

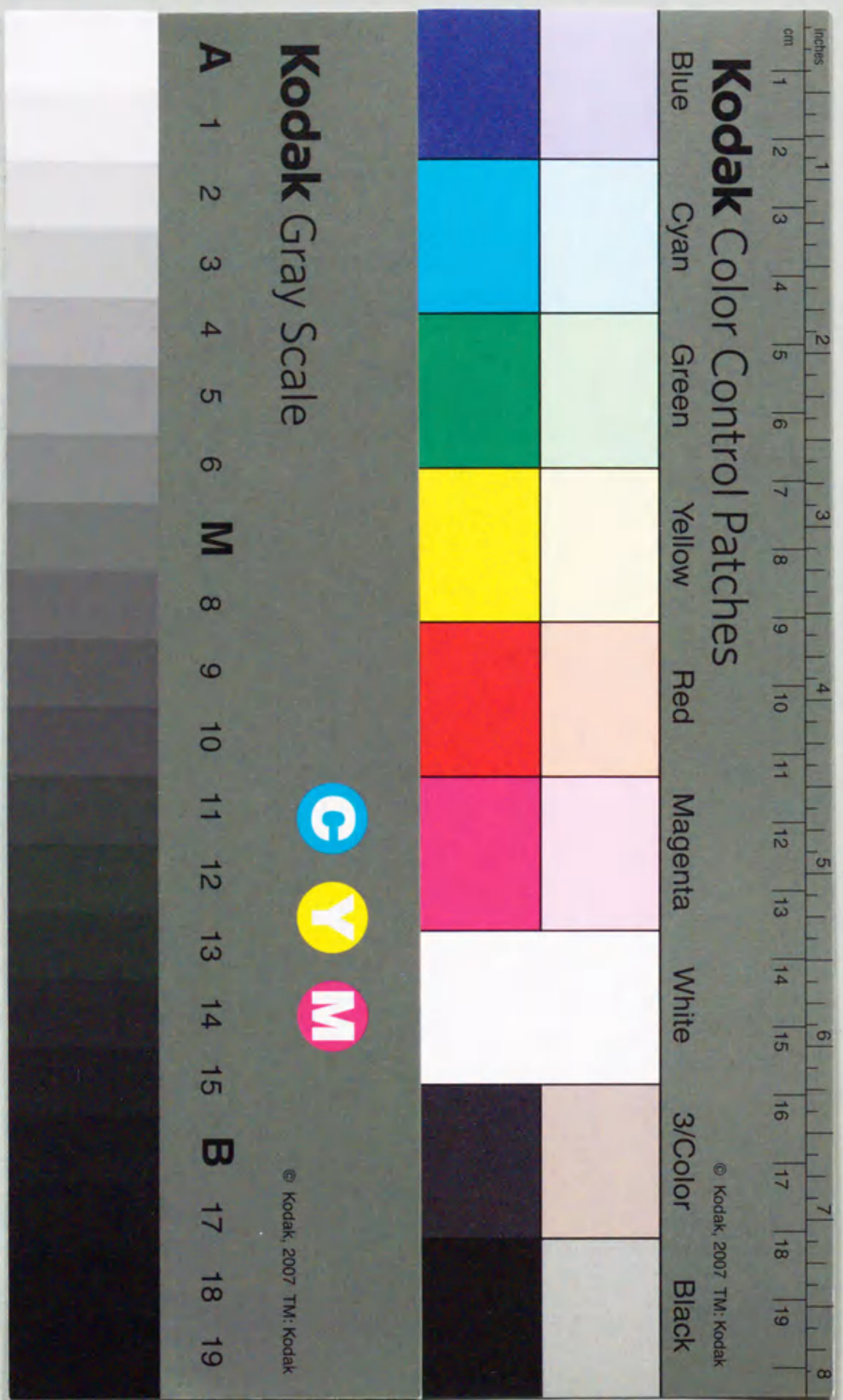
報告番号 甲第- 3490 号

学位論文

ボソン・フェルミオン展開法による遷移領域核の記述

1995年

梶山純





①

学位論文

ボソン・フェルミオン展開法による遷移領域核の記述

1995年

梶山 純



目次

第1章 序論	1
第2章 原子核集団運動の非調和性とその微視的理論	4
2.1 集団運動の非調和性	4
2.2 有効相互作用と多体問題的手法	8
2.3 ボソン展開法による集団運動の記述とその問題点	10
第3章 ボソン・フェルミオン展開法の一般論	14
3.1 フォノン演算子と多フォノン状態	14
3.2 ボソン・フェルミオン展開法の概要	18
3.3 ボソン展開法との関連	22
第4章 ボソン・フェルミオン展開法の四重極集団運動への適用	29
4.1 有効ハミルトニアンの設定と展開係数	29
4.2 自己無撞着 Feshbach 法による集団・非集団モード結合効果の取扱い	35
4.3 有効電気四重極遷移演算子	39
第5章 ボソン・フェルミオン展開法による遷移領域核の記述	42
5.1 数値計算パラメーターの設定	42
5.2 展開の収束性について	43
5.3 集団・非集団モード結合効果の重要性	45
第6章 総括と今後の展望	56
付録	
A 対演算子のボソン・フェルミオン表現	59
B 多重極演算子のフォノン表示	62
C 有効ハミルトニアンのフォノン表示と各有効相互作用からの寄与	65
D 角運動量結合形式で書かれた対演算子のボソン・フェルミオン表現	70
E 4次のボソン演算子の組み替え	73
F ボソン・ハミルトニアンの展開係数	76
G ボソン・フェルミオン結合ハミルトニアンの展開係数	78
H 四重極演算子のボソン・フェルミオン表現	79



## 第1章 序論

原子核を、多数の核子から構成される有限量子多体系であるとみなすとき、その中に含まれる核子の集団が、全体として、どのような運動形態を持つかという問題は、原子核物理学の誕生当初からの問題である。このような“原子核の集団運動”を本質的に理解するためには、原子核を、核子が互いに強い相互作用によって結びつけられている系として微視的に取り扱う必要がある。

原子核における魔法数の存在を契機として生まれた独立粒子理論は、集団運動を微視的に理解する初めての土台を与えた。この理論の登場により、集団運動は、核子多体系の構成する平均場のゆらぎ（時間的変化）であると捉えられるようになった。そこでは、平均場が、原子核の集団運動を発生する土台であり、集団運動は、多数の核子が参加するある種のコヒーレントな励起であり、安定な基底状態からの素励起モードとして捉えられる。これは、まさに、物性論における集団的励起と、原子核における集団運動の同質性に着目することによって生まれてきた描像である。しかしながら、実際の原子核における集団的励起は、非調和性が強く、単純な素励起的な描像によっては、理解できない側面を含んでいる。なぜなら、原子核における集団運動の発生は、平均場の中の独立粒子運動に変化を与え、それがまた、集団運動を生み出す土台たる平均場自身に変化を及ぼすが、もともとの集団運動はその変化した土台から生成されているという、自己無撞着性を実現した上で発生する運動状態だからである。これは、孤立有限多体系としての原子核の特異性である。

また、原子核における集団運動は、集団運動の土台たる平均場自身を不安定にし、やがては、初めに存在していた平均場とは、質の異なる別の平均場の生成を促す。実際、閉殻付近の原子核に対して存在している安定な球対称平均場は、核子数の増加に伴い、球形の周りの四重極振動に相当するゆらぎを増大させる。そして、最終的に系は、別の安定な四重極平衡変形を持つ平均場を生成するとともに、これによって破られた回転対称性を回復するべく回転運動を行う。その良い例は、サマリウムなどに代表される、質量数が150付近の原子核である。これらの原子核では、各同位体について順番に励起スペクトルを観察していくと、中性子数が88から90へ増えるところで、球形から四重極変形への急激な構造変化を起こすことは良く知られている。この過程は、有限系における、ある種の相転移ともみなせる現象である。

我々が取り扱おうとしている遷移領域核は、球形核領域と変形回転核領域との中間領域に位置する原子核であり、その集団運動状態は、平均場の周りの非常に大きなゆらぎを伴い、非調和効果の大きいものになっている。それゆえ、遷移領域核は、原子核の集団運動状態に特有な非調和性あるいは非線形性を最も顕著に表している系であると言える。しかしな



がら、この領域における運動状態を微視的に記述することは、いまだに未解決の難問であり、原子核構造論における懸案の課題である。

これまでも、集団運動における非調和性を取り扱うために、様々な微視的理論が考案されてきた。例えば、代表的なものに、時間依存ハートレー・フォック法 (Time-dependent Hartree-Fock Method) [BK68]、生成座標の方法 (Generator Coordinate Method) [RS80]、動力的核場の理論 (Dynamical Nuclear Field Theory) [KTK83]、自己無撞着集団座標法 (Self-consistent Collective Coordinate Method) [MMSK80]、ボソン展開法 (Boson Expansion Method) [KIM91] などがある。しかし、その中でも、取扱いの簡便さ、および、量子力学的取扱いとしての明確さから、遷移領域核における集団運動の記述には、ボソン展開法が最も有力な方法であると思われる。この方法は、フェルミオン空間をボソン空間に転写し、多体系を記述するハミルトニアンをボソン演算子に関する級数展開の形に表現することにより、非調和効果の原因である素励起モード間の結合効果とパウリ効果を逐次的に取り入れようとするものである。

1970年代から1980年代にわたって、ボソン展開法を用いた遷移領域核の数値計算が精力的に行われ、集団運動についての微視的理解を深めるとともに、この方法の有効性が主張されるに至った。しかし、残念ながら、ボソン展開法は、集団運動状態を記述するための多体理論として、いくつかの不明確な点を有している。例えば、エルミート・無限展開型のボソン展開法においては、ボソンの性質の低い非集団的フォノン・モードのボソン展開の収束性が良くないことが指摘されており、また、非エルミート・有限展開型のボソン展開法においては、展開形式を導く際に、“フォノン切断近似”と呼ばれる根拠の曖昧な近似が不可欠であるなどの問題点がある。そのため、これらのボソン展開法によって導かれる結論は、多体問題的手法における取扱いの曖昧さによって、大きく損なわれる危険性がある。

1990年、TaniguchiとMiyanishiは、従来のボソン展開法における問題点を回避し、遷移領域核における集団運動を、少なくとも多体問題的には、できるだけ厳密に記述することを目的として、ボソン・フェルミオン展開法と呼ばれる新しい理論 [TM90] を提唱した。この理論は、フェルミオン空間における素励起モードを、ボソン演算子とフェルミオン対演算子に関する無限級数に変換することにより、集団運動するフェルミオン多体系を、ボソン演算子とフェルミオン演算子の併用によって記述しようというものである。その際、原子核に内在する様々な種類の素励起モードのうち、ボソンの性質の強い集団的フォノン・モードだけをボソンで表し、ボソンの性質の弱い非集団的フォノン・モードは、そのままフェルミオン対演算子として表すことによって、フェルミオン多体系に課せられるパウリ原理を自然な形で取り扱うことができる。その結果、従来のボソン展開法における収束性の問題や、根拠の不明確なフォノン切断近似などの仮定にいつまでも縛られることなく、明確な基礎の上で、集団運動状態の記述を行えることが大きな特長である。



本論文の目的は、第一に、ボソン・フェルミオン展開法と従来のボソン展開法との関連について論じ、両者の同質性と異質性を明らかにすることであり、第二に、ボソン・フェルミオン展開法を現実の遷移領域核に適用して、この方法の妥当性を検証するとともに、遷移領域核における集団・非集団モード結合効果を取り扱うための信頼すべき方法を提示することである。本論文の以下の章における構成は次のようになっている。まず、第2章では、原子核集団運動における非調和性が、核構造論の重要課題の一つとして浮かび上がってきた歴史的背景と、これを取り扱うための微視的理論に関する問題点について述べる。第3章では、ボソン・フェルミオン展開法の基礎概念を与えた上で、この理論と従来のボソン展開法との関連について論じる。第4章では、ボソン・フェルミオン展開法を、現実の遷移領域核における四重極集団運動状態へ適用するための理論形式を与える。第5章では、第4章で展開した理論形式に基づいて数値計算を行い、ボソン・フェルミオン展開法の収束性について調べた後、遷移領域核における集団・非集団モード結合効果の性質および、これをできるだけ正確に取り扱うための方法について述べる。第6章は、全体の総括にあてられ、本論文で導かれた結果および今後に残された課題についてのまとめがなされる。



## 第2章 原子核集団運動の非調和性とその微視的理論

この章では、ボソン・フェルミオン展開法という理論が考案されるに至った歴史的背景と、その動機付けを明らかにするのが目的である。2.1節では、原子核構造論の発展の中で、集団運動の非調和性が認識されてきた過程を振り返り、2.2節では、集団運動を微視的に取り扱う際に考慮すべき有効相互作用および多体問題的手法について述べる。2.3節では、代表的な多体問題的手法であるボソン展開法の基礎概念および問題点について論じる。

### 2.1 集団運動の非調和性

原子核の集団運動は、原子核を構成する数十個から数百個の核子が、核子間に働く核力を媒体として、規則的に一団となって運動する、一種の協調運動であると考えられている。その概念は、原子核物理学の誕生とともに生まれ、時代の変遷とともに新たな描像が描かれ、次第にその認識が深められてきた。

中性子が発見されて間もない1930年代から1940年代にかけては、原子核は、核子がお互いに強い力で結びついている強結合自己束縛系であるという考え方が支配的であり、いわゆる“液滴模型”によって記述できるものだと考えられていた。そのため、個々の核子の運動を考えることには意味がなく、核全体としての運動、あるいは、その統計的性質のみに意味があるとされていた。当時、中性子捕獲断面積の説明に成功したN.Bohrの複合核模型や、核分裂の記述に用いられた統計模型は、全てこのような考え方に基づくものである。よって、その頃の原子核の集団運動のイメージは、水滴の表面に風があたってさざなみが立つような表面振動であり、あるいは、何らかのきっかけによって、水滴がちぎれて核分裂を起こすというようなナイーブなものであった。その一方で、単純な液滴模型ではどうしても説明のつかない実験データが蓄積しつつあったのも事実であった。

1949年に登場した、Mayer、Jensenの殻模型[May49][HJS49]は、それまでの常識を大きく覆すものであった。彼らの主張は、原子核内の核子は、核子自身が構成する(強いスピナー軌道力を伴う)平均ポテンシャル中の一粒子軌道を、お互いに独立に運動するというものである。この、いわゆる“独立粒子模型”は、原子核の魔法数の存在や、多数の原子核の基底状態に関する実験事実を見事に説明した。こうして、1950年代の初頭には、液滴模型と独立粒子模型という互いに正反対の極をなす二つの描像が並立することになったが、同じ原子核という対象でありながら、なぜ二つの異なる模型が存在するのかということに関して、多くの研究者を悩ませることになった。

この問題に対する一つの解答を与えたのが、A.BohrとB.R.Mottelsonの統一模型(集団模型)[Bo51][Bo52][BM52]である。彼らは、原子核の集団運動を、原子核の構成する平均



ポテンシャルの時間的な変化であるとみなすことにより、独立粒子模型と液滴模型の共存を許した。その場合、原子核全体の運動を記述するハミルトニアンは次のように表される。

$$H = H_{\text{振動}} + H_{\text{粒子}} + H_{\text{結合}} \quad (2.1)$$

ここで、 $H_{\text{振動}}$ は、平均ポテンシャルの時間的な変化すなわち液滴の表面振動を表す部分であり、 $H_{\text{粒子}}$ は、核子の独立粒子運動を記述する部分、 $H_{\text{結合}}$ は、振動運動と独立粒子運動との間の相互作用を表す。 $H_{\text{結合}}$ が十分弱い弱結合の場合は、この項を摂動論的に扱うことにより、スペクトルに振動状態と独立粒子励起状態が共に現れ、いわゆる“振動核”を記述できる。一方、 $H_{\text{結合}}$ が十分強い強結合の極限では、(2.1)のハミルトニアンは、適当な断熱近似の下で、静的な変形を持つ原子核の回転運動および振動運動を記述する部分と、変形したポテンシャル中の独立粒子運動を記述する部分の和に置き換えられると考えられ、これは、いわゆる“回転核”の記述に相当する。彼らの理論は、当時、集積しつつあった振動核および回転核の励起状態に関する実験データによって裏付けられるとともに、核図表 (nuclear chart) の広い範囲に分布する原子核をいくつかのカテゴリーに分類する役割を果たした。すなわち、

- [1] 陽子数または中性子数のどちらか一方あるいは両方が魔法数になっているような原子核は、“閉殻核領域”を形成し、安定な球形の基底状態を持ち、低励起スペクトルにおいては、独立粒子的な励起が支配する。
- [2] 閉殻核領域から核子数にして2・3個から数個離れた領域では、あたかも原子核が球形の平衡状態の周りに四重極振動しているかのような、調和振動的な励起スペクトルが観察され、これらの原子核は、“球形振動核領域”を構成する。
- [3] 閉殻核領域からかなり離れ、閉殻と閉殻のちょうど真ん中に位置するような原子核（特に、希土類元素領域やアクチナイド領域）は、非常に大きな電気四重極モーメントを持ち、低励起状態に、あたかも古典的な剛体回転を量子化した際に現れるような回転スペクトルが観測され、“変形回転核領域”を形成する。
- [4] 上の3つのどの領域にも属さない領域は、“遷移領域”と呼ばれ、励起スペクトルも、はっきりした特徴を持たない中間的な様相を呈する。

こうして、Bohr-Mottelsonの統一模型（集団模型）は、振動・回転領域における集団運動状態の性質や、独立粒子励起と集団的励起の結合効果を定性的に説明することに成功し、現在においても通ずる原子核集団運動の基本的イメージを与えた。しかしながら、Bohr-Mottelsonが、液滴模型と独立粒子模型を“統一”したとは言っても、あくまでも、集団運動を平均ポテンシャルの時間的な変化であるとみなしたところに大きな意義があったのであり、現実の集団運動状態が、液滴模型の単純なハミルトニアンで記述される保証はない。事実、流体模型から決定される質量パラメータを用いたのでは、集団運動状態のエネルギーを定量



的に再現できないことは、その当時からすでに明らかになっていた。さらに、(2.1)のハミルトニアンにおいては、ボソン励起として表現される集団的励起と、フェルミオンで記述される独立粒子励起が、何の制限も受けない、全く独立な自由度として表現されている。しかしながら、もとはと言えば、集団的励起にしる、独立粒子励起にしる、どちらも、一つの原子核を構成する同じ核子群の運動によって引き起こされるはずのものである。そこには、当然、フェルミオン多体系に課せられる Pauli 原理の影響が現れていなければならない。そこで、本当の意味で“統一”された記述を行うためにも、核子多体系を司る微視的なハミルトニアンから始めて、原子核の集団運動を表現できるような理論を作り上げる必要があった。

1950年代後半から1960年代の初頭にかけて、Tamm-Dancoff 近似 (Tamm-Dancoff Approximation, TDA) や、乱雑位相近似 (Random Phase Approximation, RPA) など、他分野で用いられていた多体問題的手法 [KM60][TU61][KS63][RS80] が原子核物理学に導入されるようになると、集団運動の微視的理論は飛躍的な発展を始めた。ここにきて初めて、集団運動を個々の核子の自由度から取り扱うための道具立てが整ってくることになる。これらの理論では、原子核の近似的な平衡状態として殻模型の基底状態 (あるいは、BCS 基底状態) をとり、そこからの独立粒子励起モードの重ね合わせとして、系の基準モード (normal mode、近似的固有状態) を表現する。そして、特定の粒子・空孔対 (または、準粒子対) に対して、一種のボソン近似 (quasi-boson approximation) を仮定した上で、基準モードに関する運動方程式を線形化することにより、多体系の近似的固有状態を求めることができる。その際、得られた運動方程式は、見かけ上、調和振動子の運動方程式と同じ形を取るようになり、そのため、これらの理論は、集団運動の“調和近似”理論と呼ばれている。現実的な有効相互作用を用いて計算を行うと、粒子・空孔励起 (2準粒子励起) のエネルギーに比べて十分低いエネルギーを持ち、多数の独立粒子励起モードのコヒーレントな重ね合わせで表される“集団的モード”と呼ばれる解と、特定の粒子・空孔励起にほとんど振幅が集中しているような“非集団的モード”と呼ばれる解が現れる。この“集団的モード”が、調和近似における集団的固有状態に相当し、“非集団的モード”は、独立粒子的な励起にほかならない。こうして、殻模型のハミルトニアンに残留相互作用を加えた共通の微視的土台の上で、原子核、特に中重核に内在する二つの典型的な励起機構を表現できるようになり、さらに、集団運動状態の微視的な組成や、その殻構造依存性に関する詳細な議論が可能になった。

