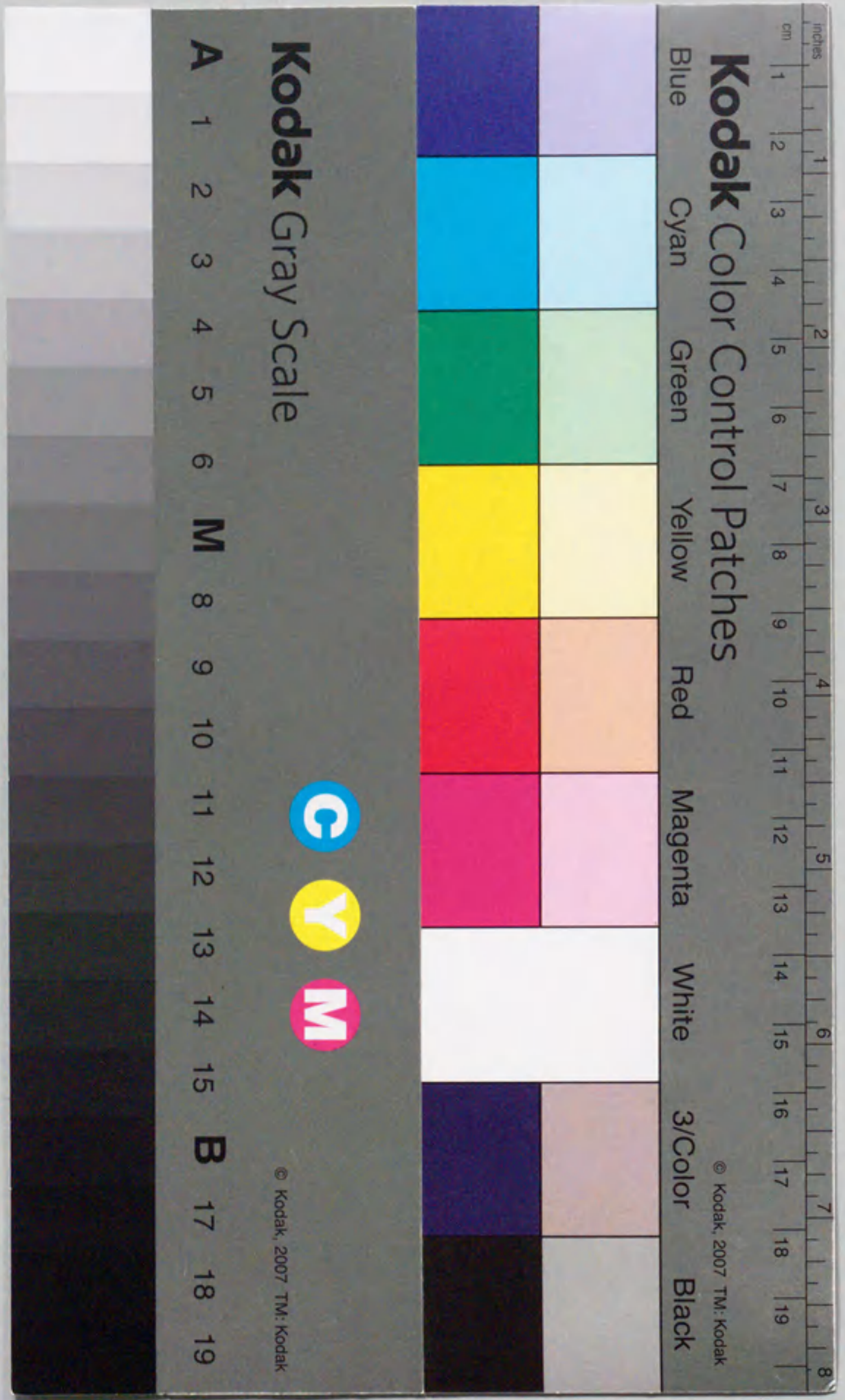


①

報告番号 乙第 - 4867 号

通信網信頼性評価法に関する研究

林 正博



目次

第一章 概論	1
1.1 研究の背景	1
1.2 研究の位置づけ	2
1.3 研究の内容	3
1.3.1 評価モデルと評価尺度	3
1.3.2 評価アルゴリズムに対する研究のアプローチ	7
1.3.3 本研究で得られた結果	8
第二章 グラフモデルの信頼度評価法	10
2.1 まえがき	10
2.2 モデルと評価尺度	12
2.3 従来結果	14
2.3.1 直並列グラフ	14
2.3.2 ICFグラフとIFCFグラフ	16
2.3.3 デルタ・スター縮退可能グラフ	18
2.3.4 平面CFグラフ	19
2.4 双対問題	21
2.5 双対問題の縮退法	21
2.5.1 定義	21
2.5.2 縮退法と一般分解法	23
2.6 多項式オーダーで評価可能な新しいグラフのクラス	27
2.6.1 平面双対CFグラフ	28
2.6.2 平面双対CFグラフの評価法	29
2.7 むすび	34
付録	35
第三章 パスの容量の割り当てられた通信網モデルの信頼度評価法	39
3.1 まえがき	39
3.2 電話網信頼性設計の考え方	39
3.3 モデルと評価尺度	42
3.3.1 モデル化の考え方	42
3.3.2 容量の割り当てられたパスによる定式化	42
3.4 容量付き極小パス法による評価法	45
3.4.1 容量付き極小パスの定義	45
3.4.2 容量付き極小パスの生成アルゴリズム	47
3.5 評価例	52
3.6 むすび	57
付録	58

第四章 故障頻度評価法	76
4.1 まえがき	76
4.2 対象とするモデルと仮定	76
4.3 微分作用素Dの定義と基本的性質	78
4.3.1 基本的考え方	78
4.3.2 微分作用素Dの効果	78
4.4 微分作用素Dの応用	82
4.4.1 正確な縮退法への応用	82
4.4.2 近似法への応用	84
4.5 むすび	86
付録	87
第五章 結論	88
謝辞	90
参考文献	91

第一章 概論

1.1 研究の背景

電気通信は、この百年余の間に遠隔地で瞬時に意志を疎通し合う手段として着実に発展し、通信網は人間活動を支えるインフラストラクチャとして、現代社会のあらゆる方面に深く浸透している。

こうした電気通信は電信符号を用いたデジタル通信から出発し、アナログ信号を伝送・交換するアナログ電話網として発展してきた。1962年の米国におけるデジタル伝送方式の実用化、1970年の仏国での最初のデジタル交換機の導入を経て、集積回路技術の驚異的な進展、ユーザデマンドの多様化等を背景に、通信網のデジタル化が進み、電話・データ・画像等各種のメディアサービスを統一的な手順で提供するISDN（サービス統合デジタル網）へと発展してきた。近い将来には、各家庭へ直接光ファイバーが引き込まれるアクセス系の光ファイバー化が計画され、マルチメディアサービス等の新通信サービスに向けての技術開発が確実に進行している。

このような技術的進歩と共に、電気通信を取り巻く大きな社会変化が起きている。すなわち、通信技術と通信市場に対応した世界的な電気通信の自由化である。通信における先進諸国では従来の国営企業の形態を民営化し、競争原理の導入を図っている。米国では1984年事実上の独占に近い企業であったAT&T(米国電信電話会社)が分割され、より一層の厳しい市場競争が展開されている。

日本では日本電信電話公社(NTT)と国際電信電話株式会社(KDD)によって、国内・国際通信サービスが独占的に提供されていたが、1985年に電気事業法の設定と共に国内・国際通信ともに競争が導入され、今日に至っている。

厳しい競争の下で、電気通信事業者がその事業の継続と発展を図るには、ユーザの満足度の高い通信サービスを提供し続けていくことが必須である。そして、ユーザの感じる満足度は提供された通信サービスの通信品質に大きく左右されるという考えから、通信品質のあり方を吟味し、適切な通信品質を実現する技術を確立することがますます重要な課題となっている。

この課題に対して、伝送品質、接続品質、信頼性品質の観点から多くの活発な研究が行われている。伝送品質に関しては、通信網において伝送誤りや伝送遅延に関する適切な値を実現する通信網を構成する研究、接続品質に関しては呼損となるユーザの割合を適切な値以下にするための研究、信頼性品質に関しては故障が発生しても、できる限り通信機能が正常であるようにするための研究が行われている。

いずれの品質項目についても、通信網に対する品質設計、品質評価、品質管理の一連の流れに従って適切な品質を提供できる通信網が実現できる。すなわち、コストや方式に伴う制約条件とユーザ要望とのトレードオフとし、実現可能な網構成を明らかにすること(品質設計)、実現された通信網において品質を観測し、観測された品質を通信網の運用及び品質設計・品質評価の見直しに反映すること(品質管理)、品質設計・管理のために、各網構成要素の品質パラメータから通信網としての品質を定量化し、推定す

ること（品質評価）の全てが適切な通信品質を実現するために必要である。

信頼性品質に関しても、設計・管理・評価法に関する多くの研究がなされている。

文献[49]では、通信網信頼性設計法として通信網における故障発生時の影響の広さを加入者エリアの加入者数から算出し、さらにユーザの損失を定量化し、損失値がある一定値未満となる確率を適切な値にするという信頼性設計の考え方を示している。文献[60]では、通信網の故障のひどさを回線残存率（故障が発生しても使用可能であった回線数の正常時における回線数に対する割合）によって分類し、回線残存率が一定値未満となる確率を適切な値にするという信頼性設計の考え方を示している。

文献[51]では通信網信頼性管理法に関する研究として、通信網の管理のために設定されているエリアに着目し、ユーザからは意識されにくい、そのエリアの管理者にとっては重要であるエリア内に発生する故障発生年間件数を少なくするための方法が検討されている。文献[50]では信頼性を観測するに際し、観測時間が十分長くとれないことから比較的短い観測時間のもとでの信頼性のばらつきを累積故障時間として測定する検討が行われている。

いずれにしても通信網の信頼性設計・管理を適切に行うためには、通信網としての信頼性を定量的に測ることが前提であり、測られた信頼性の値が適切になるように設計・管理を行うことが基本的な考え方である。すなわち、設計・管理の立場から信頼性の値に対する適切な値を示しても、どのような網構成において、示された値が実現されるのかが分からなければ現実の通信網の信頼性を改善することができない。つまり、網構成要素の信頼性パラメータと網構成から、通信網としての信頼性を推定・評価する通信網信頼性評価法が通信網の適切な信頼性を実現するための必須の基盤技術となる。

1.2 研究の位置づけ

通信網の信頼性評価の問題も既に長い歴史を持ち、多くの研究がなされている^{[1][60]}がそのほとんどはグラフ理論的な方法に基づいている。

この方法は簡便で利用範囲が多いとされるが、具体的な応用として挙げられている例は計算機網、特にARPANETの評価が中心である^{[2][60]}。すなわち、グラフ理論的な方法は計算機網のバックボーン的设计を行うために実際的な必要性が生じ、研究され、結果として他の応用が研究されてきたと考えられる^[6]。

一方電話網の設計の立場からは、いわゆるグラフ理論的な定式化では不十分であることが文献[60]によって指摘されている。文献[60]は電話網の階層構造、同時故障を引き起こす故障の因果関係、回線数の減少として容量の劣化を表現する必要性等の複雑な要因を考慮する必要があると述べている。このような複雑な構造を記述するためには、グラフのようなトポロジカルな構造に着目した表現よりも、通信機能の構造に着目した表現がより適切であることを指摘し、通信機能の構造をパスの割当として表現する定式化を提案している。

これらの通信網信頼性評価に関する研究の経緯を踏まえれば、研究対象となる通信網を計算機網と電話網に分けて扱い、各々の特徴を考慮した通信網モデルを整理し、信頼

性評価法を研究するアプローチが適切であると考えられる。現実問題としてNTTは電話網とは別の計算機網バックボーン構築を現在計画しており、企業の観点からも計算機網と電話網は成熟度もサービスのタイプも異なる網として、異なる品質・信頼性の考え方が要求されている。

本論文では、特に通信事業者が置かれている現在の立場から必要な通信網評価の課題を整理し、評価法を提案する。

1.3 研究の内容

本節では研究の内容を整理し、評価モデルと評価尺度、評価アルゴリズムに対する研究のアプローチ、本研究で得られた結果を簡潔にまとめる。

1.3.1 評価モデルと評価尺度

通信網信頼性評価法を確立するためにまず必要なことは、通信網の信頼性とは何かを明らかにすることである。そもそも信頼性とはJIS規格（文献[28]参照）によれば「系、機器、部品等の機能の時間的安定性を示す度合い、または、性質」と定義されている。この定義に従えば、通信網の信頼性とは通信網における故障のしにくさ、あるいは、通信網の機能が正常である度合いのことと考えられる。従って、通信網信頼性評価法の研究の第一歩は、通信網の機能が正常である度合いをどのように定量的に測るかという問題から始まる。つまり、以下の課題を解決する必要がある。

課題1：通信機能が正常であることをどのように規定するか。

課題2：上の規定のもとで、通信機能が正常である度合いをどのように数値化するか。

課題1は、通信機能をどのように定義し、通信網構成要素の故障の通信機能への影響をどのように想定するかという通信網信頼性評価モデルを構築するという課題であり、課題2は、通信網の信頼性をどのような考え方で、どのような評価尺度で評価するかという通信網信頼性評価尺度に関する課題である。

(1) 通信網信頼性評価モデル

適切な品質を実現することの目的は、ユーザに満足されるサービスを提供することである。信頼性品質にとってもユーザからの立場が重要である。従って、課題1に対しては通信網の機能はユーザに通信サービスを提供することであるから、ユーザにとって通信に支障が無い状態を『通信機能が正常』であると規定すべきである。

しかし、通信に支障が無い状態の定義は対象とする通信網や解釈によって異なったものになる。LAN等の計算機網では二つの通信装置A,Bがケーブルや無線によって接続されていれば通信可能であり、そして、A,Bが通信可能でB,Cが通信可能であればA,Cも通信

可能である。この場合、網の物理的なトポロジーの連結性が保たれなくなることがユーザにとっての通信の支障を引き起こす。

ただし、複数のLAN, WANが相互接続している複雑な網構成の場合にはルーティングアルゴリズムも複雑であり、単純に物理的なトポロジーの連結性とユーザが通信サービスを利用できることを同一視することはできない。しかし、同一のLAN内あるいは、バックボーンを対象とするならば、これらの仮定は妥当であると考えられている^{[9][67]}。要するに、計算機網は独立している相対的に小さな網（バックボーンもその一つ）の集合体であり、通信網が持たなければならない複雑な階層・制御の構造をそれぞれの小さな網の内部ではなく、網間の相互接続の問題に置き換えているのである。

NTTは、現在計算機網のバックボーンの構築を目前の事業課題としており、一つのバックボーン的设计のための信頼性評価法が緊急の課題となっている。従って、本論文では、バックボーン的设计という観点から物理的な連結性が保たれることを計算機網の通信機能が正常であるとみなす。

一方の電話網では通信網全体がNTT全体によってほぼ一元管理されており、一つの網の内部に複雑な階層・制御の構造が組み込まれている。この事実が単純なグラフモデルで電話網を表現することを困難にしている。

実際、電話網においては物理的に連結していることとユーザが通信サービスを利用できることが等しいとは限らず、伝送パス等の通信経路が割り当てられてはじめて通信サービスが利用できる。割り当てられた通信経路には、通信容量（利用できる回線数）が定まっており、通信容量の減少が、ユーザにとっての通信の支障を引き起こす。

すなわち、電話網の場合、通信に支障がない（通信機能が正常である）ことは、これらの通信経路によって確保できる通信容量が、ある程度未満に減少しないことに対応している。

これらの観点から、本論文では、『通信機能が正常』であることを以下の二通りに規定する。

- (a) 計算機網を対象とし、通信網の物理的なトポロジーの連結性が保たれることを『通信機能が正常』であると規定する。
- (b) 電話網を対象とし、通信設備間に割り当てられた通信経路によって確保される通信容量が一定値以上である状態を『通信機能が正常』であると規定する。

（これらの二種類の『機能が正常』の定義に対し二種類の言葉（例えば正常1、正常2）が本来必要であるが、言葉の煩雑さを避けるためと本章の後半で述べる信頼度、故障頻度の定義を述べるための整合性から誤解を生じない限り、『機能が正常』という言葉を一貫して用いる。誤解が生じる恐れのある場合には何を対象としているか（計算機網、電話網）等を明確に述べることによって区別を容易にする。）

- (a)の規定は通信網を節点と枝からなるグラフとしてモデル化することを意味している（グラフモデル）。通信網の物理的なトポロジーはグラフとして表現できるからである。

グラフモデルにも複数の種類が考えられている^[7]。枝に向きを与えたグラフ（有向グラフ）、枝に向きを与えないグラフ（無向グラフ）、節点は故障しないとするグラフ、節点も枝も故障しないとするグラフが考えられている。計算機網を対象とするならば通信は双方向性を仮定することが妥当である^[9]から無向グラフがモデルとして適切である。節点の故障も枝の故障も発生し得るが、全節点間の連結性を考える場合には節点の故障を考えないモデルと等価であることが分かっているので^[5]、本研究では節点は故障しない無向グラフを考える。

結局(a)の規定から以下の通信網モデルが導かれる。

- (a) 通信網を節点は故障せず、枝のみの故障を想定した無向グラフと考える。この無向グラフにおいてグラフとしての連結性が保たれていることを通信網において通信機能が正常であるとみなす。

グラフモデルは通信網のトポロジーに依存した検討を行うには有効な表現能力を持つ。しかし(b)のように、トポロジーと共に通信経路の割り当てや通信容量を考慮した場合には必ずしも有効ではない。なぜならば、グラフモデルはトポロジーが連結してさえいれば、各通信装置間が通信可能であるという前提に基づいているが、この前提は現実の電話網が伝送パス等の通信経路とその容量が割り当てられて初めて通信可能となる事実、及び、網の階層構造を反映してないからである。

このような現実の電話網の複雑な条件を考慮した通信網モデルを文献[60]で提案している。このモデルは通信網をその構成要素、構成要素の集合としてのパス、パスに割り当てられた容量の組み合わせとして表現し、通信網の容量を『故障した構成要素を含まないパスに割り当てられた容量の和』として定義する。この定義のもとで、通信網の容量がある一定値以上であることを『通信網の機能が正常である』と規定する。

提案されたモデルは、各パスが含む構成要素、パスに割り当てられた容量の値を巧みに変更することによって、非常に複雑な網構成も適切に表現することができる。

本研究では(b)の規定に対するモデルとして以下の通信網モデルを想定する。

- (b)通信網をその構成要素と構成要素の集合として定義されたパス、パスに割り当てられた容量の組と考える。このとき、通信網の容量を故障している構成要素を含まないパスの容量の和と定義し、通信網の容量が一定値以上であることを通信網の機能が正常であるとみなす。

本研究では(a)をグラフモデル、(b)をパスの容量の割り当てられた通信網モデルと呼ぶ。

(2) 通信網信頼性評価尺度

通信機能が正常であることの内容が規定されれば、次に、正常である度合いを測る尺

度（通信網信頼性評価尺度）を定める必要がある。通信網信頼性評価尺度として考えられる量は様々である。特に、グラフモデルに対しては多くの信頼性評価尺度が提案されている（連結度、直径、連結確率、その他（文献[27]参照））。しかし、大別すれば正常である度合いを決定論的に測る決定論的評価尺度（Deterministic measures）と確率的に測る確率論的評価尺度（Probabilistic measures）がある。どちらの評価尺度が適切であるかは、どのような目的、立場の下で信頼性を測ろうとしているのかに依存する。本研究は通信網の品質に関する研究の一環であり、できる限りユーザの満足度の高いサービスを実現することを最終的な目的としているのであるから、よりユーザに近い立場から信頼性評価尺度を決定する必要がある。この観点からは、決定論的評価尺度は確率論的評価尺度に比べて簡略的な評価尺度ではない。

例えばグラフモデルにおいて連結度を評価し、任意の節点間に二つ以上の経路を確保できることが分かったとしても、各枝の故障する確率が高く二つ以上の枝の故障が頻繁に発生する場合には節点間の連結性を保つことは難しく、ユーザの体験する通信の支障が多発するであろう。逆に各枝の故障する確率が極めて小さければ、たとえ節点間に二つの経路が確保できるとは限らなくてもユーザは通信の支障を経験することが少ないであろう。ユーザの満足度の高い通信網の信頼性品質を実現するという観点からは、各構成要素の故障しやすさが反映された確率論的評価尺度がより適切である。（グラフモデルだけでなく、パスの容量の割り当てられた通信網モデルに対しても同様に確率論的尺度が適切である。）

ところが、確率論的評価尺度にもいくつかの種類が考えられる。通信機能が正常である時間的割合が重要であるならば、

$$\text{信頼度} = \text{MTBF} / (\text{MTBF} + \text{MTTR})$$

を評価する。ここで、

$$\begin{aligned} \text{MTBF} &= \text{通信機能が正常に回復してから再び正常でなくなるまでの平均時間} \\ \text{MTTR} &= \text{通信機能が正常でなくなってから再び回復するまでの平均時間} \end{aligned}$$

である。

時間的割合よりも通信機能が正常でなくなる事態が一度でも発生することが大きな損失を引き起こす場合には、

$$\begin{aligned} \text{故障頻度} &= \text{単位時間あたりに通信機能が正常でなくなる平均回数} \\ &= 1 / (\text{MTBF} + \text{MTTR}) \end{aligned}$$

を評価する。他にもMTBF、MTTRを評価する場合や、

$$\text{平均サイクルタイム} = \text{MTBF} + \text{MTTR}$$

を評価する場合もある。しかし、これらの式から容易に分かるように信頼度と故障頻度が分かれば他の評価尺度は簡単に計算できる。従って、本研究では確率論的評価尺度として、信頼度と故障頻度を信頼性評価尺度とする。

また、言葉の用法として、MTBF / (MTBF + MTTR) を稼働率(Availability)と呼ぶ方が一般的であるかも知れないが、本研究で参考とした信頼性理論に関する文献[1]-[12]の用語法に合わせて信頼度(Reliability)という言葉を用いた。

1.3.2 評価アルゴリズムに対する研究のアプローチ

前節により、通信網信頼性評価モデル・尺度は明確になった。次の課題は、これらの通信網信頼性評価モデル・尺度に対する実用的な通信網信頼性評価アルゴリズムを確立することである。実用的とは、高速に正確な値あるいは高精度の近似値を算出できるという意味である。以下の課題にそって検討を進める。

課題I： グラフモデルにおける信頼度評価を行うアルゴリズムを検討する。

課題II： パスの容量の割り当てられた通信網モデルにおける信頼度評価を行うアルゴリズムを検討する。

課題III： 課題I, IIで確立した信頼度評価アルゴリズムを故障頻度評価法に変換するアルゴリズムを検討する。

(1) グラフモデルの信頼度評価アルゴリズムに対するアプローチ

グラフにおける信頼度評価アルゴリズムを確立する研究は長い歴史を持っている^{[11][27][31][33]}。にもかかわらず、この問題はNP-困難であることが知られており、任意の無向グラフに対し高速に（多項式オーダーで）その信頼度の正確な値を評価することはほとんど不可能であると考えられている。そこで、最近の動向としては正確な信頼度評価を行うことのできるグラフのクラスを構成し、そのクラスを漸次拡大するというアプローチが活発に行われている。特に、グラフを平面グラフに制限した場合において著しい結果が得られている。最も最近の結果は文献[5][6]の結果であり、平面CFグラフと呼ばれるクラスが多項式オーダーで正確な信頼度評価が可能であることが示されている。このクラスは多項式オーダーで信頼度評価可能であるグラフとしてそれまで知られている直並列グラフ^[9]、IFCFグラフクラス^[9]、デルタ・スター縮退可能グラフ^[9]を含む。このため、多項式オーダーで評価可能な平面CFグラフよりも大きな平面グラフのクラスを構成することが重要な未解決のオープンプロブレムとして提示されていた。

そこで、本研究ではこの未解決問題を検討し、平面グラフを対象としていることに着目したグラフの変換法を考察し、その変換法に基づいて多項式オーダーで信頼度を評価できるより大きな平面グラフを構成することを試みる。

(2) パスの容量の割り当てられた通信網モデルにおける信頼度評価アルゴリズムに対するアプローチ

電話網をパスの容量の割り当てられた通信網モデルとして定式化するという提案は、文献[60]でなされた。本研究ではさらに検討を深め、より厳密で数学的なモデル表現を考察する。すなわち、集合と関数という単純な数学的概念からのみ構成した表現を与えることを試みる。さらに得られた数学的表現に特徴的ないくつかの組み合わせ的な性質を考察し、これらの性質を用いて信頼度を求めるアルゴリズムを検討する。

(3) 故障頻度評価アルゴリズムに対するアプローチ

信頼度評価アルゴリズムの研究が活発に行われているのに対し、故障頻度評価アルゴリズムの研究はあまり行われていない。最近では、信頼度を表す関数を一定の規則で変換することによって自動的に故障頻度評価アルゴリズムに変換する研究がなされている^{[13][15][26][31][32]}。しかし、これらの方法は信頼度を表す関数が特定の表現形式を持つ場合に限り、その形式で表現されない場合には故障頻度評価アルゴリズムに変換することができなかった。そこで、本研究では信頼度を表す関数が特定の形式で表現されない場合も、一定の簡単な規則的変換によって故障頻度を表す表現に変換する方法を検討する。また、得られた方法によって、実際に(1)(2)で得られた評価アルゴリズム、及び、これまで信頼度評価アルゴリズムとして有効とされてきた他の方法を故障頻度評価法に変換することを試みる。

1.3.3 本研究で得られた結果

前節で示した研究のアプローチに従い研究を進め、以下の結果が得られた。

(1) グラフモデルの信頼度評価アルゴリズムの検討に対する結果

グラフモデルが平面グラフに制限されるならば、その信頼度評価アルゴリズムを求める問題は対象とするグラフの双対グラフにおいて少なくとも一つの閉路が存在する確率を求める問題(双対問題)に等しいことを示した。信頼度評価が困難である無向グラフに対しても、その双対問題が簡単に評価できる場合があることが判明した。これらの事実を用いて、平面CFグラフを含むより大きなグラフのクラスとして平面双対CFグラフと呼ぶクラスを新たに構成し、任意の平面双対CFグラフは多項式オーダーでその信頼度を評価することができることを示した。

これによって、従来、高速な評価法が存在しなかった複雑な通信網構成に対しても、正確にその信頼度評価を行うことができるようになった。

(2) パスの容量の割り当てられた通信網モデルにおける信頼度評価法の検討に対する結果

網構成要素間の物理的な構成に着目するよりも、むしろ、通信経路と通信経路を構成する網構成要素間の故障の因果関係に着目した通信網モデルを提示した。一つの通信経路とその通信経路に影響する網構成要素の集まりを一つのパスと呼び、パスと容量の関係を記述する数学的表現を与え、通信網の信頼度を定義し、その値を評価するアルゴリズムを提示した。評価アルゴリズムは通信網構成要素に対応する集合とパスの間に成立する組み合わせ的な性質に基づき、正確に通信網の信頼度を評価できる。

この方法によって、通信網の通信経路数が数十であっても高速に通信網信頼度評価を行うことが可能であり、現実のデジタル電話網を対象とした信頼度評価が十分可能である。

(3) 故障頻度評価アルゴリズムの検討に対する結果

信頼度を表す表現を故障頻度を表す表現に変形するために、特定の微分作用素を作用させる方法が有効であることを示した。この方法を主とする変換法を用いれば、これまで信頼度評価法として提案されてきたアルゴリズムのほとんどが自動的に故障頻度評価アルゴリズムとして利用できる。この結果を(1)(2)の結果、及び、その他の評価アルゴリズムと合わせれば、故障頻度に関しても大規模な通信網に対して十分有効な故障頻度評価アルゴリズムが自動的に導かれる。

第二章 グラフモデルの信頼度評価法

2.1 まえがき

NTTは長い間、電話サービスに重点を置いた事業を行ってきたが、現在事業の中心をマルチメディアを中心とする計算機網サービスに移そうとしている。そのための第一歩として電話網とは別の計算機網バックボーンを構築する計画を持っている。電話網と別に作る理由は、サービスの質が異なることと料金に対する考え方が異なることによる。すなわち、電話網ではエンド・エンドの通信サービスを提供しているが、計算機網ではブロードキャストサービスやWWWにおける各種サーバーへアクセス等、広がりを持ったサービスが中心になることが予想される。また、料金体系も利用時間に対する課金から定額性（毎月、あるいは、毎年一定額）の導入が検討されている。

この計算機網バックボーンの計画はまだ始まったばかりであり、その具体的な品質のあり方、料金のあり方は机上検討、実験的なサービス開始による現実的な問題の抽出、抽出された問題の解決、本格的なサービス開始等の複雑なプロセスを経て将来実現される。研究的課題も多いが、未整理な課題も多い。

どれほどのユーザ数が見込まれるかも分からない現段階としては、余りに精密な品質設計よりも後になって変更の難しく、かつ、初期投資に大きな影響を与える網の骨格の構造、すなわち、網トポロジーの決定が緊急の課題である。網トポロジーは信頼性の観点から決定されると言っても過言ではなく、想定される複数の網トポロジーからより適切な信頼性を持つものを選ぶための信頼性評価法の確立が急務となっている。

