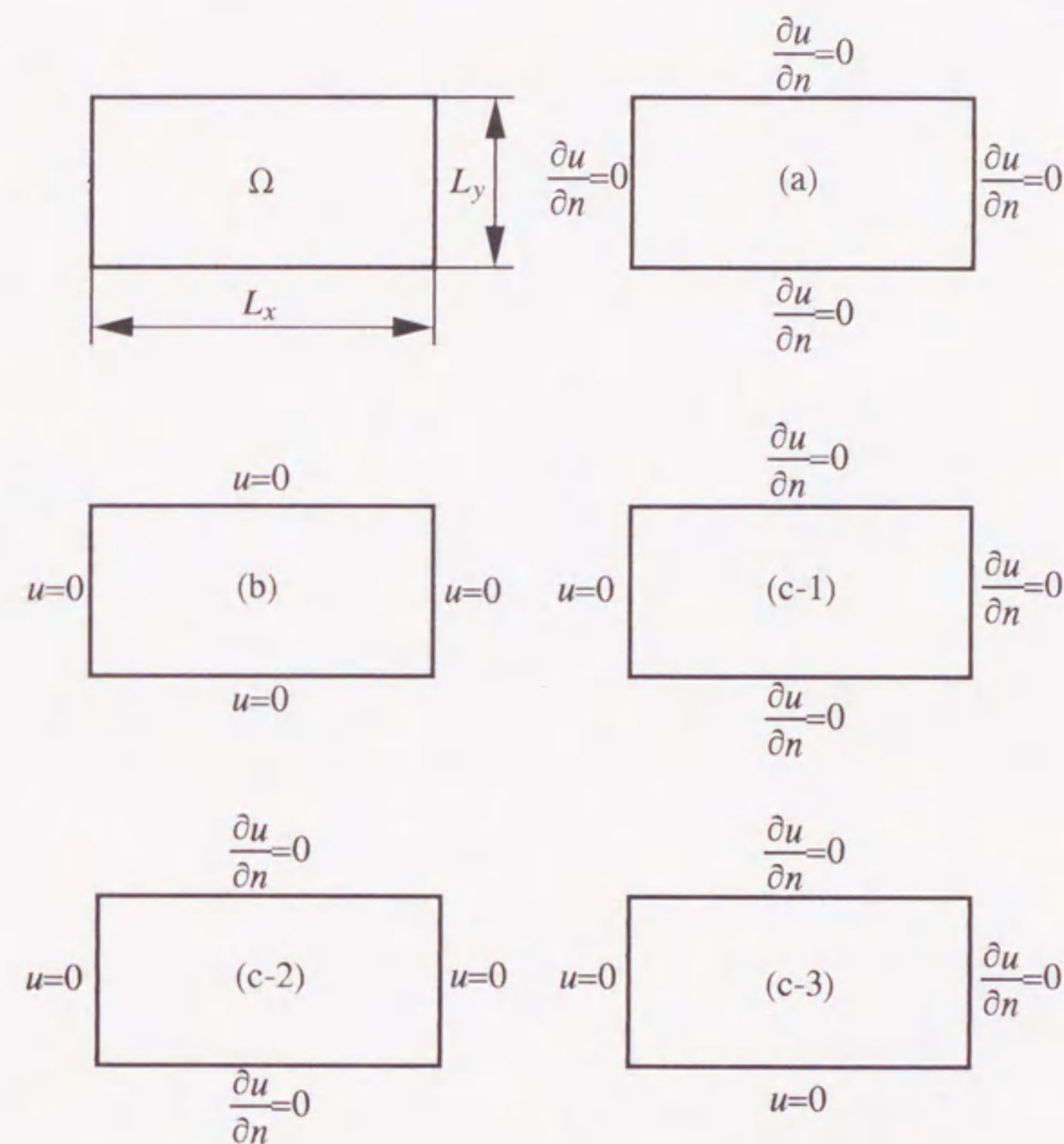


図 A.1: 同次な境界条件を与えた長方形領域の固有値. (a) Neumann 問題, (b) Dirichlet 問題, (c-1) ~ (c-3) 混合問題