調和近似理論は、集団運動の微視的理解に重要な先鞭をつける役割を果たしたにも関わらず、そのままの形では、典型的な振動核領域や回転核領域のごく一部の原子核にしか適用することはできなかった。なぜなら、調和近似理論は、もともと近似的平衡状態の周りの微小な揺らぎを記述するための理論であり、その名の表す通り、調和振動子的な等間隔スペクトルまたは理想的な回転スペクトルしか与えないからである。しかしながら、例えば、核図表の上で、典型的な振動核領域から少しずつ離れ、次第に遷移領域と呼ばれる領域に突入



していくと、そのスペクトルは、調和振動のものから少しずつ形が崩れ、やがて、初めの等間隔スペクトルとは似ても似つかぬスペクトルを呈するようになる。また、典型的な四重極振動状態を持つ原子核においても、そのスペクトルを詳しく観察すると、完全な調和振動であれば縮退しているはずの、2 ボソン 3 重項に属する状態の縮退が解けていることが多い。これらの例に代表される事実は、総称して“原子核集団運動における非調和性”と呼ばれている。

1960年代に入ると、Morinaga-Gugelot の“インビーム核分光学”の方法 [MG63] が始まり、これまで測定できなかった遷移領域核のスペクトルや、高い励起状態に関する実験データが得られるようになった。[Sa67] この新しい測定技術に基づく実験は、広大な遷移領域の存在を改めて浮き彫りにし、原子核における非調和性の解明がいかに重大な問題であるかということに研究者に意識させるようになった。その結果、集団運動における非調和性を微視的に取り扱うために、調和近似を越える様々な新しい手法が提唱され、1970年代から1980年代にかけては、それらに基づいた大規模な数値計算が遂行された。これらの試みのうち、あるものはかなり成功をおさめ、原子核の集団運動状態に対する微視的理解を深めることができたが、未だに未解決の問題も多く残されている。特に、遷移領域核における集団運動状態は、振動核領域と回転核領域との間の移行領域に位置しているために、現象が複雑になっているだけでなく、様々な多体理論の適用限界領域に位置しているものが多く、現在もなお、曖昧さのない明確な記述ができていない。

本論文は、この残された問題に対する一つの試みである。非調和性の強い遷移領域核の集団運動状態を、微視的に解析する多体問題的手法を提示し、これに基づく数値計算を行うのが最終的な目的である。そこへいく前に、次の 2.2 節では、集団運動の微視的記述を行う際に、避けて通ることのできない問題について述べておく。



## 2.2 有効相互作用と多体問題的手法

原子核の集団運動状態を量子力学的多体問題として記述しようという場合、解決しなければならない二つの大きな問題が存在する。

まず、第1の問題は、有効相互作用の問題である。多体系を記述するハミルトニアンを設定するためには、原子核内の核子間に働く相互作用を知る必要がある。この相互作用は、多体効果および核子系に課せられる Pauli 原理のために、自由空間中における生の核力とは異なっている。この生の核力から、原子核内における核子間相互作用を導出する方法論は、“有効相互作用の理論”として知られており、それ自体で、核構造論における一大分野をなしている。しかしながら、少なくとも我々が記述しようとしている中重核については、その処方箋が確立しているとは言い難く、現存する方法に従って導き出した有効相互作用が、必ずしも原子核の集団運動状態を記述するのに適しているとも限らない。そこで、これまで、原子核内における重要な相関を代表するような模型的相互作用が多く用いられてきた。その代表的なものが、多重極演算子の積の形で表された“多重極-多重極相互作用”であり、中でも、“単極対相関力+四重極・四重極相互作用 (Pairing+QQ interaction)”[BS69]は、非常に多くの計算に用いられ、かつ、かなりの成功をおさめている。現在は、“原子核自己無撞着性 (Nuclear Self-consistency)”の要請や、対称性の回復の観点から、より高次の多重極相互作用を導出し、これを精密化しようとする試みが行われている。[SK89a][SK89b][SK90]だが、将来的には、模型的相互作用によることなく、信頼できる方法で、生の核力から導き出した有効相互作用を計算に用いるのが最善であることは言うまでもない。

さて、第2の問題は、仮に上に述べた何らかの方法によって有効ハミルトニアンが与えられた場合、その固有値問題をどうやって解き、集団運動状態を得るかという問題である。原理的に考えると、殻模型空間における核子群の様々な配位に対応する直交規格化基底の完全な組を用意し、ハミルトニアンを対角化すれば良いように思われる。これは、まさに殻模型における配位混合計算の方法にほかならない。この方法は、比較的軽い核の固有状態の記述には有効な方法であるが、我々が注目している中重核に対しては、直交規格化基底の数、すなわち、対角化すべき行列の次元がとてつもなく大きくなり、とても、通常のコンピューターでは処理できなくなる。例えば、代表的な遷移領域核であるサマリウム同位体について配位混合計算を行おうとする場合、行列の次元は、およそ  $10^{14}$  から  $10^{15}$  にも達する。このような計算は、現実性に乏しいだけでなく、たとえ計算が可能になったとしても、得られた波動関数は、非常に複雑なものとなり、簡単な物理的解釈は不可能であろう。そこで、このような系に対しては、できるだけ正確に集団的固有状態を抜き出すための、特別な“多体問題的手法”が必要になる。この“多体問題的手法”は、取扱いが易しいものであることはもちろんのこと、一般に、次のような要請を満たす必要があると思われる。



- [1] 大次元の殻模型空間の中から、集団運動を表現するのに必要最小限な部分空間を設定できること。
- [2] 集団運動を引き起こすのに十分な相関を取り入れられること。
- [3] 核子多体系に課せられる Pauli 原理から来る代数的制限に、できるだけ忠実に従っていること。
- [4] 集団運動の発現機構が理解しやすく、核内に存在する多数の自由度（モード）の結合および集団運動状態への関与が明確に表現できること。

これら四つの条件は、全てが独立なものというわけではなく、お互いに関連しており、一つの要請を考慮する場合、必ず他の三つも絡んでくるという性質のものである。2.1 節で触れた、調和近似理論は、まさに、このような多体問題的手法の一つであるが、この理論が集団運動における非調和性を記述できなかったのは、上の要請 [1][2][3] を十分に満たすことができなかったためである。

これまでに、上の条件を満足し、かつ、調和近似を越える多体問題的手法として提唱された微視的理論はいろいろあるが、特に有名なものに、ボソン展開法（Boson Expansion Method）[Ma80][RS80][KIM91]、生成座標の方法（Generator Coordinage Method, GCM）[RS80]、自己無撞着集団座標法（Self-consistent Collective Coordinate Method, SCC）[MMSK80] などがある。どの方法にもそれぞれの持ち味があり、様々な応用が行われ、かなりの成果が挙げられているが、その中でも、適用範囲の広さ、計算の手軽さ、量子力学的な取扱いとしての明確さから、遷移領域核の記述には、ボソン展開法が最も有力な方法であると思われる。そこで次の 2.3 節では、本論文にも最も関連の深いボソン展開法の基本戦略、および、これまでの成果と問題点について簡単にまとめる。



### 2.3 ボソン展開法による集団運動の記述とその問題点

調和近似で、現実の原子核にみられる非調和的スペクトルを説明できない理由は、もう少し詳しく述べると、次の2点にまとめられる。[RS80]

- [1] 調和近似では、Pauli 原理に由来する独特の交換代数に従うフェルミオン対演算子が、近似的にボソンの交換関係に従うとみなすため、Pauli 効果による補正項の影響が無視されている。
- [2] 調和近似では、運動方程式を線形化する際に、ハミルトニアンの中で、基準モードについて2次に相当する項までしか考慮できないため、スペクトルの非調和性に重要な寄与を持つ、3次以上のモード間相互作用が無視されている。

ゆえに、調和近似を越える取扱いを行うためには、フェルミオンに固有の Pauli 原理を正しく評価し、その上で、高次のモード間相互作用を取り入れた考察を行う必要があるが、一方では、調和近似のある程度の成功から、集団運動のボソン描像がかなり有効であるということも確かである。そこで考えを押し進めて、フェルミオン多体系のハミルトニアンを、それと全く等価になるようにボソン演算子の級数展開形に書き下しておき、これをボソン空間で対角化すれば良いのではないかという発想が生まれてくる。そうすれば、得られたボソン・ハミルトニアンは、展開の最低次として調和近似を含みつつ、調和近似では取り扱うことのできなかつた非調和効果が展開の高次項として表現され、これを逐次的に評価できることになる。これが、ボソン展開法のアイデアである。

このアイデアを具体的に実践するための処方箋が、1960年代の初めから、多くの研究者によって考案されてきたが、その中でも、比較的理論構造がシンプルで、現実の原子核を対象とした数値計算に最も多く適用されてきた方法が、“改良 Marumori 型ボソン写像法 (Modified Marumori Boson Mapping Method)” [LH75]、および、それから派生してきた方法である。この方法の真髄は、多フォノン部分空間の設定とボソン写像にある。すなわち、まず、典型的な調和近似理論である Tamm-Dancoff 近似の解として得られたフォノン演算子 (基準モード) をビルディング・ブロックとして、多フォノン状態群を作り、集団運動を記述するのに必要最小限の部分空間 (多フォノン部分空間) を用意する。しかるのちに、この部分空間を、これに1対1に対応する物理的ボソン部分空間に写像しようというものである。この際、状態の1対1対応によって定義されたボソン写像の変換演算子を用いることにより、もとのフェルミオン空間における任意の演算子は、写像後のボソン空間において、ボソン演算子に関する級数展開の形に変換される。これが、“ボソン展開法”と呼ばれる名の由来である。実際には、フェルミオン空間における一組の基本的な対演算子 (フォノン演算子と散乱演算子) のボソン展開を行い、これを用いて、ハミルトニアンのボソン・イメージ (ボソン・ハミルトニアン) を導出する。その結果、もとの多フォノン部分空間において



固有値問題を解く作業は、物理的ボソン部分空間においてボソン・ハミルトニアン固有状態を求める作業に完全に置き換えられる。フェルミオン対演算子の従う複雑な交換代数に比べ、ボソン演算子の従う交換関係はずっと単純であるから、行列要素を計算する労力が大幅に軽減されることがボソン展開法の強みである。

ところで、上に述べたボソン展開の方法は、ボソン空間への写像を定義する変換演算子の種類によって、さらに、大きく2種類のボソン展開法に分けることができる。一つは、エルミート・無限展開型のボソン展開法 [LH75][KT83] であり、もう一つは、非エルミート・有限展開型の Dyson 型ボソン展開法 [T83][Ta85] である。これら二つの方法は、共に、1970年代から1980年代にわたって、膨大な数値計算を含む最も代表的な仕事が行なわれ、集団運動の非調和性を記述する上でのボソン展開法の有効性を強くアピールしてきた理論である。[HJJ76][KT76][Ta85][TT86][TY87][TTT87][Ku88][YT88][TYT89][SK91] ここでは、あえて、それらの成果を紹介することはしない。それよりも、むしろ、それぞれのタイプのボソン展開法が、どのような理論上の困難を抱え、現在もなお未解決の問題点を含んでいるのかをまとめておくことにする。

### 2.3.1 エルミート型ボソン展開法に関する問題点

#### (1) 展開の収束性

エルミート型ボソン展開法によると、任意のフェルミオン演算子は、ボソン演算子に関する無限級数展開の形に変換される。しかし、現実的な計算においては必ず有限次数で展開を切断せざるを得ないため、ボソン展開の収束性がその近似の良否を大きく左右することになる。ところが、非集団的フォノンのボソン・イメージは、その展開パラメーターが必ずしも小さくなく [TTT87]、収束性が良くないことがわかっている。これは、非集団的モードが、フェルミオン対としての性質の極めて強いモードだからである。

#### (2) 写像空間の制限

通常、改良 Marumori 型ボソン写像法によってボソン空間への写像を行う場合、その理論の性質上、写像されるべき多フォノン空間を、適当な大きさの部分空間にあらかじめ制限しておくことが絶対に必要である。[KT83] ところが、この写像空間の制限によって、対演算子のボソン展開形式を得る場合の“フォノン切断近似の問題”や、フェルミオン対演算子の積で表される演算子をボソン空間に写像する場合の問題などが現れる。

#### (3) ボソン空間における非物理的状態

ボソン展開法で用いられるボソン空間は、もとのフェルミオン空間に1対1に対応する“物理的部分空間”に属する状態と、フェルミオン状態に対応しない“非物理的部分空間”に



属する状態をともに含んでいる。[MYT64] しかしながら、ハミルトニアン**の**ボソン展開を終えて、いったんボソン空間に移ってしまうと、そこでは、もはや、物理的状態と非物理的状態を区別する手段がほとんどないのが現状である。

### 2.3.2 Dyson 型ボソン展開法に関する問題点

#### (1) フォノン切断近似

Dyson 型ボソン展開法は、フェルミオン対演算子のボソン表現が、ボソン演算子に関する有限展開になっていることが大きな特徴であるが、その展開形式を導出する際に、“フォノン切断近似”[Ta85] と呼ばれる、一種の閉じた代数近似を仮定することが絶対に必要である。しかしながら、この仮定が、どの程度良い近似であるかについて若干の議論 [Ta85] はあるものの、その一般的な適用限界は未だによくわかっていない。

#### (2) 左・右の固有値問題とエルミート化法

Dyson 型ボソン展開法は、有限展開であることの代償として、変換がエルミート性を保持しない。そこで、実際に計算を行う際は、まず、非エルミートなボソン・ハミルトニアンに関する左・右の固有値問題 [Ta85] を解いて左・右の固有ベクトルを求め、その次に、これを用いて遷移行列要素などの計算 [Li83] をする。

この面倒な手続きを踏むかわりに、非エルミートなボソン・ハミルトニアンの行列要素から、エルミートなボソン・ハミルトニアンの行列を導出する“エルミート化公式” [Ta86][Ta88] と呼ばれるものが Takada によって考案された。ところが、この方法は、全フェルミオン空間の写像を行う場合は厳密な方法であるが、部分空間の写像を行う場合は近似的な方法に過ぎないこと [TS91][MT92] が明らかにされている。

#### (3) 物理的部分空間の設定

Dyson 型ボソン展開法では、Takada によって、適当なボソン部分空間を取ってきたときに、それが物理的であるかどうかを判定する方法 [Ta86] が考案されている。但し、この方法は、先に述べた、フォノン切断近似の仮定のもとに成り立っているため、判定法の精度は、この近似の良否にかかっている。また、この判定法を用いる場合は、エルミート化の方法を使わずに、まともに左・右の固有値問題を解き、左・右の固有ベクトルを求めておかなければならないので、相当の労力を要する。

1970 年代、1980 年代における様々な人々の努力を通して、発想当時は純数学的色彩の強かったボソン展開法は、より自然で実用的な理論へと改良され、現実の原子核にも十分適用できるようになった。その結果、遷移領域核を含む広い領域の原子核に対して、この方法



を用いた数値計算が行われ、集団運動の非調和性に関する我々の理解は大きく深められた。それにも関わらず、従来のボソン展開法は、本節で述べたように、その理論形式の本質に根ざした固有の問題を抱えている。そのため、集団運動記述の際の有効相互作用に関する不確定さに加えて、多体問題的手法からくる曖昧さが加わり、それから導かれる結論を大きく揺るがしかねない危険性を伴っている。ボソン展開法における問題点の本質は、結局のところ、次の3点に集約される。

- [1] 写像前に、空間の制限を行わざるを得ないこと。
- [2] 全てのフォノン・モードをボソンで表現していること。
- [3] 写像後のボソン空間では、物理的部分空間の実態が曖昧になってしまうこと。

この3点は、ボソン展開法という理論の枠組みを用いる限り、決して避けることのできないものであり、これから派生してでてくる種々の難点を回避するためには、もはや、全く異なる理論を用いる他はない。ボソン・フェルミオン展開法の登場を促したのには、このような事情がある。



### 第3章 ボソン・フェルミオン展開法の一般論

この章では、ボソンフェルミオン展開法の一般論をまとめ、この理論と従来のボソン展開法との同質性と異質性について明らかにするのが目的である。まず、3.1節では、原子核における素励起モードであるフォノン演算子と、これをビルディング・ブロックとして構成される多フォノン状態について説明する。次に、3.2節で、ボソン・フェルミオン展開法の論理構成 [TM90][TM91] に触れた後、3.3節において、本論文の主題の一つであるボソン展開法との関連について議論する。

なお、あらかじめ断っておくが、本論文では、偶数粒子系の場合の議論のみ行う。ボソン・フェルミオン展開法は、偶数粒子系と奇数粒子系を同じ理論の枠内で取り扱えるという特長 [TM91] を持っているが、今回は、陽子数と中性子数がともに偶数であるような原子核への適用を主眼としているため、奇数粒子系の取扱いにはいっさい触れない。

#### 3.1 フォノン演算子と多フォノン状態

初めに、ボソン・フェルミオン展開法に必要な記号の定義を行う。まず、演算子  $a_\alpha^\dagger$ 、 $a_\alpha$  を単一粒子軌道  $\alpha$  における準粒子（フェルミオン）の生成・消滅演算子であるとする。ここでは、球対称殻模型を出発点とするため、軌道を表す添え字  $\alpha$  は、 $\alpha = \{n_\alpha, l_\alpha, j_\alpha, m_\alpha\}$  という量子数の組を意味する。ここで、 $n_\alpha$  は主量子数、 $l_\alpha$  は軌道角運動量、 $j_\alpha$ 、 $m_\alpha$  は全角運動量とその  $Z$  成分である。また、添え字  $\alpha$  から磁気量子数  $m_\alpha$  を除いた量子数の組を  $a = \{n_\alpha, l_\alpha, j_\alpha\}$  と表して区別することにする。同様の意味において、以下の議論では、ギリシャ文字の添え字  $\alpha, \beta, \alpha_1, \beta_1, \dots$  の各々について、アルファベットの添え字  $a, b, a_1, b_1, \dots$  を対応させる。ただし、アルファベットの添え字 “ $c$ ” と “ $n$ ” は、後で特別の意味を持たせるため、単一粒子軌道を区別するためには使用しない。

角運動量  $J$  の準粒子対演算子（quasi-particle pair operator）および散乱演算子（scattering operator）は、それぞれ次のように定義される。

$$A_{JM}^\dagger(ab) \equiv D_{ab}^{-1} \sum_{m_\alpha m_\beta} \langle j_\alpha m_\alpha j_\beta m_\beta | JM \rangle a_\alpha^\dagger a_\beta^\dagger = -\theta(abJ) A_{JM}^\dagger(ba), \quad (3.1)$$

$$B_{JM}^\dagger(ab) \equiv \sum_{m_\alpha m_\beta} \langle j_\alpha m_\alpha j_\beta \widetilde{m}_\beta | JM \rangle a_\alpha^\dagger a_\beta = -\theta(abJ) B_{JM}^\dagger(ba), \quad (3.2)$$

$$D_{ab} \equiv \sqrt{1 + \delta_{ab}}, \quad \theta(abJ) \equiv (-)^{j_a + j_b + J}. \quad (3.3)$$

ここで、Clebsch-Gordan 係数および球対称テンソル演算子  $T_{JM}^\dagger$  に対する“チルダ演算”は、次のように定義されているとする。

$$\langle j_1 m_1 j_2 \widetilde{m}_2 | JM \rangle \equiv (-)^{j_2 - m_2} \langle j_1 m_1 j_2 - m_2 | JM \rangle, \quad (3.4)$$



$$T_{JM}^\dagger \equiv (-)^{J-M} T_{J-M}^\dagger, \quad (3.5)$$

$$\tilde{T}_{JM} \equiv T_{\tilde{JM}} \equiv (-)^{J-M} T_{J-M}. \quad (3.6)$$

演算子  $\tilde{T}_{JM}$  も  $T_{JM}^\dagger$  と同様、空間回転に対して、角運動量  $J$  の球対称テンソルとして変換する。(3.1) の対演算子  $A_{JM}^\dagger(ab)$  は、準粒子演算子 (フェルミオン) の真空  $|0\rangle_F$  に作用して、次のように直交規格化された 2 準粒子状態を生成する。

$${}_F\langle 0|A_{JM}(ab)A_{JM}^\dagger(a'b')|0\rangle_F = D_{ab}^{-2}\{1 - \theta(abJ)P_{ab}\}\delta_{aa'}\delta_{bb'}. \quad (3.7)$$