グラフモデルは、まさにこのような意味での計算機網の信頼性評価に適切なモデルである。

ところが、グラフモデルにも幾つかの種類がある。まず、枝に向きがある場合（有向グラフ）と無い場合（無向グラフ）がある。通常局舎を節点、伝送路を枝で表すことから枝の向きを想定するかどうかは、伝送路に双方向通信を認めるかどうかによって依存する。この点については、計算機網を対象とするならば、双方向性を認める想定が妥当であると考えられている^{[9][6]}。無向グラフを対象とする場合でも、節点が故障する場合、故障しない場合、枝が故障する場合、故障しない場合等の種類が考えられる。現実の計算機網においては局舎内の装置も伝送路も故障する。従って、節点も枝も故障するモデルが適切である。ところが、評価尺度によっては節点と枝の両方が故障し得るモデルを枝のみが故障し得るモデルに変形できる。つまり、節点と枝の両方が故障し得るモデルを対象とするか、枝のみが故障し得るモデルを対象とするかは評価尺度に依存する。

第一章で述べたように、ユーザの観点から確率的な評価尺度が妥当であると考えられる。しかし、確率論的な評価尺度にも幾つかの種類がある。最も基本的な評価尺度は、局間信頼度（End-to-end reliability あるいは Two-terminal reliability）と呼ばれるものであり、特定の二つの節点に着目し、それらの二つの節点間が連結している確率を評価尺度とするものである。

次に基本的な評価尺度は総合信頼度（Overall reliability）である。これは全ての節点間

が連結している確率と定義される。

これらの評価尺度の一般化として、 K 局間信頼度（ K -terminal reliability）が定義できる。 K 局間信頼度は節点の集合を V としたとき、 V の部分集合 K を指定し K に含まれる全ての節点が連結している確率と定義される。 K が含む節点数が2であれば K 局間信頼度は局間信頼度に等しく、 $K=V$ ならば総合信頼度に等しい。

最近では、確率とともに節点と枝に容量を与えるモデルも提案されている。すなわち、2節点間の最大フローは枝の故障によって影響される確率変数となる。この変数の確率分布、あるいは、平均値を信頼性評価尺度とするのである^[6]。

ところで、本研究は将来建設する計算機網のトポロジーの設計に資することを直接的な目的としている。網トポロジーは、コストの観点から一度網が構築されると変更が難しい。（トポロジー変更は通常、土木設備への投資が必要となり、高コストである）。一方各装置に通信容量がどの程度要求されるかはサービス開始後の利用実績に伴い、漸次変更されていくものである。つまり、サービスが未だに実現されていない現段階において各設備の通信容量を一定の値に仮定し、その値を前提に網トポロジーを設計しても意味のある検討とは言えない。

また、節点集合 K はサービス提供の中心となる設備、特にサーバーが配置されている局に対応するが、サーバーがどのように配置されるかも実際のサービス利用実績に伴い変更されていくものであり、長期的には全ての局舎にサーバーが配置されても適切な信頼性を提供できるように網トポロジーの決定を行うことが望ましい。

本章では、以上の観点から容量を無視した枝に向きのないグラフにおいて、枝に故障確率の与えられた無向確率グラフを対象モデルとし、 $K=V$ とした総合信頼度を評価尺度とする。（枝のみが故障し得るとしたのは、総合信頼度の場合に限っては節点の故障確率が与えられたモデルを枝のみが故障するモデルに容易に変形することができるからである^[6]。）なお、他の章との整合性と表記の簡便化を図るため、本章では総合信頼度を単に信頼度と呼ぶ。

無向確率グラフの信頼度を求める問題はその重要性にも関わらず、NP-困難（計算量がグラフの大きさに伴って指数オーダーで増大する）^[1]であることが示されており、巨大化、複雑化したグラフに対して実際的な観点からその計算は困難となる。

そこで、最近では実用的な近似アルゴリズムの研究とともに対象とするグラフを制限した上で、多項式オーダーで真値の信頼度が評価可能なグラフのクラス、すなわち、グラフの大きさに伴う計算量の増大が多項式オーダーであるクラスを明らかにしようとする研究が行われている^{[2][4]}。特に平面グラフに制限した場合において著しい結果が得られている。

最新の結果では平面CFグラフと呼ばれるグラフのクラスが多項式オーダーで信頼度を評価できることが示された^[5]。平面CFグラフは現在多項式オーダーで計算可能な平面グラフのクラスとしては最大のクラスである。このため、多項式オーダーで評価可能な平面CFグラフよりも大きな平面グラフのクラスを構成する問題が重要な未解決問題として提示されている^{[5][6]}。

本章ではこの未解決問題を検討し、平面グラフを対象としていることに着目したグラ

フの変換法として双対グラフへの変換を利用した新しい評価法を提案する。まず、無向確率グラフの信頼度を求める問題は双対グラフにおいて少なくとも一つの閉路が存在する確率を求める問題と等価であることを示す（グラフの双対問題）。次に、信頼度を評価する場合、その双対問題に縮退法と呼ばれる方法を用いることによって平面CFグラフより複雑であり、かつ、多項式オーダーで信頼度が評価できるクラスを示す。

2.2 モデルと評価尺度

[対象となるグラフ]

本節では節点は故障せず、枝 e にその枝が存在する確率 $p(e)$ が与えられている無向グラフ $G=(V,E)$ を評価対象とする。 V は節点集合、 E は枝集合である。

グラフ g が G の部分グラフであるとは g の節点と枝が G の枝及び節点になっていることをいう。

[道、閉路、連結、カットセット、連結度]

一つの枝が隣接する二つの節点をその枝の端点と呼ぶ。端点が $u, v \in V$ である枝を $e=(u, v)$ で表すとき、次のような節点 v_i と枝 (v_i, v_{i+1}) の交代系列を v_i から v_n への道と呼ぶ。

$v_1, (v_1, v_2), (v_2, v_3), \dots, (v_{n-1}, v_n), v_n$

特に、 $v_1 = v_n$ のとき、閉路と呼ぶ。

グラフ G が連結であるとは G の任意の2節点 u, v 間に道が存在することである（ G が1節点からなる場合も連結とする）。 G から枝の集合 U を取り除いたグラフが非連結となるとき、かつ、この条件を満たす U が極小であるとき U をカットセットと呼ぶ。

また、連結なグラフ G から節点集合 V_0 を取り除いたグラフが非連結となるとき、かつ、この条件を満たす V_0 が極小であるとき、 V_0 の節点数を G の連結度と呼ぶ。

簡単のために対象とするグラフの連結度は2以上であるとする。

[平面グラフ、双対グラフ]

G が枝を交差させることなく平面に埋め込み可能であるとき、 G を平面グラフと呼ぶ。

G を平面に埋め込んだとき、平面は複数の領域に分割される。この領域は以下の条件を満たす平面上の点の集合として定義される。

同じ領域に属する点は、 G の枝及び節点を經由せず互いに連続な曲線で結ぶことができ、異なる領域に属する点は G の枝及び節点を經由しないで互いに連続な曲線で結ぶことができない。

上のように定義された平面上の領域を面（face）と呼ぶ（図2-1）。

枝の個数と節点の個数が各々等しい二つの平面グラフ G と G^d において、 G のカットセットと G^d の閉路が1対1に対応するとき G^d を G の双対グラフと呼ぶ（図2-2）。

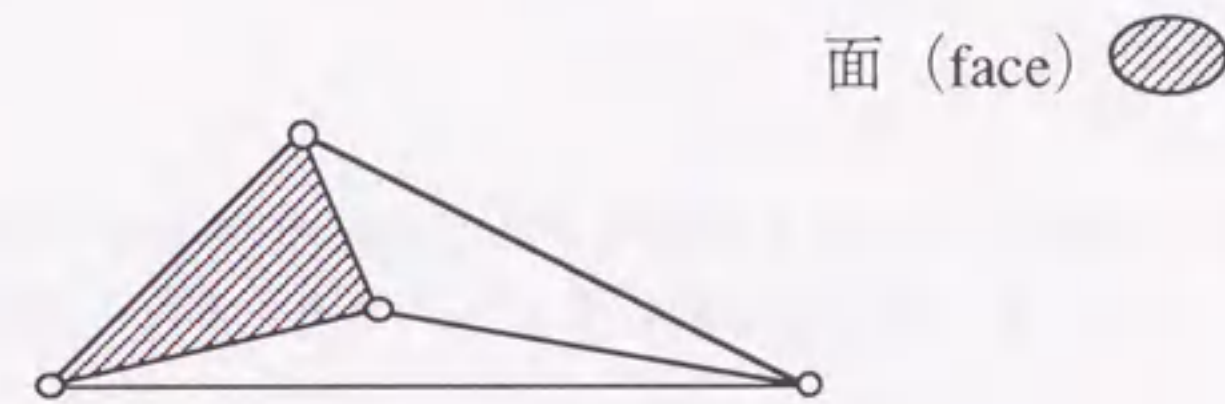


図2-1. 平面グラフと面

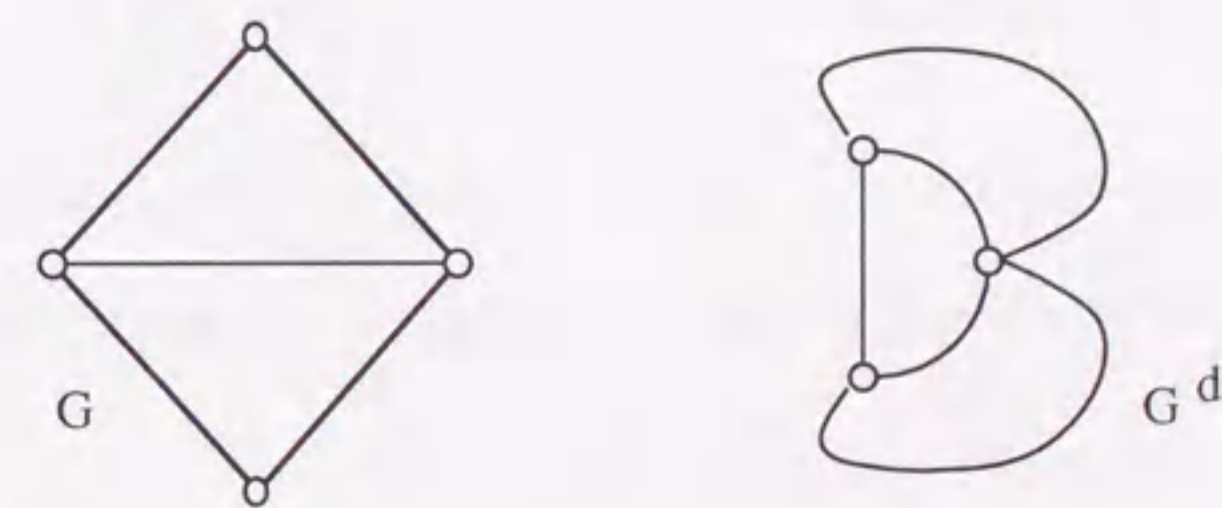


図2-2. 双対グラフ

G の各枝 e に対し G^d の枝 e^d を以下の性質を満たすように、1対1に対応させることができ

る^[29]。

G の枝の集合 $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ がカットセットであれば、かつ、そのときに限り $\{e_1^d, e_2^d, \dots, e_m^d\}$ は G^d における閉路である。

[次数、解放除法、短絡除法、短絡]

節点 v を端点とする枝の数を v の次数と呼ぶ。

グラフの枝を解放除去するとはその枝を取り除くことをいう。グラフの枝を短絡除去するとは取り除いた枝の両端点を一つの節点とみなすことをいう。本論文では複数節点を同一視することをそれらの節点を短絡するという。

[位相同型]

二つのグラフにおいて次数が2の節点を端点とする二つの枝のうち一つを短絡除去する操作を繰り返したとき、両方のグラフが同じグラフに到達するならば互いに位相同型であるという。

[評価尺度]

評価尺度としては信頼度（グラフの全ての節点間が互いに連結している確率）を検討する。

なお、対象とするグラフは全て連結度が2以上であると述べたが、その理由は、連結度が1の場合はグラフを連結度が2以上である部分グラフに分割することができ、信頼度は分割された各部分グラフの信頼度の積として容易に求められるからである^[6]。

2.3.従来結果

本節で、多項式オーダーで計算可能な平面グラフについて、従来までに得られている結果を整理する^{[2][6]}。

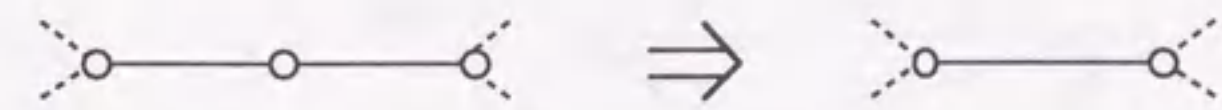
2.3.1 直並列グラフ

直並列グラフとは直列構成と並列構成からなるグラフを言う。直並列グラフは、並列の縮退と次数2縮退と呼ばれる方法によってその信頼度を評価できる。

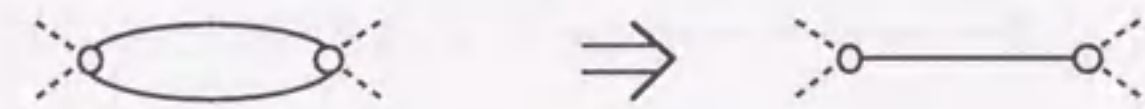
一般に縮退法とは、グラフに含まれる特定の部分グラフを他の部分グラフに置き換えることによって G を単純化していく方法である。一度置き換えを行ったとき置き換え以

前のグラフは置き換え後のグラフの信頼度から簡単な計算（例えば、定数を乗算する）によって得られる。置き換えを繰り返し行うことによって G が一つの枝にまで変形されればその枝の存在確率から G の信頼度が容易に求められる。

直並列の縮退とは直列構成、並列構成の二つの枝を一つに置き換える縮退である（図2-3）。直並列グラフは並列及び次数2縮退によって必ず1つの枝に変形されるグラフのクラスである。文献[2]では直列構成及び並列構成の枝を捜し、縮退を実行する実行時間が枝数に対して線形オーダーであるアルゴリズムを掲示している。図2-4に並列と次数2縮退によって1つの枝に変形される例を示す。



次数2縮退



並列の縮退

図2-3.直並列の縮退

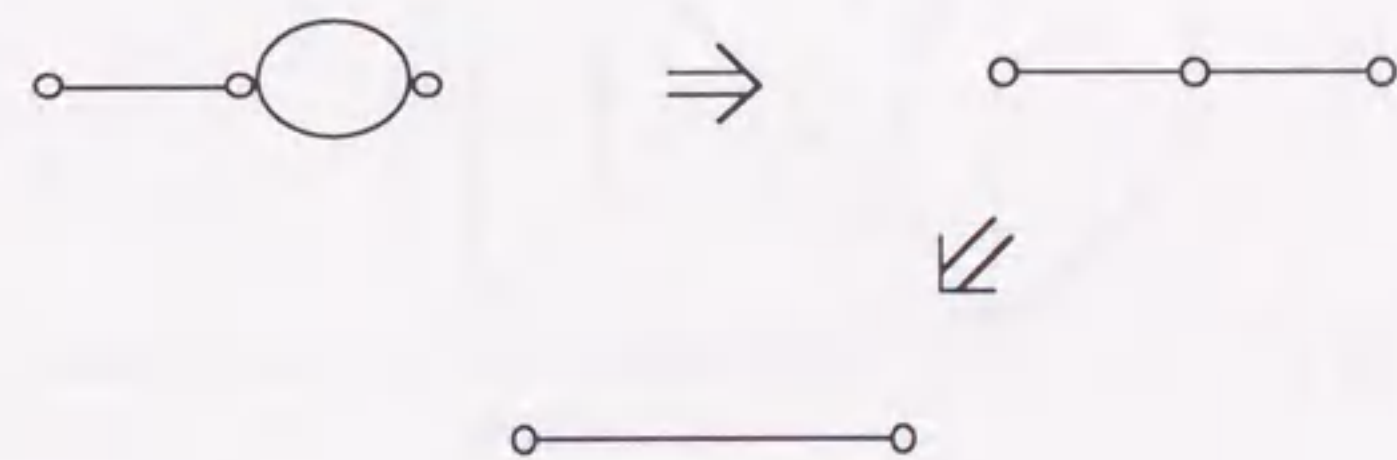


図2-4.縮退の適用例

2.3.2 ICFグラフとIFCFグラフ

(1) ICFグラフ

並列、次数2縮退をできる限り行った後、以下の条件を満たす平面グラフをICFグラフ (Inner-Cycle-Free Graph) と呼ぶ^[3]。

(条件) ある一つの面 f が存在し、任意の閉路が f と節点を共有する。

図2-5にICFグラフの例を示し、図2-6にICFグラフでない例を示す。

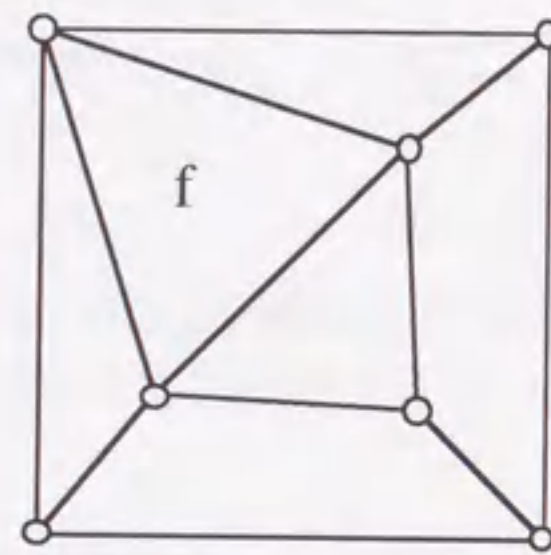


図2-5. ICFグラフの例

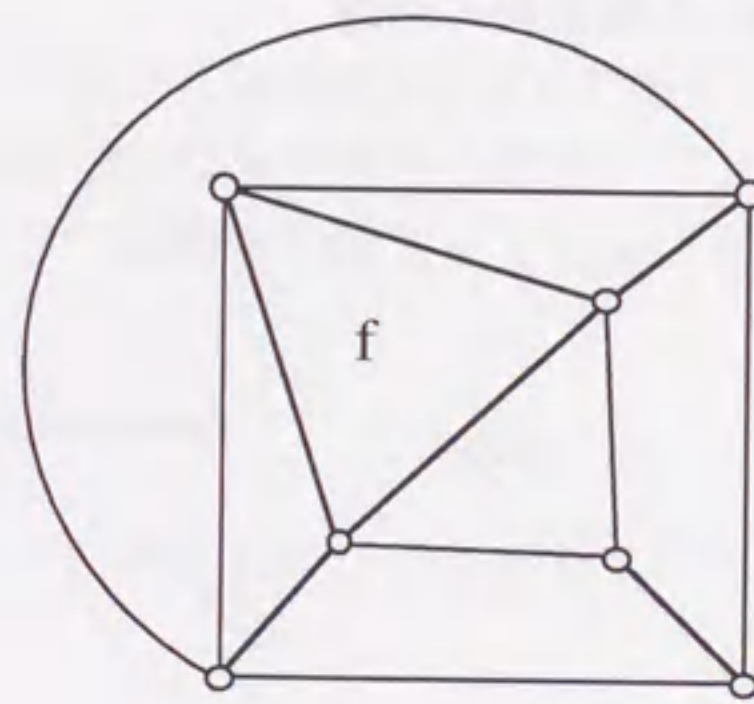


図2-6. ICFグラフでない例

ICFグラフは並列、次数2縮退のみでは信頼度を評価することはできないので、デルタ・スター変換と呼ばれる縮退を用意する。これは、図2-7に示すようにデルタと呼ばれる部分グラフをスター状の部分グラフに置き換える縮退である。

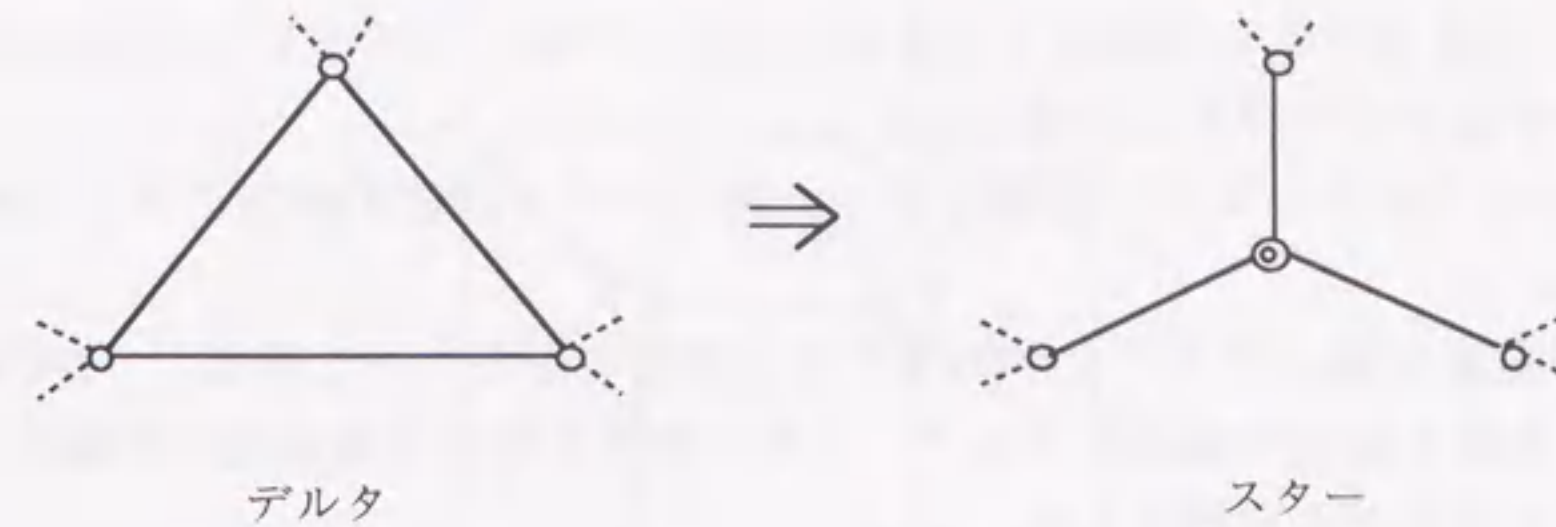


図2-7. デルタ・スター変換

図2-7で◎は縮退によって新たに生じた節点を表す。この節点は G が最初から持っていた節点と区別され、故障しうる節点とする。縮退後のグラフは◎を含むので、縮退を繰り返すためには◎を含む部分グラフを置き換える縮退手法を準備しなければならないが、◎を含む部分グラフの縮退は結局図2-7の縮退手法に等価であることが示される^[3]。

ICFグラフは以下の性質を持っている^[3]。

- (a) ICFグラフは並列と次数2縮退をできる限り行った後一つの枝にならなければ、必ずデルタを部分グラフとして持っている。
- (b) ICFグラフにデルタ・スター変換を行った後のグラフは必ずICFグラフである。

上の事実から、ICFグラフは並列と次数2縮退、及び、デルタ・スター変換を必ず繰り返し適用することができることが分かる。さらに、並列、次数2縮退及び、デルタ・スター変換を適用するとグラフの大きさ(枝の数)が小さくなることから、ICFグラフは必ず一つの枝に変形できることが分かる。変形された一つの枝から信頼度を求めることができる。

(2) IFCFグラフ

IFCFグラフ (Inner-Four-Cycle-Free Graph) はICFグラフより少しだけ複雑なグラフで、以下の条件を満たすグラフとして定義される。

(条件) ある一つの面 f が存在し、四つ以上の節点を持つ任意の閉路が f と節点を共有する。

図2-6はIFCFグラフである。

IFCFグラフはICFグラフと同様に以下の性質を持つ^[3]。

- (a) IFCFグラフは並列と次数2縮退をできる限り行った後一つの枝にならなければ、必ずデルタを部分グラフとして持っている。
- (b) IFCFグラフにデルタ・スター変換を行った後のグラフは必ずIFCFグラフである。

文献[3]は上の事実を用いてグラフがIFCFグラフであるかどうかを確認し、IFCFグラフならば並列、次数2縮退の縮退とデルタ・スター変換を用いて信頼度を評価する多項式オーダーのアルゴリズムを構成した。

2.3.3 デルタ・スター縮退可能グラフ

デルタ・スター縮退可能グラフとは並列と次数2縮退とデルタ・スター変換を用いて必ず一つの枝に変形されるグラフを言う。

文献[4]はグラフがデルタ・スター縮退可能であるための必要十分条件を明らかにした。すなわち、

性質1. グラフGが平面グラフであり、図2-8、及び、図2-9のグラフと位相同型な部分グラフを含まなければ、かつ、そのときに限りGは並列と次数2縮退とデルタ・スター変換を用いて1つの枝に変形される。

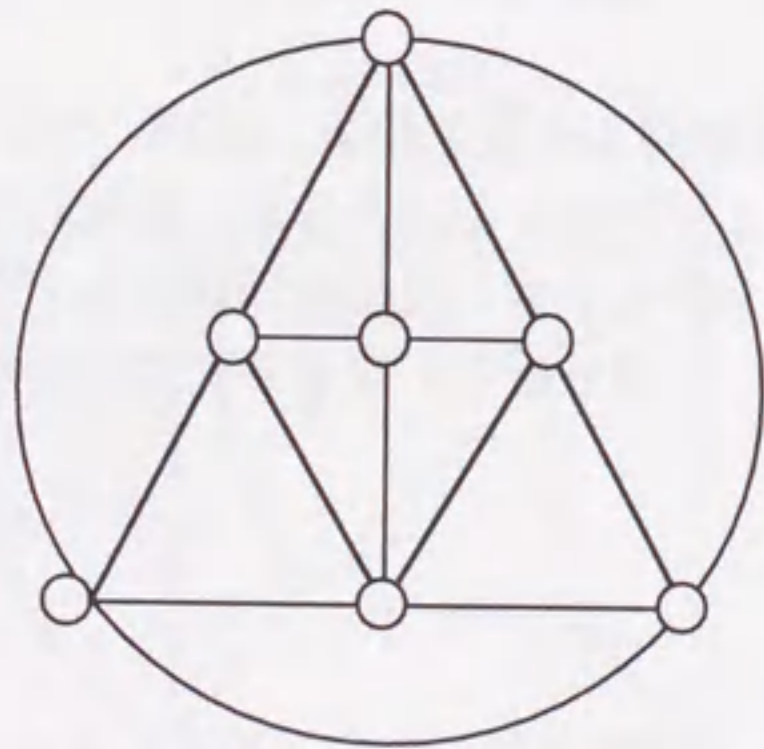


図2-8. デカヘドロン (10面体)

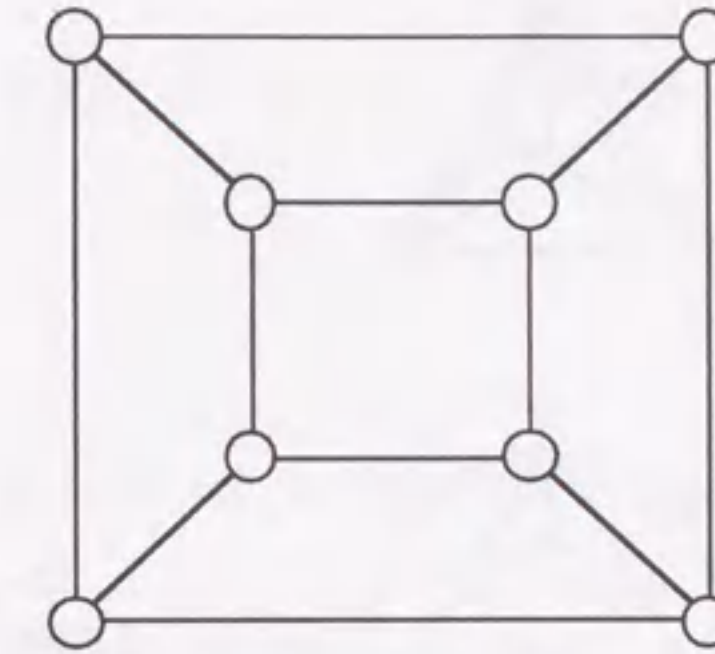


図2-9. キューブ

(図2-8はデルタを部分グラフとして含んでいるが、デルタ・スター変換を繰り返し適用しても節点数が減少せず一つの枝には変形できない。)

デルタ・スター縮退可能グラフは直並列グラフ、ICFグラフ、IFCFグラフを全て含むグラフのクラスである。文献[4]はグラフがデルタ・スター縮退可能グラフであるかどうかを判定し、デルタ・スター縮退可能ならば一つの枝に変形し、その枝の存在確率から信頼度を多項式オーダーで計算するアルゴリズムを与えた。

2.3.4 平面CFグラフ

平面CFグラフは図2-9と位相同型な部分グラフを持たない平面グラフとして定義される。

平面CFグラフはデルタ・スター縮退可能グラフよりも複雑で大きなグラフのクラスである。平面CFグラフは並列と次数2縮退とデルタ・スター変換のみでは、1つの枝に変形されるとは限らない。そこで、トリサブグラフ・K4変換と呼ばれる縮退法が提案された^[5]。これは図2-10に示す変換である。