但し、 $P_{ab}$  は、この後ろにくる  $a$  および  $b$  の関数に作用して、 $a$  と  $b$  を入れ換える操作を意味する。

Tamm-Dancoff 型のフォノン演算子 (以下、“フォノン演算子”、あるいは、“フォノン・モード” と略記。) は、準粒子対演算子  $A_{JM}^\dagger(ab)$  に関する直交変換

$$X_{\mu, JM}^\dagger \equiv \sum_{a \leq b} \psi_J^{(\mu)}(ab) A_{JM}^\dagger(ab) = \sum_{ab} \frac{1}{2} D_{ab}^2 \psi_J^{(\mu)}(ab) A_{JM}^\dagger(ab) \quad (3.8)$$

によって定義される。ここで、直交変換の係数  $\psi_J^{(\mu)}(ab)$  を phonon amplitude と呼び、添え字 “ $\mu$ ” によって、フォノン演算子の基準モードが区別される。phonon amplitude は、次の関係式を満足する。

$$\psi_J^{(\mu)}(ab) = -\theta(abJ) \psi_J^{(\mu)}(ba), \quad (3.9)$$

$$\sum_{a \leq b} \psi_J^{(\mu)}(ab) \psi_J^{(\mu')}(ab) = \sum_{ab} \frac{1}{2} D_{ab}^2 \psi_J^{(\mu)}(ab) \psi_J^{(\mu')}(ab) = \delta_{\mu\mu'}, \quad (3.10)$$

$$\sum_{\mu} \psi_J^{(\mu)}(ab) \psi_J^{(\mu)}(a'b') = D_{ab}^{-2} \{1 - \theta(abJ)P_{ab}\} \delta_{aa'} \delta_{bb'}. \quad (3.11)$$

(3.11) を使うと、(3.8) を逆に解くことができ、

$$A_{JM}^\dagger(ab) = \sum_{\mu} \psi_J^{(\mu)}(ab) X_{\mu, JM}^\dagger. \quad (3.12)$$

が得られる。表記を簡略化するための約束として、

$$\mu \equiv \{\mu, JM\}, \quad q \equiv \{ab, JM\}. \quad (3.13)$$

を用いることにすれば、フォノン演算子と散乱演算子が、次の交換関係を満足することが確かめられる。

$$[X_{\mu_1}, X_{\mu_2}^\dagger] = \delta_{\mu_1\mu_2} - \sum_{q_3} \Gamma_{q_3}^{\mu_1\mu_2} B_{q_3}, \quad (3.14)$$

$$[B_{q_3}, X_{\mu_1}^\dagger] = \sum_{\mu_2} \Gamma_{q_3}^{\mu_1\mu_2} X_{\mu_2}^\dagger, \quad (3.15)$$



$$\Gamma_{q_3}^{\mu_1 \mu_2} \equiv \Gamma_{(a_3 b_3, J_3 M_3)}^{\mu_1 J_1 M_1; \mu_2 J_2 M_2} \equiv \langle J_1 M_1 \widetilde{J}_2 \widetilde{M}_2 | J_3 M_3 \rangle \widehat{\Gamma}_{(a_3 b_3, J_3)}^{\mu_1 \mu_2}, \quad (3.16)$$

$$\widehat{\Gamma}_{(a_3 b_3, J_3)}^{\mu_1 \mu_2} \equiv \widehat{J}_1 \widehat{J}_2 \sum_a \psi_{J_1}^{(\mu_1)}(a_3 a) \psi_{J_2}^{(\mu_2)}(b_3 a) W(j_{a_3} j_a J_3 J_2; J_1 j_{b_3}) D_{a_3 a} D_{b_3 a}, \quad (3.17)$$

$$\widehat{J} \equiv \sqrt{2J+1}. \quad (3.18)$$

次に、ボソン・フェルミオン展開法を行う上で非常に重要な、フォノン演算子（フォノン・モード）の区分けについて述べる。フォノン演算子は、(3.8)の直交変換で定義されているが、そこに現れている phonon amplitude は、(3.9)-(3.11)の関係式を満足するものであれば何でもよかった。しかしながら、実際に数値計算を行う場合は、かなり限られた部分空間で計算せざるを得ないため、できれば、特定のフォノン・モードに集団運動的相関の大部分が吸収されている方が望ましい。そこで、このような要請を満たす phonon amplitude を決定するために、通常は、

- [1] ハミルトニアンの中で特に重要な集団運動的相関を担う部分を、2準粒子状態で対角化したときの固有ベクトルをもって phonon amplitude としたり、
- [2] あるいは、もっと単純に、典型的な調和近似理論である Tamm-Dancoff 近似の運動方程式から得られた “Tamm-Dancoff amplitude” をそのまま採用したりする。

大事なことは、このいずれの場合にも、全てのフォノンモードが、“集団的モード (collective mode)” と “非集団的モード (non-collective mode)” という二つの範疇のどちらかに分類されるということである。すなわち、2.1節でも少し触れたように、“集団的モード”は、集団運動的相関の主要部分を吸収し、多数の2準粒子状態のコヒーレントな重ね合わせとして表現される、ボソンの性質の強い励起モードである。一方、“非集団的モード”は、特定の2準粒子状態に振幅が集中している、フェルミオン対としての性質が強い励起モードである。以下の議論ではフォノン演算子のうち、集団的モードを  $X_c^\dagger$ 、非集団的モードを  $X_n^\dagger$  のように表し、添え字 “c(=collective)” と “n(=non-collective)” でその性質を区別する。どちらとも限らない一般のフォノン演算子に対しては  $X_\mu^\dagger$  のように書くことにする。

さて、フォノン演算子をビルディング・ブロックとして構成される N フォノン状態は、

$$|N; \mu\rangle_F \equiv X_{\mu_1}^\dagger X_{\mu_2}^\dagger \cdots X_{\mu_N}^\dagger |0\rangle_F \quad (3.19)$$

で定義される。N フォノン状態のうち、純粋な集団的 N フォノン状態と非集団的 N フォノン状態は、それぞれ、

$$|N; c\rangle_F \equiv X_{c_1}^\dagger X_{c_2}^\dagger \cdots X_{c_N}^\dagger |0\rangle_F \quad (3.20)$$

$$|N; n\rangle_F \equiv X_{n_1}^\dagger X_{n_2}^\dagger \cdots X_{n_N}^\dagger |0\rangle_F \quad (3.21)$$



で表される。このように定義されたNフォノン状態はもちろんお互いに直交していないが、必要ならば、これらの適当な線形結合をすることによって直交規格化状態を作ることができる。

ボソン・フェルミオン展開法では、集団的フォノン演算子  $X_c^\dagger$  に対応する集団的ボソン演算子  $b_c^\dagger$  を導入する。この集団的ボソン演算子  $b_c^\dagger$  は、集団的フォノン演算子  $X_c^\dagger$  と全く同じ量子数をもつと仮定し、もちろん、ボソンの交換関係

$$[b_{c_1}, b_{c_2}^\dagger] = \delta_{c_1 c_2}, \quad [b_{c_1}, b_{c_2}] = [b_{c_1}^\dagger, b_{c_2}^\dagger] = 0 \quad (3.22)$$

を満足する。集団的Nボソン状態は、

$$|N; c\rangle_B \equiv b_{c_1}^\dagger b_{c_2}^\dagger \cdots b_{c_N}^\dagger |0\rangle_B \quad (3.23)$$

で定義される。但し、 $|0\rangle_B$  はボソンに対する真空を表す。



### 3.2 ボソン・フェルミオン展開法の概要

ボソン・フェルミオン展開法では、(3.19)の多フォノン状態を基底として構成される多フォノン空間

$$\{|N; \mu\rangle_F; N = 0, 1, 2, \dots\} \quad (3.24)$$

を理論のスタートとする。この空間は、3.1節で述べたような理由から、(3.20)の集団的多フォノン状態群によって集団運動の主要部分が記述されることを前提としている。しかし、この段階では状態に対していかなる制限も仮定していないので、(3.24)自身は、全フェルミオン空間(準粒子空間)の中の偶数個のフェルミオンを含む部分空間に等しい。次に、(3.24)の多フォノン空間と、(3.23)の集団的ボソン状態を基底とする集団的ボソン空間

$$\{|M; c\rangle_B; M = 0, 1, 2, \dots\} \quad (3.25)$$

の直積空間として、“ボソン・フェルミオン空間 (boson-fermion space)”

$$\{|M; c\rangle_B |N; \mu\rangle_F; M = 0, 1, 2, \dots, N = 0, 1, 2, \dots\} \quad (3.26)$$

を定義する。以下の議論では、一般のボソン・フェルミオン状態を表すときは、添え字のないブラまたはケットを用い、純粋なフェルミオン状態(ボソン状態)を表す場合は、必ず添え字  $F$  ( $B$ ) をつけて区別することにする。

以上の準備が整ったところで、“ボソン・フェルミオン写像 (boson-fermion mapping)” の概念を導入する。この写像は、次の2段階の手続きを踏んで行われる。

- [1] 多フォノン空間 (3.24) における任意の状態  $|\psi\rangle_F$  を、ボソン・フェルミオン空間 (3.26) の中でボソン励起をいっさい含まない状態  $|\psi; 0\rangle$  に写像する。

$$|\psi\rangle_F \longrightarrow |\psi; 0\rangle \equiv |0\rangle_B |\psi\rangle_F \quad (3.27)$$

同時に、フェルミオン空間における任意の演算子  $T_F$  を、ボソン・フェルミオン空間において、ボソン空間における単位演算子  $1_B$  を伴う演算子に写像する。

$$T_F \longrightarrow T \equiv T_F \cdot 1_B \quad (3.28)$$

- [2] ボソン・フェルミオン空間内におけるユニタリ演算子として、“ボソン・フェルミオン変換 (boson-fermion transformation)”

$$U \equiv e^{-(\pi/2)F}, \quad F \equiv \sum_c (X_c^\dagger b_c - b_c^\dagger X_c) \quad (3.29)$$



を導入し、これを用いて、(3.27) の状態  $|\psi; 0\rangle$  および (3.28) の演算子  $T$  を、次のように変換する。

$$|\psi; 0\rangle \longrightarrow |\bar{\psi}\rangle \equiv U|\psi; 0\rangle \quad (3.30)$$

$$T \longrightarrow \bar{T} \equiv UTU^\dagger \quad (3.31)$$

この [1][2] の写像を施すことにより、任意のフェルミオン状態  $|\psi\rangle_F$  および任意のフェルミオン演算子  $T_F$  は、それぞれ、ボソン・フェルミオン空間内の状態  $|\bar{\psi}\rangle$  およびボソン・フェルミオン演算子  $\bar{T}$  に一意的に変換される。

$$|\psi\rangle_F \longrightarrow |\psi; 0\rangle \longrightarrow |\bar{\psi}\rangle \quad (3.32)$$

$$T_F \longrightarrow T \longrightarrow \bar{T} \quad (3.33)$$

現実のフェルミオン状態に 1 対 1 に対応しているという意味で、状態  $|\bar{\psi}\rangle$  のことを、“物理的状態 (physical state)” と呼び、ボソン・フェルミオン空間 (3.26) の中で、物理的状態によって張られる部分空間のことを、“物理的部分空間 (physical subspace)” と呼ぶ。物理的部分空間は、多フォノン空間 (3.24) から、ボソン・フェルミオン変換 (3.29) によって得られた部分空間

$$\left\{ U|0\rangle_B |N; \mu\rangle_F ; N = 0, 1, 2, \dots \right\} \quad (3.34)$$

に他ならない。一方、変換された演算子  $\bar{T}$  のことを、もとのフェルミオン演算子  $T_F$  の“ボソン・フェルミオン表現 (boson-fermion representation)” あるいは“ボソン・フェルミオン・イメージ (boson-fermion image)” と呼ぶ。

上の手続きから明らかなように、ボソン・フェルミオン写像によって、多フォノン空間における任意の演算子の行列要素は、変換後の物理的部分空間においても、

$${}_F\langle \psi | T_F | \psi' \rangle_F = \langle \bar{\psi} | \bar{T} | \bar{\psi}' \rangle \quad (3.35)$$

の意味において、完全に保存される。したがって、多フォノン空間 (3.24) においてハミルトニアン  $H$  の固有値問題を解く代わりに、それと全く等価に、物理的部分空間 (3.34) において“変換されたハミルトニアン”  $\bar{H}$  の固有値問題を解くことができ、その他の遷移行列要素を計算する作業も全て、変換後の物理的部分空間で行うことができる。これが、ボソン・フェルミオン写像のエッセンスである。

しかし、これを具体的に遂行するためには、まず、偶数系における任意の演算子を与える対演算子 (フォノン演算子および散乱演算子) のボソン・フェルミオン表現と、物理的部分空間の具体的な設定の仕方を知っておく必要がある。これについて、以下、順番に説明する。



ボソン・フェルミオン展開法では、フェルミオン対演算子および集団的ボソン演算子のボソン・フェルミオン表現は、次のように、スモール・パラメータを含む無限級数展開の形で求められる。

$$\bar{b}_c = \bar{b}_c^{(0)} + \bar{b}_c^{(2)} + \bar{b}_c^{(4)} + \dots \quad (3.36)$$

$$\bar{X}_\mu = \bar{X}_\mu^{(0)} + \bar{X}_\mu^{(2)} + \bar{X}_\mu^{(4)} + \dots \quad (3.37)$$

$$\bar{B}_q = \bar{B}_q^{(1)} + \bar{B}_q^{(3)} + \bar{B}_q^{(5)} + \dots \quad (3.38)$$

但し、ボソン・フェルミオン展開法におけるスモール・パラメータとは、(3.16)で定義された係数のうち、集団的モードに関する添え字を一つ以上含む、 $\Gamma_q^{cc'}$ 、 $\Gamma_q^{cn}$ 、あるいは、 $\Gamma_q^{nc}$ のタイプの係数のことを指し、これらをまとめて、 $\epsilon$ で表す。(3.36)-(3.38)の右辺各項についている上付き添え字は、このスモール・パラメータ $\epsilon$ に関する次数を表している。各種の対演算子および散乱演算子の任意の次数の展開表現を導出する方法は、ボソン・フェルミオン展開法の原論文 [TM90][TM91] に与えられているので、詳しくはそちらを参照されたい。なお、付録Aには、後の計算で必要な、対演算子の  $O(\epsilon^3)$  のオーダーまでのボソン・フェルミオン表現をのせておく。

(3.34)で与えられた、物理的部分空間は、Taniguchi-Miyanishiにより、部分空間

$$\left\{ \bar{\Lambda} |\phi\rangle \right\} \quad (3.39)$$

$$|\phi\rangle \equiv |M; c\rangle_B |N; n\rangle_F, \quad M = 0, 1, 2, \dots; N = 0, 1, 2, \dots \quad (3.40)$$

と全く同等であることが証明されている。[TM91] 但し、 $\bar{\Lambda}$ は、“物理的部分空間への射影演算子”と呼ばれ、

$$\bar{\Lambda} \equiv U|0\rangle_{BB} \langle 0|U^\dagger \quad (3.41)$$

で定義されている。この射影演算子 $\bar{\Lambda}$ は、ボソン・フェルミオン空間の中から、(最初はボソン励起をいっさい含んでいなかった)多フォノン空間(3.24)に1対1に対応する物理的部分空間を抜き出す役割を果たしている。

そこで、実際に、物理的部分空間の中で、変換されたハミルトニアン $\bar{H}$ の固有値問題を解くためには、まず、部分空間(3.39)を張る一次従属な基底 $\bar{\Lambda}|\phi\rangle$ の適当な線形結合をとることによって、直交規格化基底を用意し、それを用いて、 $\bar{H}$ の行列要素を計算し、対角化計算を行えばよい。 $\bar{\Lambda}$ は、任意のオーダーまで求められた集団的ボソン演算子のボソン・フェルミオン表現 $\bar{b}_c$ を用いて、具体的に書き下すことができるので、基底 $\bar{\Lambda}|\phi\rangle$ を構成することは原理的には可能である。



しかしながら、再び、Taniguchi-Miyanishi によって、

$$\langle \phi | \bar{\Lambda} | \phi' \rangle = \langle \phi | \phi' \rangle + O(\epsilon^4) \quad (3.42)$$

が証明されており、また、任意のボソン・フェルミオン・イメージ  $\bar{T}$  に対して、

$$\langle \phi' | \bar{\Lambda} \bar{T} \bar{\Lambda} | \phi \rangle = \langle \phi' | \bar{T} | \phi \rangle (1 + O(\epsilon^4)) \quad (3.43)$$

が成り立つこともわかっている。[TM91] つまり、 $O(\epsilon^3)$  のオーダーまでしか考慮しないのならば、実質上  $\bar{\Lambda} = 1$  と見なし、これを無視することができる。後で出てくるように、 $O(\epsilon^3)$  のオーダーまでの近似計算を行う場合は、物理的部分空間の基底として、(3.40) を採用して計算すればよい。

以上で、ボソン・フェルミオン展開法を具体的な計算に適用するために必要な道具立ては全て提示した。これを基にして、第4章では、適当な有効相互作用を与えて、現実の遷移領域核における四重極集団運動状態を記述する場合の詳細な理論形式を与える。



### 3.3 ボソン展開法との関連

この節では、ボソン展開法とボソン・フェルミオン展開法の相違点および共通点に注目し、両者の関係を明らかにすることにより、ボソン・フェルミオン展開法の持つ意味をより深く理解するのが目的である。

#### 3.3.1 ボソン展開法の復習

ここでは、以下の議論のために、Kishimoto-Tamura の normal-ordered linked-cluster boson expansion(KT-3)[KT83] の簡単な復習を行う。KT-3 は、物理的ボソン部分空間として、イデアル・ボソン空間の使用を可能にし、かつ、射影された演算子のボソン表現を、十分速く収束させることを目的として、構成された理論である。この理論は、改良 Marumori 型ボソン写像法に基づいており、あらかじめフェルミオン空間を適当に制限しておいたあと、この部分空間をボソン空間に写像する方法である。

まず、初めに、ボソン・フェルミオン展開法の場合と同様に、Tamm-Dancoff 型のフォノン演算子  $X_\mu$  と散乱演算子  $B_q$  を用意する。これらは、全体として、一組の閉じた交換関係を満たしており、C 数  $\Gamma_q^{\mu\mu'}$  によって、対演算子の間に働く Pauli 効果が表されている。

次に、フォノン演算子  $X_\mu$  に対応して、ボソン演算子  $b_\mu$  を導入し、イデアル・ボソン状態を、

$$|N; \mu\rangle_B = \mathcal{N}_B(N; \mu) b_{\mu_1}^\dagger b_{\mu_2}^\dagger \cdots b_{\mu_N}^\dagger |0\rangle_B \quad (3.44)$$

で定義する。ここで、 $\mathcal{N}_B(N; \mu)$  は、規格化定数を表し、 $|0\rangle_B$  は、ボソン演算子に対する真空を表す。これらの状態は、お互いに規格直交化されており、イデアル・ボソン空間を構成する。

イデアル・ボソン状態に対応して、多フォノン状態は、

$$|N; \mu\rangle_F = \mathcal{N}_B(N; \mu) X_{\mu_1}^\dagger X_{\mu_2}^\dagger \cdots X_{\mu_N}^\dagger |0\rangle_F \quad (3.45)$$

として定義される。ここで、 $|0\rangle_F$  は、フェルミオンの真空を表す。Pauli 効果のために、この多フォノン状態は、一般には、お互いに規格直交化されておらず、一次独立になっていない。KT-3 では、フォノン・モード  $\mu$  を、 $t$  および  $\bar{t}$  という二つの範疇に分類する。集団的モードおよび若干の非集団的モードは、 $t$  に属し、残りの非集団的モードは、 $\bar{t}$  に属する。ここで、 $t$  に属するフォノン・モード  $X_t$  だけをビルディング・ブロックとして構成される多フォノン



状態は、一次独立なフェルミオン部分空間を張ると仮定する。この空間の切断の後、規格直交状態は、ノルム行列  $(Z_N^2)_{t,t'} = {}_F\langle N; \mu = t | N; \mu = t' \rangle_F$  を用いて、

$$|N; t\rangle_F = \sum_{t'} (Z_N^{-1})_{t,t'} |N; \mu = t'\rangle_F \quad (3.46)$$

と組み立てられる。

イデアル・ボソン状態のうち、状態  $|N; t\rangle_F$  に 1 対 1 の対応関係を持つ状態を物理的ボソン状態  $|N; t\rangle_B$  と定義する。これは、イデアル・ボソン状態のモード  $\mu$  を単に  $t$  に制限することによって得られる。

$$|N; t\rangle_B = |N; \mu = t\rangle_B \quad (3.47)$$

以上の準備のもとで、ボソン写像が、関係式

$${}_F\langle\langle N; t | O_F | N'; t' \rangle\rangle_F = {}_B\langle\langle N; t | (O_F)_B | N'; t' \rangle\rangle_B \quad (3.48)$$