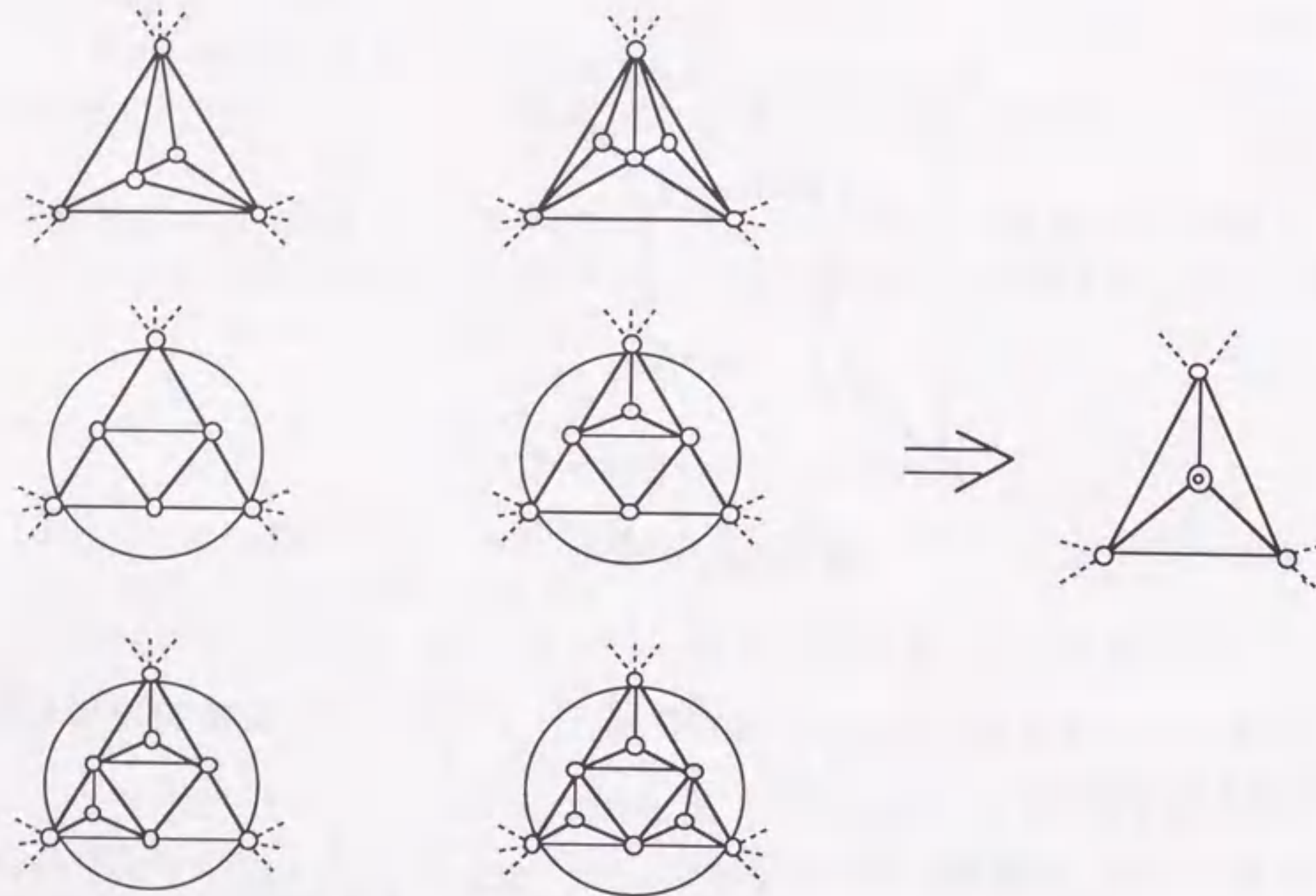


図2-10. トリサブグラフ・K4変換

図2-10で、◎はデルタ・スター変換と同様に、縮退によって新たに生じた節点を表す。この節点はグラフGが最初から持っていた節点と区別され、故障しうる節点とする。縮退後のグラフは◎を含むので、縮退を繰り返し行うためには、◎を含む部分グラフを置き換える縮退手法を準備しなければならないが、◎を含む部分グラフの縮退は、結局図2-10の縮退手法に等価であることが示される¹⁹⁾。

並列と次数2縮退、デルタ・スター変換、トリサブグラフ・K4変換の縮退手法とその他の簡単な操作を繰り返し適用することによって、平面CFグラフは一つの枝にまで変形できる。一つの枝に変形できなければそのグラフは平面CFグラフではない。文献[5]ではこれらの縮退法を適用する部分グラフ(適用場所)を検索し、特定の順序で実行するアルゴリズムを提案し、グラフが平面CFグラフならばその信頼度を多項式オーダーで評価できることを示している。

平面CFグラフはデルタ・スター縮退可能グラフを含み、多項式オーダーで信頼度を評価できる平面グラフとしては最大のクラスである。以下の問題がオープンプロブレムとして残っている。

オープンプロブレム。

平面CFグラフよりも複雑で大きな平面グラフのクラスで多項式オーダーで信頼度を評価できるグラフのクラスが存在するか。

次節では、上の条件を満たすグラフのクラスが存在することを示すために信頼度評価の双対問題を検討する。

2.4 双対問題

今、確率グラフ(平面グラフ)Gの双対グラフを G^d とする。

本論文では G^d の枝の故障及び修理を以下のように定義する。

Gの枝eが故障すれば、 G^d の枝 e^d が修理される。

Gの枝eが修理されれば、 G^d の枝 e^d が故障する。

この定義のもとでは、Gの各枝eの存在確率 $p(e)$ から対応する G^d の枝 e^d の存在確率 $p(e^d)$ は次式で定まる。

$$p(e^d) = 1 - p(e)$$

さらに、 $R(G)$ でGの信頼度を表し、 $R^d(G)$ でGにおいて少なくとも一つ閉路が存在する確率を表せば次式が成り立つ。

$$R(G) = 1 - R^d(G^d) \quad (1)$$

式(1)の証明を付録2-1に示す。

式(1)よりGの信頼度を求めるためにはその双対グラフ G^d において $R^d(G^d)$ を評価すればよい(双対問題)。次節では G^d に閉路が存在する確率 $R^d(G^d)$ を縮退法を用いて求める。

2.5 双対問題の縮退法

2.5.1 定義

[境界点、補グラフ]

グラフGのある部分グラフをgとする。gの節点がg以外の枝と隣接しているときその節点を境界点と呼ぶ。Gからgの境界点以外の節点と枝を取り除いたグラフをgの補グラフとする。

フと言ひ、 g^c と書く（補グラフの定義は本論文とは異なる場合もある^[29]）。例を図2-11に示す。

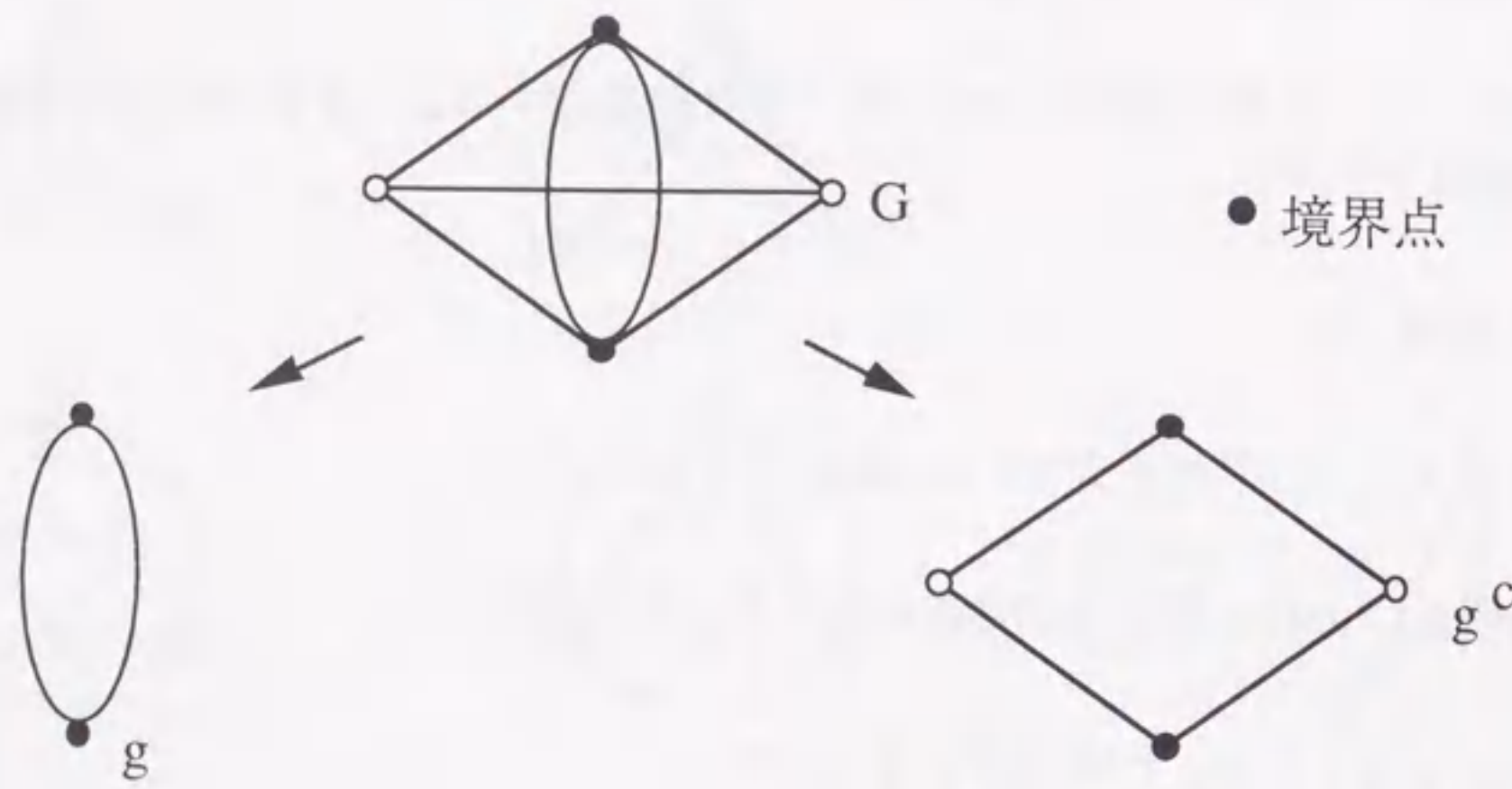


図2-11. g と g^c の境界点

[縮退]

G がグラフ g を部分グラフとして含み g の補グラフが g^c であるとする。このとき、

$$G = g * g^c$$

と書く。

今、二つのグラフ G, G' と各々の部分グラフ g, g' を考え、

$$G = g * g^c$$

$$G' = g' * g'^c$$

であるとする。

もし g^c と g'^c が同一のグラフであれば、 G' はグラフ G の部分グラフ g を g' に置き換えて得られたグラフと呼ぶことにする。

さらに、本論文では g よりも g' がより簡単な（枝の数が少ないかまたは、連結度が小さい）グラフである場合、 G は G' に縮退されたと呼ぶことにする。

[境界点の分割、 $r(g, p)$ 、 $r^c(g^c, p)$]

g の境界点の集合を互いに共通部分を含まない複数個の部分集合（各部分集合をブロックと呼ぶ）の組に分割する。この組のことを境界点の分割と呼ぶ。

例えば今、節点が自然数で番号づけられているものとして、境界点が $\{1, 2\}$ であるな

らばこの分割は以下の種類だけ存在する。

$$[1,2], [1][2]$$

ただし、一つの[]内の節点の一つのブロックである。

一つの分割を p と書くとき、

$r(g, p)$ = 部分グラフ g において、分割 p の同じブロックの境界点は互いに連結しているが、異なるブロックの境界点是非連結であり、しかも g が閉路を持たない確率

$r^c(g^c, p) = g^c$ において、分割 p の同じブロックの全節点を一つの節点に短絡したとき g^c に閉路が存在する確率

と定義する。

2.5.2 縮退法と一般分解法

縮退を用いてグラフ G に閉路が存在する確率を評価するために、グラフ G に閉路が存在する確率 $R^d(G)$ と縮退されたグラフ G' に閉路が存在する確率 $R^d(G')$ の関係を調べる。

まず、部分グラフ g の変化（ g を g' に置き換えること）が G に閉路が存在する確率に与える変化を定量化する。この定量化は一般分解法によって可能になる。

(1) 一般分解法

双対問題の一般分解法の式は以下の式で得られる。

$$R^d(G) = R^d(g) + \sum \{ r^c(g^c, p) r(g, p) \} \tag{2}$$

$$1 = R^d(g) + \sum r(g, p) \tag{3}$$

Σ は境界点の全ての分割に対応する和を表す。

式(2)、及び、(3)の証明を付録2-2に示す。

式(2)の積形式を一般分解法の式と呼ぶ。

一般分解法の式を用いるとグラフ G に閉路が存在する確率は、以下の手順に従って求められる。

- (a) グラフGを二つのグラフg, g^cに分ける。
 (b) gから全ての分割pに対し、

$$R^d(g), r(g, p)$$

を計算し、g^cから全ての分割pに対し、

$$R^d(g^c), r(g^c, p)$$

を計算する。

- (c) (b)で求めた値を式(2)に代入してGに閉路が存在する確率を導出する。

次節では縮退法に必要な変換式を求めるために一般分解法を用いる。

(2) 双対問題の縮退

縮退を行ったとき、置き換え前のグラフGと置き換え後のグラフG'を一般分解法を用いて評価し、二つの評価式から評価値の変化を定量化する。

変化量を正確に把握できれば、縮退前のグラフGに閉路が存在する確率は縮退後のグラフG'に閉路が存在する確率から正確に求められる。

定理1

全ての境界点の分割に対して、

$$r(g, p) / (1 - R^d(g)) = r(g', p) / (1 - R^d(g')) \quad (4)$$

が成立するとする。このとき、縮退前のグラフにおいて閉路が存在する確率R^d(G)は縮退後のグラフにおいて閉路が存在する確率R^d(G')から以下の式で得られる。

$$R^d(G) = A + B \cdot R^d(G') \quad (5)$$

ただし、

$$A = R^d(g) - \{R^d(g') (1 - R^d(g)) / (1 - R^d(g'))\}$$

$$B = (1 - R^d(g)) / (1 - R^d(g'))$$

証明を付録2-3に示す。

縮退前のグラフGに閉路が存在する確率は、縮退後のグラフG'に閉路が存在する確率から式(5)を用いて求められる。ただし、式(5)を用いるには全ての分割に対して式(4)を満足する部分グラフg及びg'を見つけなければならない。すなわち、候補となるg及びg'を考え、式(4)を満足することを検証することが必要である。これは以下の手順に従う。

- (a) ある特定のトポロジーを持ったgとg'を仮定する。例えば、g=並列、g'=一つの枝等である。
 (b) 縮退の手順から考えて、gの枝と節点の存在確率は既知、g'の枝と節点の存在確率は未知である。未知の確率を変数a, b, ...とおく。
 (c) 全ての境界点の分割pについて式(4)の左辺をgから計算する。右辺をa, b, ...を含む関数で表す。これによって、a, b, ...を未知数とする方程式が分割の数だけ得られる。
 (d) これらの方程式を同時に満足する解が存在するかを検証する。

上の手順で解が存在しなければ縮退を行うことはできない。解が存在すれば以下の手順で縮退を行うことができる。

- (手順1) 方程式の解を求める。
 (手順2) 解をg'の各枝及び節点の存在確率として与えた置き換えを実行する。
 (手順3) 縮退後のグラフに閉路が存在する確率から縮退前のグラフに閉路が存在する確率を式(5)から求める。

次節で上記手順の適用例を示す。

(3) 適用例

並列の縮退によって生じる枝の存在確率を前節(2)で示した手順に従って求める(図2-12、図中の文字は対応する枝の存在確率を表す)。

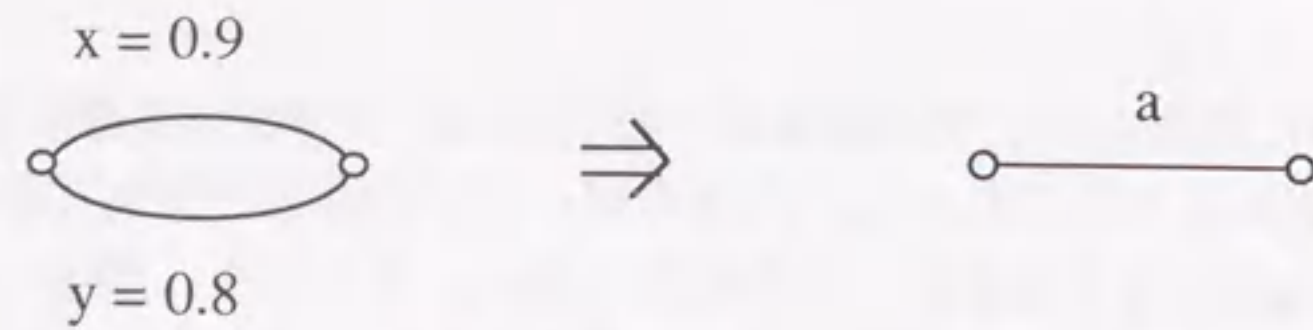


図2-12. 並列の縮退

縮退前のグラフをG、縮退後のグラフをG'とする。
置き換え前の部分グラフをg、置き換え後の部分グラフをg'とする。

- (a) g を並列と仮定し、g' を一つの枝と仮定する。
 (b) g の枝の存在確率は図3-12から0.9、0.8で与えられている。g' の枝の存在確率をaとおく。
 (c) 全ての境界点の分割[1][2]、[1,2]について式(4)の左辺をgから計算する。すなわち、

$$\begin{aligned} r(g, [1][2]) &= (1-x)(1-y) = 0.02 \\ r(g, [1, 2]) &= (1-x)y + x(1-y) = 0.26 \\ R^d(g) &= xy = 0.72 \end{aligned}$$

であるから左辺は、

$$\begin{aligned} p = [1][2] \text{ のとき、} & 0.02 / (1-0.72) \\ p = [1, 2] \text{ のとき、} & 0.26 / (1-0.72) \end{aligned}$$

となる。

次にg'から右辺を求める。すなわち、

$$\begin{aligned} r(g', [1][2]) &= 1-a \\ r(g', [1, 2]) &= a \\ R^d(g') &= 0 \end{aligned}$$

となるから右辺は

$$\begin{aligned} p = [1][2] \text{ のとき、} & (1-a) / (1-0) \\ p = [1, 2] \text{ のとき、} & a / (1-0) \end{aligned}$$

となる。

(d) (c)から以下の方程式が得られる

p = [1][2]のとき、

$$0.02 / (1-0.72) = (1-a) / (1-0)$$

p = [1, 2]のとき、

$$0.26 / (1-0.72) = a / (1-0)$$

二つの方程式は等価であり、未知数が一つであるから解は存在する。
そこで、以下の手順に従って縮退を実行する。

(手順1) 解は以下の値で得られる。

$$a = 0.26 / 0.28 \doteq 0.929$$

(手順2) 上のaの値を縮退後の枝の存在確率とする縮退を実行する。

(手順3) 式(5)より $R^d(G)$ は次式で得られる。

$$R^d(G) = 0.72 + 0.28 \cdot R^d(G')$$

上の手順は一般的な手順であり、並列、次数2縮退、及びデルタ・スター変換、トリサブグラフ・K4変換も上の手順に従って縮退が可能である。各縮退の縮退後の枝、節点の存在確率を付録2-4に整理する。

この方法は境界点が4個以上になると極めて困難になる。なぜならば、(d)における方程式の数が境界点の数の増加にともなって、指数オーダーで増大するため、未知数の数(すなわち、縮退後の部分グラフの枝の数)が少ない場合には方程式が解を持たないからである。

2.6 多項式オーダーで評価可能な新しいグラフのクラス

前節の手順を用いて信頼度の双対問題を解決するために、並列と次数2の縮退、デルタ・スター変換、トリサブグラフ・K4変換による縮退を用いることができる。すなわち、グラフGに閉路が存在する確率 $R^d(G)$ は、これらの縮退法を用いて求めることができる。この場合、縮退を適用する部分グラフの検索、適用順序は文献[5]のアルゴリズムを用い

ればよい。

この方法を用いると平面CFグラフより複雑なグラフの信頼度を多項式オーダーで評価できる。

本節では平面CFグラフより複雑かつ大きなグラフのクラスとして、平面双対CFグラフを提案し、そのクラスが多項式オーダーで評価できることを示す。

2.6.1 平面双対CFグラフ

定義.平面双対CFグラフとはキューブに位相同型な部分グラフを含まないか、または、オクタヘドロン (図2-13) に位相同型な部分グラフを含まない平面グラフのクラスとする。

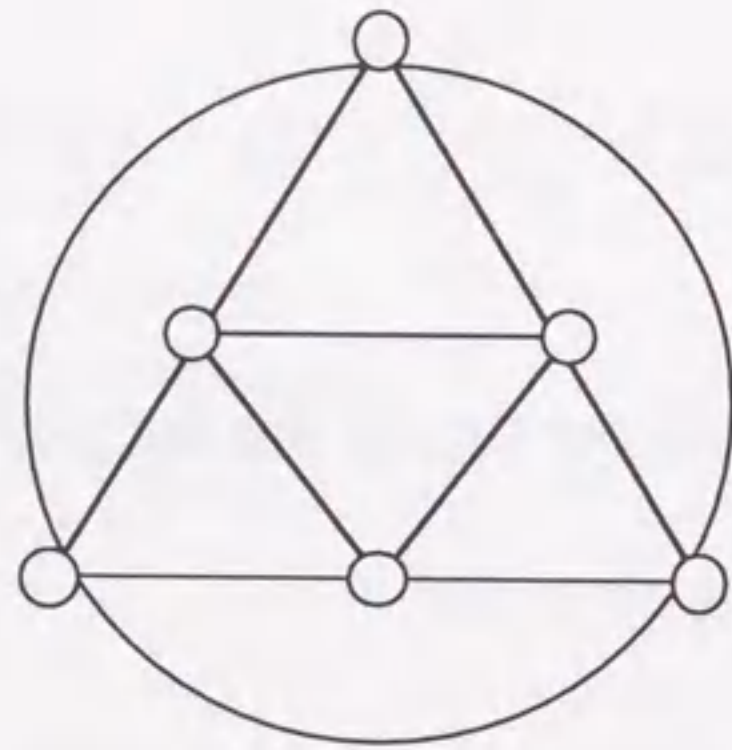


図2-13. オクタヘドロン

このとき以下の性質が成り立つ。

性質2. 平面双対CFグラフは平面CFグラフ、または、双対グラフが平面CFグラフである。

性質3. 以下の性質が成り立つ。

$\{\text{平面双対CFグラフ}\} \supset \{\text{平面CFグラフ}\}$
 $\{\text{平面双対CFグラフ}\} \neq \{\text{平面CFグラフ}\}$

性質2は、キューブの双対グラフがオクタヘドロンであることから直ちに言える。性

質3は平面双対CFグラフの定義から直ちに、

$\{\text{平面双対CFグラフ}\} \supset \{\text{平面CFグラフ}\}$

が言え、

$\{\text{平面双対CFグラフ}\} \neq \{\text{平面CFグラフ}\}$

はキューブが平面双対CFグラフでありかつ平面CFグラフでないことから言える。

平面CFグラフ、平面双対CFグラフの包含関係を図2-14に整理する。

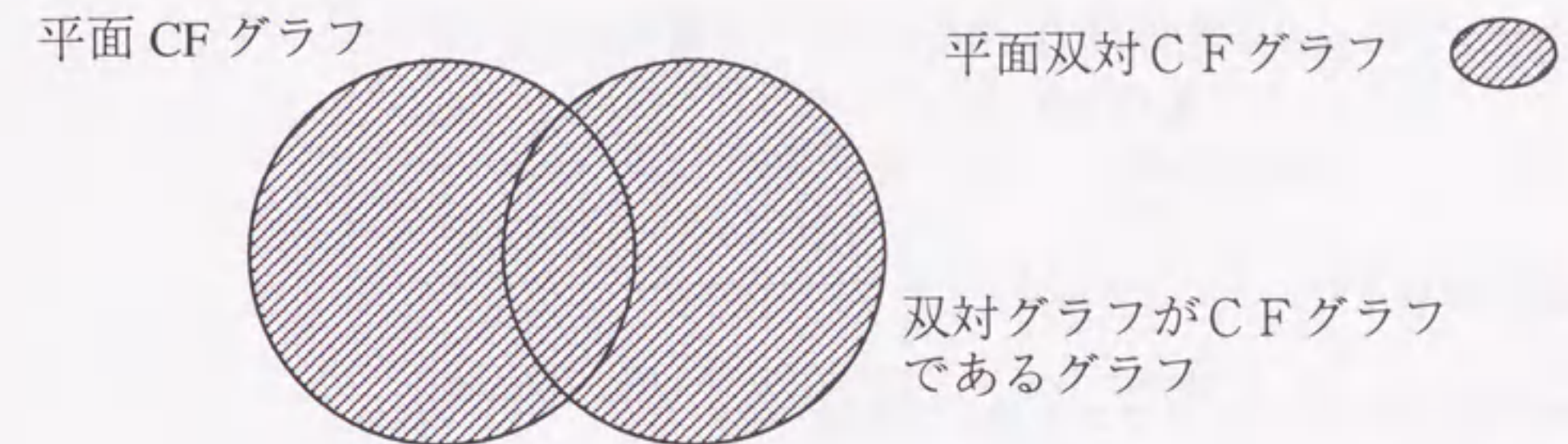


図2-14. 平面CFグラフと平面双対CFグラフ

2.6.2 平面双対CFグラフの評価法

以上の準備のもとで次の定理が言える。

定理2.

無向確率グラフGが平面双対CFグラフならばその信頼度を以下のステップに従って、 $O(|V|)$ で評価できる。ただし、 $|V|$ は節点数である。

(ステップ0) Gにできるかぎり直並列の縮退を行い、得られたグラフを改めてGとする。

(ステップ1) 従来の文献[5]のアルゴリズムに従ってGに縮退法を適用する。

(ステップ2) Gが一つの枝に変形されれば、その枝の存在確率からGの信頼度を評価する。Gが一つの枝に変形されなければ、ステップ3へ。

(ステップ3) Gの双対グラフ G^d を構成する。

(ステップ4) G^d において並列、次数2縮退、デルタ・スター、トリサブグラフ・ K_4 変換をその変換式は付録2-4に従って、適用場所・適用順序については文献[5]に従って実行する。

(ステップ5) G^d が一つの枝に変形されればその枝の存在確率から G^d に閉路が存在する確率を求める。一つの枝に変形されなければ G は平面双対CFグラフではない。

(ステップ6) G の信頼度は G^d に閉路が存在する確率から

$$R(G) = 1 - R^d(G^d)$$
 で求められる。

定理2は以下のように示される。

G が平面双対CFグラフであるならば性質2より、

(場合1) G が平面CFグラフである。

(場合2) G の双対グラフ G^d が平面CFグラフである。

のいずれかが成り立つ。

場合1においては、ステップ1、2で信頼度を評価できる。場合2においては4、5でその双対問題が解決される。

ステップ0、1、2は従来のアルゴリズムで $O(|V|)$ で実行できることが示されている^[5]。ステップ3も双対グラフを構成する問題は $O(|V|)$ で実行できることが示されている^[35]。ステップ4、5は付録2-4に示された変換式を用いるだけでその適用場所及び適応順序は文献[5]に従うから $O(|V|)$ 実行可能である。従って全ステップは $O(|V|)$ であり、かつ、本アルゴリズムは信頼度の真の値を評価できる。

平面双対CFグラフは平面CFグラフを含む大きな平面グラフのクラスである(性質3)。従って、定理2は多項式オーダーで信頼度を評価できるグラフのクラスを拡張できたことを意味している。

図2-15に平面CFグラフでない平面グラフで双対グラフを構成することによって初めて縮退できるグラフの例を示す。

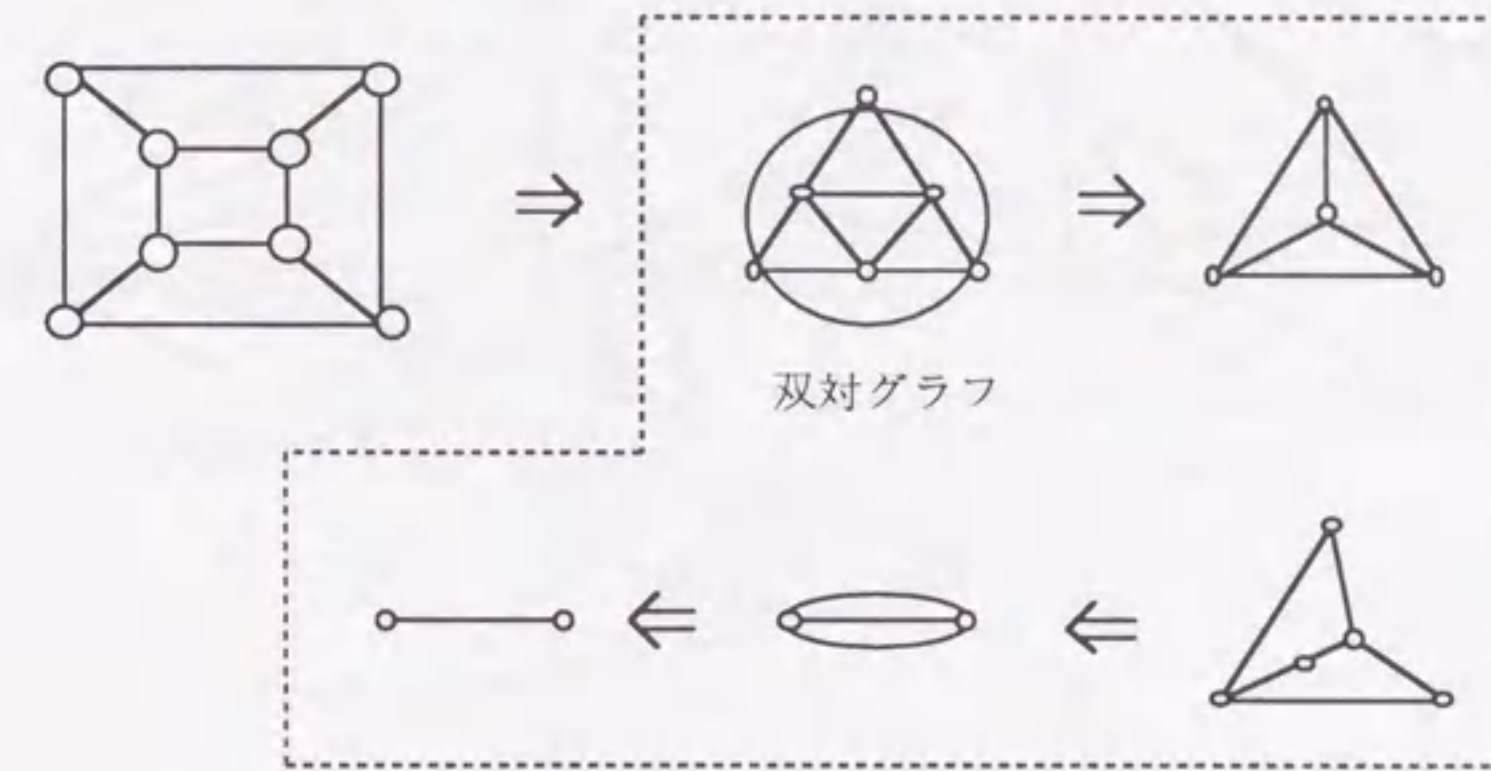


図2-15. キューブの双対グラフとその縮退

図2-16により複雑な双対CFグラフの例を示す(地名が記入されているが、現実の網構成と必ずしも一致するわけではない。)

図2-16のグラフに直並列の縮退を適用して単純化したものを図2-17に示す。図中の数字は各面に与えられた番号である。このグラフにはキューブに位相同型なグラフを部分グラフとして含んでいることから(太線)、従来の縮退法によって一つの枝に単純化することはできない。しかし、その双対グラフはCFグラフであり、図2-18のように単純化することができる。

ここで、図2-18の図中の数値は節点に与えられた番号であり、各節点は図2-17の同じ番号を持つ面と双対グラフの意味で1対1の関係にある。

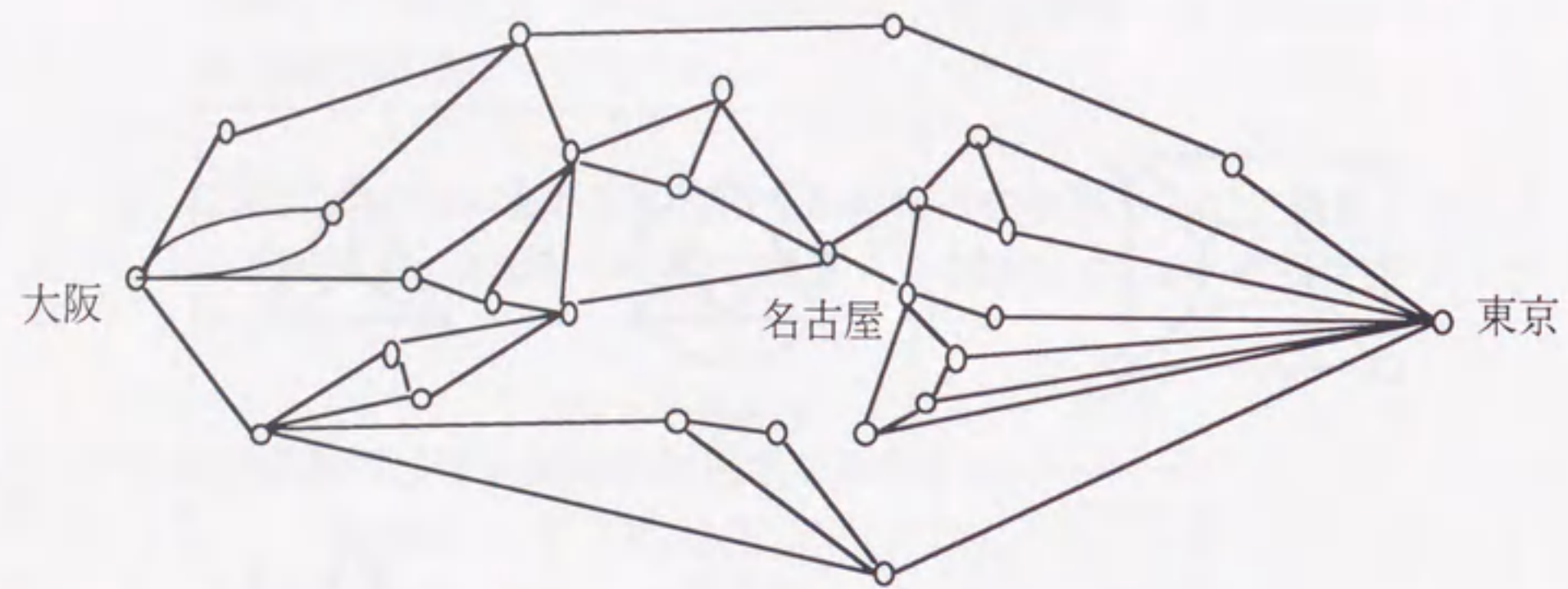


図2-16. より複雑な網トポロジー例

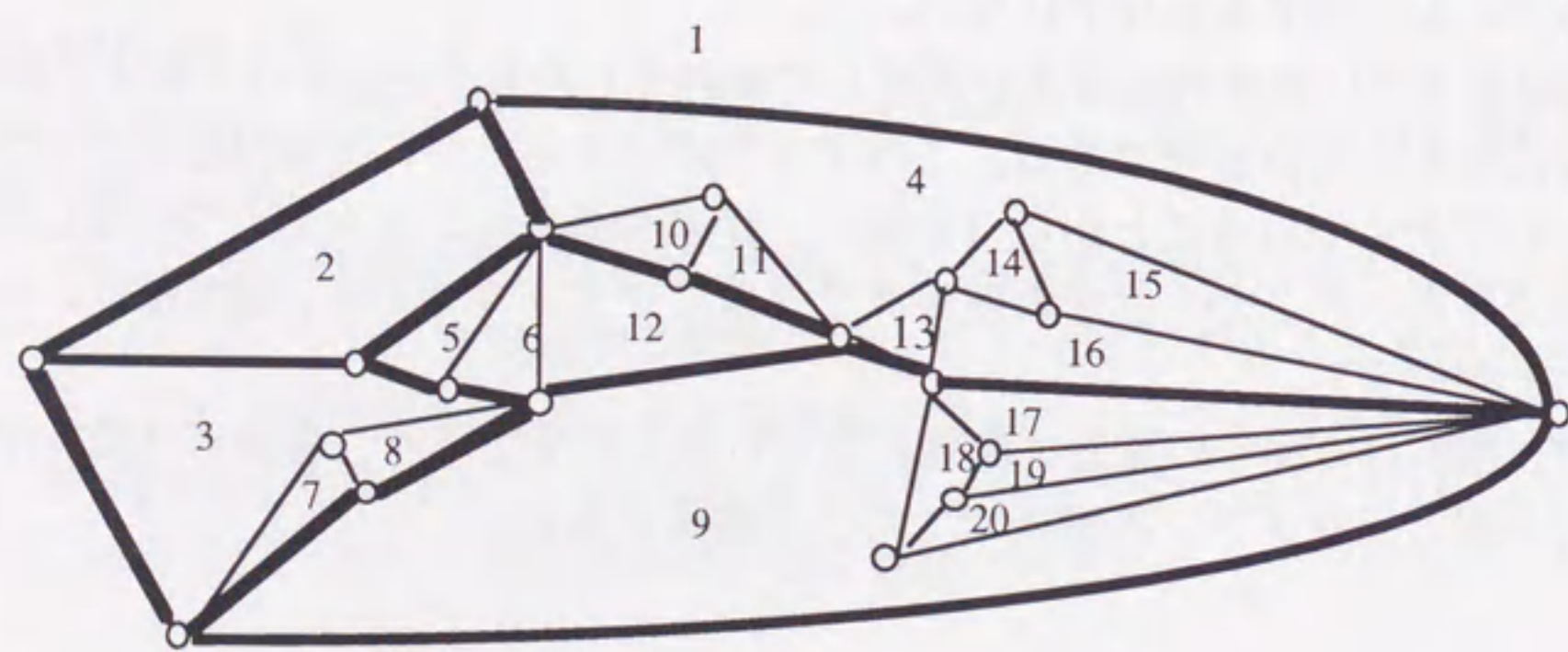
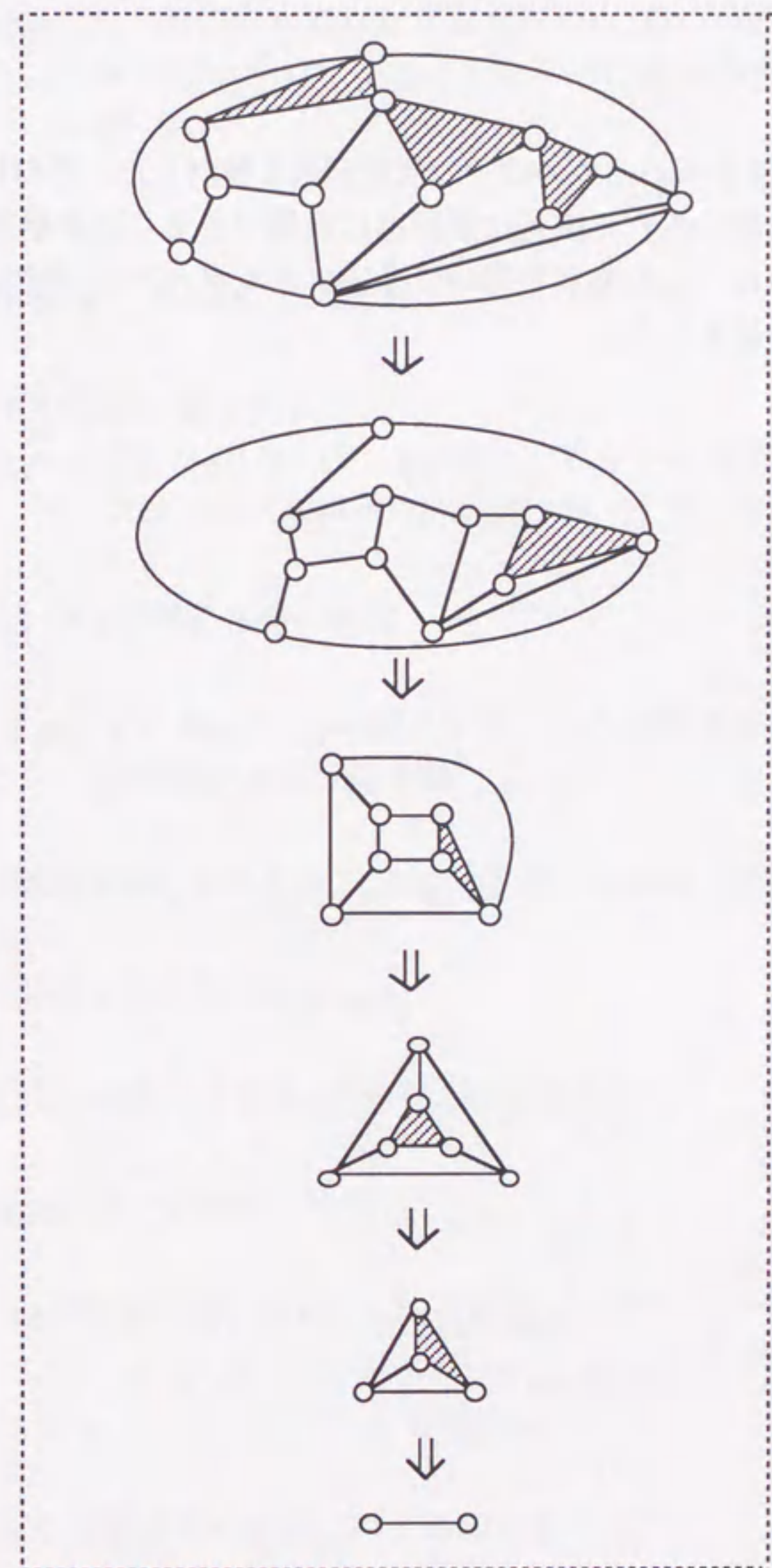
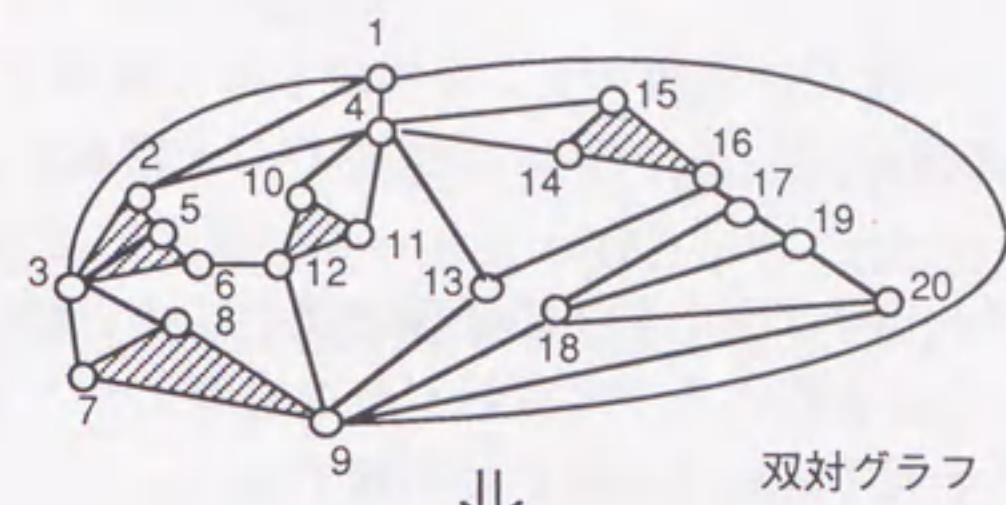


図2-17. 直並列の縮退後のトポロジー




各辺において  の部分に
デルタ・スター変換を適用し、
変換された部分に直並列の縮退
を適用する。

図2-18. 双対グラフの単純化

なお、定理2のアルゴリズムでは、一度だけ双対グラフを構成する。双対グラフを複数回用いる方法、すなわち、縮退後の双対グラフのさらに双対グラフを構成する方法は、現在のところ実行が困難である。

なぜならば、デルタ・スター及びトリサブグラフ・K4変換を実行すると縮退後のグラフは故障し得る節点◎を含む。節点◎を含むグラフの双対グラフを考えたとき節点◎が何に対応し、さらに縮退がどのような手順で実行されるかは明確でない。

2.7 むすび

本章は平面グラフにおける信頼度を求めるためにその双対問題を検討した。その結果、双対問題に対しても信頼度評価に用いられる縮退法が同様に適用できることを解明し、その変換式を明らかにした。さらに、この事実を用いて多項式オーダーで信頼度を評価できるグラフのクラスが従来より拡大した。

付録2-1 式(1)の証明

Gのカットセットはその双対グラフ G^d の閉路に一对一に対応している。従って、本文中で導入した G^d の故障及び修理の定義から、Gにおいて一つのカットセットに含まれる枝が全て存在しなければ対応する閉路が必ず存在する。

よって、

$$\begin{aligned} 1 - R(G) &= \Pr (G \text{ において少なくとも一つのカットセットの枝が存在しない}) \\ &= \Pr (G^d \text{ において少なくとも一つの閉路が存在する}) \\ &= R^d(G) \end{aligned}$$

付録2-2 式(2)(3)の証明

以下の記号を導入する

$E(g,p)$ = グラフ g において、 p の同じブロックの境界点は互いに連結しているが異なるブロックの境界点是非連結であり、しかも、 g が閉路を持たない事象

$E(g)$ = g が閉路を持つ事象

$E(g^c,p)$ = g^c において、 p の同じブロックの全節点を一つの節点に短絡除去したとき g^c に閉路が存在する事象

g が閉路を持たないとき、 g の境界点相互の連結の関係は全て $E(g,p)$ で書ける。つまり、

g が閉路を持たない $=\cup E(g,p)$

ただし \cup は全ての分割 p に対する和事象を表す。

$E(g,p)$ は互いに排反だから、

$$\begin{aligned} \Pr (g \text{ が閉路を持たない}) &= \Pr (\cup E(g,p)) \\ &= \sum (\Pr (E(g,p))) \\ &= \sum r(g,p) \end{aligned}$$

ただし \sum は全ての分割に対する和を表す。

$\Pr (g \text{ が閉路を持たない}) = 1 - R^d(G)$ より、本文の式(3)を得る。

次に本文の式(2)を示す。

『Gが閉路を持つ』という事象は、必ずある特定のE(g, p)またはE(g)と同時に起きる。しかもE(g, p)及びE(g)は互いに排反な事象であるから全確率の定理より、

$$\begin{aligned} & \Pr(G\text{が閉路を持つ}) \\ = & \Pr(G\text{が閉路を持つ} | E(g)) \times \Pr(E(g)) \\ & + \sum \Pr(G\text{が閉路を持つ} | E(g, p)) \times \Pr(E(g, p)) \\ = & \Pr(E(g)) + \sum \{\Pr(E(g^c, p)) \times \Pr(E(g, p))\} \end{aligned}$$

より本文の式(2)が言える。

付録2-3 定理1の証明

本文中の式(2)を変形して以下の式が得られる。

$$R^d(G)/(1-R^d(g)) = R^d(g)/(1-R^d(g)) + \alpha \quad \text{付(1)}$$

ただし、

$$\alpha = \sum [\{r(g, p)/(1-R^d(g))\} r(g^c, p)]$$

Gの部分グラフgをg'に置き換えた後のグラフG'について付(1)を適用して、

$$R^d(G')/(1-R^d(g')) = R^d(g')/(1-R^d(g')) + \beta \quad \text{付(2)}$$

ただし、

$$\beta = \sum [\{r(g', p)/(1-R^d(g'))\} r(g^c, p)]$$

ここで境界点の全ての分割に対して、

$$r(g, p)/(1-R^d(g)) = r(g', p)/(1-R^d(g'))$$

となるようにg'の枝の存在確率を与えておいたとすると、

$$\alpha = \beta$$

となり、付(1)(2)から α 、 β を消去すると本文中の式(5)を得る。

付録2-4 各縮退の変換式

a, b, c, d, e, f, hは縮退後の枝の存在確率を表す(図2-19, 20, 21)。

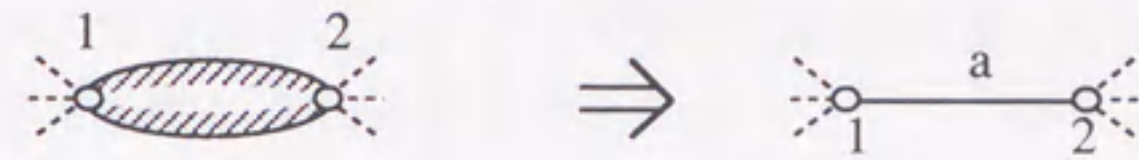


図2-19. 並列、次数2縮退

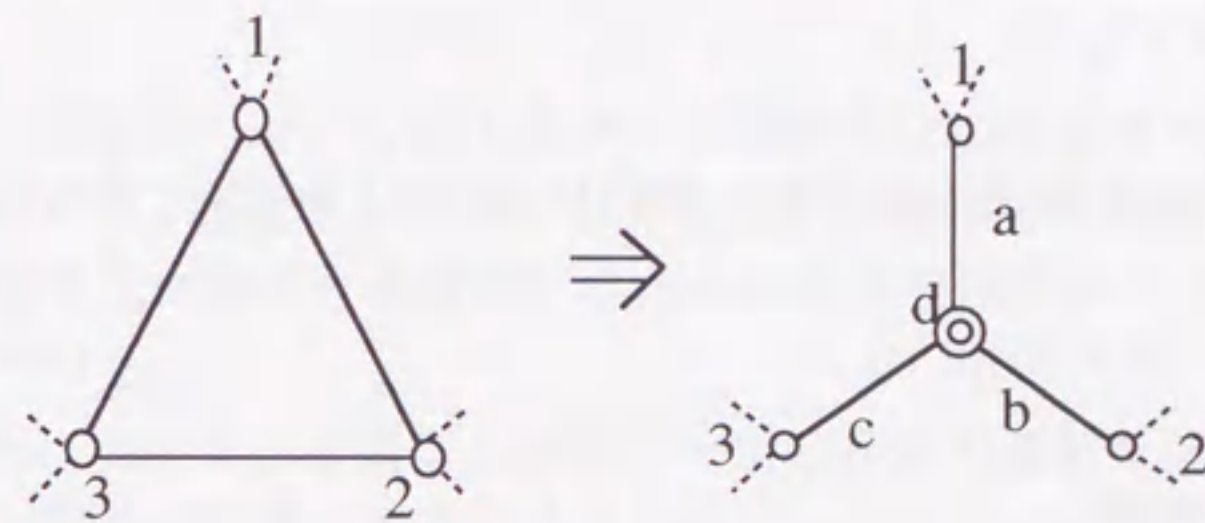


図2-20. デルタ・スター変換

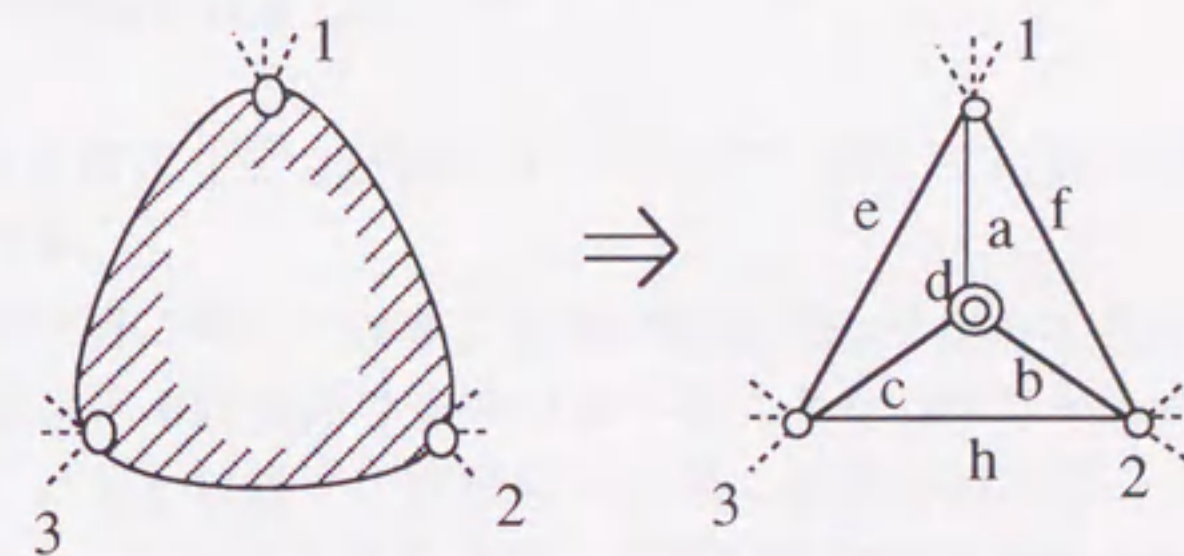


図2-21. トリサブグラフ・K₄変換

並列、次数2縮退

$$a = r(g, [1,2]) / R^d(g)$$

デルタ・スター変換

$$a = r(g, [1,2,3]) / \{r(g, [1][2,3]) + r(g, [1,2,3])\}$$

$$b = r(g, [1,2,3]) / \{r(g, [1,3][2]) + r(g, [1,2,3])\}$$

$$c = r(g, [1,2,3]) / \{r(g, [1,2][3]) + r(g, [1,2,3])\}$$

$$d = \{r(g, [1][2,3]) + r(g, [1,2,3])\} \\ \times \{r(g, [1][2,3]) + r(g, [1,2,3])\} \\ \times \{r(g, [1][2,3]) + r(g, [1,2,3])\} \\ / \{r(g, [1][2][3])^2(1-R^d(g))\}$$

縮退前のグラフの $R^d(G)$ は縮退後のグラフの $R^d(G')$ から以下の式で得られる

$$R^d(G) = R^d(G') + (1-R^d(G))R^d(G')$$

トリサブグラフ・ K_4 変換

a, b, c, dはデルタ・スター変換に同じ。

$$e = f = h = 0$$

第三章 パスの容量の割り当てられた通信網モデルの信頼度評価法

3.1 まえがき

第二章では通信網をグラフ表現できると仮定し、各節点、及び、枝に故障確率の与えられたグラフ（グラフモデル）の連結確率を評価している。第一章で述べたように、グラフモデルは計算機網等を対象とする場合には有効であると考えられる。

しかし、グラフモデルにおける評価法を現在の電話網の設計に適用することは必ずしも適切ではない。なぜならば、グラフモデルは以下のような、電話網としては現実的とは言えない仮定に基づいているからである。

- (1) グラフモデルでは疎通率で測られる通信網の部分的な機能劣化を考慮しておらず、全断（通信機能が完全に停止する）確率を評価している。
- (2) グラフモデルでは通信網トポロジーがグラフとして連結していれば、各節点間で通信可能と仮定している。

現在の現実の電話網において網の部分的な機能劣化は考慮すべき大きな要因であり、例えば文献[60]では、疎通率を尺度として電話網の機能劣化を測り故障のひどさを分類し、一定の機能劣化が発生する確率を与えられた基準値以内のように網設計を行うことを提案している。

また、電話網において、2通信設備間に一定の容量の通信を確保するためには、その間に通信経路（伝送経路等）が割り当てられていることが必要であり、各経路への容量の割り当てによって、電話網の信頼性が大きく影響される。また、電話網の階層構造を考慮する必要がある。

本章では以上の点を考慮し、電話網を対象とした信頼性設計の考え方を説明した上で、設計法に不可欠な通信網信頼性評価モデル、尺度、評価アルゴリズムを提示する。

3.2 通信網信頼性設計の考え方

本研究の位置付けをより明確にするために、NTTにおける電話網の信頼性設計の考え方を説明する。

NTTは電話網に対しては単に企業の観点だけでなく、公共的な責任を負っている。特に、北海道途絶や県全体の途絶のような大きな故障は一人の加入者に影響する故障に比較すれば、はるかに厳しい信頼性を確保する義務がある（文献[54][55][60]参照）。

このことから、故障発生の影響度を考慮した信頼性設計法が必要となる。具体的には影響の大きな故障ほどより起こりにくくなるように目標不信頼度（信頼度よりも不信頼度（1-信頼度）の方が数値表記しやすいことから不信頼度で提示する）を規定し、その値を満足するように網構成を与えるようにする。

故障の影響の大きさは、その影響の広がりやひどさという観点から定義される。広さ

とは影響を受けるユーザの多さに対応し、ひどさは故障によってユーザが感じる使いにくさに対応している。数値的には、広さについては「正常であれば通信可能なユーザ数」と「呼量」の平均（幾何平均）で評価する。例えば加入者数 X_1 の地域と加入者数 X_2 の地域の発着信呼量がAアーランである場合、故障の影響の広さは

$$\text{故障の影響の広がり} : ((X_1 \times X_2) \times A / M)^{0.5}$$

で与えられる（Mは定数）。

故障の影響のひどさについては、故障時にトラヒックの疎通が低下する度合いで評価する。すなわち、二つの地域間で正常時に運ばれる呼量を A_1 、故障時に運ばれる呼量を A_2 とすれば故障の影響のひどさは、

$$\text{故障の影響のひどさ} : A_2 / A_1$$

で与えられる。 A_2 / A_1 を疎通率と呼ぶ。

故障の広さとひどさに応じて、適切な目標信頼度を規定するためには、まず故障を疎通率別に四つのクラスに分類する（表3-1参照）。

表3-1. 故障のクラス

	社会に与える影響	疎通率
クラス1	<ul style="list-style-type: none"> ・最頻時に発生すると社会活動の効率が一部低下 ・トラヒック規制はかからない。 	80%~90%
クラス2	<ul style="list-style-type: none"> ・社会活動の効率が低下 ・トラヒック規制がかかる。 	60%~80%
クラス3	<ul style="list-style-type: none"> ・社会統制機能は維持 ・社会活動の効率が大幅に低下 	10%~60%
クラス4	<ul style="list-style-type: none"> ・通信途絶と同等の状態 ・社会統制機能の維持が困難 	0%~10%

実際には、トラヒックに依存する疎通率よりも設備だけに依存する回線残存率（故障

時の回線数/正常時の回線数)の方が設計が容易であるので、疎通率を回線残存率に換算して故障クラスを定義している。

各故障クラス*i*において、故障の影響の広さ対応の目標不信頼度を以下の関数で規定する。

$$f_i(Y) = C_i / (7 + Y^{0.5})$$

ここで、Y: 故障の広がり

C_i : 故障クラスに応じた定数

$f_i(Y)$: 故障の広がりがYで、疎通率が*i, i+1, i+2, …, 4*のいずれかのクラスである確率（規定値）

図3-1の例で、定数の値を $M = C_3 = 1$ とすれば、エリアIとIIの間で（すなわち、交換機I, IIの間で）、疎通率が60%以下となる故障が起きる確率（不信頼度）が

$$\begin{aligned} & f_3((50000 \times 20000) \times 0.1 / 1) \\ &= 1 / (7 + ((50000 \times 20000) \times 0.1 / 1)^{0.5}) \\ &\approx 1.0 \times 10^{-4} \end{aligned}$$