を満たすように決められる。ここで、 $O_F$  は、任意のフェルミオン演算子であり、 $(O_F)_B$  は、そのボソン・イメージを表す。この写像は、写像演算子

$$U_B = \sum_{N,t} |N; t\rangle_B {}_B\langle\langle N; t | \quad (3.49)$$

を用いて、

$$|N; t\rangle_B = U_B |N; t\rangle_F \quad (3.50)$$

$$(O_F)_B = U_B O_F U_B^\dagger \quad (3.51)$$

のように行われる。写像された演算子のボソン展開は、真空への射影演算子  $|0\rangle_{BB}\langle 0|$  および行列  $(Z_N)_{t,t'}$  をボソン演算子に関する級数展開の形で書き下すことによって得られる。こうして、我々は、 $(O_F)_B$  に対する “normal-ordered linked-cluster expansion” を得ることができる。

特に、フォノン演算子および散乱演算子のボソン・イメージは次のように与えられる。

$$(X_t)_B = b_t - \frac{1}{4} \sum_{t_1 t_2 t_3} Y(tt_3 t_2 t_1) b_{t_1}^\dagger b_{t_2} b_{t_3} + O(\epsilon^4) \quad (3.52)$$

$$(X_{\bar{t}})_B = -\frac{1}{2} \sum_{t_1 t_2 t_3} Y(\bar{t} t_3 t_2 t_1) b_{t_1}^\dagger b_{t_2} b_{t_3} + O(\epsilon^4) \quad (3.53)$$

$$(B_q)_B = \sum_{t_1 t_2} \Gamma_q^{t_2 t_1} b_{t_1}^\dagger b_{t_2} - \frac{1}{4} \sum_{t_1 t_2 t_3 t_4} \sum_{\bar{t}} \left\{ \Gamma_q^{\bar{t} t_1} Y(\bar{t} t_4 t_3 t_2) + \Gamma_q^{t_4 \bar{t}} Y(\bar{t} t_1 t_2 t_3) \right\} b_{t_1}^\dagger b_{t_2}^\dagger b_{t_3} b_{t_4} + O(\epsilon^5) \quad (3.54)$$

但し、 $Y(\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4) \equiv \sum_q \Gamma_q^{\mu_1 \mu_2} \Gamma_q^{\mu_3 \mu_4}$  および  $O(\epsilon) \approx O(\Gamma_q^{\mu_1 \mu_2})$  とする。



### 3.3.2 射影された演算子の集団的ボソン部分の比較

ボソン展開法とボソン・フェルミオン展開法とでは、非集団的フォノン・モードに関する取扱いの方法がかなり異なるため、両者の比較を行うことはそれほど単純ではない。しかしながら、集団的ボソン演算子に関しては、どちらの理論においても、第0近似で集団的フォノン・モードに対応しているという意味で、よく似た取扱いがなされている。そこで、ここでは、対演算子の展開表現のうち、集団的ボソン演算子だけで書かれた部分に注目し、この部分について両者の比較を行う。

ボソン・フェルミオン展開法において、変換された演算子 $\bar{O}$ の集団的ボソン部分 $\bar{O}^{(c)}$ は、次のように、非集団的部分を無視することによって得られる。

$$\bar{O}^{(c)} = {}_F\langle 0|\bar{O}|0\rangle_F \quad (3.55)$$

付録Aの(A.1)-(A.9)を用いれば、ボソン・フェルミオン変換された対演算子の集団的ボソン部分の具体的表現

$$\begin{aligned} \bar{X}_c^{(c)} &= b_c - \frac{1}{4} \sum_{c_1 c_2 c_3} Y(cc_3 c_2 c_1) b_{c_1}^\dagger b_{c_2} b_{c_3} + O(\epsilon^4) \\ \bar{X}_n^{(c)} &= -\frac{1}{3} \sum_{c_1 c_2 c_3} Y(nc_3 c_2 c_1) b_{c_1}^\dagger b_{c_2} b_{c_3} + O(\epsilon^4) \\ \bar{B}_q^{(c)} &= \sum_{c_1 c_2} \Gamma_q^{c_2 c_1} b_{c_1}^\dagger b_{c_2} \\ &\quad - \frac{1}{12} \sum_{c_1 c_2 c_3 c_4} \sum_n \{ \Gamma_q^{n c_1} Y(nc_4 c_3 c_2) + \Gamma_q^{c_4 n} Y(nc_1 c_2 c_3) \} b_{c_1}^\dagger b_{c_2}^\dagger b_{c_3} b_{c_4} + O(\epsilon^5) \end{aligned} \quad (3.56)$$

が得られる。

これに対応するKT-3の結果は、対演算子のボソン・イメージの展開表現の中で、非集団的ボソン演算子を含む部分を無視することによって得られる。KT-3において、射影された演算子の集団的ボソン部分を $(O_F)_B^{(c)}$ と書くことにすれば、(3.52)-(3.54)から、次の表現が得られる。

$$\begin{aligned} (X_c)_B^{(c)} &= b_c - \frac{1}{4} \sum_{c_1 c_2 c_3} Y(cc_3 c_2 c_1) b_{c_1}^\dagger b_{c_2} b_{c_3} + O(\epsilon^4) \\ (X_n)_B^{(c)} &= \begin{cases} -\frac{1}{4} \sum_{c_1 c_2 c_3} Y(nc_3 c_2 c_1) b_{c_1}^\dagger b_{c_2} b_{c_3} + O(\epsilon^4) & \text{for } n \in t \\ -\frac{1}{2} \sum_{c_1 c_2 c_3} Y(nc_3 c_2 c_1) b_{c_1}^\dagger b_{c_2} b_{c_3} + O(\epsilon^4) & \text{for } n \in \bar{t} \end{cases} \end{aligned}$$



$$(B_q)_B^{(c)} = \sum_{c_1 c_2} \Gamma_q^{c_2 c_1} b_{c_1}^\dagger b_{c_2} - \frac{1}{4} \sum_{c_1 c_2 c_3 c_4} \sum_{\bar{t}} \left\{ \Gamma_q^{\bar{t} c_1} Y(\bar{t} c_4 c_3 c_2) + \Gamma_q^{c_4 \bar{t}} Y(\bar{t} c_1 c_2 c_3) \right\} b_{c_1}^\dagger b_{c_2}^\dagger b_{c_3} b_{c_4} + O(\epsilon^5) \quad (3.57)$$

ここで、 $n$  が  $t$  に属しているか  $\bar{t}$  に属しているかによって、 $(X_n)_B^{(c)}$  の表現が異なることに注意する。

(3.56) と (3.57) を比較すると、両者の展開表現は非常によく似ていることがわかる。しかしながら、明らかに、高次展開項の数係数が異なっている。この違いは、いったいどこから生じるのか、また、その物理的な意味は何かを次の節で明らかにする。



### 3.3.3 高次展開係数の変更と付加的ユニタリ変換の自由度

この節では、まず初めに、ボソン・フェルミオン展開法において、付加的な微小ユニタリ変換を施すことによって、ボソン展開法の結果を再現できること [TKM94] を示す。3.2 節で与えられた、ボソン・フェルミオン空間におけるユニタリ変換は、最低次の近似において、 $\overline{X}_c = b_c$  および  $\overline{X}_n = X_n$  となるように決められた変換である。しかしながら、ここでは、 $\overline{X}_\mu$  の高次項については何の制限も課していなかった。ゆえに、オリジナルなボソン・フェルミオン変換に加えて、付加的な微小ユニタリ変換

$$\Delta U = e^{-\overline{\Delta F}} \quad (3.58)$$

を行うことによって、高次項を変更する余地がある。但し、 $\overline{\Delta F}$  は、 $O(\epsilon^2)$  のオーダーの反エルミート・ボソン・フェルミオン演算子である。これにより、修正されたボソン・フェルミオン表現

$$\begin{aligned} \overline{O}' &= \Delta U \overline{O} \Delta U^\dagger \\ &= \overline{O} + [\overline{O}, \overline{\Delta F}] + \dots \end{aligned} \quad (3.59)$$

が得られる。オリジナルなボソン・フェルミオン表現に対する修正項は、

$$\overline{\Delta O} = [\overline{O}, \overline{\Delta F}] + O(\epsilon^4) \quad (3.60)$$

と与えられる。

もし、 $\lambda_n$  を  $O(\epsilon^0)$  のオーダーの任意の数因子として、 $\overline{\Delta F}$  を、

$$\overline{\Delta F} = \sum_{nc_1c_2c_3} \lambda_n \{ Y(nc_1c_2c_3) b_{c_1}^\dagger b_{c_2}^\dagger b_{c_3} X_n - Y(nc_3c_2c_1) X_n^\dagger b_{c_1}^\dagger b_{c_2}^\dagger b_{c_3} \} \quad (3.61)$$

と選ぶと、対演算子のボソン・フェルミオン表現の集団的ボソン部分に対して、修正項

$$\begin{aligned} \overline{\Delta X}_c^{(c)} &= O(\epsilon^4) \\ \overline{\Delta X}_n^{(c)} &= - \sum_{c_1c_2c_3} \lambda_n Y(nc_3c_2c_1) b_{c_1}^\dagger b_{c_2}^\dagger b_{c_3} \\ \overline{\Delta B}_q^{(c)} &= - \sum_{c_1c_2c_3c_4} \sum_n \lambda_n \{ \Gamma_q^{nc_1} Y(nc_4c_3c_2) + \Gamma_q^{c_4n} Y(nc_1c_2c_3) \} b_{c_1}^\dagger b_{c_2}^\dagger b_{c_3} b_{c_4} \end{aligned} \quad (3.62)$$

が加わる。但し、(3.62) を導く際に、(3.60)、付録 A の (A.1)-(A.9) を使用した。ここで、 $\lambda_n$  を、

$$\begin{aligned} \lambda_n &= -\frac{1}{12} & \text{for } n \in t \\ \lambda_n &= +\frac{1}{6} & \text{for } n \in \bar{t} \end{aligned} \quad (3.63)$$



と選べば、付加的なユニタリ変換によって、ボソン展開法の結果 (3.57) と全く同じ表現を得ることができる。すなわち、ボソン展開法とボソン・フェルミオン展開法の高次展開項における数係数の違いは、少なくとも集団的ボソン部分に関しては本質的ではなく、ユニタリ変換によって互いに移り変わることで表される違いにすぎないことがわかった。

それでは、次に、この付加的なユニタリ変換が物理的に何を意味しているかについて考察する。もともと、 $\overline{\Delta F} = U \Delta F U^\dagger$  であるから、修正されたボソン・フェルミオン表現  $\overline{O}$  は、

$$\overline{O} = e^{-\overline{\Delta F}} O e^{\overline{\Delta F}} = U e^{-\Delta F} O_F e^{\Delta F} U^\dagger \quad (3.64)$$

と書き直すことができる。これは、ボソン・フェルミオン変換された演算子に、さらに付加的な微小ユニタリ変換を施すことは、オリジナルのフェルミオン演算子に微小なユニタリ変換を施してから、ボソン・フェルミオン変換することと同等であることを意味する。(3.61) から、 $\Delta F$  は、

$$\Delta F = \sum_{n c_1 c_2 c_3} \lambda_n \{ Y(n c_1 c_2 c_3) X_{c_1}^\dagger X_{c_2}^\dagger X_{c_3} X_n - Y(\bar{n} c_3 c_2 c_1) X_n^\dagger X_{c_1}^\dagger X_{c_2} X_{c_3} \} + O(\epsilon^4) \quad (3.65)$$

と与えられる。このボソン・フェルミオン変換を行う前の微小ユニタリ変換  $e^{-\Delta F}$  によって、フェルミオン状態  $|\psi\rangle_F$  は、状態  $|\psi'\rangle_F = e^{-\Delta F} |\psi\rangle_F$  に変換される。したがって、このような微小ユニタリ変換の存在は、主要成分は共通でありながら、高次の成分において違いを有する一組のフェルミオン状態  $|\psi\rangle_F$ 、 $|\psi'\rangle_F$  の存在を明らかにしたことになる。

このことは、直ちに、フェルミオン空間における“集団的部分空間”という概念について我々に反省を促すものである。普通、我々が集団的フォノン状態と言うときは、集団的フォノン  $X_c^\dagger$  だけで構成された多フォノン状態  $|N; c\rangle_F$  のことを指す。簡単のために、2フォノン状態を例に挙げると、いわゆる集団的2フォノン状態は、

$$|cc'\rangle_F \equiv X_c^\dagger X_{c'}^\dagger |0\rangle_F \quad (3.66)$$

で表される。しかしながら、この状態に、微小ユニタリ変換  $e^{-\Delta F}$  を作用させると、非集団的2フォノン状態を高次成分として含む状態

$$e^{-\Delta F} |cc'\rangle_F = |cc'\rangle_F + 2 \sum_{n c''} \lambda_n Y(n c c' c'') X_n^\dagger X_{c''}^\dagger |0\rangle_F + O(\epsilon^4) \quad (3.67)$$

に変換される。これらの状態 (3.66)(3.67) をボソン・フェルミオン変換すると、ボソン・フェルミオン空間において、ともに、非集団的成分を含む状態

$$U |cc'\rangle_F |0\rangle_B = b_c^\dagger b_{c'}^\dagger |0\rangle - \frac{1}{4} \sum_{c_1 c_2} Y(c c_1 c_2 c') b_{c_1}^\dagger b_{c_2}^\dagger |0\rangle$$



$$-\frac{1}{3} \sum_{nc''} Y(cnc''c') X_n^\dagger b_{c''}^\dagger |0\rangle \quad (3.68)$$

$$U e^{-\Delta F} |cc'\rangle_F |0\rangle_B = b_c^\dagger b_{c'}^\dagger |0\rangle - \frac{1}{4} \sum_{c_1 c_2} Y(cc_1 c_2 c') b_{c_1}^\dagger b_{c_2}^\dagger |0\rangle - \sum_{nc''} \left( \frac{1}{3} - 2\lambda_n \right) Y(cnc''c') X_n^\dagger b_{c''}^\dagger |0\rangle \quad (3.69)$$

に変換される。但し、 $|0\rangle \equiv |0\rangle_F |0\rangle_B$ とした。したがって、 $|cc'\rangle_F$ 、 $e^{-\Delta F} |cc'\rangle_F$ のどちらかを選択的に集団的状態として採用する理由はない。我々がせいぜい言えることは、集団的フェルミオン状態とは、最低次の近似において多ボソン状態に変換される状態である、ということだけである。別の言葉で言えば、集団的フェルミオン状態、または、集団的フェルミオン部分空間の定義には、常に高次のオーダーに関して任意性があり、このオーダーの自由度を表す微小ユニタリ変換が存在する。このユニタリ変換が、ボソン展開およびボソン・フェルミオン展開の展開表現における高次項の数係数の違いを生み出す原因に他ならない。

以上の議論によれば、付加的な微小ユニタリ変換を行うことによって、高次展開項の形が異なる、事実上、無限個の種類ボソン・フェルミオン展開を行うことができる。また、この議論は、ボソン・フェルミオン展開法に限らず、従来のボソン展開法についても適用でき、通常用いられるボソン写像の変換演算子を高次のオーダーで修正することにより、事実上、無限個のユニタリ同値なボソン展開表現が構成できることが証明されている。[TKM94]

こうして、ボソン・フェルミオン展開法の理論は、ボソン・フェルミオン変換における微小ユニタリ変換の自由度を認識することにより、従来のボソン展開法の枠組みにおいては見落とされていた、高次展開項の任意性を指摘しただけでなく、写像（変換）されるべき集団的部分空間の任意性が、即、展開表現の高次項と密接に結びついていることを明らかにした。

ただ、最後に強調しておきたいことは、二つの理論は、集団的ボソン部分に関しては同等な理論であるといえるが、非集団的モードに関する取扱いは大きく異なっているということである。ボソン展開法における、非集団的モードに関する収束性の問題や、多フォノン空間の制限に関する問題がないという意味で、ボソン・フェルミオン展開法に優位性がある。



#### 第4章 ボソン・フェルミオン展開法の四重極集団運動状態への適用

この章では、通常よく用いられる有効ハミルトニアンから出発して、現実の原子核の四重極集団運動状態を数値的に解析するために必要な処方箋を全て提示する。

##### 4.1 有効ハミルトニアンの設定と展開係数

我々が採用する有効ハミルトニアンは、次のように与えられる。

$$H = H_{s.p.} + (H_{P_0} - \sum_{\rho=\pi,\nu} \lambda_\rho \hat{N}_\rho) + H_{P_2} + H_M + H_{QQ} \quad (4.1)$$

$$H_{s.p.} = \sum_{\alpha} \epsilon_{\alpha} c_{\alpha}^{\dagger} c_{\alpha}, \quad (4.2)$$

$$H_{P_0} = -\frac{1}{4} \sum_{\rho=\pi,\nu} G_0(\rho) \hat{P}_0^{\dagger}(\rho) \hat{P}_0(\rho), \quad (4.3)$$

$$H_{P_2} = -\frac{1}{2} \sum_{\rho=\pi,\nu} G_2(\rho) (\hat{P}_2^{\dagger}(\rho) \cdot \hat{P}_2(\rho)), \quad (4.4)$$

$$H_M = -\frac{1}{2} \sum_{ab} G_{\pi\nu}(ab) \hat{M}(a) \hat{M}(b), \quad (4.5)$$

$$H_{QQ} = -\frac{1}{2} \sum_{\rho_1, \rho_2=\pi,\nu} \chi_2(\rho_1 \rho_2) (\hat{Q}_2(\rho_1) \cdot \hat{Q}_2(\rho_2)), \quad (4.6)$$

$$\hat{P}_0^{\dagger}(\rho) = \sum_{\alpha(\rho)} c_{\alpha}^{\dagger} c_{\alpha}, \quad (4.7)$$

$$\hat{P}_{2M}^{\dagger}(\rho) = \sum_{\alpha\beta(\rho)} \langle \alpha | r^2 Y_{2M} | \beta \rangle c_{\alpha}^{\dagger} c_{\beta}, \quad (4.8)$$

$$\hat{M}(a) = \sum_{m_a} c_{m_a}^{\dagger} c_{m_a}, \quad (4.9)$$

$$\hat{Q}_{2M}(\rho) = \sum_{\alpha\beta(\rho)} \langle \alpha | r^2 Y_{2M} | \beta \rangle c_{\alpha}^{\dagger} c_{\beta} = (\hat{Q}_{2\bar{M}}(\rho))^{\dagger}, \quad (4.10)$$

$$\hat{N}_{\rho} = \sum_{\alpha(\rho)} c_{\alpha}^{\dagger} c_{\alpha} = \sum_{a(\rho)} \hat{M}(a), \quad (4.11)$$

$$G_{\pi\nu}(ab) = G_{\pi\nu}(ba), \quad \chi_2(\rho_1 \rho_2) = \chi_2(\rho_2 \rho_1). \quad (4.12)$$

ここで、 $H_{s.p.}$  は、球対称1体場における単一粒子のハミルトニアンであり、 $c_{\alpha}^{\dagger}$  ( $c_{\alpha}$ ) は、一粒子軌道 $\alpha$ における粒子の生成(消滅)演算子を表している。 $H_{P_0}$  および  $H_{P_2}$  は、それぞれ、



単極対相互作用と四重極対相互作用である。 $H_M$ は、粒子・空孔型の陽子・中性子単極相互作用であり、 $H_{QQ}$ は、通常よく用いられる、粒子・空孔型の四重極・四重極相互作用である。ギリシャ文字 $\rho$ は、 $\pi$ (陽子)または $\nu$ (中性子)を表し、記号 $\sum_{\alpha(\rho)}$ は、 $\rho$ に属する一粒子状態についてのみ和を取ることを意味する。二つの球対称テンソル演算子 $S_{J_1 M_1}^\dagger$ 、 $T_{J_2 M_2}^\dagger$ の角運動量結合に関する我々の定義は、

$$[S_{J_1}^\dagger T_{J_2}^\dagger]_M^{(J)} \equiv \sum_{M_1 M_2} \langle J_1 M_1 J_2 M_2 | J M \rangle S_{J_1 M_1}^\dagger T_{J_2 M_2}^\dagger \quad (4.13)$$

で与えられる。特に二つの球対称テンソル演算子が、角運動量ゼロに結合する場合は、スカラー結合の記法

$$(S_J^\dagger \cdot T_J^\dagger) \equiv \sum_M S_{JM}^\dagger T_{JM}^\dagger \quad (4.14)$$

もあわせて用いることにする。また、一つの球対称テンソル演算子 $T_{J_1 M_1}^\dagger$ と、同じ(または別の)球対称テンソル演算子のエルミート共役を角運動量結合させる場合は、“チルダ演算”されたテンソル演算子 $\tilde{T}_{J_2 M_2}$ を使わなければならない。しかしながら、角運動量結合を表す括弧の中では、簡単のため、チルダ記号“ $\sim$ ”はいっさい省略することにする。

$$[S_{J_1}^\dagger T_{J_2}^\dagger]_M^{(J)} \equiv [S_{J_1}^\dagger \tilde{T}_{J_2}^\dagger]_M^{(J)}, \quad (4.15)$$

$$(S_J^\dagger \cdot T_J) \equiv (S_J^\dagger \cdot \tilde{T}_J). \quad (4.16)$$

まず、計算の最初の段階で、有効相互作用の中の単極相互作用部分を処理するために、準粒子演算子 $a_\alpha^\dagger$ 、 $a_\alpha$ を導入し、BCS変換

$$c_\alpha^\dagger = u_\alpha a_\alpha^\dagger + v_\alpha a_{\bar{\alpha}}, \quad c_\alpha = u_\alpha a_\alpha + v_\alpha a_{\bar{\alpha}}^\dagger, \quad (4.17)$$

$$u_\alpha^2 + v_\alpha^2 = 1 \quad (4.18)$$

を行う。その結果、 $H_{s.p.}$ および $H_{P_0}$ と $H_M$ の主要部分は、次のように、単一準粒子エネルギー $H_0$ に吸収される。

$$H_{s.p.} + (H_{P_0}^{(\text{main})} - \sum_{\rho=\pi,\nu} \lambda_\rho \hat{N}_\rho) + H_M^{(\text{main})} = H_0 + \text{const.} \quad (4.19)$$

但し、 $H_{P_0}^{(\text{main})}$ と $H_M^{(\text{main})}$ の正確な形は、付録Bで与えられている。また、単一準粒子エネルギー $H_0$ は、

$$H_0 = \sum_\alpha E_\alpha a_\alpha^\dagger a_\alpha, \quad (4.20)$$



$$E_a = \sqrt{(\epsilon_a^{(\text{eff})} - \lambda_{\rho(a)})^2 + \Delta_{\rho(a)}^2}, \quad (4.21)$$

$$\epsilon_a^{(\text{eff})} = \epsilon_a - 2 \sum_b G_{\pi\nu}(ab) \Omega_b v_b^2, \quad \Omega_b = j_b + \frac{1}{2}, \quad (4.22)$$

$$\rho(a) = \begin{cases} \pi & (a \text{ が陽子軌道の時}) \\ \nu & (a \text{ が中性子軌道の時}) \end{cases} \quad (4.23)$$

で定義され、有効単一粒子エネルギー $\epsilon_a^{(\text{eff})}$ 、フェルミ・エネルギー $\lambda_\rho$ 、および、ギャップ・エネルギー $\Delta_\rho$ は、BCSギャップ方程式を解いて決定される。

この段階で、(3.1)(3.2)で定義された準粒子対演算子および散乱演算子を導入し、さらに、(3.12)を用いて、準粒子対演算子をフォノン演算子で書き換える。そして、BCS変換によって吸収されなかった残留相互作用 $H_{P_0}^{(\text{res})}$ 、 $H_M^{(\text{res})}$ を含めて、初め有効ハミルトニアン全体をフォノン演算子と散乱演算子だけで表現する。その際に必要な、多重極演算子のフォノン表示、および、 $H_{P_0}^{(\text{res})}$ と $H_M^{(\text{res})}$ のあからさまな表式は、付録Bで与えられている。また、この表示の変更の際に出てきた定数項は、以後の計算では無視することにする。

こうして、我々は、次のような形に整理されたフォノン表示の有効ハミルトニアンを得る。

$$H = H_0 + H_{P_0}^{(\text{res})} + H_{P_2} + H_M^{(\text{res})} + H_{QQ} \quad (4.24)$$

$$= H_0 + H_X + H_V + H_Y + H_Z, \quad (4.25)$$

$$H_0 = \sum_a E_a \hat{j}_a B_{00}(aa), \quad (4.26)$$

$$H_X = \sum_\tau \sum_{\mu_1 \mu_2} \left\{ V_{X_A}^{[\tau]}(\mu_1, \mu_2) (X_{\mu_1}^\dagger \cdot X_{\mu_2}) + V_{X_B}^{[\tau]}(\mu_1, \mu_2) (X_{\mu_2} \cdot X_{\mu_1}^\dagger) \right\}, \quad (4.27)$$

$$H_V = \sum_\tau \sum_{\mu_1 \mu_2} V_{V_A}^{[\tau]}(\mu_1, \mu_2) (X_{\mu_1}^\dagger \cdot X_{\mu_2}^\dagger) + h.c., \quad (4.28)$$

$$H_Y = \sum_\tau \sum_\mu \sum_{ab} \left\{ V_{Y_A}^{[\tau]}(\mu; ab) (X_\mu^\dagger \cdot B_J(ab)) \right. \\ \left. + V_{Y_B}^{[\tau]}(\mu; ab) (B_J(ab) \cdot X_\mu^\dagger) \right\} + h.c., \quad (4.29)$$

$$H_Z = \sum_\tau \sum_k \sum_{a_1 b_1 a_2 b_2} V_Z^{[\tau]}(a_1 b_1; a_2 b_2; k) (B_k^\dagger(a_1 b_1) \cdot B_k(a_2 b_2)). \quad (4.30)$$

ここで、 $\tau = P_0, P_2, M, QQ$ は、我々が採用した各有効2体力からの寄与を表し、 $\sum_\tau$ は、それらの寄与を全て加え合わせることを意味する。係数 $V_{X_A}^{[\tau]}(\mu_1, \mu_2)$ 、 $V_{X_B}^{[\tau]}(\mu_1, \mu_2)$ 、 $V_{V_A}^{[\tau]}(\mu_1, \mu_2)$ 、



$V_{Y_A}^{[\tau]}(\mu; ab)$ 、 $V_{Y_B}^{[\tau]}(\mu; ab)$ 、 $V_Z^{[\tau]}(a_1 b_1; a_2 b_2; k)$ の具体的な形は、付録Cにまとめてある。また、上の表式および以下の議論では、角運動量結合した形式で記述するため、フォノン・モードに関する略記を

$$\mu = \{\mu, J\}, \quad \mu_1 = \{\mu_1, J_1\}, \quad \mu_2 = \{\mu_2, J_2\}, \dots \quad (4.31)$$

と再定義しなおして使用している。特に、フォノン・モード $\mu$ または $n$ の角運動量を表したときには、それぞれ記号 $J_\mu$ および $J_n$ を用いることにする。

次に、このフォノン表示の有効ハミルトニアンに、ボソン・フェルミオン展開法を適用する。四重極集団運動状態を記述するために採用した(4.1)の有効ハミルトニアンに対して、3.1節で説明した方法でフォノン演算子を設定すると、角運動量2、正パリティを持つ集団的フォノン・モードが、ただ一つ現れ、それ以外のフォノン・モードは全て非集団的フォノン・モードであるとみなされる。そこで、この集団的フォノン・モードに対応して、角運動量2、正パリティを持つ“d-ボソン演算子”

$$b_c^\dagger \equiv b_{c,2M}^\dagger, \quad M = -2, -1, 0, 1, 2 \quad (4.32)$$

を集団的ボソン演算子であるとみなし、これを用いて、対演算子のボソン・フェルミオン展開を行う。その際、まず、付録Aで与えられた、フォノン演算子および散乱演算子のボソン・フェルミオン表現を、あからさまに角運動量結合した形式に書き直しておく必要がある。これについては、付録Dに与えられている。この展開表現を、(4.26)-(4.30)に直接代入することにより、最終的に、有効ハミルトニアンのボソン・フェルミオン表現が得られる。このボソン・フェルミオン表現を導く際に必要な、各種の係数の定義は付録Cに、また、4次のボソン項の表現を整えるために必要な方法は、付録Eに与えられている。本論文では、ボソン・フェルミオン展開法におけるスモール・パラメータ $\epsilon$ について $O(\epsilon^2)$ のオーダーまでの近似計算を行う。その結果得られた、ハミルトニアンのボソン・フェルミオン・イメージは、次のような形にまとめられる。

$$\bar{H} = \bar{H}^{(0)} + \bar{H}^{(1)} + \bar{H}^{(2)} \quad (4.33)$$

$$= H^{[B]} + H^{[F]} + H^{[BF]} \quad (4.34)$$

ここで、 $H^{[B]}$ は、純粋に集団的ボソン演算子だけで書かれている“ボソン・ハミルトニアン”であり、集団運動の主要部分を記述すると考えられる。 $H^{[F]}$ は、純粋にフェルミオン対演算子のみで書かれている“フェルミオン・ハミルトニアン”であり、非集団的な自由度を記述する。 $H^{[BF]}$ は、集団的モードと非集団的モードとの結合効果を表す項である。



純粋な集団的ボソン部分は、 $O(\epsilon^2)$  のオーダーまで展開され、数値計算の便宜上、

$$H^{[B]} = \left(H^{[B]}\right)^{(0)} + \left(H^{[B]}\right)^{(1)} + \left(H^{[B]}\right)^{(2)} \quad (4.35)$$

$$= \sum_{(mm'i)} h_{mm'i}^{[B]} H_{mm'i}^{[B]} \quad (4.36)$$

の形に整理される。ここで、添え字の組  $(mm'i)$  は、様々な種類の d-ボソン基本演算子を区別するのに用いられ、(11)、(20)、(21)、(30)、(22P)、(22N)、(22J)、(31)、(40) のいずれかの値を取る。添え字  $m$ 、 $m'$  は、それぞれ、基本演算子  $H_{mm'i}^{[B]}$  の中に含まれる  $b^\dagger$  および  $b$  の数を表し、添え字  $i$  は、 $m$  と  $m'$  の数が等しい  $H_{mm'i}^{[B]}$  を区別するのに用いられる。基本演算子の具体的な形は、

$$H_{11}^{[B]} = (b^\dagger \cdot b), \quad (4.37)$$

$$H_{20}^{[B]} = (b^\dagger \cdot b^\dagger) + (b \cdot b), \quad (4.38)$$

$$H_{21}^{[B]} = \left([b^\dagger b^\dagger]^{(2)} \cdot b\right) + \left(b^\dagger \cdot [bb]^{(2)}\right), \quad (4.39)$$

$$H_{30}^{[B]} = \left([b^\dagger b^\dagger]^{(2)} \cdot b^\dagger\right) + \left(b \cdot [bb]^{(2)}\right), \quad (4.40)$$

$$H_{22P}^{[B]} = (b^\dagger \cdot b^\dagger)(b \cdot b), \quad (4.41)$$

$$H_{22N}^{[B]} = (b^\dagger \cdot b) \left\{ (b^\dagger \cdot b) - 1 \right\}, \quad (4.42)$$

$$H_{22J}^{[B]} = J^2 - 6(b^\dagger \cdot b), \quad (4.43)$$

$$H_{31}^{[B]} = (b^\dagger \cdot b^\dagger)(b^\dagger \cdot b) + (b^\dagger \cdot b)(b \cdot b), \quad (4.44)$$

$$H_{40}^{[B]} = (b^\dagger \cdot b^\dagger)(b^\dagger \cdot b^\dagger) + (b \cdot b)(b \cdot b), \quad (4.45)$$

$$J^2 = -10 \left( [b^\dagger b]^{(1)} \cdot [b^\dagger b]^{(1)} \right) \quad (4.46)$$

で与えられる。但し、今回の計算においては1種類の集団的ボソン演算子しか用いないため、上の表式において、

$$b^\dagger \equiv b_c^\dagger \equiv b_{c,2}^\dagger, \quad b \equiv b_c \equiv b_{c,2} \quad (4.47)$$

のように、ボソン演算子の添え字を省略した記法を用いた。なお、展開係数  $h_{mm'i}^{[B]}$  の具体的な形は、付録Fで与えられている。

純粋なフェルミオン部分  $H^{[F]}$  は、基本的に、非集団的な2準粒子励起を記述する部分である。今回の計算では、非集団的フォノンが1個励起している状態までしか考慮しないので、この自由度の記述を支配する  $O(\epsilon^0)$  のオーダーの展開項だけを採用する。

$$H^{[F]} = \left(H^{[F]}\right)^{(0)} \quad (4.48)$$

$$= H_0^{[F]} + H_X^{[F]} + H_V^{[F]}, \quad (4.49)$$



$$H_0^{[F]} = \sum_a E_a \hat{j}_a B'_{00}(aa), \quad (4.50)$$

$$H_X^{[F]} = \sum_{\tau} \sum_{n_1 n_2} \left\{ V_{X_A}^{[\tau]}(n_1, n_2) (X_{n_1}^\dagger \cdot X_{n_2}) + V_{X_B}^{[\tau]}(n_1, n_2) (X_{n_2} \cdot X_{n_1}^\dagger) \right\}, \quad (4.51)$$

$$H_V^{[F]} = \sum_{\tau} \sum_{n_1 n_2} V_{V_A}^{[\tau]}(n_1, n_2) (X_{n_1}^\dagger \cdot X_{n_2}^\dagger) + h.c., \quad (4.52)$$

ここで、 $\tau = P_0, P_2, M, QQ$  である。

ボソン・フェルミオン結合項  $H^{[BF]}$  は、最も重要なモード・モード結合効果を含む  $O(\epsilon^1)$  のオーダーまでの展開項を採用する。但し、後の 4.2 節で、集団・非集団モード結合効果を Feshbach 流の射影法によって取り扱う際に必要な、非集団的フォノンの数を 1 個だけ増減させるタイプの展開項だけを採用し、次の形に整理する。

$$H^{[BF]} = \left( H^{[BF]} \right)^{(0)} + \left( H^{[BF]} \right)^{(1)} \quad (4.53)$$

$$= \sum_{(mm')} \sum_n h_{mm'}^{[BF]}(n) H_{mm'}^{[BF]}(n). \quad (4.54)$$

純粋な集団的ボソン部分のときと同じように、ここでも、様々なタイプのボソン・フェルミオン結合項を添え字の組  $(mm')$  で区別する。ボソン・フェルミオン結合項のあからさまな形は、

$$H_{10}^{[BF]}(n) = (b^\dagger \cdot X_n) + h.c., \quad (4.55)$$

$$H_{01}^{[BF]}(n) = (b \cdot X_n) + h.c., \quad (4.56)$$

$$H_{20}^{[BF]}(n) = ([b^\dagger b^\dagger]^{(J_n)} \cdot X_n) + h.c., \quad (4.57)$$

$$H_{11}^{[BF]}(n) = ([b^\dagger b]^{(J_n)} \cdot X_n) + h.c., \quad (4.58)$$

$$H_{02}^{[BF]}(n) = ([b b]^{(J_n)} \cdot X_n) + h.c., \quad (4.59)$$

で与えられる。なお、展開係数  $h_{mm'}^{[BF]}(n)$  の具体的な形は、付録 G で与えられている。

以上で、有効ハミルトニアン  $\bar{H}$  のボソン・フェルミオン・イメージ  $\bar{H}$  は、上に述べた近似のもとで、全て確定した。あとは、3.2 節で説明した物理的部分空間において、 $\bar{H}$  の固有状態を求めればよい。



#### 4.2 自己無撞着 Feshbach 法による集団・非集団モード結合効果の取扱い

第3章でもすでに述べたように、ボソン・フェルミオン変換後の物理的部分空間自体は、もとのフェルミオン空間（偶数粒子系）と全く等価であり、この広い空間で完全に固有値問題を解くことは事実上不可能である。しかし、本論文のねらいは、集団的フォノン部分空間に主成分を持つ四重極集団運動状態を記述することであるから、まず、この空間に第0近似で1対1に対応する集団的ボソン部分空間をとり、その後、それ以外の非集団的部分空間からの結合効果を取り入れることにする。この節では、Feshbach 流の射影法 [Fe58] に基づいて、この考え方を実際に実現するための処方箋を提示する。

まず、全物理的部分空間の中で、非集団的フォノン励起をいっさい含まない空間を“P-空間”と名づけ、それ以外の空間を“Q-空間”と呼ぶことにする。

$$P\text{-空間} : \{ |M; c\rangle_B |0\rangle_F ; M = 0, 1, 2, \dots \}, \quad (4.60)$$

$$Q\text{-空間} : \{ |M; c\rangle_B |N; n\rangle_F ; M = 0, 1, 2, \dots ; N = 1, 2, \dots \}. \quad (4.61)$$

P-空間は、まさに、上で述べた集団的ボソン部分空間であり、Q-空間は、非集団的部分空間に他ならない。次に、P-空間およびQ-空間への射影演算子をそれぞれ  $P$ 、 $Q$  とする。この射影演算子は、性質

$$P + Q = 1, \quad P^2 = P, \quad Q^2 = Q, \quad PQ = QP = 0 \quad (4.62)$$

を満たしている。Feshbach の方法に従って、この射影演算子  $P$ 、 $Q$  を全物理的部分空間における固有値方程式

$$\bar{H}|\Psi_E\rangle = E|\Psi_E\rangle \quad (4.63)$$

に作用させると、方程式

$$(\bar{H}_{PP} + \bar{H}_{PQ})|\Psi_E\rangle = E|P\Psi_E\rangle, \quad (4.64)$$

$$(\bar{H}_{QP} + \bar{H}_{QQ})|\Psi_E\rangle = E|Q\Psi_E\rangle \quad (4.65)$$

を得る。但し、

$$\bar{H}_{PP} \equiv P\bar{H}P, \quad \bar{H}_{QQ} \equiv Q\bar{H}Q, \quad \bar{H}_{PQ} \equiv \bar{H}_{QP}^\dagger \equiv P\bar{H}Q, \quad (4.66)$$

$$|P\Psi_E\rangle \equiv P|\Psi_E\rangle, \quad |Q\Psi_E\rangle \equiv Q|\Psi_E\rangle \quad (4.67)$$

と定義されている。(4.65) から、 $|Q\Psi_E\rangle$  について、形式的に、

$$|Q\Psi_E\rangle = \frac{1}{E - \bar{H}_{QQ}} \bar{H}_{QP} |P\Psi_E\rangle \quad (4.68)$$



と解くことができ、これを (4.64) に代入することによって、P-空間における有効固有値方程式

$$\overline{H}^{(\text{eff})}(E)|P\Psi_E\rangle = E|P\Psi_E\rangle \quad (4.69)$$

$$\overline{H}^{(\text{eff})}(E) \equiv \overline{H}_{PP} + \overline{H}'_{PP}(E), \quad (4.70)$$

$$\overline{H}'_{PP}(E) \equiv \overline{H}_{PQ} \frac{1}{E - \overline{H}_{QQ}} \overline{H}_{QP} \quad (4.71)$$

を得ることができる。ここで、“有効ボソン・ハミルトニアン” $\overline{H}^{(\text{eff})}(E)$  が、固有値問題の解として得られるべきエネルギー固有値  $E$  自身に依存していることに注意する。すなわち、これは、一種の自己無撞着固有値問題である。エネルギー依存項 $\overline{H}'_{PP}(E)$  は、集団的モードと、非集団的モードとの結合効果を表しており、広大な Q-空間からの寄与は、全てこの項にくりこまれている。

有効ボソン・ハミルトニアンの具体的な表示を得るために、まず、純粋なボソン部分  $H^{[B]}$  の固有状態  $|\lambda\rangle_B$  を用意する。

$$H^{[B]}|\lambda\rangle_B = E_\lambda^{[B]}|\lambda\rangle_B, \quad (4.72)$$

$$|\lambda\rangle_B = \sum_{\beta} u_\lambda(\beta) |\beta\rangle_B, \quad (4.73)$$

ここで、 $|\beta\rangle_B$  は、直交規格化された d-ボソン状態の基底であり、SU(5) 対称表現を表す量子数の組  $\beta = \{N_\beta, v_\beta, \gamma_\beta, J_\beta, M_\beta\}$  で区別されている。 $N_\beta$  は全 d-ボソン数、 $v_\beta$  は d-ボソン・セニョリティ、 $\gamma_\beta$  は付加的量子数、そして、 $J_\beta$  と  $M_\beta$  は角運動量とその Z 成分である。 $u_\lambda(\beta)$  は、この基底における固有状態  $|\lambda\rangle_B$  の固有ベクトルである。次に、直交変換

$$X_n^\dagger = \sum_{n_1} \dot{\psi}_{nn_1} \dot{X}_{n_1}^\dagger \quad (4.74)$$