より小さくするように網設計を行う必要がある。

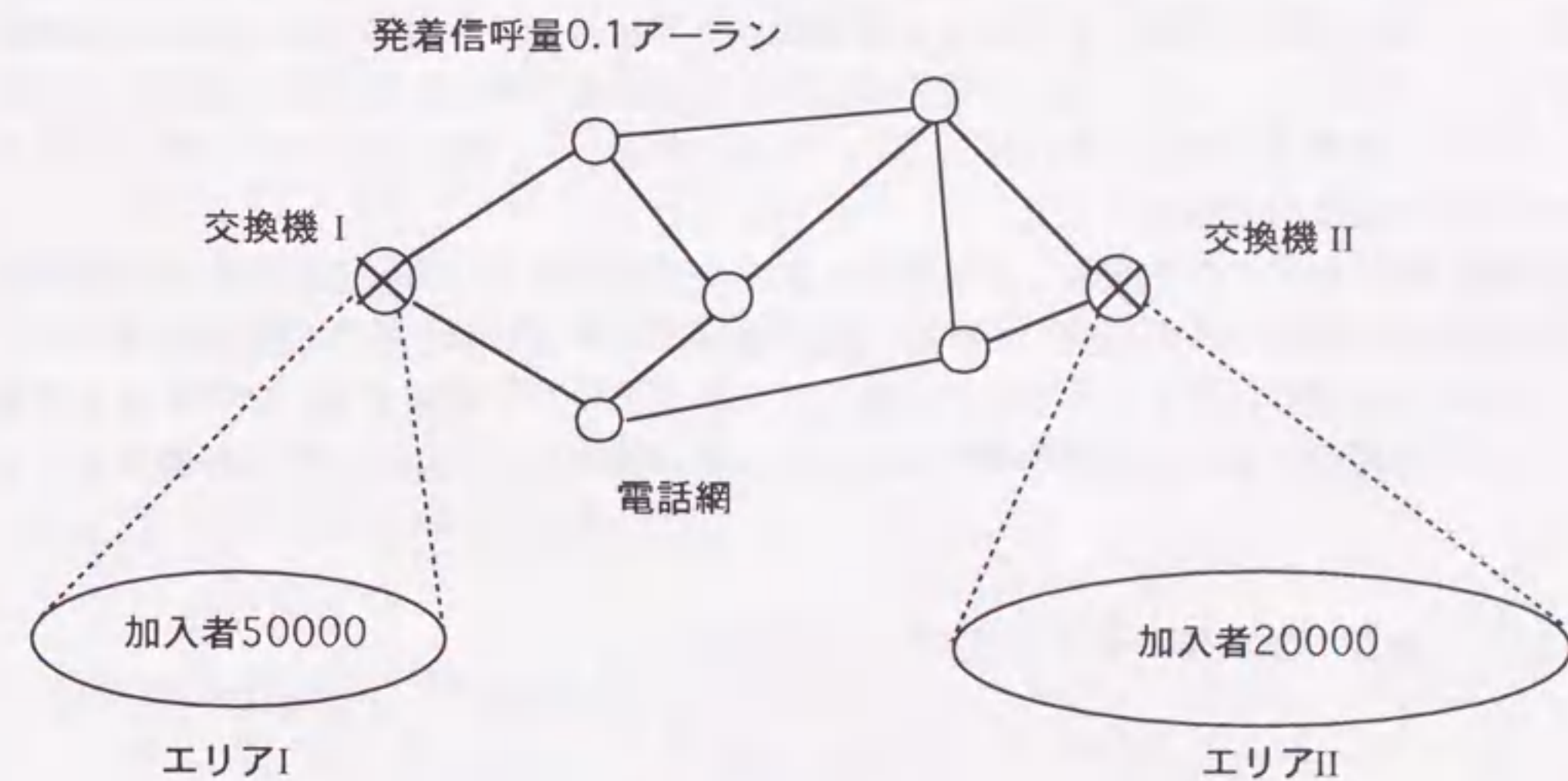


図3-1. エリアと電話網の例

このように定められた規定値を満足するように網設計を行う。網設計は、想定される網構成案の信頼度を計算し、規定値を満足する案を選択する。

3.3 モデルと評価尺度

3.3.1 モデル化の考え方

電話網は複雑な回線レイヤ、伝送レイヤ、物理レイヤ等の階層構造を持っており、上位レイヤの故障が下位レイヤへの故障を引き起こす。また、電力や共通線のように音声は通過しないが、その故障が大きな故障を引き起こすサポート網（文献[60]参照）と呼ばれる網も含んでおり、その構成は複雑である。この複雑な構造をできるだけ単純に表現するモデルを構築することが電話網の信頼性評価法の第一歩である。

本章ではこのような単純化として通信を確保する通信経路に着目する。実際、電話の通信は一定の通信経路（伝送経路、及び、通信が経由する伝送経路の列（交換ルーチングで決まる。））で実現されるのだから、この意味で、電話網とは通信経路の集まりであると考えられる。信頼性を向上させるために必要な施策は、結局一定の回線数を複数の通信経路に分割して確保することである。すなわち、通信装置の故障が発生しても、分割によって故障の影響を受けない通信経路が十分な回線数を確保できれば、ユーザに対する支障にはならない。このとき、確保された回線数が故障が発生する前に比べて何%であるかが、回線残存率である。加わるトラヒックが分かれば、疎通率が計算できる。

つまり、通信経路と通信経路が確保する容量という点に着目すれば、電話網を非常に簡単に表現できる。電話網がいかに複雑な構造を持っているように見えても信頼性の観点からは通信経路に故障を引き起こす因果関係を記述しているだけに過ぎない。通信経路を単に伝送経路、あるいは、通信の通過する伝送経路の列からその通信経路に故障を引き起こす装置全体に拡張すれば（以下、パスと呼ぶ。）、電話網はパスの集まりと各パスの持つ回線数で記述できる。

本章では、上のように抽象化されたパスという概念を導入し、各通信経路が確保する回線数を対応するパスの容量、さらに、回線残存率（あるいは、残存する回線数）をパスから決まる網の容量という形式で抽象化した網モデル N を提案する。網の容量は故障によって確率的に変化する確率変数であって、その確率分布が N に対する評価尺度となる。

3.3.2 容量の割り当てられたパスによる定式化

N は、

- (i) 有限集合 E
- (ii) 有限集合 W
- (iii) 写像 $\nu: W \rightarrow \rho(E)$
- (iv) 関数 $C_0: W \rightarrow R^+$

（集合 X のべき集合を $\rho(X)$ と書き、 R^+ を正の実数とする。任意の $w \in W$ に対し、 $C_0(w) > 0$ とする。）

からなる複合概念であり、 $N = (E, W, \nu, C_0)$ と書く。

W の要素をパスと呼ぶ。パス w に対し、 $\nu(w)$ の要素をパス w の構成要素、 $C_0(w)$ をパス w の容量と呼ぶ。

E の要素は、評価したい通信網の構成装置、すなわち、通信装置（伝送・交換装置、伝送ケーブル）に対応しており、パスは、2通信装置間に一定の通信容量の通信が確保されるために正常に機能していなければならない通信装置の集まりに対応している。

（本論文では『通信経路』と『パス』という二つの言葉を区別して用いる。『通信経路』は2通信装置間の通信が通過する装置の集まりであり、パスは通信経路に含まれる装置が正常に機能するために必要な装置の集まりに対応している。例えば、通信網が通信装置 a_1, a_2, a_3 から構成されているとし、ある2通信装置間の通信が装置 a_1, a_2 を経由しているが a_3 は経由していないとする。ここで a_3 が故障しても a_1, a_2 が影響を受けなければ、 $\{a_1, a_2\}$ は通信経路であり、同時にパスに対応している。しかし、 a_3 の故障が a_1 の故障を引き起こす場合には、 $\{a_1, a_2\}$ は通信経路であるがパスではなく、 $\{a_1, a_2, a_3\}$ は通信経路ではないが、パスと呼ぶことにする。）

パスの容量は、そのパスの構成要素が全て正常に機能しているときに確保できる通信回線数に対応している。

N で表現できる網構成例を示す。

（以下では、 E の要素をアンダーラインが付与された数字で表し、 W の要素を小文字のアルファベットで表す。）

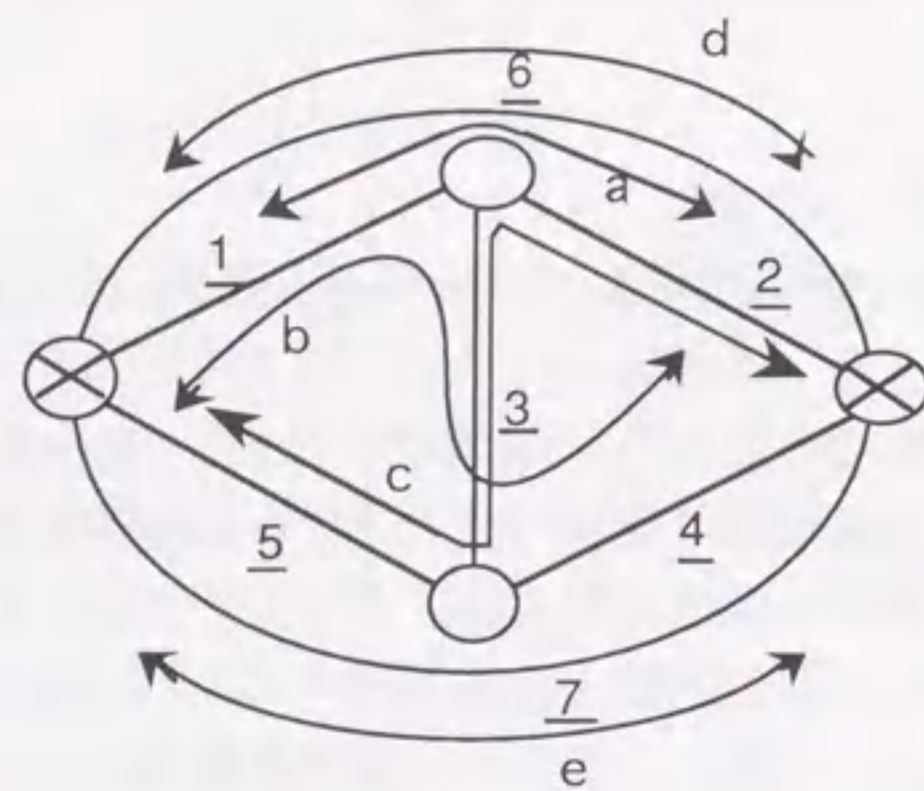
網構成例1：局舎設備の故障確率が小さく、伝送ケーブルのみの故障が問題になる場合、図3-2の網構成例では伝送ケーブルのみを構成要素と考えて、以下のように表現できる。

（各装置の故障は他の装置に影響しないとする。つまり通信経路とパスは一致する。なお、各パスの容量は1000回線を1単位として表した。）

$E = \{\underline{1}, \underline{2}, \underline{3}, \underline{4}, \underline{5}, \underline{6}, \underline{7}\}$, $W = \{a, b, c, d, e\}$,

$\nu(a) = \{\underline{1}, \underline{2}\}$, $\nu(b) = \{\underline{1}, \underline{3}, \underline{4}\}$, $\nu(c) = \{\underline{2}, \underline{3}, \underline{5}\}$, $\nu(d) = \{\underline{6}\}$, $\nu(e) = \{\underline{7}\}$

$C_0(a) = C_0(b) = C_0(c) = 2$, $C_0(d) = 3$, $C_0(e) = 5$



- ⊗ 交換装置
- 伝送装置
- ケーブル
- ↔ 通信経路

a,b,cの回線数は2000回線、
dは3000回線、eは5000回線
である

図3-2. 網構成例

網構成例2：現実の通信網ではクロック（多重装置の同期信号を供給する）断や共通電源断による従属故障が発生する。網構成例1で、装置1,7に電力を供給する装置8を考えれば通信網モデルNは以下のように表現される。

$$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}, W = \{a, b, c, d, e\},$$

$$\nu(a) = \{1, 2, 8\}, \nu(b) = \{1, 3, 4, 8\}, \nu(c) = \{2, 3, 5\},$$

$$\nu(d) = \{6\}, \nu(e) = \{7, 8\}$$

$$C_0(a) = C_0(b) = C_0(c) = 2, C_0(d) = 3, C_0(e) = 5$$

パスとは通信経路に含まれる装置が正常に機能するために必要な装置の集まりである。1,7を含む通信経路が正常に機能するためには8が正常に機能することが必要であるから1,7を含む通信経路に対応するパスは8も含むことになる。

Nにおいて以下の故障条件を仮定し、定義を導入する。

故障条件1：Eの要素は、故障・正常の二つの状態をとり、 $i \in E$ が正常である確率は p_i 、故障率(=1/MTBF)は λ_i で与えられる。

故障条件2：Eの要素iの故障は、iを構成要素とするパス以外のNの構成要素には影響しない。

定義1. 写像 f

$\rho(E)$ から $\rho(W)$ への写像 f を $Z \in \rho(E)$ に対し、
 $f(Z) = \{w \mid w \in W, \nu(w) \subseteq Z\}$
と定義する（ただし、 $f(\phi) = \phi$ ）。

定義2. 関数 C_1

$\rho(E)$ から $R^+ \cup \{0\}$ への写像 C_1 を $Z \in \rho(E)$ に対し、

$$C_1(Z) = \sum_{w \in f(Z)} C_0(w)$$

と定義する。 $f(Z) = \phi$ ならば、 $C_1(Z) = 0$ とする。

定義3. 正常集合 E_g

E_g を正常であるEの要素の集合と定義する。

定義4. Nの容量 $C(N)$

Nの容量 $C(N)$ を以下の式で定義する。

$$C(N) = C_1(E_g)$$

図3-1の例において $E_g = \{1, 2, 3, 4\}$ とすれば、

$$\nu(a) = \{1, 2\} \subseteq E_g, \nu(b) = \{1, 3, 4\} \subseteq E_g, \nu(c) = \{2, 3, 5\} \not\subseteq E_g, \nu(d) = \{6\} \not\subseteq E_g,$$

$$\nu(e) = \{7\} \not\subseteq E_g$$

から、 $f(E_g) = \{w \mid w \in W, \nu(w) \subseteq E_g\} = \{a, b\}$ 、

$$C(N) = C_1(E_g) = \sum_{w \in f(E_g)} C_0(w) = C_0(a) + C_0(b) = 4$$

となる。

本論文では、 $C(N)$ が、ある値 α ($\alpha > 0$)以上であるとき、Nは正常、 α 未満のとき、Nは故障であるとみなす。このときのNの信頼度(Nが正常である確率) $P(N, \alpha)$ 、故障頻度(単位時間当たりの平均故障回数) $F(N, \alpha)$ をNの信頼性評価尺度とすることを提案し、その評価法を検討する。

$C(N)$ を故障時に残存している回線数の割合(回線残存率)に対応させれば、これらの尺度は3.2(すなわち、文献[60])における信頼性設計尺度に対応しており、その評価法の確立は電話網信頼性設計に必須である。

3.4 容量付き極小パス法による評価法

3.4.1 容量付き極小パスの定義

以下の定義を導入する。

定義5. 容量付き極小パス

E の部分集合 E_0 が以下の条件を満足するとき E_0 を容量付き極小パスと呼ぶ。ただし、 $E_0 \neq \{\phi\}$, $\alpha > 0$ とする。

容量付き極小パス条件1: $C_1(E_0) \geq \alpha$ である。

容量付き極小パス条件2:

任意の $i \in E_0$ に対し、 $C_1(E_0 - \{i\}) < \alpha$ である。

(集合 X_1, X_2 に対し、 $X_1 - X_2 = \{x \mid x \in X_1, x \notin X_2\}$ とする。)

図3-2において、 $\alpha = 5, E_0 = \{1, 2, 6\}$ としたとき、 E_0 が容量付き極小パスであることは以下のように確認できる。

$\nu(a) = \{1, 2\} \subseteq E_0, \nu(b) = \{1, 3, 4\} \not\subseteq E_0,$

$\nu(c) = \{2, 3, 5\} \not\subseteq E_0, \nu(d) = \{6\} \subseteq E_0, \nu(e) = \{7\} \not\subseteq E_0$

より、

$$f(\{1, 2, 6\}) = \{w \mid w \in W, \nu(w) \subseteq \{1, 2, 6\}\} = \{a, d\}$$

従って、

$$C_1(\{1, 2, 6\}) = C_0(a) + C_0(d) = 5 \geq \alpha$$

となり、容量付き極小パス条件1を満足する。一方、

$$C_1(\{1, 2, 6\} - \{1\}), C_1(\{1, 2, 6\} - \{2\}), C_1(\{1, 2, 6\} - \{6\})$$

は α より小さく、 $\{1, 2, 6\}$ は容量付き極小パス条件2を満足する。

N において全ての容量付き極小パスが列挙できれば、 $P(N, \alpha)$ は以下の式で求められる(付録3-1参照)。

$$P(N, \alpha) = \Pr(\text{少なくとも一つの容量付き極小パスの全ての要素が正常である。})$$

上式の右辺は、例えば文献[11]の方法を用いて計算できる。 $F(N, \alpha)$ の評価は第四章で示す方法を適用できる。

従って、全ての容量付き極小パスを列挙する方法が問題となる。

3.4.2 容量付き極小パスの生成アルゴリズム

(1) 容量付き極小パスと極小パス候補

本節では全ての容量付き極小パスを生成するアルゴリズムを提示する。すなわち、 W の部分集合を一定の手続きに従って生成し、ある条件を満足するかどうかを確認し、満足する W の集合から一定の変換によって容量付き極小パスを生成するアルゴリズムを提案する。

本アルゴリズムを説明するために、以下の定義を導入する。

定義6. 極小パス候補

W のべき集合の元で空でないものを極小パス候補と呼ぶ。

定義7. レベル j の極小パス候補

j 個の要素からなる極小パス候補をレベル j の極小パス候補と呼ぶ。

定義8. パスの構成要素の和集合をとる写像 f^{-1}

極小パス候補 $A = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ に対し、写像 f^{-1} を

$$f^{-1}(A) = \nu(w_1) \cup \nu(w_2) \cup \dots \cup \nu(w_n)$$

と定義する。

例えば、図3-1の例においては、 $A = \{b, c\}$ に対し、

$$f^{-1}(A) = \{1, 3, 4\} \cup \{2, 3, 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

となる。

定義9. 極小パス候補の単純容量

極小パス候補 $A = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ に対し、

$$A \text{の単純容量} = C_0(w_1) + \dots + C_0(w_n) = \sum_{w \in A} C_0(w)$$

と定義する。

定義10. 極小パス候補の容量

$$A \text{の容量} = C_1(f^{-1}(A)) = \sum_{w \in f^{-1}(A)} C_0(w)$$

と定義する。

例えば図3-2の例において、極小パス候補 $A = \{b, c\}$ を考えると、 A の単純容量は $C_0(b) + C_0(c) = 4$ となるが、 A の容量は単純容量とは異なる値になる。なぜなら、

$$f^{-1}(A) = \nu(b) \cup \nu(c) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

であるから、

$$f(f^{-1}(A)) = \{w \mid w \in W, \nu(w) \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}\} = \{a, b, c\}$$

従って、Aの容量 = $C_0(a) + C_0(b) + C_0(c) = 6$ となる。

定義 1.1. レベル j ($j=1, 2, \dots$) の完全な極小パス候補

レベル j の極小パス候補 A_j が以下の条件を満足するとき、 A_j は完全であると呼ぶ。

(完全条件 1) A_j の容量 = $C_1(f^{-1}(A_j)) \geq \alpha$ である。

(完全条件 2) A_j の単純容量 = A_j の容量

(完全条件 3) A_j は、レベルが j よりも小さい完全な極小パス候補を集合として含まない。

レベル j の完全な極小パス候補の全体を $MFP(j)$ と書く。

図3-2の例では、完全な極小パス候補は、以下のとおりである (ただし、 $\alpha=5$)。

$$MFP(1) = \{e\}, MFP(2) = \{a, d, b, d, c, d\}, MFP(3) = \{a, b, c\}$$

写像 f^{-1} について以下の性質が成り立つ。

性質 1. 写像 f^{-1} の定義域を完全な極小パス候補の全体に制限すると、 f^{-1} は容量付き極小パス全体への一対一の上への写像である。

証明を付録3-2に示す。

図3-2の例 ($\alpha=5$) では、完全な極小パス候補が、 $\{e\}, \{a, d\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}$ であり、容量付き極小パスは f^{-1} を用いて、以下のように求められる。

$$\begin{aligned} f^{-1}(\{e\}) &= \{7\} \\ f^{-1}(\{a, d\}) &= \{\{1, 2\} \cup \{6\}\} = \{1, 2, 6\} \\ f^{-1}(\{b, d\}) &= \{\{1, 3, 4\} \cup \{6\}\} = \{1, 3, 4, 6\} \\ f^{-1}(\{c, d\}) &= \{\{2, 3, 5\} \cup \{6\}\} = \{2, 3, 5, 6\} \\ f^{-1}(\{a, b, c\}) &= \{\{1, 2\} \cup \{1, 3, 4\} \cup \{2, 3, 5\}\} = \{1, 2, 3, 4, 5\} \end{aligned}$$

性質 1 より完全な極小パス候補を全て生成すれば、全ての容量付き極小パスが生成できる。次節では完全な極小パス候補を全て生成するアルゴリズムを示す。

(2) 完全な極小パス候補の生成アルゴリズム

以下の記号を導入する。

$NMFP(j)$, ($j=1, 2, \dots$):

完全条件 3 を満足するが、完全条件 1 または 2 を満足しないレベル j の極小パス候補の全体からなる集合

$g(NMFP(m))$, ($m=1, 2, \dots$):

$$g(NMFP(m)) = \{x \mid x \in \rho(W), x = z \cup y, z \in NMFP(1), y \in NMFP(m), x \text{ のレベル} = m+1\}$$

図3-2の例では ($\alpha=5$)、 $NMFP(j)$ の定義より、

$$NMFP(1) = \{a, b, c, d\}, NMFP(2) = \{a, b, a, c, b, c\}$$

であるから、

$$\begin{aligned} g(NMFP(1)) &= \{x \mid x \in \rho(W), x = z \cup y, z \in NMFP(1), y \in NMFP(1), x \text{ のレベル} = 2\} \\ &= \{x \mid x \in \rho(W), x = z \cup y, z \in \{a, b, c, d\}, y \in \{a, b, c, d\}, x \text{ のレベル} = 2\} \\ &= \{a, b, a, c, a, d, b, c, b, d, c, d\} \end{aligned}$$

同様に、 $g(NMFP(2)) = \{a, b, c, a, b, d, a, c, d, b, c, d\}$ となる。

レベル3の場合には、 $NMFP(3) = \phi$, $g(NMFP(3)) = \phi$ となる。なぜならばレベル3の極小パス候補を列挙すると、

$$\{a, b, c, a, b, d, a, c, d, b, c, d, a, b, e, a, c, e, b, c, e, a, e, d, b, e, d, c, d, e\}$$

$\{a, b, c\}$ は完全な極小パス候補であり、それ以外は全て完全な極小パス候補 $\{e\}, \{a, d\}, \{b, d\}, \{c, d\}$ のいずれかを含み、完全条件 3 を満足するレベル3の極小パス候補は存在しない。 $NMFP(3)$ の元は、定義から完全条件 3 を満足する必要があるため、 $NMFP(3) = \phi$ となる。また、 g の定義より、

$$g(NMFP(3)) = \{x \mid x \in \rho(W), x = z \cup y, z \in NMFP(1), y \in NMFP(3), x \text{ のレベル} = 4\}$$

であり、今、 $NMFP(3) = \phi$ より $y \in NMFP(3)$ となる y は存在しない。従って、上式の右辺の集合の条件を満足する元は存在せず、 $g(NMFP(3)) = \phi$ となる。

$j > 3$ についても同様に、 $NMFP(j) = g(NMFP(j)) = \phi$ となる。

$m=1,2,\dots$ に対し、 $MFP(m)$ を求めるのが本節の目的である。次の性質2によって、 $MFP(m)$ を求めるためには、 g と $NMFP(m)$ の概念が有効であることが分かる。

性質2. 以下の包含関係が成立する($m=1,2,\dots$)。

$$MFP(m+1) \subseteq g(NMFP(m)), \quad NMFP(m+1) \subseteq g(NMFP(m))$$

証明を付録3-3に示す。

性質2に基づいて、任意の $m=1,2,\dots$ に対し $MFP(m)$ を求めるアルゴリズムを示す。

(ステップ1) $MFP(1)$, $NMFP(1)$ を生成する。 $m=1$ とする。

(ステップ2) $NMFP(m)=\phi$ ならば終了。

(ステップ3) $g(NMFP(m))$ を生成する。

(ステップ4) $g(NMFP(m))$ に含まれる各極小パス候補について、完全条件1, 2, 3を満足するものを $MFP(m+1)$ に格納する。

(ステップ5) $g(NMFP(m))$ に含まれる各極小パス候補について、完全条件3を満足するが1または2を満足しないものを $NMFP(m+1)$ に格納する。
(要するに、 $g(NMFP(m))$ で、完全な容量付き極小パス候補とならなかった極小パス候補から完全条件3を満足しないものを取り除く。)

(ステップ6) $m=m+1$ としてステップ2へ進む。

このアルゴリズムの停止条件、すなわち、ステップ2の正当性を以下の性質が与える。

性質3. 以下の関係が成立する。

$$NMFP(m_0)=\phi \Rightarrow m > m_0 \text{ に対し、} MFP(m)=\phi, NMFP(m)=\phi$$

証明を付録3-4に示す。

性質2に基づいたアルゴリズムは、性質3より、 $NMFP(m)=\phi$ となるとき停止する。

図3-2の例 ($\alpha=5$) におけるアルゴリズムの実行例を示す。

(ステップ1)

レベル1の容量パス候補 $\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{e\}$ のうち、 $\{e\}$ のみが、容量 α を越えており(完全条件1)、かつ、

$$\{e\} \text{ の容量} = C_\alpha(\{e\}) = \{e\} \text{ の単純容量}$$

が成り立つので(完全条件2)、 $MFP(1)=\{\{e\}\}$ となる(完全条件3については、レベルが1より明らかに成立する)。また、 $NMFP(1)=\{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}\}$ となる。 $m=1$ とする。

(ステップ2)

$NMFP(m)=NMFP(1) \neq \phi$ であるから、ステップ3へ進む。

(ステップ3)

$$g(NMFP(1)) = \{\{a,b\}, \{a,c\}, \{a,d\}, \{b,c\}, \{b,d\}, \{c,d\}\}$$

(ステップ4)

$\{a,d\}, \{b,d\}, \{c,d\}$ が、完全条件1, 2, 3を満足するので、

$$MFP(2) = \{\{a,d\}, \{b,d\}, \{c,d\}\}$$

となる。

(ステップ5)

極小パス候補 $\{a,b\}, \{a,c\}$ は、完全条件1を満足しない(容量は $4 < \alpha$)が完全条件3を満足する(レベル1の完全な極小パス候補 $\{e\}$ を $\{a,b\}, \{a,c\}$ は含まない)。 $\{b,c\}$ は完全条件1, 3を満足するが2を満足しない(容量は6、単純容量は4)。従って、 $NMFP(2) = \{\{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}\}$ となる。

(ステップ6)

$m=1+1=2$ としてステップ2に進む。

(ステップ2')

$NMFP(m)=NMFP(2) \neq \phi$ であるからステップ3へ進む。

(ステップ3')

$$g(NMFP(2)) = \{\{a,b,c\}, \{a,b,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d\}\}$$

(ステップ4')

極小パス候補 $\{a,b,c\}$ が完全条件1, 2, 3を満足するので、 $MFP(3)=\{\{a,b,c\}\}$ となる。

(ステップ5')

$\{a,b,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d\}$ は、完全条件3を満足しないので、

$$g(NMFP(2)) = \{\{a,b,c\}, \{a,b,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d\}\}$$

の元には、完全条件3を満足するが、完全条件1、または、完全条件2を満足しない元はない。従って、 $NMFP(3)=\phi$ となる。

(ステップ6')

$m=2+1=3$ としてステップ2に進む。

(ステップ2'')