によって、新しいタイプの非集団的フォノン演算子  $\dot{X}_n^\dagger$  を導入し、純粋なフェルミオン部分  $H^{[F]}$  が、 $\dot{X}_n^\dagger$  に関して近似的に対角形になるようにする。

$$H^{[F]} \cong \sum_n W_n (\dot{X}_n^\dagger \cdot \dot{X}_n). \quad (4.75)$$

ここで、エネルギー  $W_n$  および直交変換の係数  $\dot{\psi}_{nn_1}$  は、 $H^{[F]}$  を非集団的 1 フォノン空間で対角化して得られる固有値および固有ベクトルを採用する。但し、角運動量・パリティが  $0^+$  のフォノン・モードに関しては、粒子数非保存に伴う“にせの状態 (spurious  $0^+$  mode)” を取り除くため、まず、 $H^{[F]}$  について RPA 方程式を解き、ゼロ・エネルギー解を捨てる。そ



れ以外の  $0^+$ -RPAモードについては、 $W_n$ としてRPA方程式の固有エネルギーを用い、backward amplitudeを無視する近似のもとで、forward amplitudeを $\dot{\psi}_{n n_1}$ として採用する。

我々の計算では、Q-空間を、(4.61)において、非集団的フォノンが1個だけ励起している  $N=1$  の部分空間に制限する。そのとき、Q-空間への射影演算子は、

$$Q \cong \sum_{\lambda} \sum_n' |\lambda\rangle_B |n\rangle_F \langle n|_B \langle \lambda| \quad (4.76)$$

$$|n\rangle_F \equiv \dot{X}_n^\dagger |0\rangle_F \quad (4.77)$$

と近似される。但し、 $\sum_n (\sum_{\lambda})'$  は、固有モードを区別する量子数  $n = \{n, J_n\}$  ( $\lambda = \{\lambda, J_\lambda\}$ ) だけでなく、その角運動量のZ成分  $M_n$  ( $M_\lambda$ ) についても和を取ることを意味する。この近似のもとで、集団・非集団モード結合演算子 $\bar{H}_{PQ}$ の具体的表式

$$\bar{H}_{PQ} = PH^{[BF]}Q = \sum_{i=1}^5 \sum_{k=0}^4 \sum_n f_n^{(i)} (S_k^{(i)\dagger} \cdot \dot{X}_n) \delta_{k J_n}, \quad (4.78)$$

$$S_k^{(1)\dagger} = \delta_{k2} b^\dagger, \quad S_k^{(2)\dagger} = \delta_{k2} b, \quad S_k^{(3)\dagger} = \frac{1+(-)^k}{2} [b^\dagger b^\dagger]^{(k)}, \quad (4.79)$$

$$S_k^{(4)\dagger} = [b^\dagger b]^{(k)}, \quad S_k^{(5)\dagger} = \frac{1+(-)^k}{2} [b b]^{(k)},$$

$$f_n^{(1)} = \sum_{n'} \dot{\psi}_{n'n} h_{10}^{[BF]}(n'), \quad f_n^{(2)} = \sum_{n'} \dot{\psi}_{n'n} h_{01}^{[BF]}(n'),$$

$$f_n^{(3)} = \sum_{n'} \dot{\psi}_{n'n} h_{20}^{[BF]}(n'), \quad f_n^{(4)} = \sum_{n'} \dot{\psi}_{n'n} h_{11}^{[BF]}(n'), \quad (4.80)$$

$$f_n^{(5)} = \sum_{n'} \dot{\psi}_{n'n} h_{02}^{[BF]}(n')$$

を得ることができる。(4.78)の表式からわかるように、この集団・非集団結合演算子によって、角運動量・パリティが、 $0^+$ 、 $1^+$ 、 $2^+$ 、 $3^+$ 、 $4^+$ の非集団的フォノン・モードからの結合効果を取り入れることができる。但し、(4.75)のところで述べた手続きにより、(4.78)の非集団的モードに関する和において、spurious  $0^+$  modeからの寄与は取り除かれている。

$\bar{H}'_{PP}(E)$ の表式は、射影演算子(4.76)を(4.71)に挿入することにより、

$$\begin{aligned} \bar{H}'_{PP}(E) &= \sum_{\lambda\lambda'} \sum_{nn'} \bar{H}_{PQ} |\lambda\rangle_B |n\rangle_F \langle n|_B \langle \lambda| \frac{1}{E - H^{[B]} - H^{[F]} - H^{[BF]}} \\ &\quad \cdot |\lambda'\rangle_B |n'\rangle_F \langle n'|_B \langle \lambda'| \bar{H}_{QP} \\ &= \sum_{\lambda} \sum_n \bar{H}_{PQ} |\lambda\rangle_B |n\rangle_F \frac{1}{E - E_\lambda^{[B]} - W_n} \langle n|_B \langle \lambda| \bar{H}_{QP} \end{aligned} \quad (4.81)$$



と書き直すことができる。但し、(4.81)のエネルギー分母における $(H^{[BF]})_{QQ}$ は、 $(H^{[B]})_{QQ}$ や $(H^{[F]})_{QQ}$ と比べて、展開のsmall・パラメータ $\epsilon$ に関するオーダーが高いので、2番目の等号のところでこれを無視した。この段階で、(4.81)に対して、何らかのclosure近似を仮定すると、 $\overline{H}'_{PP}(E)$ について、ボソン演算子だけで書かれた非常にシンプルな表式が得られる。しかしながら、この近似を仮定すると、集団・非集団モード結合効果を過大評価してしまうことがわかっているため [KM95]、ここでは、それをせず、有効ボソン・ハミルトニアン $\overline{H}^{(\text{eff})}(E)$ をd-ボソンの直交規格化基底ではさんだ行列要素

$${}_B\langle\beta_1|\overline{H}^{(\text{eff})}(E)|\beta_2\rangle_B = {}_B\langle\beta_1|\overline{H}_{PP}|\beta_2\rangle_B + {}_B\langle\beta_1|\overline{H}'_{PP}(E)|\beta_2\rangle_B \quad (4.82)$$

を直接計算することにする。ここで、直交規格化基底 $|\beta_1\rangle_B$ および $|\beta_2\rangle_B$ の角運動量を $J$ とすると、(4.82)右辺各項の具体的表式は次のようになる。

$${}_B\langle\beta_1|\overline{H}_{PP}|\beta_2\rangle_B = {}_B\langle\beta_1|H^{[B]}|\beta_2\rangle_B, \quad (4.83)$$

$$\begin{aligned} &{}_B\langle\beta_1|\overline{H}'_{PP}(E)|\beta_2\rangle_B \\ &= \sum_{i,j=1}^5 \sum_{k=0}^4 \sum_{\lambda} \frac{1}{(\widehat{J})^2} {}_B\langle\beta_1|S_k^{(i)\dagger}|\lambda\rangle_B {}_B\langle\beta_2|S_k^{(j)\dagger}|\lambda\rangle_B g_{\lambda,k}^{(i,j)}(E), \end{aligned} \quad (4.84)$$

$$g_{\lambda,k}^{(i,j)}(E) = \sum_n \frac{f_n^{(i)} f_n^{(j)}}{E - E_{\lambda}^{[B]} - W_n} \delta_{J_n k}. \quad (4.85)$$

以上で、固有値問題を解く準備は整った。実際に数値計算を行う際は、次のような手順を踏む。まず初めに、適当なエネルギー $E$ の値(例えば、 $H^{[B]}$ のエネルギー固有値を使えば良い。)を(4.85)に代入して、有効ボソン・ハミルトニアンの行列要素(4.82)を計算し、これを対角化する。それによって得られたエネルギー固有値を、再び(4.85)に代入して、行列の対角化計算を行う。この操作を、求めたい状態のエネルギー固有値が収束するまで繰り返せば、最終的に、有効固有値方程式(4.69)の自己無撞着なエネルギー固有値 $E$ と、それに対応する“P-空間に射影された固有状態” $|P\Psi_E\rangle$ が得られる。こうして、ボソン演算子だけで張られるP-空間(集団的ボソン部分空間)において、ボソン励起に加えて非集団的フォノン励起を1個だけ含むQ-空間からの結合効果を完全に取り込む方法を得ることができた。この節で説明した固有値問題の解法を、以後、“自己無撞着 Feshbach 法”と呼ぶことにする。この方法の有効性については、後の第5章で示される、実際の数値計算の結果によって確認される。



### 4.3 有効電気四重極遷移演算子

遷移領域核の微視的解析を行う際には、集団運動状態の励起エネルギーだけでなく、その電磁氣的性質についても調べる必要がある。そこで、本節では、自己無撞着 Feshbach 法の枠組みにおいて、電気四重極遷移演算子の行列要素を計算する方法を提示する。

自己無撞着 Feshbach 法により、いったん、P-空間に射影された固有状態が求められれば、固有状態の間で、任意の演算子の行列要素を計算することができる。Feshbach の方法によれば、エネルギー固有値  $E_1, E_2$  を持つ固有状態の間の任意のボソン・フェルミオン・イメージ  $\bar{T}$  の行列要素は、

$$\langle \Psi_{E_1} | \bar{T} | \Psi_{E_2} \rangle = \langle P \Psi_{E_1} | \bar{T}^{(\text{eff})}(E_1, E_2) | P \Psi_{E_2} \rangle, \quad (4.86)$$

$$\bar{T}^{(\text{eff})}(E_1, E_2) \equiv \bar{T}_{PP} + \bar{T}'_{PP}(E_1, E_2), \quad (4.87)$$

$$\begin{aligned} \bar{T}'_{PP}(E_1, E_2) \equiv & \bar{H}_{PQ} \frac{1}{E_1 - \bar{H}_{QQ}} \bar{T}_{QP} + \bar{T}_{PQ} \frac{1}{E_2 - \bar{H}_{QQ}} \bar{H}_{QP} \\ & + \bar{H}_{PQ} \frac{1}{E_1 - \bar{H}_{QQ}} \bar{T}_{QQ} \frac{1}{E_2 - \bar{H}_{QQ}} \bar{H}_{QP} \end{aligned} \quad (4.88)$$

で与えられる。但し、(4.88) では、

$$\bar{T}_{PP} \equiv P \bar{T} P, \quad \bar{T}_{QQ} \equiv Q \bar{T} Q, \quad \bar{T}_{PQ} \equiv P \bar{T} Q, \quad \bar{T}_{QP} \equiv Q \bar{T} P \quad (4.89)$$

の定義を用いた。ここでも、やはり、有効演算子  $\bar{T}^{(\text{eff})}(E_1, E_2)$  が、行列要素を指定するエネルギー固有値自身に依存していることに注意する。エネルギー依存項  $\bar{T}'_{PP}(E_1, E_2)$  は、P-空間と Q-空間との間の集団・非集団結合効果によって現れた項に他ならない。

我々は、電氣的四重極遷移における  $B(E2)$  値および電気四重極モーメントを計算するために、(4.86)-(4.89) において、演算子  $T$  を電気四重極遷移演算子とみなす。フェルミオン空間における電気四重極遷移演算子は、

$$T_{2M} \equiv T_{2M}^{(E2)} \equiv \sum_{\rho=\pi, \nu} e_{\rho} \hat{Q}_{2M}(\rho) \quad (4.90)$$

で定義され、“電荷パラメター”  $e_{\rho}(\rho = \pi, \nu)$  は、有効電荷  $e_{\text{eff}}$  および電気素量  $e$  によって、

$$\begin{aligned} e_{\pi} &= e + e_{\text{eff}}, \\ e_{\nu} &= e_{\text{eff}} \end{aligned} \quad (4.91)$$

のように与えられている。



ここで、ボソン・フェルミオン変換を施すことによって、電気四重極遷移演算子  $T_{2M}$  の  $O(\epsilon^2)$  のオーダーまでのボソン・フェルミオン表現

$$\begin{aligned} T_{2M} &\longrightarrow \bar{T}_{2M} = \sum_{\rho=\pi,\nu} e_{\rho} \bar{Q}_{2M}(\rho) \\ &= \bar{T}_{2M}^{(0)} + \bar{T}_{2M}^{(1)} + \bar{T}_{2M}^{(2)} \end{aligned} \quad (4.92)$$

を求め、さらに、これを次の形に整理する。

$$\bar{T}_{2M} = T_{2M}^{[B]} + T_{2M}^{[F]} + T_{2M}^{[BF]}, \quad (4.93)$$

$$T_{2M}^{[B]} = \sum_{\rho=\pi,\nu} e_{\rho} Q_{2M}^{[B]}(\rho), \quad (4.94)$$

$$T_{2M}^{[F]} = \sum_{\rho=\pi,\nu} e_{\rho} Q_{2M}^{[F]}(\rho), \quad (4.95)$$

$$T_{2M}^{[BF]} = \sum_{\rho=\pi,\nu} e_{\rho} Q_{2M}^{[BF]}(\rho). \quad (4.96)$$

ハミルトニアンの場合と同じように、上付きの添え字  $[B]$ 、 $[F]$ 、 $[BF]$  は、それぞれ、ボソン・フェルミオン表現の中の、純粋なボソン部分、純粋なフェルミオン部分、ボソンとフェルミオンの結合部分を表す。今回は、 $T_{2M}^{[B]}$  は  $O(\epsilon^2)$  のオーダーまで、 $T_{2M}^{[F]}$  は  $O(\epsilon^0)$  のオーダーまで、 $T_{2M}^{[BF]}$  は  $O(\epsilon^1)$  のオーダーまでの表現を用いた近似計算を行う。 $\bar{T}_{2M}$  の具体的な表現を求めるには、付録Hに収められている四重極演算子のボソン・フェルミオン表現を (4.94)-(4.96) に代入すればよい。これで、有効電気四重極遷移演算子  $\bar{T}_{2M}^{(\text{eff})}$  を計算する準備が整った。

我々の計算では、 $\bar{T}_{PP}'$  の表式 (4.88) の中で、第1項および第2項のみを採用し、因子  $(E - \bar{H}_{QQ})^{-1}$  について2次である第3項は無視することにする。

$$(\bar{T}_{2M})'_{PP} = \bar{H}_{PQ} \frac{1}{E_1 - \bar{H}_{QQ}} (\bar{T}_{2M})_{QP} + (\bar{T}_{2M})_{PQ} \frac{1}{E_2 - \bar{H}_{QQ}} \bar{H}_{QP}. \quad (4.97)$$

有効ボソン・ハミルトニアン  $\bar{H}^{(\text{eff})}$  を導いたときと、同じような手順を踏むことによって、 $(\bar{T}_{2M})'_{PP}$  について、

$$\begin{aligned} (\bar{T}_{2M})'_{PP} &= \sum_{\lambda} \sum'_{\mathbf{n}} \bar{H}_{PQ} |\lambda\rangle_B |n\rangle_F \frac{1}{E_1 - E_{\lambda}^{[B]} - W_{\mathbf{n}}} {}_F \langle n|_B \langle \lambda| (\bar{T}_{2M})_{QP} \\ &\quad + \sum_{\lambda} \sum'_{\mathbf{n}} (\bar{T}_{2M})_{PQ} |\lambda\rangle_B |n\rangle_F \frac{1}{E_2 - E_{\lambda}^{[B]} - W_{\mathbf{n}}} {}_F \langle n|_B \langle \lambda| \bar{H}_{QP} \end{aligned} \quad (4.98)$$



が得られる。ここで、結合演算子  $(\bar{T}_{2M})_{QP}$  は、

$$\begin{aligned} (\bar{T}_{2M})_{QP} &= Q \left\{ T_{2M}^{[F]} + T_{2M}^{[BF]} \right\} P \\ &= \sum_{j=1}^2 \sum_{l=0}^4 \sum_n \bar{f}_n^{(j)} \left[ \dot{X}_n^\dagger \bar{S}_l^{(j)} \right]_M^{(2)}, \end{aligned} \quad (4.99)$$

$$\bar{S}_l^{(1)\dagger} = \delta_{l0} 1, \quad \bar{S}_l^{(2)\dagger} = \delta_{l2} b^\dagger, \quad (4.100)$$

$$\bar{f}_n^{(1)} = \delta_{J_n 2} \sum_{n'} \dot{\psi}_{n'n} \sum_{\rho=\pi, \nu} e_\rho q_{n'}^{(2)}(\rho),$$

$$\bar{f}_n^{(2)} = \sum_{n'} \dot{\psi}_{n'n} \sum_{\rho=\pi, \nu} e_\rho \tau_{n'c}^{(2)}(\rho) \quad (4.101)$$

で与えられている。

こうして、最終的に、P-空間に射影された固有状態  $|P\Psi_{E_1}\rangle$ 、 $|P\Psi_{E_2}\rangle$  の間の有効電気四重極遷移演算子の既約行列要素が、

$$\langle P\Psi_{E_1} | \bar{T}_2^{(\text{eff})} | P\Psi_{E_2} \rangle = \langle P\Psi_{E_1} | (\bar{T}_2)_{PP} | P\Psi_{E_2} \rangle + \langle P\Psi_{E_1} | (\bar{T}_2)'_{PP} | P\Psi_{E_2} \rangle, \quad (4.102)$$

$$\langle P\Psi_{E_1} | (\bar{T}_2)_{PP} | P\Psi_{E_2} \rangle = \langle P\Psi_{E_1} | T_2^{[B]} | P\Psi_{E_2} \rangle, \quad (4.103)$$

$$\begin{aligned} \langle P\Psi_{E_1} | (\bar{T}_2)'_{PP} | P\Psi_{E_2} \rangle &= \hat{2} \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^2 \sum_{k,l=0}^4 \sum_\lambda W(IJ_\lambda 2J_1; J_2 k) \\ &\quad \cdot \left[ \langle P\Psi_{E_1} | S_k^{(i)\dagger} | \lambda \rangle_B \langle P\Psi_{E_2} | \bar{S}_l^{(j)\dagger} | \lambda \rangle_B \bar{g}_{\lambda,k}^{(i,j)}(E_1) \right. \\ &\quad \left. + (-)^{k+l} \langle P\Psi_{E_1} | \bar{S}_k^{(j)\dagger} | \lambda \rangle_B \langle P\Psi_{E_2} | S_l^{(i)\dagger} | \lambda \rangle_B \bar{g}_{\lambda,l}^{(i,j)}(E_2) \right], \end{aligned} \quad (4.104)$$

$$\bar{g}_{\lambda,k}^{(i,j)}(E) = \sum_n \frac{f_n^{(i)} \bar{f}_n^{(j)}}{E - E_\lambda^{[B]} - W_n} \delta_{J_n k} \quad (4.105)$$

として与えられる。但し、 $J_1$ 、 $J_2$ 、および  $J_\lambda$  は、それぞれ、P-空間に射影された固有状態  $|P\Psi_{E_1}\rangle$ 、 $|P\Psi_{E_2}\rangle$ 、および、中間状態として挿入されたボソン状態  $|\lambda\rangle_B$  の持つ角運動量を表している。

以上で、集団的ボソン部分空間 (P-空間) において、射影された固有状態を求め、また、それらの間の電気四重極遷移演算子の既約行列要素を計算するのに必要な公式は全て提示した。次の、第5章では、この章で与えた理論形式に基づいて、現実の遷移領域核を対象とした数値計算を行う。



## 第5章 ボソン・フェルミオン展開法による遷移領域核の記述

この章では、第4章で与えた理論形式に基づいて数値計算を行い、ボソン・フェルミオン展開法の妥当性を検証するとともに、現実の遷移領域核の記述において非常に重要な役割を果たす集団・非集団モード結合効果の信頼すべき取扱いについて議論する。

### 5.1 数値計算パラメーターの設定

まず、初めに数値計算パラメーターについて説明する。今回は、代表的な遷移領域核であるサマリウム150を対象として数値計算を行う。採用する一粒子軌道は、表5.1にまとめられている。単一粒子エネルギーについては、Nilssonの単一粒子エネルギーで球対称極限のものを用い[Ni69]、単一粒子波動関数は調和振動子のものを採用する。

次に、有効相互作用の強さを表すパラメーターの設定の仕方を説明する。まず、単極対相互作用  $H_{P_0}$  の強さ  $G_0(\rho)$  は偶奇質量差から決める。次に、粒子・空孔型の陽子・中性子相互作用  $H_M$  については、簡単のため、これを無視する。粒子・空孔型の四重極・四重極相互作用  $H_{QQ}$  の強さを表すパラメーター  $\chi_2(\rho_1\rho_2)$  は、今回は、全ての  $(\rho_1\rho_2)$  の組について同じ強さに設定し、 $\chi_2$  から大局的な質量依存性を除いた部分

$$\chi_0 = \chi_2 \nu_0^{-2} A^{5/3} \quad (5.1)$$

によってパラメトライズする。ここで、 $A$  は原子核の質量数、 $\nu_0 = 1.0A^{-1/3}[\text{fm}^{-2}]$  は調和振動子定数である。なお、後の計算では、集団的ボソン・ハミルトニアン  $\bar{H}_B^{(0)}$  の0次項部分

$$\bar{H}_B^{(0)} \equiv h_{11}^{[B]}(b^\dagger \cdot b) + h_{20}^{[B]} \{(b^\dagger \cdot b^\dagger) + (b \cdot b)\} \quad (5.2)$$

の固有値  $\omega_B^{(0)}$  がゼロとなるような  $\chi_0$  の臨界値  $\chi_c$  を単位として表すことにする。四重極対演算子  $H_{P_2}$  の強さ  $G_2(\rho)$  は、 $\rho = \pi, \nu$  に対して同じ強さに設定することにし、四重極・四重極相互作用の強さとの比

$$g_2 \equiv \frac{G_2}{\chi_2} \quad (5.3)$$

でパラメトライズする。

最後に、(3.8)の phonon amplitude を、(4.24)の中的主要項  $H_0 + H_{P_2} + H_{QQ}$  に対する Tamm-Dancoff 方程式を解くことにより決定する。以上の手続きにより、有効ハミルトニアンのボソン・フェルミオン・イメージは完全に確定し、これを、適当な最大ボソン数を持つ物理的部分空間において対角化することができる。この最大ボソン数は、物理的部分空間と、もとの多フォノン空間との対応関係から、ある上限を持つはずであるが、ボソン・フェルミオン展開法では、これを大ざっぱに見積もる手段 [KM93] を持っている。今回は、最大ボソン数を10として計算する。



## 5.2 展開の収束性について

この節では、まず、従来のボソン展開法とボソンフェルミオン展開法に現れる、展開のスモール・パラメータを数値的に評価し、両者の展開表現の収束性を比較する。本論文の目的は、遷移領域核の集団運動状態を完全に再現することが目的ではないが、収束性の議論を行うためには、ある程度大ざっぱにでも、実験データを再現させる必要があると思われる。そこで、この節においては、サマリウム150の基底バンド・スペクトルを図5.1の程度に再現するパラメータを採用する。

ボソン展開法またはボソン・フェルミオン展開法で、フェルミオン対演算子を展開したときに現れるスモール・パラメータは、付録Dで定義されている“C-係数”である。この係数は、中に含まれる4個のフォノン・モードを表す添え字の組み合わせによって、非常に多くの種類の係数が存在する。それらの全てについて、その大きさを調査した結果を示すわけにはいかないので、ここでは、添え字が全て集団的モードに属するC-係数 $C_J(cccc)$ および、以下に示す4タイプのC-係数の大きさだけを調べる。

$$\begin{aligned} \text{タイプ I} & : C_J(cccn) \\ \text{タイプ II} & : C_J(ccnn) \\ \text{タイプ III} & : C_J(cnnn) \\ \text{タイプ IV} & : C_J(nnnn) \end{aligned} \tag{5.4}$$

従来のボソン展開法では、タイプIからタイプIVまでの全てのタイプのC-係数が現れる。一方、ボソン・フェルミオン展開法では、あからさまにC-係数の形を取らない部分も含めて、実質上、タイプIからタイプIIIまでが現れ、これらが $O(\epsilon^2)$ のオーダーのスモール・パラメータであるとみなされている。この理論では、タイプIVのC-係数が、いっさい現れないことが重要である。

図5.2(a)(b)(c)(d)に、 $J=2$ で、角運動量・パリティが $2^+$ の非集団的フォノン・モードの添え字を含むC-係数の値を示す。すぐにわかるように、タイプIからタイプIIIまでのC-係数の値が、十分に小さいのに比べて、タイプIVのC-係数は、とてもスモール・パラメータとはみなせないほど大きな値を持つことがわかる。ボソン展開法で、非集団的フォノン・モードのボソン展開の収束性が悪い[TTT87]と言われるのは、このような理由による。しかしながら、ボソン・フェルミオン展開法では、全てのフォノン・モードをボソンで表現せずに、Pauli原理の強い影響を受ける非集団的フォノン・モードを、第0近似で、もとの非集団的モード自身で表現したおかげで、タイプIVの展開係数はいっさい現れなくなる。このため、非集団的モードについても収束性の良い展開が実現していることになる。なお、図



5. 2と同じ設定で計算すると、4個の添え字が全て集団的モードに属するC-係数の値は、 $C_0(cccc) = 0.258$ 、 $C_2(cccc) = 0.140$ 、 $C_4(cccc) = 0.141$ となり、十分小さな値を持つ。ゆえに、図5. 2の結果と合わせて、集団的フォノン・モードの展開表現については、どちらの理論においても、十分収束性が良いと言える。

次に、ボソン・フェルミオン展開されたハミルトニアンの展開係数に注目してみる。図5. 3では、純粋なボソン・ハミルトニアン  $H^{[B]}$  の展開係数  $h_{mni}^{[B]}$  の四重極・四重極相互作用の強さに対する依存性を示す。(図中では、添え字  $[B]$  を省略してある。) すぐにわかるのは、ボソン・フェルミオン展開法のスモール・パラメータについて0次の項を主要項とする  $h_{11}$  および  $h_{20}$  が特に大きく、それより高次の展開係数は、非常に小さいということである。これからも、ボソン・フェルミオン展開法の収束性が十分に良いことがわかる。しかしながら、四重極・四重極相互作用の強さがだんだん強くなるにつれて、0次の係数  $h_{11}$  の大きさが急に小さくなり、それに伴って、0次項部分(5.2)の固有値  $\omega_B^{(0)}$  が急激にゼロに近づいていることがわかる。我々が、取り扱おうとしている遷移領域核は、まさにこのような領域にあたる。(実際、図5. 1では、 $\chi_0 = 0.95\chi_c$  としている。) この場合、たとえ対演算子のボソン・フェルミオン表現として、カイネマティカルに収束性の良い展開が実現していたとしても、ダイナミカルな効果によって、高次項の重要性が相対的に増す可能性がある。これについて詳しい解析を行うことは今後の課題である。一方、このような領域では、非集団的フォノン・モードからの寄与も重要な役割を果たすと考えられる。これについて、次の節で考察する。



### 5.3 集団・非集団モード結合効果の重要性

集団運動状態を多フォノン空間で記述しようとする場合、状態の主成分は、集団的フォノン演算子だけで構成される“集団的・多フォノン部分空間”において表現されるが、遷移領域核の場合、これだけでは不十分で、非集団的フォノン励起を伴った“非集団的・多フォノン部分空間”からの寄与も取り入れる必要がある。従来のボソン展開法を用いた計算 [KT76][TTT87][Ku88][YTT89][SK91] でも、遷移領域核のスペクトルや電磁氣的性質を定量的に再現しようとする場合に、集団的・多フォノン部分空間と非集団的・多フォノン部分空間との間のモード結合効果を取り入れることが必要不可欠であるという主張がなされてきた。そこで、我々が今後、ボソン・フェルミオン展開法を用いて遷移領域核の解析を行っていく際にも、この効果をできるだけ正確に取り入れる方法が要求される。この節では、そのための手段として、第4章の理論形式のところでは提示した自己無撞着 Feshbach 法 [KM95] を採用し、実際に数値計算を行い、他の方法とも比較することによって、この方法が、有効かつ信頼できる方法であることを示す。

まず、自己無撞着 Feshbach 法の計算手順を簡単に説明する。この方法は、非集団的自由度を含む広大な物理的部分空間における固有値問題を、集団的ボソン演算子だけで張られる“P-空間”における有効固有値問題に置き換える方法である。その結果、P-空間とQ-空間との間の集団・非集団モード結合の効果が、有効ボソン・ハミルトニアンの中の補正項の形で表される。その際、この補正項が、固有状態の解として得られるべきエネルギー自身に依存しているため、一種の自己無撞着固有値問題を解く必要がある。サマリウム150の基底バンド状態について、この計算過程を示したのが、図5.4である。まず、計算を開始するときに、純粋なボソン・ハミルトニアン  $H^{[B]}$  の固有値を、有効ボソン・ハミルトニアンに代入し、これを対角化して1回目のエネルギー固有値を得る。次に、この1回目のエネルギー固有値を再び有効ボソン・ハミルトニアンに代入して対角化し、2回目のエネルギー固有値を得る。同様の操作を、要求する精度の範囲内で収束値が得られるまで繰り返す。図5.4には、この繰り返し計算の過程で、エネルギー固有値がどのように変化するかを示されている。これからわかるように、数回の繰り返しによって、ほぼ収束値が得られ、この方法が十分に機能していることがわかる。

次に、自己無撞着 Feshbach 法の信頼性を確かめるため、集団・非集団モード結合効果を取り入れる別の方法との比較を行う。この結果を、図5.5に示す。aは、集団的ボソン・ハミルトニアン  $H^{[B]}$  だけをボソン空間で対角化した結果である。これに対し、自己無撞着 Feshbach 法によって集団・非集団モード結合効果を取り入れると、結果はbのようになり、この効果が、非常に大きな影響を及ぼすことがわかる。一方、cは、“ $\alpha$ -変換”と呼ばれるボソンに対する一種の Bogoliubov 変換と Feshbach 法を組み合わせた Sakamoto-Kishimoto の



方法 [SK88] を使って計算したものである。また、d は、Feshbach 法において、一種の断熱近似を仮定する方法 [KTM95] によって計算した結果を表す。c および d の結果は、自己無撞着 Feshbach 法の結果 b に比べて、励起エネルギーが全体としてかなり押し下げられており、集団・非集団モード結合効果が、かなり過大評価されている。この原因は、c および d の方法はどちらも、Feshbach 法にしたがって有効ボソン・ハミルトニアンを導く際に、一種の closure 近似を仮定していることによる。[KM95] この近似は、有効ボソン・ハミルトニアンのエネルギー依存性を見かけ上なくすために、集団・非集団モード結合効果を表すエネルギー依存項のエネルギー分母を特定の値に固定してしまう近似法である。そのため、個々の非集団的モードからの寄与が少しずつ大きめに評価され、それらが積もり積もった結果、かなり大きな計算誤差を生み出すというわけである。ゆえに、Feshbach 法を用いて、集団・非集団モード結合効果を取り扱う場合は、いっさいの closure 近似を仮定せずに、エネルギー依存型の自己無撞着な固有値問題を解くべきであるというのが、ここでの結論である。

自己無撞着 Feshbach 法は、事実上、P-空間と Q-空間を合わせた全空間における対角化計算を行うことと同等であり、このことは、ある特定の場について、実際に両者の結果が非常に良い精度で一致することが確かめられている。しかしながら、現実には、非集団的自由度を含む大次元空間での対角化計算は、数値計算に必要なメモリーや計算時間の点で非常に困難である。そのため、繰り返し計算に要する手間を考慮にいれても、比較的小さな P-空間で自己無撞着計算を行った方が、圧倒的に短時間で計算できるのが、この方法の良いところである。また、自己無撞着 Feshbach 法によって、集団・非集団モード結合効果が、有効ボソン・ハミルトニアンの形に押し込められると、集団運動状態の解析を行う際には、ボソンの固有ベクトルだけを取り扱えばよく、また、振動を生成する素励起としてのボソンによって、古典的描像との対応がつけやすいという利点もある。

この節では、遷移領域核の記述において、集団・非集団モード結合効果が非常に重要な役割を果たすことを強調し、この効果を取り扱うための有力な方法として、自己無撞着 Feshbach 法を提示した。この信頼すべき方法に基づいて、遷移領域核における集団運動状態の定量的解析を行うことは、今後の課題である。



表 5. 1

サマリウム 150 の計算で用いられる単一粒子軌道

$N_{H.O.}$  は、調和振動子の主量子数を表す。

$N_{H.O.}$	Proton	Neutron
4	$s_{1/2}$ $d_{3/2}$ $d_{5/2}$ $g_{7/2}$ $g_{9/2}$	$s_{1/2}$ $d_{3/2}$ $d_{5/2}$ $g_{7/2}$
5	$f_{7/2}$ $h_{9/2}$ $h_{11/2}$	$p_{1/2}$ $p_{3/2}$ $f_{5/2}$ $f_{7/2}$ $h_{9/2}$ $h_{11/2}$
6		$i_{13/2}$



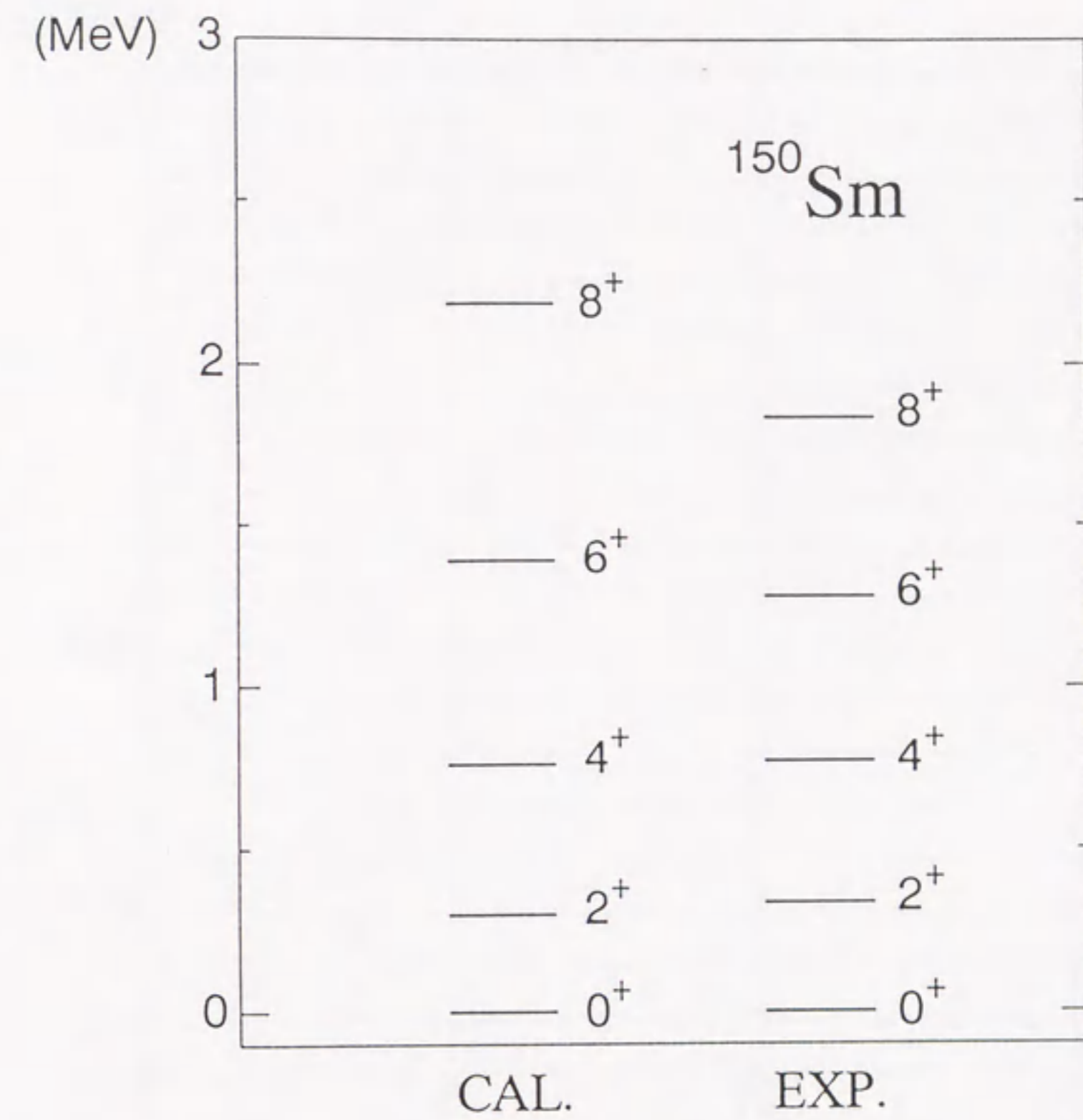


図5. 1

サマリウム150の基底バンド・スペクトル

左がボソン・フェルミオン展開法によって得た計算値。

四重極・四重極相互作用の強さ  $\chi_0 = 0.95\chi_c$ 。四重極対相互作用の強さ  $g_2 = 1.0$ 。  
 $0^+$ 、 $2^+$ 、 $4^+$ の非集団的モードからの結合効果を自己無撞着 Feshbach 法で取り扱っている。  
 粒子数非保存から現れる spurious  $0^+$  mode は、RPA オーダーで取り除いてある。

右は実験値。



$C_2(cccn)$

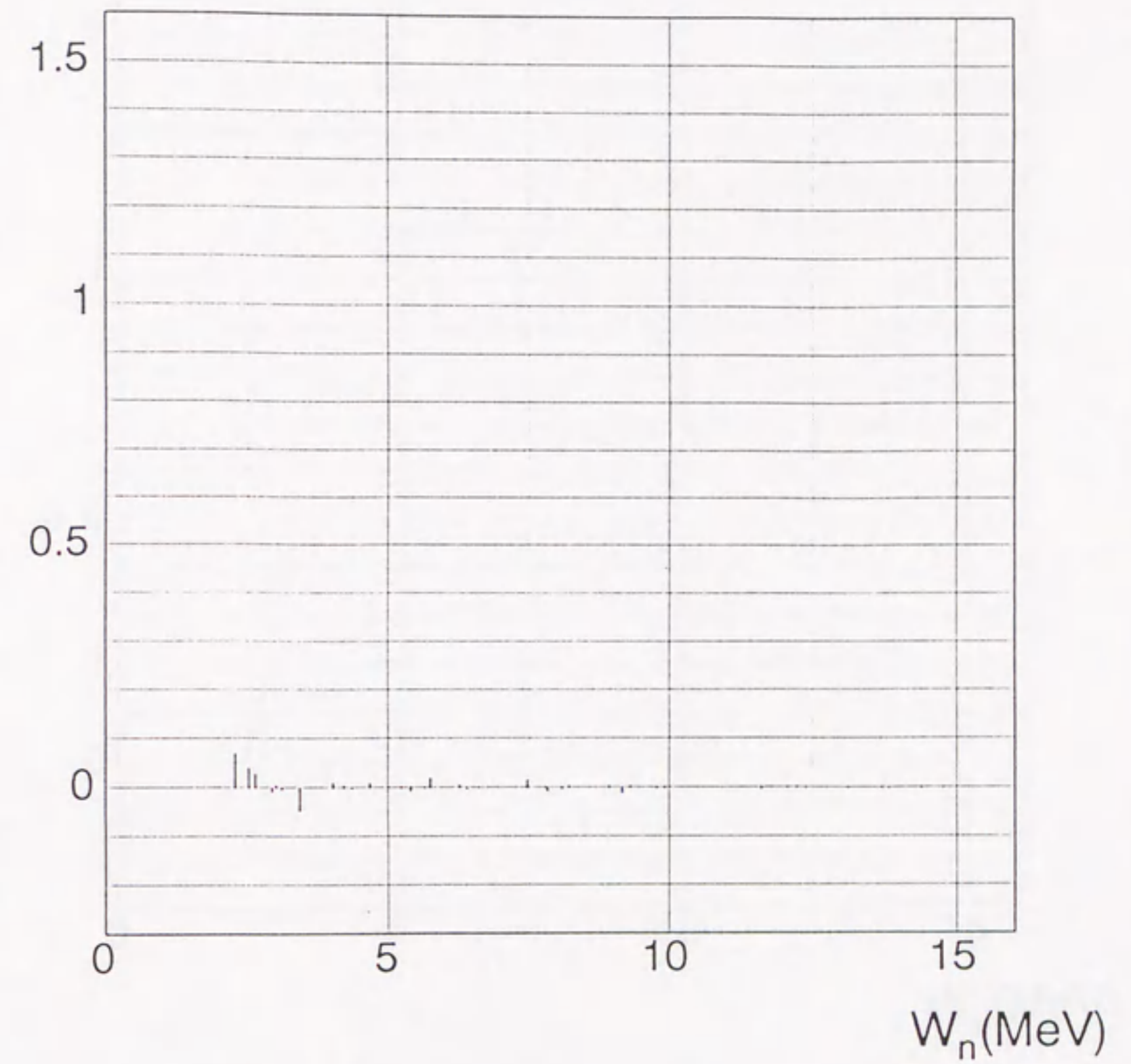


図 5. 2 (a)