$NMFP(m)=NMFP(3)=\phi$ であるから終了。

なお、性質 1, 2, 3 と故障条件に関する考察を付録3-5に示す。

3.5 評価例

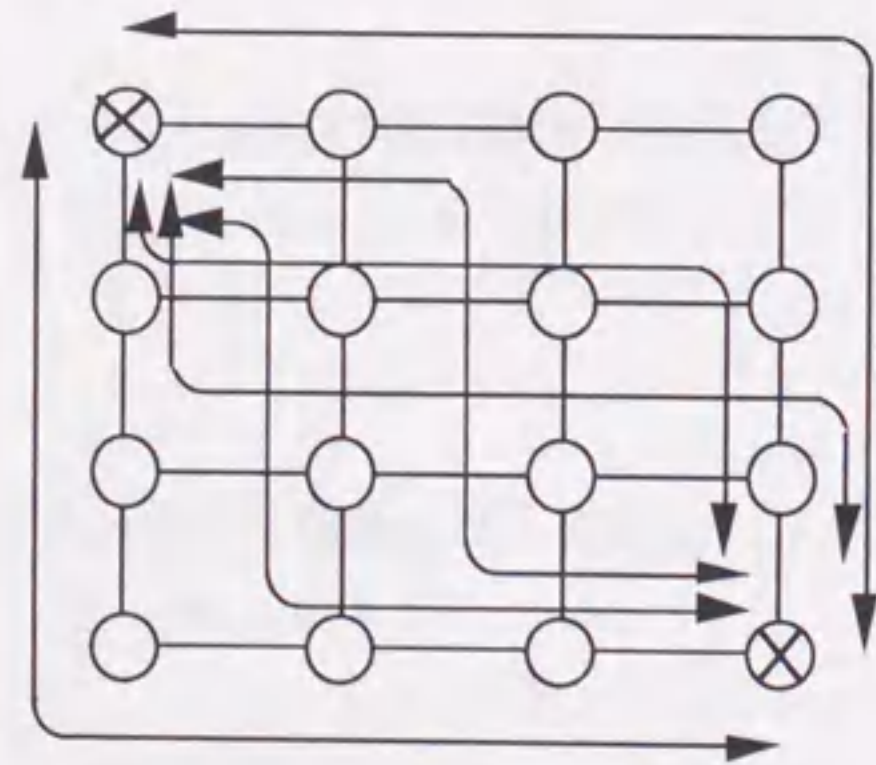
図3-3、図3-4における交換装置間の評価例（要素の故障は互いに独立、つまり、通信経路はパスに一致している）を表3-2、表3-3に示す。計算機はSUN4（Sun Micro-systems社製）、言語はFORTRANを使用した。評価モデル2は、評価モデル1に比べて、二つの交換機間の回線がより少ない通信経路に集約されている。

使用可能な回線数が正常時の1500回線未満となる状態を故障とみなせば、回線の集約によって信頼性は劣化しているが、回線数が4500未満となる状態を故障とみなせば、集約によって、かえって信頼性が向上していることが分かる。

通信経路を分散し、局間の経路数を増やせば、その局間の容量に影響する要素数は増える。これが、 α の値によっては通信経路の集約によってかえって信頼性が向上している場合の原因である。例えば、 $\alpha = \text{『2交換機間の全回線数』}$ とすると、通信経路上の一つでも要素が故障すれば、網故障とみなせる。経路集約によって2交換局に影響する要素数を減らせば、網故障に影響する要素が少なくとも一つ故障する確率は減り、この意味で信頼性は向上している。

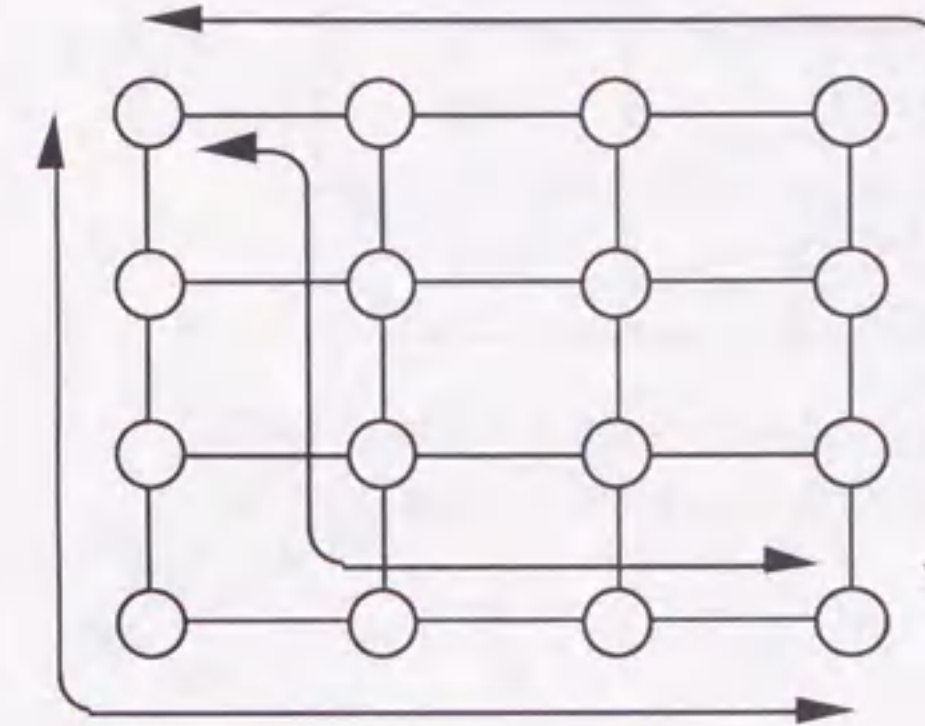
通信経路集約・分散によって信頼性向上を図る場合には、回線数による故障の定義を十分に考慮する必要がある。

また、本モデルに関する単純な信頼性評価法として全ての故障状態をしらみつぶ的に生成して、その状態確率を加算する方法（真理表による方法）が考えられるが、表3-2、3-3の数値例は、提案手法が真理表による単純な方法に比較して高速であることを示している。



各通信経路の回線数は1000
 ⊗ ○ は故障しない
 — (ケーブル) の故障確率は 1.00×10^{-3}
 — (ケーブル) の故障率は 2.00

図3-3. 評価モデル1



各通信経路の回線数は2000
 構成要素の故障確率、故障率は
 評価モデル1と同じ

図3-4. 評価モデル2

表3-2. 評価例1

評価モデル	$1-P(N, 1500)$	$F(N, 1500)$	提案手法による 計算時間 (秒)	真理表による 計算時間 (秒)
評価モデル1	2.02×10^{-6}	8.13×10^{-3}	19.3	85.9
評価モデル2	1.60×10^{-5}	6.40×10^{-2}	1.8	17.9

$1-P(N, 1500)$: 回線数が1500未満となることを故障であるとみなしたときの不信頼度
 $F(N, 1500)$: 回線数が1500未満となることを故障であるとみなしたときの故障頻度

表3-3. 評価例2

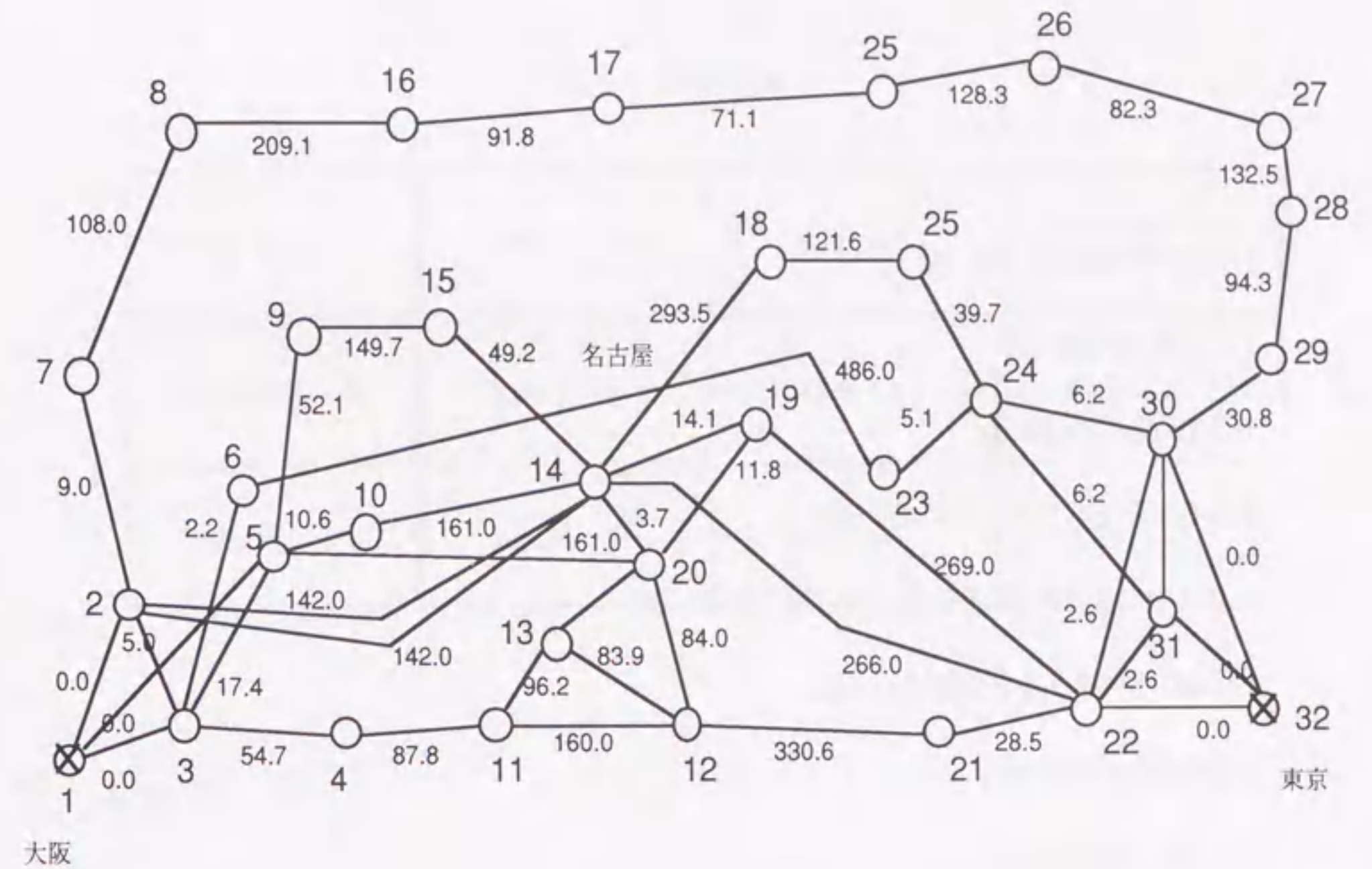
評価モデル	1-P(N, 4500)	F(N,4500)	提案手法による 計算時間 (秒)	真理表による 計算時間 (秒)
評価モデル1	4.04×10^{-3}	8.17	11.3	77.6
評価モデル2	3.04×10^{-3}	6.16	1.6	17.7

1-P(N, 4500): 回線数が4500未満となることを故障であるとみなしたときの信頼度
 F(N, 4500) : 回線数が4500未満となることを故障であるとみなしたときの故障頻度

より大規模な網構成として、図3-5、図3-6の例における評価例を表3-4、表3-5に示す(図中に地名が示してあるが現実の電話網とは必ずしも一致していない)。図中の自然数は伝送装置に与えられた番号を示し、実数は各ケーブルの長さを示している。各伝送装置、交換装置の故障確率は 5.0×10^{-7} 、故障率は 1.0×10^{-7} で与え、ケーブルの故障確率は $3.0 \times 10^{-7} \times [\text{リンクの長さ}]$ 、故障率は $1.0 \times 10^{-7} \times [\text{リンクの長さ}]$ で与えた。伝送装置2, 14を連結するケーブルは二つあるが、図の中で上のケーブルを通るパスはその部分を2-14と表記し、下のケーブルを2_14と表記した。評価モデル4は網トポロジーは評価モデル3と同じで、設定されているパスとその容量が図3-5に示されている。

評価モデル4も、評価モデル3に比べて二つの交換機間の回線がより少ない通信経路に集約されている。この評価例(表3-4、表3-5)では25%未満を故障とみなしたときも、75%未満を故障とみなしたときも、集約によって信頼性は向上している。

なお、モデル3、4では、真理表による方法は計算途中で用いる記憶容量が制約値(250Mb)を越えたため、計算不能となった。



パス	容量
1-5-20-19-22-32	24
1-2_14-20-19-22-32	96
1-2-14-19-22-32	240
1-3-4-11-13-12-21-22-32	96
1-3-6-23-24-31-32	96
1-2-7-8-16-17-25-26-27-28-29-30-32	984
1-5-9-15-14-18-25-24-30-32	384
1-3-4-11-12-21-22-32	792
1-5-10-14-22-32	600
1-2_14-19-22-32	96
1-3-4-11-13-20-12-21-22-32	96

図3-5. 評価モデル3

バス

1-3-4-11-12-21-22-32

1-2-14-19-22-32

1-3-6-23-24-30-32

1-5-9-15-14-18-25-24-30-32

1-2-7-8-16-17-25-26-27-28-29-30-31-32

1-5-9-15-14-18-25-24-31-32

1-3-6-23-24-30-32

1-2-14-19-22-32

図3-6. 評価モデル4

表3-4. 評価例3

評価モデル	1-P(N,25%)	F(N,25%)	提案手法による 計算時間 (秒)
評価モデル3	1.47×10^{-10}	8.12×10^{-11}	8.16×10^2
評価モデル4	1.62×10^{-12}	3.85×10^{-12}	3.79×10^2

表3-5. 評価例4

評価モデル	1-P(N,75%)	F(N,75%)	提案手法による 計算時間 (秒)
評価モデル3	4.47×10^{-4}	1.49×10^{-4}	8.16×10^2
評価モデル4	2.06×10^{-4}	7.08×10^{-5}	3.79×10^2

3.6 むすび

本章では、電話網に対して有効な信頼性評価法として、通信経路の容量の割り当てを考慮した評価モデル、評価尺度、評価アルゴリズムを提案した。

本章で提案したアルゴリズムは、特定2局間の評価だけでなく、全局間の信頼度（全ての局間に必ずある一定の回線数が確保されている確率）等の評価にも、C(N)の定義を適切に与えることによって適用可能である。

付録3-1 容量付き極小パスと $P(N, \alpha)$

$P(N, \alpha) = \text{Pr}(\text{少なくとも一つの容量付き極小パスの全ての要素が正常である。}) \cdots \text{付(1)}$

であることの正当性を証明する(ただし、以下では、条件1の下で、条件2が成立するとき、『条件1 \Rightarrow 条件2』と書く。『条件1 \Rightarrow 条件2』と『条件1 \Leftarrow 条件2』が同時に成立するとき、『条件1 \Leftrightarrow 条件2』と書く)。

(証明) $P(N, \alpha)$ は、“ N が正常である $\Leftrightarrow C(N) \geq \alpha$ ”と定義したとき、 N が正常である確率と定義した。従って、付(1)を証明するには、以下の関係を示せばよい。

$C(N) \geq \alpha \Leftrightarrow$ 少なくとも一つの容量付き極小パスの全ての要素が正常である。

$\langle 1 \rangle C(N) \geq \alpha \Rightarrow$ 少なくとも一つの容量付き極小パスの全ての要素が正常である。
を示す。

$C(N) \geq \alpha$ が成立すれば、 $C(N)$ の定義より、

$$C(N) = C_1(Eg) \geq \alpha$$

となる正常集合 $Eg \subseteq E$ が存在する(存在しなければ、 $C(N) < \alpha$ となって矛盾)。
従って、集合 θ を

$$\theta = \{E' \mid E' \subseteq Eg, C_1(E') \geq \alpha\}$$

で定義すると、 θ は空ではない。

これと、 θ が高々有限個の元しか持たないことから θ の元の中で最も要素数の少ないものがとれる。その一つを E_M とする。 E_M は θ の元であるから、

$$C_1(E_M) \geq \alpha$$

となり、 E_M は容量付き極小パス条件1を満足する。 \cdots 付(2)

また、任意の $i \in E_M$ に対し、 $C_1(E_M - \{i\}) < \alpha$ となる。

(なぜなら、 $C_1(E_M - \{i\}) \geq \alpha$ とすると、

$$E_M - \{i\} \subseteq E_M \subseteq Eg$$

より、 θ の定義から、 $E_M - \{i\} \in \theta$ となり、 E_M が θ の元の中で、最も要素数が少ないことに矛盾する。)

従って、 E_M は、容量付き極小パス条件2を満足する。 \cdots 付(3)

付(2)(3)より、 E_M は、容量付き極小パスであることが言えた。

E_M が θ の元であることから、 $E_M \subseteq Eg$ が言えるので、少なくとも一つの容量付き極小パス E_M の要素が、全て正常である。

$\langle 2 \rangle C(N) \geq \alpha \Leftarrow$ 少なくとも一つの容量付き極小パスの要素が全て正常である。
を示す。

まず、以下の補題を示す。

補題1. 任意の容量付き極小パス Y_0 に対し、 $f(Y_0) \neq \phi$

(補題1の証明) $f(Y_0) = \phi$ と仮定して矛盾を導く。

この仮定と第2章の定義2より、 $C_1(Y_0) = 0$ となる。 Y_0 は容量付き極小パスだから、容量付き極小パス条件1より $C_1(Y_0) \geq \alpha$ が成立し、従って $\alpha = 0$ となる。これは $\alpha > 0$ と定義したこと(第3章の定義5参照)に矛盾する(補題1の証明終)。

$\langle 2 \rangle$ の証明

少なくとも一つの容量付き極小パスの要素が全て正常であるならば、ある容量付き極小パス E_M' が存在して $E_M' \subseteq Eg$ となる。これと f の定義より、

$$f(E_M') \subseteq f(Eg)$$

が成立し、また、補題1より、 $f(E_M')$ は空でないので、

$$f(E_M') = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$$

$$f(Eg) = \{w_1, w_2, \dots, w_n, w_{n+1}, \dots, w_{n+t}\}$$

とおける(ただし、 n は自然数、 t は0以上の整数)。従って、

$$\begin{aligned} C(N) &= C_0(w_1) + \dots + C_0(w_n) \\ &\quad + C_0(w_{n+1}) + \dots + C_0(w_{n+t}) \\ &\geq C_0(w_1) + \dots + C_0(w_n) = C_1(E_M') \end{aligned}$$

となる(3.2節の C_0 の定義より、 $C_0(w) > 0$ を用いた。)

E_M' は、容量付き極小パスであるから容量付き極小パス条件1より、 $C_1(E_M') \geq \alpha$ となり、従って、

$$C(N) \geq C_1(E_M') \geq \alpha$$

が言えて題意は証明された (付(1)の証明終)。

付録3-2. 性質1の証明

f^{-1} の定義域を完全な極小パス候補の全体に制限したとき以下の命題を示せばよい。

(命題1-1) f^{-1} は一対一の写像である。すなわち、任意の二つの完全な極小パス候補 B, B' に対し、以下の式が成立する。

$$f^{-1}(B) = f^{-1}(B') \Rightarrow B = B'$$

(命題1-2) f^{-1} は、容量付き極小パスへの写像である。すなわち、

B が完全な極小パス候補である。
 $\Rightarrow f^{-1}(B)$ は、容量付き極小パスである。

(命題1-3) f^{-1} は上への写像である。すなわち、任意の容量付き極小パス Y_0 に対し、

$$Y_0 = f^{-1}(B_0)$$

となる完全な極小パス候補 B_0 が存在する。

これらの命題を示すために、まず f と f^{-1} の満足する基本的な性質を整理する。

補題2. 任意の極小パス候補 $B_1 \subseteq W$ に対し、 $B_1 \subseteq f(f^{-1}(B_1))$ となる。

(補題2の証明)

$B_1 = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ とする。任意の $w_s \in B_1$ に対し $w_s \in f(f^{-1}(B_1))$ となることを示せばよい。

$$w_s \in f(f^{-1}(B_1)) = \{w \mid w \in W, \nu(w) \subseteq f^{-1}(B_1)\}$$

が成立することをいうためには、

$$w_s \in W \text{ であり、かつ、} \nu(w_s) \subseteq f^{-1}(B_1)$$

が成立することを言えばよい。

w_s の定義より、 $w_s \in B_1 \subseteq W$ が成立する。

また、

$$\begin{aligned} \nu(w_s) &\subseteq \nu(w_1) \cup \dots \cup \nu(w_s) \cup \dots \cup \nu(w_n) \\ &= f^{-1}(B_1) \end{aligned}$$

が成立するので、題意は証明された (補題2の証明終)。

補題3. 任意の極小パス候補 $B_1 \subseteq W$ に対し、以下が成立する。

$$B_1 \text{が完全条件2を満足する。} \Leftrightarrow f(f^{-1}(B_1)) = B_1$$

(補題3の証明)

<1> $f(f^{-1}(B_1)) = B_1 \Rightarrow B_1$ が完全条件2を満足する。
 を示す。

$f(f^{-1}(B_1)) = B_1$ 、及び、容量と単純容量の定義より、

$$B_1 \text{の容量} = C_1(f^{-1}(B_1))$$

$$= \sum_{w \in f^{-1}(B_1)} C_0(w)$$

$$= \sum_{w \in B_1} C_0(w) = B_1 \text{の単純容量}$$

となり、完全条件2が成立する。

<2> 左から右の対偶を示す。すなわち、

$$f(f^{-1}(B_1)) \neq B_1 \Rightarrow B_1 \text{が完全条件2を満たさない。}$$

を示す。

$B_1 \neq f(f^{-1}(B_1))$ と補題2、すなわち、

$B_1 \subseteq f(f^{-1}(B_1))$ から、
 $B_1 = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ のとき、
 $f(f^{-1}(B_1)) = \{w_1, w_2, \dots, w_n, w_{n+1}, \dots, w_{n+t}\}$

とおくことができる (ここで、 n, t は自然数)。
 単純容量と容量の定義から、

$$B_1 \text{の単純容量} = C_0(w_1) + \dots + C_0(w_n) < C_0(w_1) + \dots + C_0(w_{n+t}) = B_1 \text{の容量}$$

が成立する。

(3.2節の C_0 の定義より、任意の $w \in W$ に対し、 $C_0(w) > 0$ と定義されている。)
 すなわち、 B_1 は完全条件 2 を満たさない (補題 3 の証明終)。

これらの補題から、まず f^{-1} が一対一写像であること、すなわち、(命題 1-1) を示すことができる。

(命題 1-1 の証明)

f の定義より、

$$f(f^{-1}(B)) = \{w \mid w \in W, \nu(k) \subseteq f^{-1}(B)\}$$

$$f(f^{-1}(B')) = \{w \mid w \in W, \nu(k) \subseteq f^{-1}(B')\}$$

となる。 $f^{-1}(B) = f^{-1}(B')$ を上式に用いて、

$$f(f^{-1}(B)) = f(f^{-1}(B'))$$

と言える。命題 1-1 の前提より B, B' が完全な極小パス候補であり、完全条件 2 を満足することと、補題 3 より、

$$B = f(f^{-1}(B)) = f(f^{-1}(B')) = B'$$

となる (命題 1-1 の証明終)。

次に、命題 1-2 を示すために、必要な性質を整理する。

補題 4. D, D_1, D_2, \dots, D_k を

$$D_1 \subseteq D, D_2 \subseteq D, \dots, D_k \subseteq D$$

を満たす任意の集合であるとする。以下の性質が成り立つ。

(4-1) 任意の $y \in D$ に対し、

$$D_1 \subseteq D_2 - \{y\} \iff D_1 \subseteq D_2, y \notin D_1$$

(4-2) 以下の式が成り立つ。

$$\{x \mid x \in D, \text{条件 1}, \text{条件 2}\}$$

$$= \{x \mid x \in D, \text{条件 1}\} \cap \{x \mid x \in D, \text{条件 2}\}$$

(4-3) $y \in D$ に対し、

$$y \notin D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_k$$

$$\iff y \notin D_1, y \notin D_2, \dots, y \notin D_k$$

$$\iff D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_k - \{y\} = D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_k$$

(4-4) $y_1, y_2, \dots, y_r \in D$ が、全て、ある条件 1 を満足するとき、

$$\{y_1, y_2, \dots, y_r\} \cap \{x \mid x \in D, \text{条件 1}\}$$

$$= \{y_1, y_2, \dots, y_r\}$$

(証明) 略す。

完全条件 2 について以下の補題が成り立つ。

補題 5. $B_2 \subseteq W$ を完全条件 2 を満足する極小パス候補とするとき、任意の $i \in f^{-1}(B_2)$ に対し、

$$f(f^{-1}(B_2) - \{i\})$$

は完全条件 2 を満足する極小パス候補であるか、または、

$$f(f^{-1}(B_2) - \{i\}) = \phi$$

である。

(証明) $B_3 = f(f^{-1}(B_2) - \{i\}) \neq \phi$ として、 B_3 は、完全条件 2 を満足する極小パス候補であることを示す。

$B_3 \neq \phi$ より、 B_3 は極小パス候補であり、補題 2 より、

$$B_3 \subseteq f(f^{-1}(B_3)) \quad \dots \text{付(4)}$$

となる。

$$B_3 = f(f^{-1}(B_2) - \{i\})$$

$$= \{w \mid w \in W, \nu(w) \subseteq f^{-1}(B_2) - \{i\}\}$$

$$= \{w \mid w \in W, \nu(w) \subseteq f^{-1}(B_2), i \notin \nu(w)\}$$

(なぜならば、補題4の(4-1)を用いた。)

$$= \{w \mid w \in W, \nu(w) \subseteq f^{-1}(B_2)\} \cap \{w \mid w \in W, i \notin \nu(w)\}$$

(補題4の(4-2)を用いた。)

$$= f(f^{-1}(B_2)) \cap \{w \mid w \in W, i \notin \nu(w)\} \\ = B_2 \cap \{w \mid w \in W, i \notin \nu(w)\}$$

となる。これより、二つの性質が言える。

$$B_3 = B_2 \cap \{w \mid w \in W, i \notin \nu(w)\} \subseteq B_2 \quad \dots \text{付(5)}$$

任意の $w \in B_3$ に対し、 $i \notin \nu(w)$ となる。 \dots 付(6)

付(5)より、 $B_3 = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$

$$B_2 = \{w_1, w_2, \dots, w_n, w_{n+1}, \dots, w_{n+t}\}$$

とおくことができ (n は自然数、 t は0以上の整数)、

付(6)より、 $i \notin \nu(w_1), \dots, i \notin \nu(w_n)$ \dots 付(7)

となる。従って、

$$f(f^{-1}(B_3)) \\ = f(\nu(w_1) \cup \nu(w_2) \cup \dots \cup \nu(w_n)) \\ = \{w \mid w \in W, \nu(w) \subseteq \nu(w_1) \cup \dots \cup \nu(w_n)\} \\ = \{w \mid w \in W, \nu(w) \subseteq \nu(w_1) \cup \dots \cup \nu(w_n) - \{i\}\}$$

(なぜならば、付(7)に、補題4の(4-3)を用いた。)

$$\subseteq \{w \mid w \in W, \nu(w) \subseteq \nu(w_1) \cup \dots \cup \nu(w_{n+t}) - \{i\}\} \\ = \{w \mid w \in W, \nu(w) \subseteq f^{-1}(B_2) - \{i\}\} \\ = f(f^{-1}(B_2) - \{i\}) = B_3$$

つまり、 $f(f^{-1}(B_3)) \subseteq B_3$ \dots 付(8)

が言えた。付(4)(8)より、 $f(f^{-1}(B_3)) = B_3$ が言えた (補題5の証明終)。

補題5より、命題1-2を示すことができる。

(命題1-2の証明)

$f^{-1}(B)$ が容量付き極小パスであることを示すには、 $f^{-1}(B)$ が定義5の容量付き極小パ

ス条件1, 2を満足することを示せばよい。

<1> $f^{-1}(B)$ が容量付き極小パス条件1を満足することを示す。

前提より、 B は完全な極小パスである。従って B は、完全条件1を満足する。すなわち、

$$B \text{ の容量} = C_1(f^{-1}(B)) \geq \alpha$$

となる。つまり、 $f^{-1}(B)$ は容量付き極小パス条件1を満足する。

<2> 容量付き極小パス条件2を満足することを背理法で示す。

つまり、以下の仮定から矛盾を導く。

<仮定> $f^{-1}(B)$ が容量付き極小パス条件2を満足しない、すなわち、適当な $i \in f^{-1}(B)$ に対し、以下の式が成立する。

$$C_1(f^{-1}(B) - \{i\}) \geq \alpha$$

この<仮定>から、以下のように矛盾を導く。ただし、 $B_4 = f(f^{-1}(B) - \{i\})$ とする。

<2-1> <仮定>から、 B_4 が完全条件1を満足することを示す。

<2-2> B_4 が完全条件3を満足すると仮定し、矛盾を導く。

<2-3> B_4 が完全条件3を満足しないと仮定し、矛盾を導く。

<2-1> <仮定>から、 B_4 が完全条件1を満足することを示す。

前提より、 B は完全な極小パス候補であり、従って、完全条件2を満足する。よって、補題5より、

$$B_4 = f(f^{-1}(B) - \{i\})$$

は、完全条件2を満足するか、または、 $B_4 = \phi$ である。

$B_4 \neq \phi$ より、

(なぜならば、 $B_4 = \phi$ ならば、 C_1 の定義より、

$$C_1((f^{-1}(B) - \{i\})) = 0,$$

これと、<仮定>より、

$$C_1(f^{-1}(B) - \{i\}) \geq \alpha,$$

従って $\alpha = 0$ となり、 $\alpha > 0$ と定義されている（第3章の定義5参照）ことに、矛盾。）

B_4 が完全条件2を満足するので、補題3より、

$$f(f^{-1}(B_4)) = B_4$$

が成立する。よって C_1 の定義より、

$$C_1(f^{-1}(B) - \{i\}) = \sum_{w \in f(f^{-1}(B) - \{i\})} C_0(w)$$

$$= \sum_{w \in B_4} C_0(w) = \sum_{w \in f(f^{-1}(B_4))} C_0(w)$$

$$= C_1(f^{-1}(B_4))$$

となり、<仮定>は、 $i \in f^{-1}(B)$ に対し $C_1(f^{-1}(B_4)) \geq \alpha$ となることを示している。
完全条件1の定義より、上式は B_4 が完全条件1を満足することを示している。

<2-2> B_4 が完全条件3を満足すると仮定し、<2-1>の結果から矛盾を導く。

<2-1>の結果より、 B_4 は完全条件1を満足する。補題5より、 B_4 は完全条件2を満足する（ $B_4 \neq \phi$ は <2-1> で既に示した。）。従って、 B_4 が完全条件3を満足するという仮定の下では、 B_4 は完全な極小パス候補である。ここで、

$$B_4 = f(f^{-1}(B) - \{i\}) \subseteq f^{-1}(f(B)) = B$$

であるから、 B が完全な極小パス B_4 を含むことになる。 B は完全であり、 B が完全条件3を満足することから、 $B = B_4$ となる。

ここで、 $B = B_4 = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ とすると、 i は、

$$f^{-1}(B) = \nu(w_1) \cup \dots \cup \nu(w_n)$$

の要素だから、適当な $w \in B = B_4$ が存在し、 $i \in \nu(w)$ となる。ところが、

$$\begin{aligned} B_4 &= f(f^{-1}(B) - \{i\}) \\ &= \{w \mid w \in W, \nu(w) \subseteq f(B) - \{i\}\} \\ &= \{w \mid w \in W, \nu(w) \subseteq f(B), i \notin \nu(w)\} \end{aligned}$$

（補題4の(4-1)を用いた。）

となるので、任意の $w \in B_4 = B$ に対して、 $i \notin \nu(w)$ となり矛盾する。

<2-3> B_4 が完全条件3を満足しない場合、矛盾を導く。

B_4 が完全条件3を満足しない場合、ある完全な極小パス候補 B_5 (B_5 のレベル $< B_4$ のレベル) が存在し、 $B_5 \subseteq B_4$ となる。一方 <2-2> の中で述べたように、 $B_4 \subseteq B$ だから、 $B_5 \subseteq B_4 \subseteq B$ となる。従って、 B_5 は B よりもレベルが小さい。これは B が完全であり、完全条件3を満足することに矛盾する(命題1-2の証明終)。

これで、命題1-1, 1-2を証明した。最後に、命題1-3を示す。

一般に、ある条件を満足する u が存在を示すには、 u をある方法で構成できることを示せばよい。その構成法によって u が空でないことと、構成された u が、満たすべき条件を実際に満足することを言えばよい。

（命題1-3の証明）

$B_0 = f(Y_0)$ で構成したとき、

<1> $B_0 \neq \phi$ (すなわち、 B_0 が空でない)

<2> $Y_0 = f^{-1}(B_0)$

<3> B_0 が完全である。

であることを示せばよい。

<1> $B_0 \neq \phi$ であることを示す。

これは、補題1で示されている。

<2> $Y_0 = f^{-1}(B_0)$ であることを示す。

<2-1> $f^{-1}(B_0) \subseteq Y_0$ を示す。

$B_0 = f(Y_0) = \{w \mid w \in W, \nu(w) \subseteq Y_0\} \neq \emptyset$ であるから、 $B_0 = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ としたとき任意の $w_s \in B_0$ に対し、 $\nu(w_s) \subseteq Y_0$ となるので、

$$f^{-1}(B_0) = \nu(w_1) \cup \nu(w_2) \cup \dots \cup \nu(w_n) \subseteq Y_0$$

となる。

<2-2> $Y_0 \subseteq f^{-1}(B_0)$ を背理法で示す。

$Y_0 \not\subseteq f^{-1}(B_0)$ と仮定する。このとき、 $y_0 \in Y_0, y_0 \notin f^{-1}(B_0)$ となる y_0 が存在する。前提より Y_0 が容量付き極小パスであることから、 Y_0 は容量付き極小パス条件1を満足する。すなわち、

$$C_1(Y_0) \geq \alpha \quad \dots \text{付(9)}$$

が成り立つ。

Y_0 が容量付き極小パス条件2を満足することから、

$$y_0 \in Y_0 \text{ に対し、 } \alpha > C_1(Y_0 - \{y_0\}) \quad \dots \text{付(10)}$$

が成り立つ。今、仮定より、

$$y_0 \notin f^{-1}(B_0) = \nu(w_1) \cup \nu(w_2) \cup \dots \cup \nu(w_n)$$

であるから、補題4の(4-3)より、

$$y_0 \notin \nu(w_1), y_0 \notin \nu(w_2), \dots, y_0 \notin \nu(w_n)$$

となり、従って補題4の(4-4)より、

$$\begin{aligned} B_0 &= f(Y_0) \\ &= \{w_1, w_2, \dots, w_n\} \\ &= \{w_1, w_2, \dots, w_n\} \cap \{w \mid w \in W, y_0 \notin \nu(w)\} \\ &= f(Y_0) \cap \{w \mid w \in W, y_0 \notin \nu(w)\} \\ &= \{w \mid w \in W, \nu(w) \subseteq Y_0\} \cap \{w \mid w \in W, y_0 \notin \nu(w)\} \\ &= \{w \mid w \in W, \nu(w) \subseteq Y_0, y_0 \notin \nu(w)\} \end{aligned}$$

(補題4の(4-2)を用いた。)

$$= \{w \mid w \in W, \nu(w) \subseteq Y_0 - \{y_0\}\}$$

(補題4の(4-1)を用いた。)

$$= f(Y_0 - \{y_0\})$$

ゆえに、

$$\begin{aligned} C_1(Y_0) &= \sum_{w \in f(Y_0)} C_0(w) \\ &= \sum_{w \in f(Y_0 - \{y_0\})} C_0(w) \\ &= C_1(Y_0 - \{y_0\}) \end{aligned}$$

となり、付(9)(10)より $C_1(Y_0) > C_1(Y_0 - \{y_0\})$ となることに矛盾する。

<3> B_0 が完全であることを示す。

<3-1> B_0 が完全条件1を満足することを示す。

Y_0 が容量付き極小パスであり、容量付き極小パス条件1を満足するので、 $C_1(Y_0) \geq \alpha$ となる。ここで、<2>の結果より、 $Y_0 = f^{-1}(B_0)$ だから、 $C_1(f^{-1}(B_0)) \geq \alpha$ となり、 B_0 が完全条件1を満足することが分かる。

<3-2> B_0 が完全条件2を満足することを言う。

<2>の結果より $Y_0 = f^{-1}(B_0)$ と言える。この式に f を作用させ、 $f(Y_0) = f(f^{-1}(B_0))$ となる。

B_0 の定義は、 $B_0 = f(Y_0)$ であるから、 $B_0 = f(f^{-1}(B_0))$ となり、補題3より、 B_0 は完全条件2を満足する。

<3-3> B_0 が完全条件3を満たすことを背理法で示す。

B_0 が完全条件3を満たさないと仮定して矛盾を導く。つまり、以下の<仮定>より、矛盾を導く。

<仮定>完全な極小パス候補 $B_0' \subseteq B_0$ が存在し、
 B_0' のレベル $< B_0$ のレベル
 となる。

今、 B_0' のレベル $< B_0$ のレベル $\Rightarrow B_0' \neq B_0$

が成立する。従って、

$$\langle \text{仮定} \rangle \Rightarrow B_0' \subseteq B_0, B_0' \neq B_0 \quad \dots \text{付(11)}$$

が成立する。また、以下の性質が言える (f の定義から初等的に証明される。)

$$B_0' \subseteq B_0, B_0' \neq B_0 \Rightarrow f^{-1}(B_0') \subseteq f^{-1}(B_0), f^{-1}(B_0') \neq f^{-1}(B_0) \quad \dots \text{付(12)}$$

付(11)(12)と、<2>の結果、すなわち、 $Y_0 = f^{-1}(B_0)$ より、

$$\langle \text{仮定} \rangle \Rightarrow f^{-1}(B_0') \subseteq Y_0, f^{-1}(B_0') \neq Y_0 \quad \dots \text{付(13)}$$

が成立する。また、集合の包含関係に関する考察から、

$$f^{-1}(B_0') \subseteq Y_0, f^{-1}(B_0') \neq Y_0 \\ \Rightarrow y' \notin f^{-1}(B_0'), y' \in Y_0 \text{ となる } y' \text{ が存在する。} \quad \dots \text{付(14)}$$

が成立する。付(13)(14)より、<仮定>が正しいならば、以下の命題が、正しい。

命題(a)

$f^{-1}(B_0') \subseteq Y_0, y' \notin f^{-1}(B_0'), y' \in Y_0$ となる y' が存在する。

補題4の(4-1)を適用すると、命題(a)は、次の命題(b)に等しい。

命題(b)

$f^{-1}(B_0') \subseteq Y_0 - \{y'\}, y' \in Y_0$ となる y' が存在する。

ここで、

$$f^{-1}(B_0) \subseteq Y_0 - \{y'\} \Rightarrow$$

$$f(f^{-1}(B_0')) \\ = \{w \mid w \in W, \nu(w) \subseteq f^{-1}(B_0')\} \subseteq \{w \mid w \in W, \nu(w) \subseteq Y_0 - \{y'\}\} \\ = f(Y_0 - \{y'\})$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow C_1(f^{-1}(B_0')) &= \sum_{w \in f(f^{-1}(B_0'))} C_0(w) \\ &\leq \sum_{w \in f(Y_0 - \{y'\})} C_0(w) \\ &= C_1(Y_0 - \{y'\}) \end{aligned}$$

となることから、命題(b)より以下の命題(c)が導かれる。

命題(c)

$C_1(f^{-1}(B_0')) \leq C_1(Y_0 - \{y'\}), y' \in Y_0$ となる y' が存在する。

一方、 Y_0 は容量付き極小パスであるから、容量付き極小パス条件2より、

$$y' \in Y_0 \text{ について、} C_1(Y_0 - \{y'\}) < \alpha$$

となる。

また、<仮定>の B_0' の定義より B_0' は完全であるから、命題1-2より $f^{-1}(B_0')$ は容量付き極小パスであり、容量付き極小パス条件1より $C_1(f^{-1}(B_0')) \geq \alpha$ となる。従って、<仮定>が正しいならば、
 $y' \in Y_0$ に対し、

$$C_1(f^{-1}(B_0')) \geq \alpha > C_1(Y_0 - \{y'\})$$

となるが、これは命題(c)に矛盾する。

<3-1>, <3-2>, <3-3>より B_0' は完全条件1, 2, 3を全て満足するので、 B_0' は完全である (命題1-3の証明終)。

付録3-3. 性質 2 の証明

$m=1,2,\dots$ に対し、 $g(NMFP(m)) \supseteq MFP(m+1)$ を示す。
 ($g(NMFP(m)) \supseteq NMFP(m+1)$ は同様に示すことができる。)

$$g(NMFP(m)) = \{x \mid x \in \rho(W), x = z \cup y, z \in NMFP(1), y \in NMFP(m), x \text{ のレベル} = m+1\}$$

だから、任意の $v \in MFP(m+1)$ に対し、

- <1-1> $v \in \rho(W)$
- <1-2> 適当な $z_0 \in NMFP(1), y_0 \in NMFP(m)$ が存在して、 $v = z_0 \cup y_0$ となる。
- <1-3> v のレベル = $m+1$

を示せばよい。<1-1>, <1-3>は、 $MFP(m+1)$ の定義より、自明。

<1-2>を示す。

$v = \{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_{m+1}\}$ とする。
 v は完全であるから、完全条件 3 より、 v に含まれるレベルが $m+1$ 未満の極小パス候補は完全ではない。従って、 $\{\epsilon_1\}$ は完全ではないレベル 1 の極小パス候補である。すなわち、

$$\{\epsilon_1\} \in NMFP(1) \quad \dots \text{付(15)}$$

となる。

$$\{\epsilon_2, \dots, \epsilon_{m+1}\} \text{ も完全な極小パス候補ではない。} \quad \dots \text{付(16)}$$

さらに、

$$\{\epsilon_2, \dots, \epsilon_{m+1}\} \text{ は、レベルが } m \text{ より小さい完全な極小パス候補を含まない。} \quad \dots \text{付(17)}$$

(なぜならば、 $\{\epsilon_2, \dots, \epsilon_{m+1}\}$ がレベルが m より小さい完全な極小パス候補 v' を含むならば、

$$v' \subset \{\epsilon_2, \dots, \epsilon_{m+1}\} \subset \{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_{m+1}\} = v$$

$$v' \text{ のレベル} < m < m+1$$

が成立し、 v が完全条件 3 を満足することに矛盾する。)

付(16)より、 $\{\epsilon_2, \dots, \epsilon_{m+1}\}$ は完全条件 1, 2, 3 のうちの少なくとも一つを満足しな

い。

付(17)は、 $\{\epsilon_2, \dots, \epsilon_{m+1}\}$ が完全条件 3 を満足することを示している。
 従って、 $\{\epsilon_2, \dots, \epsilon_{m+1}\}$ は、完全条件 1、または、2 を満足しない。
 ゆえに、 $NMFP(m)$ の定義より、

$$\{\epsilon_2, \dots, \epsilon_{m+1}\} \in NMFP(m) \quad \dots \text{付(18)}$$

となる。

$$v = \{\epsilon_1, \dots, \epsilon_{m+1}\} = \{\epsilon_1\} \cup \{\epsilon_2, \dots, \epsilon_{m+1}\}$$

が成り立つことと、付(15), 付(18)から、

$$z_0 = \{\epsilon_1\}, y_0 = \{\epsilon_2, \dots, \epsilon_{m+1}\}$$

とすれば、

$$z_0 \in NMFP(1), y_0 \in NMFP(m), v = z_0 \cup y_0$$

となる z_0, y_0 が構成できたので、<1-2>の条件を満足する y_0, z_0 が存在することが言えた。

付録3-4. 性質 3 の証明

$NMFP(m_0) = \phi \Rightarrow m > m_0$ に対し、 $MFP(m) = \phi, NMFP(m) = \phi$ を示す。まず、

$$\text{<1> } NMFP(m_0) = \phi \Rightarrow g(NMFP(m_0)) = \phi \text{ を示す。}$$

$g(NMFP(m_0)) \neq \phi$ と仮定すると、適当な $x_0 \in g(NMFP(m_0))$ となるが、 $g()$ の定義より、

$$x_0 \in g(NMFP(m_0)) = \{x \mid x \in \rho(W), x = z \cup y, z \in NMFP(1), y \in NMFP(m_0), x \text{ のレベル} = m_0+1\}$$

となり、適当な $z_0 \in NMFP(1), y_0 \in NMFP(m_0)$ が存在して $x_0 = z_0 \cup y_0$ となるが、前提より $NMFP(m_0) = \phi$ であるから、 $y_0 \in NMFP(m_0)$ となる y_0 は存在しないので、矛盾。

$$\text{<2> } g(NMFP(m)) = \phi \Rightarrow MFP(m+1) = NMFP(m+1) = \phi \text{ を示す。}$$

$MFP(m+1) \neq \phi$ と仮定すると、適当な x_0 が存在して $x_0 \in MFP(m+1)$ となる。ところが、

性質 2 より、 $\phi \neq \text{MFP}(m+1) \subseteq g(\text{NMFP}(m))$ となり、 $g(\text{NMFP}(m)) = \phi$ に矛盾する。
同様に $\text{NMFP}(m+1) = \phi$ が言える。

<3> $\text{NMFP}(m_0) = \phi \Rightarrow m > m_0$ に対し、 $\text{MFP}(m) = \phi$ 、 $\text{NMFP}(m) = \phi$ を示す。

<1><2>の議論を繰り返し用い、帰納的に、 $m > m_0$ に対し、

$$\text{MFP}(m) = \phi, \text{NMFP}(m) = \phi$$

が言える。

付録3-5. 性質 1, 2, 3 と故障の関係

本章における性質 1, 2, 3 の証明には、故障という概念は全く使われておらず、性質 1, 2, 3 は従属故障、独立故障という故障の条件とは無関係に成立する集合論的な性質である。

では、本章の前半で述べた『パスは通信経路に含まれている装置が正常に機能するために必要な装置の集まりに対応するものである』こと、すなわち、故障条件 2 で規定される故障の性質は、本論文で提案するアルゴリズムのどの部分に影響を与えるのかという、容量付き極小パスを全て列挙した後の付(1)の計算に関係する。

例えば、今列挙された容量付き極小パスが {1}, {2} であったとする。二つの容量付き極小パスの要素が互いに影響しなければ、付(3)は文献[11]より、

$$P(N, \alpha) = p_1 + (1 - p_1)p_2$$

で計算される。しかし、1の故障が2の従属故障を起こすのであれば、

$$\underline{2} \text{が正常} \Leftrightarrow \underline{1} \text{と} \underline{2} \text{の両方が正常}$$

であり、

$$\begin{aligned} P(N, \alpha) &= P(\underline{1} \text{が正常、または、} \underline{2} \text{が正常}) \\ &= P(\underline{1} \text{が正常、または、} \underline{1} \text{と} \underline{2} \text{の両方が正常}) \\ &= P(\underline{1} \text{が正常}) \\ &= p_1 \end{aligned}$$

となり、 $P(N, \alpha)$ を求めるために要素間の従属故障の関係を全て検索して故障の関係を考慮した計算を行わなければならない。しかし、故障条件 2 によって同一パス以外に従属故障を引き起こさなければ (性質 1 により、容量付き極小パスはパスの和集合である

から)、要素の故障がその要素を含む容量付き極小パス以外に影響することはなく文献 [11] を機械的に適用し、 $P(N, \alpha)$ を求めることができる。

第四章 故障頻度評価法

4.1 まえがき

現在の電話網については信頼度に基づいた設計が行われているが、よりユーザに分かりやすい尺度として年間何度故障するのか、あるいは、故障発生後何時間後に復旧するのかという故障頻度やMTTRに対応する評価尺度が重要になりつつある。専用線においては、長時間に及ぶ故障を少なくしたいという要求があり、また、新設の計算機網においては、コストの観点から長時間の故障と短時間の故障を分類し、低コストで効果的な信頼性対策を検討している（一般に、短時間故障の方より低コストの対策が考えられることから、低コストで網構築するには、長時間故障の対策は放棄し、短時間故障に的を絞る案もある。）。

従って、信頼度を評価するだけでなく故障頻度の評価が重要になる。（MTTRその他の確率論的評価尺度は、第一章で述べたように、信頼度と故障頻度から簡単に計算できる。）

最近の研究では、信頼度と故障頻度の評価の問題を異なる問題ととらえるのではなく、信頼度の評価法を若干の変形のみで、故障頻度評価として利用する研究が行われている^{[15][26][31][32]}。これらの研究は、信頼度を表す式を一定の簡単な規則で故障頻度を表す式に変換しようとする試みである。文献[15][26][31][32]は信頼度を表す式が一定の形式、すなわち、排他的なBool表現で表現されるのであれば簡単な変換規則でこの変換が可能であることを示した。この変換規則によってI-E法やPD法と呼ばれる方法（I-E法やPD法については、4.3.2参照）が故障頻度評価法として利用できることが分かったが、縮退法のように用いる信頼度表現が排他的なBool表現で表現されないときには文献[15][26][31][32]の方法は有効ではない。

そこで、本章では微分作用素を用いるとシステム信頼性理論で対象となるほとんど全てのモデルで信頼度表現を故障頻度表現に変形できることを示す。この結果を適用すれば正確な値を求める信頼度評価法はほとんど全て故障頻度評価法として利用できる。

正確な信頼度ではなく近似的な値を求める場合、微分作用素の適用において（近似精度が保たれるかどうかの検証が必要であるという意味で）単純な適用は避けなければならないが、特殊な場合について（クォードリラテラル・スター変換）適用したところ、数値的には十分な近似精度が得られた。

4.2 対象とするモデルと仮定

以下の仮定を満足するシステムを対象モデルとする。

仮定1：システムは構成要素からなる。システムの構造関数はコヒーレントである（コヒーレントの定義は文献[27]参照）。

仮定2：システムとその構成要素は各々、正常、故障の二つの状態をとる。

仮定3：全ての要素は修理される。修理によって別の故障が引き起こされることはない。

仮定4： F_1 に含まれる関数は微分可能である。

（ここで、 F_1 については、以下の記号を参照。）

記号

R	: システムの信頼度
ff	: システムの故障頻度
$D(\cdot)$: 微分作用素
p_i, q_i	: 構成要素 i が正常である確率、故障している確率
λ_i, μ_i	: 構成要素 i の故障率、修理率
F_1	: 構成要素の各々が正常である確率を変数とする関数の全体
F_2	: 構成要素の各々が正常である確率、及び故障率を変数とする関数の全体
T_i	: タイセット i ; タイセット i が含む全ての構成要素が正常である事象も意味する。
$T_i \cup T_j$: T_i または T_j に含まれる構成要素の全てが正常である事象
$T_i \cap T_j$: T_i と T_j の双方に含まれる構成要素の全てが正常である事象
$f_i * f_j$: T_i または T_j に含まれる構成要素の故障率の和

（ここで、タイセットについて説明する。構成要素の集合 X が、以下の条件を満足するとき、タイセットと呼ぶ。）

条件1. X に含まれる構成要素が全て正常であれば、システムは正常である。

条件2. X に含まれない構成要素が全て故障しており、かつ、 X の少なくとも一つが故障していれば、システムは故障している。

第二章のグラフモデルでは全節点を連結するスパニングトリーがタイセットであり、第三章のモデルでは容量付き極小パスがタイセットである。）

仮定1, 2, 3は、ここで対象とするシステムがシステム信頼性理論の対象とするモデルの中で一般的であると考えられるコヒーレントシステム^[27]であることを示している。第二、三章で対象としたモデルは、コヒーレントシステムの中の特殊なクラスでしかない。つまり、本章で導かれる結果はグラフモデルに対しても、パスの容量の割り当てられたモデルに対しても適用できる。

4.3 微分作用素Dの定義と基本的性質

4.3.1 基本的考え方

定義1. $f, g \in F_1$ とする。 F_1 から F_2 への微分作用素Dを以下の条件を満足する作用素と定義する。

$$\begin{aligned} D(p_i) &= p_i \lambda_i \\ D(f+g) &= D(f)+D(g) \\ D(fg) &= D(f)g+fD(g) \end{aligned}$$

Dは以下の性質を満足する。

性質1. Dは唯一存在し、かつ以下の条件を満足する。

$$\begin{aligned} D(f/g) &= \{gD(f)-D(g)f\}/(g)^2 \\ D(f^s) &= s f^{s-1}D(f) \quad (s \text{ は実数}) \\ D(c) &= 0 \quad (c \text{ は定数}) \end{aligned}$$

性質1は微分作用素の基本的な性質^[34]の直接的な結果である。

定理1.

システムの信頼度がR ($\in F_1$) で与えられているとする。このとき、システムの故障頻度はD(R) ($\in F_2$) で求められる。

定理1は付録4で証明される。

4.3.2 微分作用素Dの効果

I-E法を用いて、システムの信頼度は以下のように求められる^[31]。ここで、tは全てのタイセットの数である。

$$\begin{aligned} R &= P_r \{T_1\} + P_r \{T_2\} + \dots + P_r \{T_t\} \\ &\quad - P_r \{T_1 \cap T_2\} - \dots - P_r \{T_{t-1} \cap T_t\} \\ &\quad \dots \dots \dots \\ &\quad + (-1)^{t-1} P_r \{T_1 \cap T_2 \cap \dots \cap T_t\} \end{aligned} \quad (1)$$

文献[13]は、以下の式を用いてシステムの故障頻度を評価する方法を提案した。

$$\begin{aligned} ff &= P_r \{T_1\} f_1 + P_r \{T_2\} f_2 + \dots + P_r \{T_t\} f_t \\ &\quad - P_r \{T_1 \cap T_2\} (f_1 * f_2) - \dots - P_r \{T_{t-1} \cap T_t\} (f_{t-1} * f_t) \\ &\quad \dots \dots \dots \\ &\quad + (-1)^{t-1} P_r \{T_1 \cap T_2 \cap \dots \cap T_t\} (f_1 * f_2 * \dots * f_t) \end{aligned} \quad (2)$$

式(2)を用いた方法は有効であるが、その適用範囲はシステムの信頼度が式(1)の形式で得られたときのみに限られている。例えば、システムの信頼度が

$$R = p_1 + p_2 p_3 - p_1 p_2 p_3 \quad (3)$$

と表現されるならば、故障頻度は式(2)を用いて、以下のように導かれる。

$$ff = p_1 \lambda_1 + p_2 p_3 (\lambda_2 + \lambda_3) - p_1 p_2 p_3 (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)$$

しかし、システム信頼度が以下のような形式で得られたならば、式(2)の方法を利用することは難しい。

$$R = p_1 + (1-p_1)p_2 p_3 \quad (4)$$

$$R = p_2(p_1 + p_3 - p_1 p_3) + (1-p_2)p_1 \quad (5)$$

$$R = p_1(p_1 + p_1^2 - p_1^3) \{ 2 - (p_1 + p_1^2 - p_1^3)^{1/2} \} \quad (6)$$

(ここで、式(6)は、いかなるコヒーレントなシステムの信頼度も正確には表現しない。しかし、近似式としては有り得る。)

そこで、文献[15][26][32][31]は、より一般的な方法を導いた。もし、Rが排反なBool積の和表現^[31]、すなわち、

$$R = \sum_{h=1}^M A_h B_h$$

として得られるのであればシステム故障頻度は、

$$ff = \sum_{h=1}^M A_h B_h (\Delta_h - \Psi_h) \quad (7)$$

と得られる。ここで、以下の記号を導入した。

- M : 自然数
 A_h : 複数の構成要素の各信頼度の積
 B_h : 複数の構成要素の各不信頼度 (1 - 信頼度) の積
 Δ_h : A_h に現れる構成要素の故障率の和
 Ψ_h : A_h に現れる構成要素の修理率の和

式(7)を直接用いて式(4)を故障頻度を表す表現に変形することが以下のようにできる。

$$ff = p_1 \lambda_1 + (1 - p_1) p_2 p_3 (-\mu_1 + \lambda_2 + \lambda_3)$$

式(5)の変形はより難しい。式(5)は排他なBool表現の形式で与えられていないため、直接式(2)(7)の方法を適用することができないからである。式(2)(7)の方法を適用する前に、発見的なやり方で排他なBool表現に変形する必要がある。例えば、式(5)は式(4)に恒等式として等しいことが発見的に分かるので、システムの故障頻度は式(4)に式(7)の方法を適用することによって得られる。

ところが、微分作用素Dはより直接的に、かつ、機械的に式(5)を故障頻度表現に変形することができる。

$$\begin{aligned} D(R) &= D(p_2(p_1 + p_3 - p_1 p_3)) + D((1 - p_2)p_1) \\ &= D(p_2)(p_1 + p_3 - p_1 p_3) + p_2 D(p_1 + p_3 - p_1 p_3) \\ &\quad + D(1 - p_2)p_1 + (1 - p_2)D(p_1) \\ &= p_2 \lambda_2 (p_1 + p_3 - p_1 p_3) + p_2 \{ p_1 \lambda_1 + p_3 \lambda_3 - p_1 p_3 (\lambda_2 + \lambda_3) \} \\ &\quad - p_2 \lambda_2 p_1 + (1 - p_2) p_1 \lambda_1 \\ &= p_1 \lambda_1 + p_2 p_3 (\lambda_2 + \lambda_3) - p_1 p_2 p_3 (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) \end{aligned}$$

上の計算は、定義1と性質1の式変形のみを用いて実行されている。得られた表現は、

$$ff = p_1 \lambda_1 + (1 - p_1) p_2 p_3 (-\mu_1 + \lambda_2 + \lambda_3)$$

に等しいことが、よく知られている以下の関係式から導かれる。

$$p_i \lambda_i = (1 - p_i) \mu_i$$

いかなるコヒーレントシステムの信頼度も必ず排他なBool積の和表現に変形できる^[31]。従って、式(7)の方法は、いかなる信頼度表現も故障頻度表現に変形することができる。しかし、この方法には、以下の限界がある。

限界1.

正確なシステム信頼度を評価する場合でも、いくつかの特殊な評価アルゴリズムは計算過程において仮想的な信頼度表現を必要とする場合がある。例えばグラフモデルにおける次数2縮退は以下の信頼度表現を用いる^[23]。

$$p_i p_j / (p_i + p_j - p_i p_j)$$

最終的なグラフモデルの正確な信頼度はこの仮想的な信頼度を特定の手続きで積み上げることによって得られる。もし、次数2縮退を故障頻度評価に用いるのであればこの仮想的な信頼度表現に対応する故障頻度表現を決定する必要がある(4.4.1参照)。残念ながら、仮想的な信頼度表現に対しては式(2)の方法も式(7)の方法も適用できない。

限界2.

システムの信頼度を表す近似表現は、ほとんどの場合排他なBool積の和表現では表現されない(例えば式(6))。このような場合には式(2)の方法も式(7)の方法も適用できない。

式(2)(7)に基づく変換法は、適用する信頼度表現に一定の形式を要求するため、上のような限界が生じる。しかし、微分作用素Dは限界1の全て、及び、限界2の特別な場合に効果的である。

限界1については微分作用素Dの定義1、性質1の規則のみを用いて、仮想的な信頼度表現に対応する仮想的な故障頻度表現に変換できる。例えば、 $p_i p_j / (p_i + p_j - p_i p_j)$ は以下のように変換される。

$$\begin{aligned} D(p_i p_j / (p_i + p_j - p_i p_j)) &= \{(p_i + p_j - p_i p_j) D(p_i p_j) - D(p_i + p_j - p_i p_j) p_i p_j\} / (p_i + p_j - p_i p_j)^2 \\ &= p_i p_j (p_i \lambda_i + p_j \lambda_j) / (p_i + p_j - p_i p_j)^2 \end{aligned}$$

一方、限界2はより克服することが困難である。もし、近似表現にDを作用させたとしても、 $R \doteq R'$ であることが $D(R) \doteq D(R')$ を意味するとは限らないからである。近似表現にDを作用させる場合には、より理論的な検討が必要である。しかし、特殊な近似表現にDを作用させることを試みたところ、数値的には高い近似精度を与えることが分かった。この近似については4.4.2で詳しく述べる。

システムの信頼度は様々な手法を用いて多くの異なった形式で表現される。I-E法、DP法、縮退法、その他の手法はRに対して異なった形式を与える。しかしながら、仮想的、あるいは、特殊な近似的表現を含むほとんどの信頼度表現が、定義1、性質1の規則のみを用いて故障頻度表現に変形できる。この考え方を用いれば、様々な信頼度評価アルゴリズムを故障頻度評価アルゴリズムとして使用することができる。

4.4 微分作用素Dの応用

本節では、4.3で述べた考え方を本論文で対象とした通信網モデルに応用する。第三章で述べたパスの容量の割り当てられた通信網モデルに対する評価アルゴリズムは、文献[11]の一般的なシステムにおける評価法に依存しているが、文献[11]の評価アルゴリズムはDP法の一つであり、従って、信頼度評価アルゴリズムは式(7)の変換法を用いて変換すれば、故障頻度評価アルゴリズムとして使用できる。

従って、本節では、グラフモデルにおける信頼度評価アルゴリズムをDによる変換を用いて故障頻度評価に用いることができることを示す。

4.4.1 正確な縮退法への応用

第二章で示したグラフモデルの信頼度評価は、各種の縮退法に基づいている。本節では、正確に信頼度評価を行うアルゴリズムが正確な故障頻度評価として使用できる例として、各種の縮退法を故障頻度評価の縮退法に変換する。グラフに関する言葉と記号は第二章で定義したものをを用いる。

(1) 並列縮退

・並列縮退

並列縮退は、端点が同一の二つの枝 $a=(u, v)_1$ と $b=(u, v)_2$ を一つの枝 $r=(u, v)$ に置き換え、 $p_r=p_a+p_b-p_a p_b$ とする。

この場合、縮退後の枝 r の故障率 λ_r は、 $p_r=p_a+p_b-p_a p_b$ に、式(2)を用いて以下のよう決定される。

$$p_r \lambda_r = p_a \lambda_a + p_b \lambda_b - p_a p_b (\lambda_a + \lambda_b)$$

より、

$$\lambda_r = \{ p_a \lambda_a + p_b \lambda_b - p_a p_b (\lambda_a + \lambda_b) \} / (p_a + p_b - p_a p_b)$$

となる。

(2) 次数2縮退

・次数2縮退

$a=(u, v)$, $b=(v, w)$, $u \neq v$, v の次数を2とする。次数2縮退は a, b を一つの枝 $r=(u, w)$ に置き換え、 $p_r=p_a p_b / (p_a + p_b - p_a p_b)$ とする。

この縮退はグラフモデルの信頼度を正確には保存せず、 G を縮退前、 G' を縮退後のグラフとすれば、一般には $R(G) \neq R(G')$ である。しかし、 G の信頼度は G' の信頼度から以下のように正確に求めることができる。

$$R(G) = \Omega R(G'), \quad (8)$$

(但し、 $\Omega \equiv (p_a + p_b - p_a p_b)$)

この縮退を故障頻度評価のための縮退法に変換するためには、以下の問題を解決する必要がある。

問題A：枝 r の故障率をいかにして決定するか。

問題B：縮退後のグラフの信頼度から縮退前の故障頻度をいかにして求めるか。

p_r は式(2)(7)の方法が適用できる形式で表されていない。従って、微分作用素Dのみが問題A, Bを解決することができる。すなわち、

$$D(p_r) = D(p_a p_b / (p_a + p_b - p_a p_b))$$

より、

$$p_r \lambda_r = \{ (p_a + p_b - p_a p_b) D(p_a p_b) - D(p_a + p_b - p_a p_b) p_a p_b \} / (p_a + p_b - p_a p_b)^2$$

が得られる。従って、問題Aは以下のように解決される。

$$\lambda_r = (p_a \lambda_a + p_b \lambda_b) / (p_a + p_b - p_a p_b) \quad (9)$$

問題Bは以下のように解決される。

$$D(R(G)) = D(\Omega) R(G') + \Omega D(R(G')) \quad (10)$$

$$D(\Omega) = p_a \lambda_a + p_b \lambda_b - p_a p_b (\lambda_a + \lambda_b)$$

すなわち、枝 r が正常である確率を $p_r = p_a p_b / (p_a + p_b - p_a p_b)$ で与え、 r の故障率を式(9)で与えれば、縮退後の故障頻度を式(10)を用いて決定することができる。

(3) デルタ・スター変換、トリサブグラフ・K4変換

次数2縮退と同じ手順で、デルタ・スター変換、及びトリサブグラフ・K4変換式を故障頻度を評価するための式に変形することができる。

(4) 信頼度評価の双対問題における縮退法

第二章では、信頼度評価の双対問題を検討し、縮退法が有効であることを示した。これらの双対問題における縮退法が微分作用素Dを用いて故障頻度評価のための縮退法に変換できるかどうかは、本章の前提であるシステムのコヒーレント性を確認する必要がある。システムがコヒーレントであるためにはシステムにタイセットが定義され、『システムが正常である』ことが『少なくとも一つのタイセットにおいてその全ての含まれる要素が正常である』ことが言えれば良い。双対問題においては、閉路がタイセットに等価であることから、双対問題の縮退についても次数2縮退と同じ手続きに従って、変換することができる。

4.4.2 近似法への応用

4.3.2で述べたように、応用として微分作用素Dを近似法へ適用することは、一般には簡単ではない。なぜならば、微分作用素の性質から $R \approx R'$ が $D(R) \approx D(R')$ を意味するとは限らないからである。にも関わらず本節では、コードリラテラル・スター変換^{[18][19]}と呼ばれる特殊な近似縮退法に微分作用素Dを適用する。コードリラテラル・スター変換は、図4-1のような変換であり、非常の効率の良い近似法として知られている。

図4-2に示した縮退に対し、信頼度の評価値、誤差の数値例を表4-1、故障頻度に関する数値例を表4-2に示す。縮退前のグラフにおいて全ての枝の正常である確率、故障率は互いに等しいとする。

数値例は、枝の正常である確率が高い場合にはコードリラテラル・スター変換^{[18][19]}が精度の高い近似値を与えていることがわかる。

(ただし、この例は、特定の二つの節点間が連結している状態を通信機能が正常であるとみなした。)

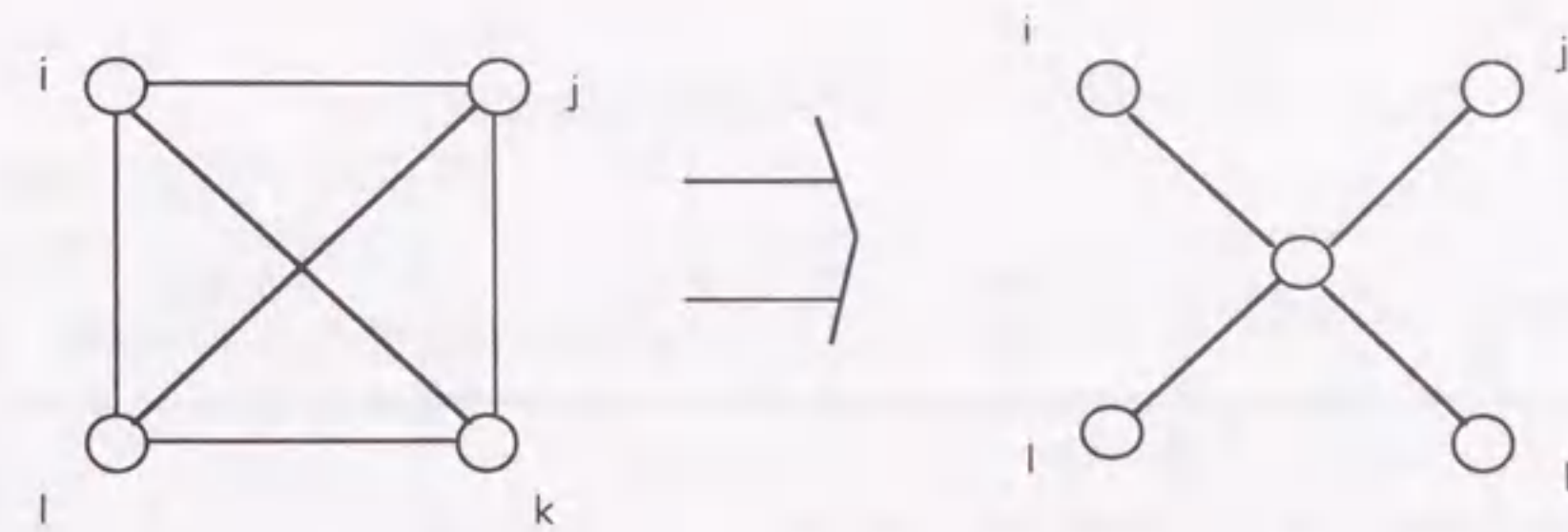


図4-1. コードリラテラル・スター変換

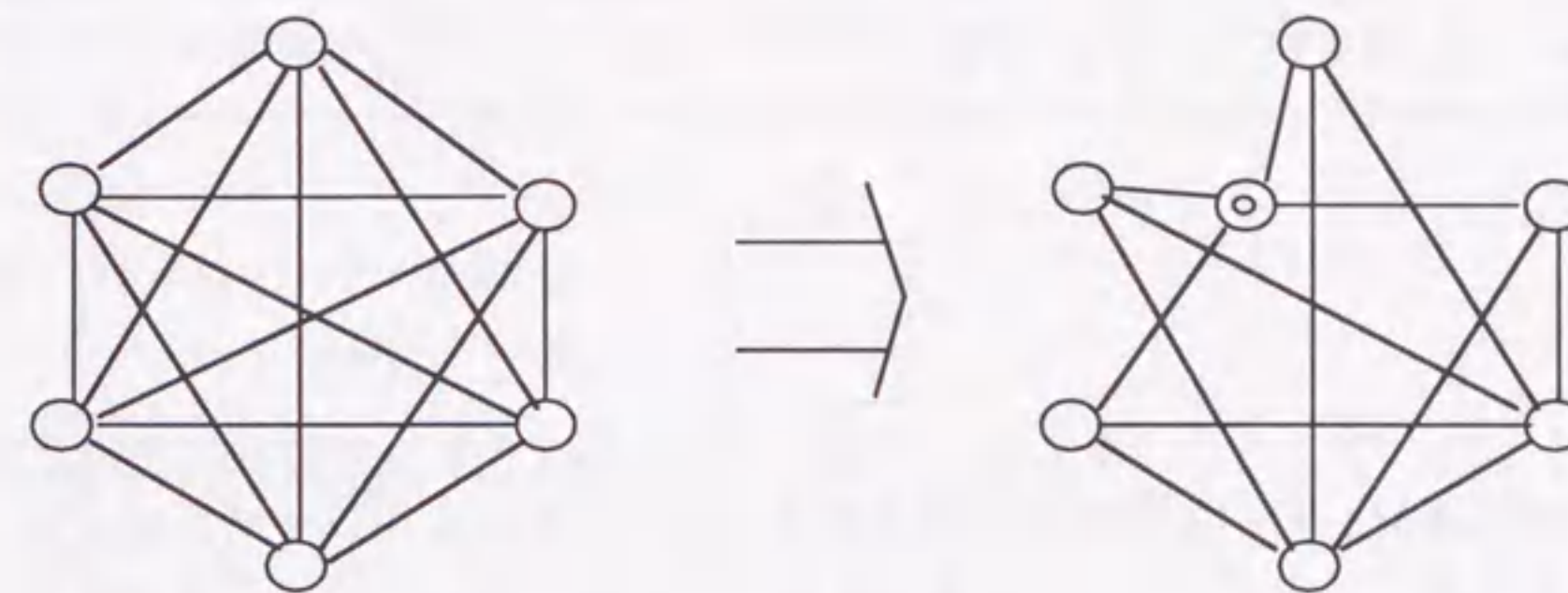


図4-2. コードリラテラル・スター変換の適用例

表4-1. 6完全グラフにおける信頼度評価値

枝の故障確率	1-信頼度 (正確な値)	1-信頼度 (近似値)	近似精度 (相対誤差)
1.0×10^{-1}	2.01×10^{-4}	2.09×10^{-4}	4.14×10^{-2}
1.0×10^{-2}	2.00×10^{-9}	2.01×10^{-9}	4.90×10^{-3}
1.0×10^{-3}	2.00×10^{-14}	2.00×10^{-14}	5.00×10^{-4}
1.0×10^{-4}	2.00×10^{-15}	2.00×10^{-15}	5.00×10^{-5}

表4-2. 6完全グラフにおける故障頻度評価値

枝の故障確率	枝の故障率	故障頻度 (正確な値)	故障頻度 (近似値)	近似精度 (相対誤差)
1.00×10^{-1}	2.00×10^{-1}	1.81×10^{-3}	1.89×10^{-3}	4.14×10^{-2}
1.00×10^{-2}	2.00×10^{-1}	1.98×10^{-7}	1.99×10^{-7}	5.81×10^{-3}
1.00×10^{-3}	2.00×10^{-1}	2.00×10^{-11}	2.00×10^{-11}	6.00×10^{-4}
1.00×10^{-4}	2.00×10^{-1}	2.00×10^{-15}	2.00×10^{-15}	8.00×10^{-5}

4.5 むすび

本章では、コヒーレントシステムにおいて、その信頼度表現を故障頻度表現に変換する微分作用素を検討した。仮想的な信頼度表現が微分作用素を用いて故障頻度表現に変換できることを示し、いくつかの応用を示した。本方法によって、これまで故障頻度評価法としては用いられたことのなかったいくつかの縮退法が、故障頻度評価法として使用できることが判明した。さらに近似評価法に対しても、本方法を適用し、数値例によってその近似精度を検証した。

本研究によって、これまであまり検討されなかった故障頻度評価の問題に対しても、信頼度評価と同じ高速なアルゴリズムが使用できることが分かった。

付録4 定理1の証明

F_1 から F_2 への作用素 D_0 を以下のように定義する。

$$D_0(f) = \sum_{i=1}^n (\partial f / \partial p_i) p_i \lambda_i$$

ここで、 n は全要素数である。

D_0 が以下の関係式を満足することは容易に分かる。

- (i) $D_0(p_i) = p_i \lambda_i$
- (ii) $D_0(f+g) = D_0(f) + D_0(g)$
- (iii) $D_0(fg) = D_0(f)g + fD_0(g)$

この関係式と D の定義、 D の唯一性から $D = D_0$ と言える。ところで、文献[31]は、以下の式を示している。

$$ff = \sum_{i=1}^n (\partial f / \partial p_i) p_i \lambda_i = D_0(R)$$

この式と $D_0 = D$ から、

$$ff = D_0(R) = D(R)$$

と言える。

第五章 結論

本研究は、通信網の構成要素の信頼性パラメータ（故障確率、故障率）から通信網としての信頼性（信頼度、故障頻度）を推定、評価する方法を確立した。まず、通信網の品質向上のための技術的動向と本研究の位置付けを明らかにした。続いて本研究の対象とするモデルと評価尺度を整理し、信頼性評価アルゴリズムを明らかにした。以下にその要約を示す。

(1) LAN等の計算機網を対象とし、トポロジーの連結性を保つことが通信の成立のために必要十分であるとする網モデルを紹介し、その信頼度評価法を提案した。まず、信頼度評価に等価な双対問題が存在することを明らかにした。次に、双対問題を解決するために部分網の変形による網の簡略化アルゴリズムを提示した。提案手法の高速性を多項式オーダーで評価可能な網形態の範囲という観点から他の手法と比較し、その優位性を立証した。

(2) 電話網を対象とし、通信経路によって一定の通信容量を確保することが通信の成立のために必要十分であるとする網モデルを紹介し、その信頼度評価法を提案した。まず、網モデルに対する簡潔な数学的表現を与え、容量付き極小パスの概念を明らかにした。次に、容量付き極小パスから信頼度を求める方法を示した上で、容量付き極小パスを生成するアルゴリズムを提示した。数値例は、提案手法が大規模な網の信頼度を十分高速に評価できることを示した。

(3) 通信網の信頼性評価尺度として、信頼度とともに重要である故障頻度の評価法の研究を行った。まず、信頼度と故障頻度の間に成り立つ一般的な関係が、微分作用素によって表現されることを明らかにした。次に、微分作用素の満足する簡潔な規則を用いれば、信頼度の評価関数を故障頻度の評価関数に自動的・機械的に変換できることを示した。本変換法によって、第一、第二章で紹介した方法を含む多くの信頼度評価法が、故障頻度評価法として利用することができ、従来に比べて、十分高速な故障頻度評価が可能となった。

本研究で定式化された信頼性評価の問題は、計算量的な観点からはNP-困難であり、将来、通信網の複雑化が増大すれば計算時間の点で不十分となることが予想され、より高速な近似アルゴリズムの確立が必要となってくる。

グラフモデルの信頼度評価については、近似に関する研究も精力的に行われており、特にFeoの部分分解法と呼ばれる方法が着目されている¹¹²⁾。これは、グラフをより簡単な二つのグラフに分解し（二つのグラフの信頼度から、求めるグラフの信頼度を決定する式はよく知られている。）、信頼度評価にあまり影響しない一方のグラフを簡略評価し、他方のグラフはさらに分解を繰り返す方法である。しかし、部分分解法の適用範囲は、特殊なトポロジー（完全グラフ）に限られている。

任意のトポロジーのグラフ、及び、本論文で示したパスの容量の割り当てられた通信網モデルに対し、部分分解法が適用可能であるかどうか重要な今後の課題となる。

さらに将来的には、マルチメディア時代のユーザの観点から信頼性がどうあるべきか、その他ソフト的な障害、特に故障波及（通信ソフトの小さなバグによって、全通信網に広がる障害が引き起こされる現象）をどのように扱うかが通信の信頼性向上を図る上で大きな課題となっている。

謝辞

本論文をまとめるにあたって終始懇切な御指導を賜った名古屋大学の平田富夫教授に心から感謝の意を表します。また、有益な御助言、御指導を賜った名古屋大学の板倉文忠教授、小川明教授に深く感謝申し上げます。

本研究は、著者が主にNTT通信網研究所通信品質研究部網品質研究グループで行ってきたもので、多くの方々から御指導頂きました。能條哲 通信網研究所通信品質研究部信頼性研究グループリーダー、及び、阿部威郎 通信網研究所主幹研究員には直接指導者として研究の進め方について御指導頂き、ここに心から感謝致します。特に阿部氏には研究の開始から現在に至るまで、研究の進め方について詳細に御指導頂き、氏の支援なくしては本研究の遂行もなかったものと考えられます。

また、本論文をまとめる機会を与えて頂くとともに、御指導と御鞭撻を頂いたNTT通信網研究所の青木利晴所長、間瀬憲一部長、村上英世グループリーダーに深く感謝致します。その他、本研究を進めるに当り、有益な御助言、御討論、御協力を頂いた方々に深く感謝致します。

最後に研究をとどこおりなく行うために、生活面、精神面で支援して下さいました妻に感謝します。

参考文献

- [1] A. Rosenthal, D. Frisque, "Transformation for simplifying network reliability", *Networks*, 7, pp. 97-111, 1979.
- [2] T. Politof, A. Satyanarayana, "A linear time algorithm for computing K-terminal reliability in series parallel networks", *SIAM J. Computing*, 14, 4, pp. 818-832, 1985.
- [3] T. Politof, A. Satyanarayana, "Network reliability and Inner-Four-Cycle-Free graph", *Math. of Operation Research*, 11, 484-505, 1986.
- [4] T. Politof, " Δ - Y reducible graph", working paper 88-12-52, Department of Decision Science and Management Information System, Concordia University, 1988.
- [5] T. Politof, "A linear time algorithm to compute the reliability of Planar Cube-Free networks", working paper 89-05-13, Concordia University, 1989.
- [6] T. Politof, A. Satyanarayana, "Efficient Algorithm for reliability analysis of planar networks - a survey", *IEEE Trans.*, R - 35, 3, pp. 252-259, 1986.
- [7] A. Rosenthal, "Computing the reliability of complex networks", *SIAM J. Appl. Math.*, 32, 2, 384-393, 1977.
- [8] C. Singh, R. Billinton, "A new method to determine the failure frequency of complex system", *IEEE Trans.*, R-23 pp. 231-234, 1974.
- [9] Tony P. Ng, "K-terminal reliability of hierarchical network", *IEEE Trans.*, R-40, No. 2, pp. 218-225, 1991.
- [10] Samuel M. Selby, Leonard Sweet, "Sets Relations Functions", McGraw-Hill Book Company, New York, 1963.
- [11] J. A. Abraham, "An improved algorithm for network reliability", *IEEE Trans.*, R-28, pp. 58-61, 1979.
- [12] T. A. Feo and R. J. Johnson, "Partial factoring: An efficient algorithm for approximating terminal reliability on complete graphs", *IEEE Trans.*, R-39, pp. 290-295, 1990.
- [13] C. Singh, "Tie set approach to determine the failure frequency of system failure",

Microelectronics and Reliability, vol. 14, pp293-294, 1975.

- [14] L. Fratta, U. G. Montanari, "A Boolean algebra method for computing the terminal reliability in a communication network", IEEE Trans., Circuit Theory, pp. 204-211, 1973.
- [15] Ding-Hue Shi, "General formula for calculating the steady-state frequency of system failure", IEEE Trans., R-30, pp. 444-447, 1981.
- [16] S. K. Benerjee, K. Rajamani, "Closed form solutions for delta-star and star-delta conversions of reliability of network", IEEE Trans., R-26, pp. 318-321, 1977.
- [17] N. M. Khan, K. Rajamani, S. K. Benerjee, "A direct method to calculate the frequency and duration of failures for large networks", IEEE Trans., R-25, 1976.
- [18] J. P. Gadani, K. B. Misera, "Quadrilateral-star transformation-I, Transformation equations", Microelectronics and Reliability, vol. 22, pp. 413-416, 1982.
- [19] J. P. Gadani, K. B. Misera, "Quadrilateral-star transformation-II, Transformation equations", Microelectronics and Reliability, vol. 22, pp. 417-422, 1982.
- [20] J. P. Gadani, "System effectiveness evaluation using star and delta transformations", IEEE Trans., R-30, pp. 43-47, 1981.
- [21] Y. B. Yoo, "A comparison of algorithms for terminal-pair reliability", IEEE Trans., R-37, pp. 210-215, 1988.
- [22] A. Satyanarayana, M. Chang, "Network reliability and the factoring theorem", Networks, vol. 13, pp. 107-120, 1983.
- [23] A. Satyanarayana, R. K. Wood, "A linear time algorithm for computing K-terminal reliability in series-parallel networks", SIAM J. Computing, vol. 14, pp. 818-832, 1985.
- [24] R. K. Wood, "Triconnected decomposition for computing K-terminal reliability", Networks, vol. 19, pp. 203-220, 1989.
- [25] W. H. Debeny, Jr., Okvarshney, C. R. P. Hartman, "Network reliability evaluation using probability expressions", IEEE Trans., R-35, pp. 161-166, 1986.

- [26] W. G. Schneeweiss, "Computing failure frequency, MTBF & MTTR via mixed products of availability and unavailabilities", IEEE Trans., vol. R-30, pp. 362-363, 1981.
- [27] Douglas R. Shier, "Network reliability and algebraic structures", Clarendon Press · Oxford, 1991.
- [28] 浅谷耕一、その他："通信ネットワークの品質設計", 電子情報通信学会, (平5) .
- [29] 服部嘉雄, 小澤孝夫："グラフ理論解説", 昭晃堂 (昭49).
- [30] 梅垣、その他："集合・位相・距離", 共立出版 (株), 1987.
- [31] W. G. Schneeweiss, "Boolean functions with engineering applications and computer programs", Springer-Verlag, 1989.
- [32] W. G. Schneeweiss, "Addendum to computing failure frequency via mixed products of availabilities and unavailabilities", IEEE Trans., R-32, pp. 461-462, 1981.
- [33] J. Yuan, S. B. Chou, "Boolean algebra method to calculate network system reliability indices in terms of a proposed FMEA" Reliability Engineering, vol. 14, pp. 193-203, 1986.
- [34] Serge Lang: "Algebra", Addison-Wesley, 1972.
- [35] Booth K. S. and Lueker G.S., "Testing the consecutive ones property, interval graphs, and graph planarity using PQ-tree algorithm", J. Comput. & Syst. Sci., 13, pp. 335-379, 1976.
- [36] 林, 岡田, "縮退法によるグラフの等価性とそのネットワークへの応用", 電子情報通信学会:回路とシステム研究会, pp. 37-44, 1990-7.
- [37] 林, "微分作用素による網の故障頻度解析", 安全性・信頼性シンポジウム, pp. 13-16, 1988-8.
- [38] 林, 阿部, "ネットワーク信頼度の近似計算法", 電子情報通信学会:情報ネットワーク研究会, IN87-38, pp. 1-6, 1987-7.
- [39] 林, "ネットワーク故障頻度計算法の検討", 安全性・信頼性シンポジウム, pp. 79-82, 1987-2.
- [40] 林, "容量とパスを考慮した2局間の通信網信頼性評価法", 春季信学全大,

A-8, 1994.

- [41]林, "ネットワーク信頼性の高速近似評価アルゴリズムの提案", 春季信学全大, A-4, 1993.
- [42]林, 大槻, "ネットワークの2分割によるエンド・エンド経路分散の検討", 秋季信学全大, A-2, 1992.
- [43]林, 岡田, "グラフ書き換え問題のネットワーク信頼性への応用", 秋季信学全大, SD-1-2, 1990.
- [44]林, 阿部, "ネットワーク信頼性計算アルゴリズムの性能評価", 春季信学全大, A-6, 1991.
- [45]林, 阿部, "同時故障と容量を考慮した通信網の信頼性評価法の検討", 春季信学全大, G-424, 1989.
- [46]林, "双対グラフを用いたネットワークの信頼度解析", 秋季信学全大, A-58, 1989.
- [47]林, "微分作用素を用いた網の故障頻度解析", 春季信学全大, A-68, 1984.
- [48]林, 阿部, "ネットワーク信頼度の近似計算法", 総合信学全大, No. 2662, 1987.
- [49] 渡辺, 能條, 林, "通信網の信頼性", 秋季信学全大, SA-7-6, 1991.
- [50]唐沢, 能條, 林, "有限観測時間を考慮したシステム性能評価法の検討", 秋季信学全大, B-632, 1993.
- [51]牧野, 林, 渡辺, "通信網における容量付き全局間連結確率評価法の検討", 春季信学全大, A-390, 1994.
- [52]阿部, 林, 能條, "通信網の信頼性設計評価支援システムの検討", 秋季信学全大, B-243, 1988.
- [53]阿部, 林, "疎通能力を考慮した通信網の信頼性評価法の検討", 春季信学全大, B-637, 1990.
- [54]阿部, 林, 能條, "通信網の信頼性設計評価法", NTT R&D, vol. 40, No. 10, pp. 1327-1333, 1991.
- [55]阿部, 林, 能條, "通信網信頼性設計評価システム (ARDES-NET)", NTT R&D, 38, 3, pp. 307-317, 1989.
- [56]T. Abe, M. Hayashi, S. Nojo, "Availability reliability design and evaluation system for network (ARDES-NET)", NTT Review, vol. 3, 6, pp. 76-80, 1991.
- [57]M. Hayashi, "System failure-frequency analysis using a differential operator", IEEE Trans., R-40, pp. 601-609, 1991.
- [58]林, "双対グラフを用いたネットワーク信頼度解析", 信学論A, vol. J74-A, No. 1, pp. 72-81, 1991.
- [59]林, 阿部, "通信経路の容量の割り当てを考慮した通信網信頼性評価法", 信学論A, vol. J77-A, No. 11, pp. 1517-1528, 1994.
- [60]T. Abe, M. Hayashi, S. Nojo "A software tool to support the reliability design and evaluation of telecommunication networks", IEEE JSAC, vol. 12, pp. 345-354, 1994.
- [61]Y. Okada, M. Hayashi, "Graph rewriting systems and their application to network reliability analysis", IEICE Trans., INF & SYST., Vol. E76-D, 2, pp. 154-162, 1993.
- [62]M. Hayashi, K. Fukuda, "Estimating the restoration speed of telecommunication networks after disasters", IEEE Network Operations and Management Symposium, NOMS'94, pp. 298-308, 1994.
- [63]Y. Okada, M. Hayashi, "Graph rewriting systems and their application to network reliability analysis", Graph-Theoretic Concepts in Computer Science, WG'91, pp. 36-47, 1991.
- [64]T. Abe, M. Hayashi, "Estimation of Telecommunication Network Reliability when Simulating Disasters", SIM94, pp. 387-389, 1994.
- [65]Sun-wah Kiu, D.F.McAllister, "Reliability optimization of Computer-Communication Networks", IEEE Trans., R-37, pp. 475-483, 1988.
- [66]S. Yanagi, "Reliability of a network with capacity constraints", Journal of Information Processing, vol.14, No. 3, pp. 351-353, 1991.
- [67]C.J.Colbourn, "The combinatorics of network reliability", Oxford University of Waterloo,

[Faint, illegible text, likely bleed-through from the reverse side of the page.]