タイプ I の  $C_2$ -係数の値

横軸は、 $2^+$  の非集団的フォノン・モードのエネルギーを表し、  
縦軸に、そのモードに対する  $C_2(cccn)$  の値を示す。

使用した数値計算パラメーターは、図 1 のものと同じ。



$C_2(ccnn)$

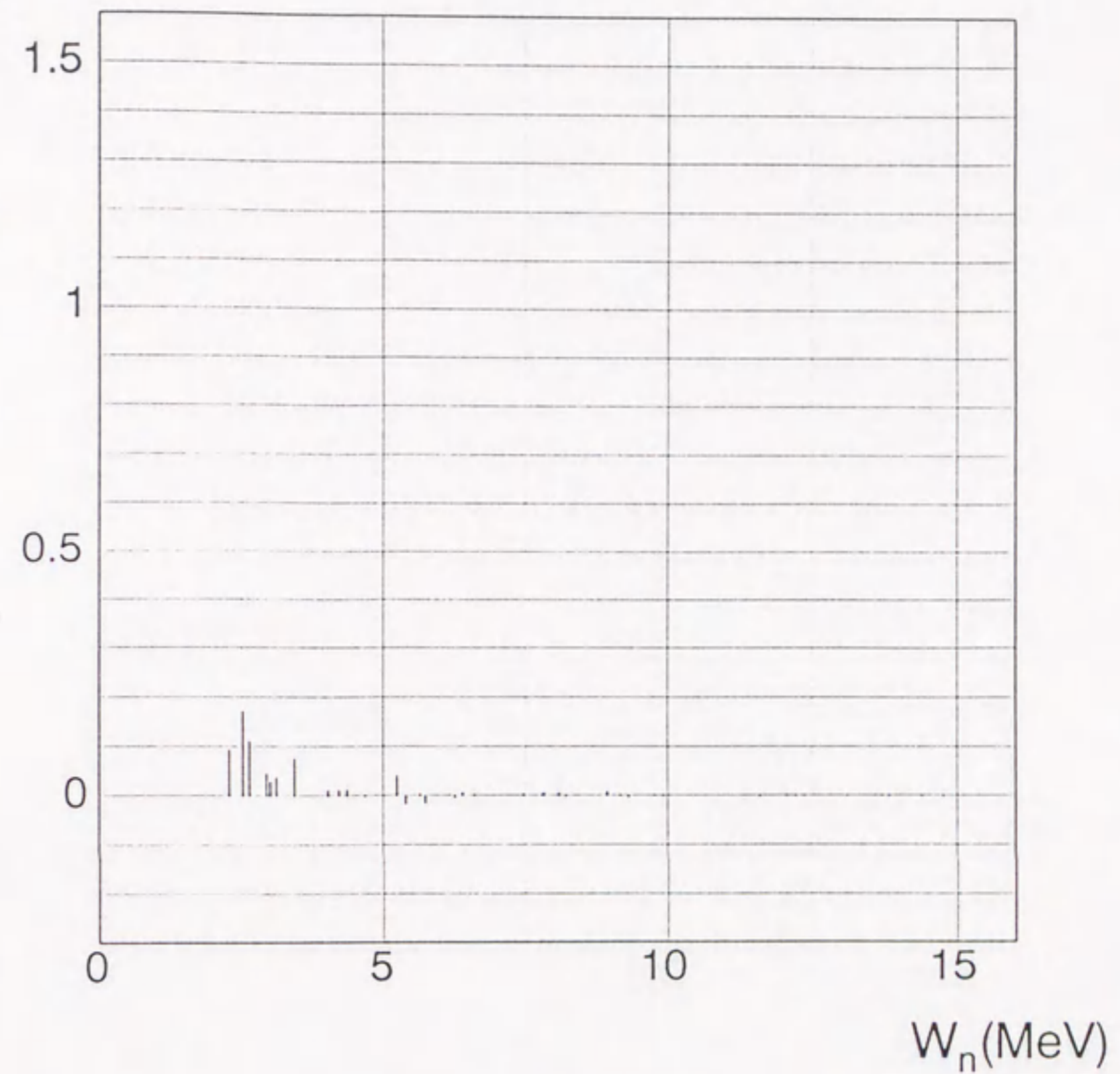


図 5. 2 (b)

タイプ II の  $C_2$ -係数の値

横軸は、 $2^+$  の非集団的フォノン・モードのエネルギーを表し、  
縦軸に、そのモードに対する  $C_2(ccnn)$  の値を示す。

使用した数値計算パラメーターは、図 1 のものと同じ。



$C_2(cnnn)$

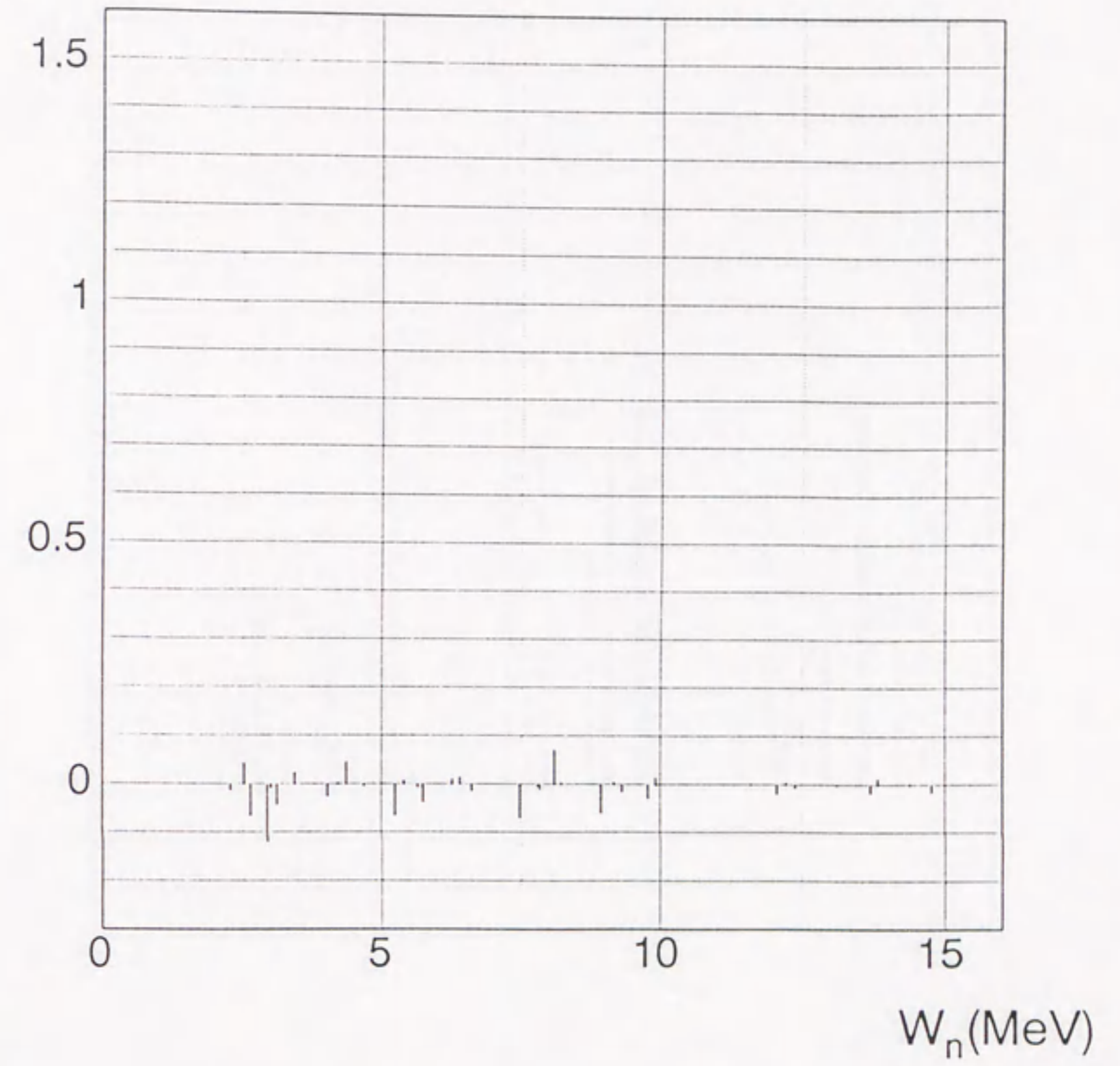


図 5. 2 (c)

タイプ III の  $C_2$ -係数の値

横軸は、 $2^+$  の非集団的フォノン・モードのエネルギーを表し、  
縦軸に、そのモードに対する  $C_2(cnnn)$  の値を示す。

使用した数値計算パラメーターは、図 1 のものと同じ。



$C_2(nnnn)$

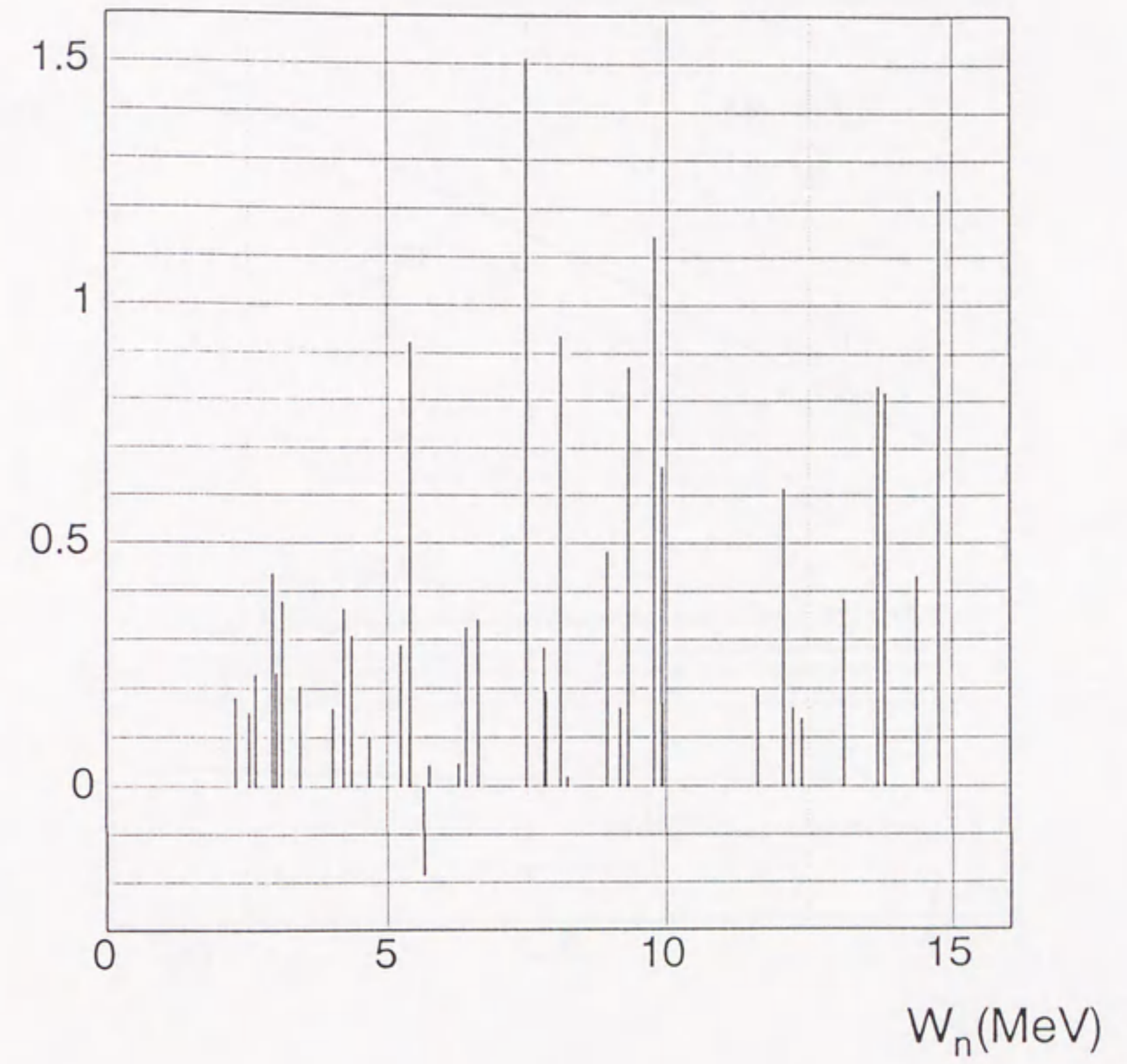


図 5. 2 (d)

タイプ IV の  $C_2$ -係数の値

横軸は、 $2^+$  の非集団的フォノン・モードのエネルギーを表し、  
縦軸に、そのモードに対する  $C_2(nnnn)$  の値を示す。

使用した数値計算パラメーターは、図 1 のものと同じ。



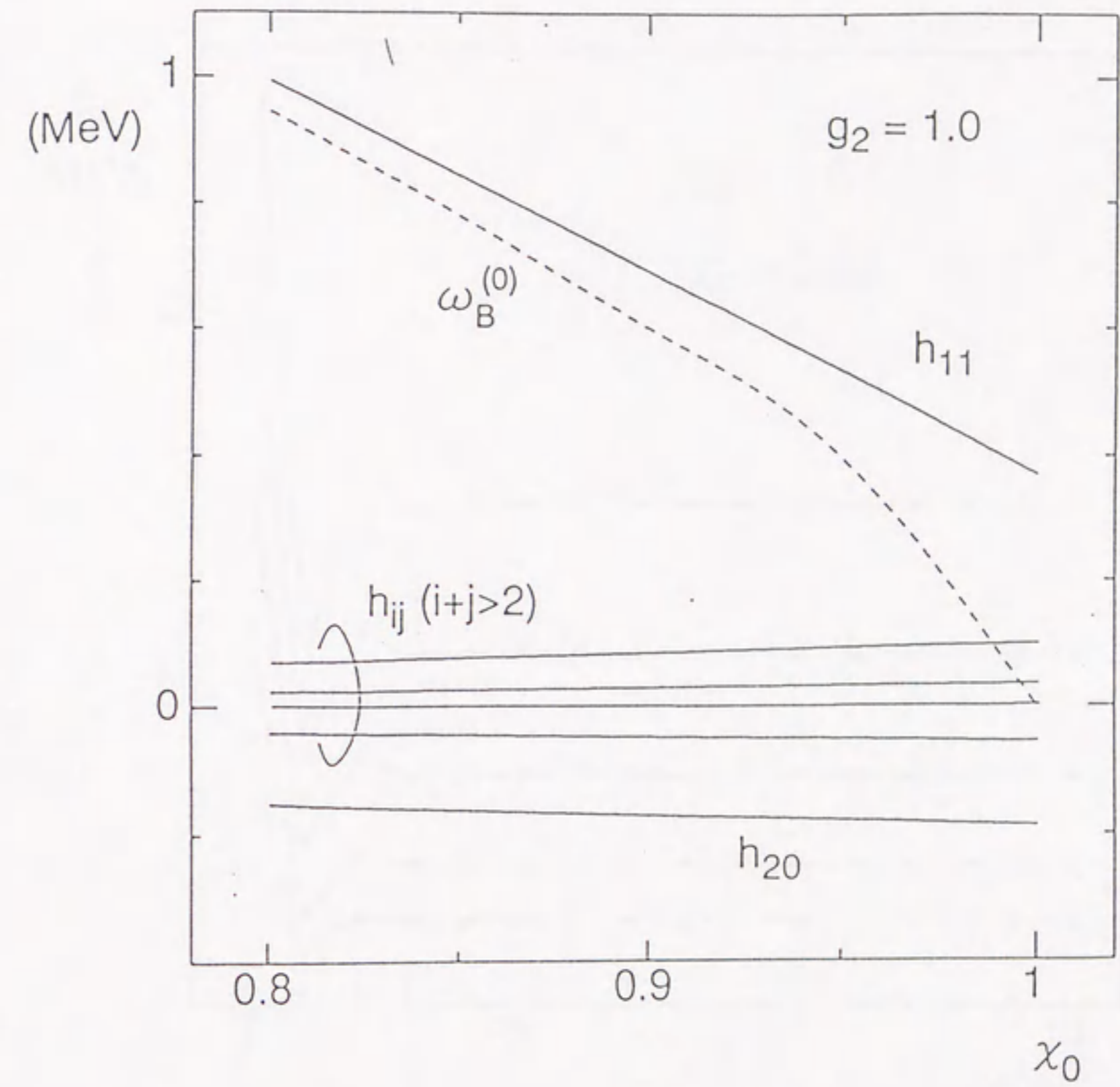


図 5. 3

展開係数  $h_{mni}^{[B]}$  の四重極・四重極相互作用の強さに対する依存性  
 横軸は、 $\chi_c$  を単位として計った  $\chi_0$  の強さを表す。  
 ( 図中では、添え字  $[B]$  を省略している。 )



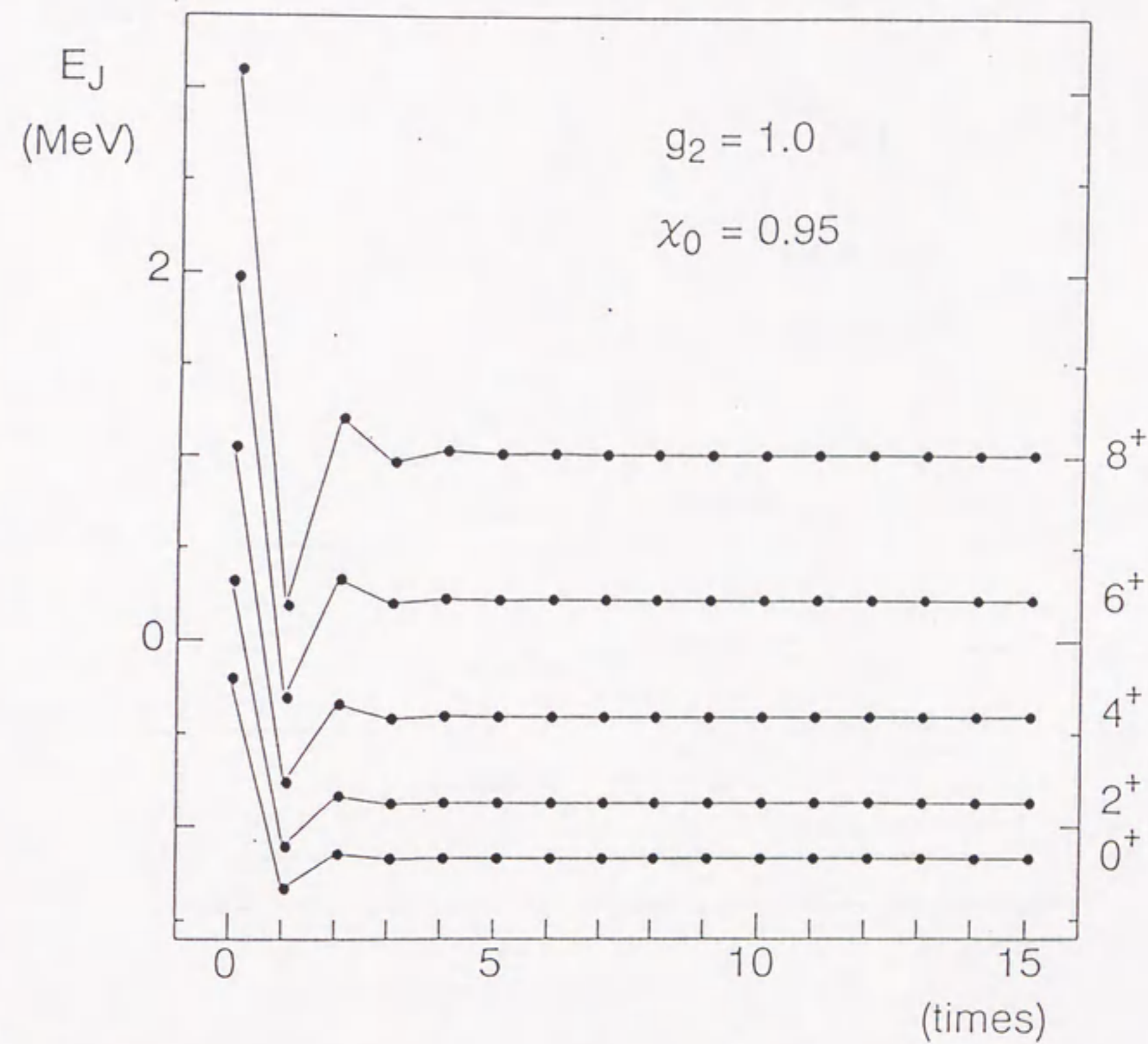


図5.4

自己無撞着 Feshbach 法におけるエネルギー固有値の収束性

横軸は、繰り返し計算の回数、縦軸は、サマリウム150の基底バンドのエネルギー固有値を示す。四重極・四重極相互作用の強さ  $\chi_0 = 0.95$  は、 $\chi_c$  を単位とする。四重極対相互作用の強さ  $g_2 = 1.0$ 。

$0^+$ 、 $2^+$ 、 $4^+$  の非集団的モードからの結合効果を自己無撞着 Feshbach 法で取り扱っている。

粒子数非保存から現れる spurious  $0^+$  mode は、RPA オーダーで取り除いてある。



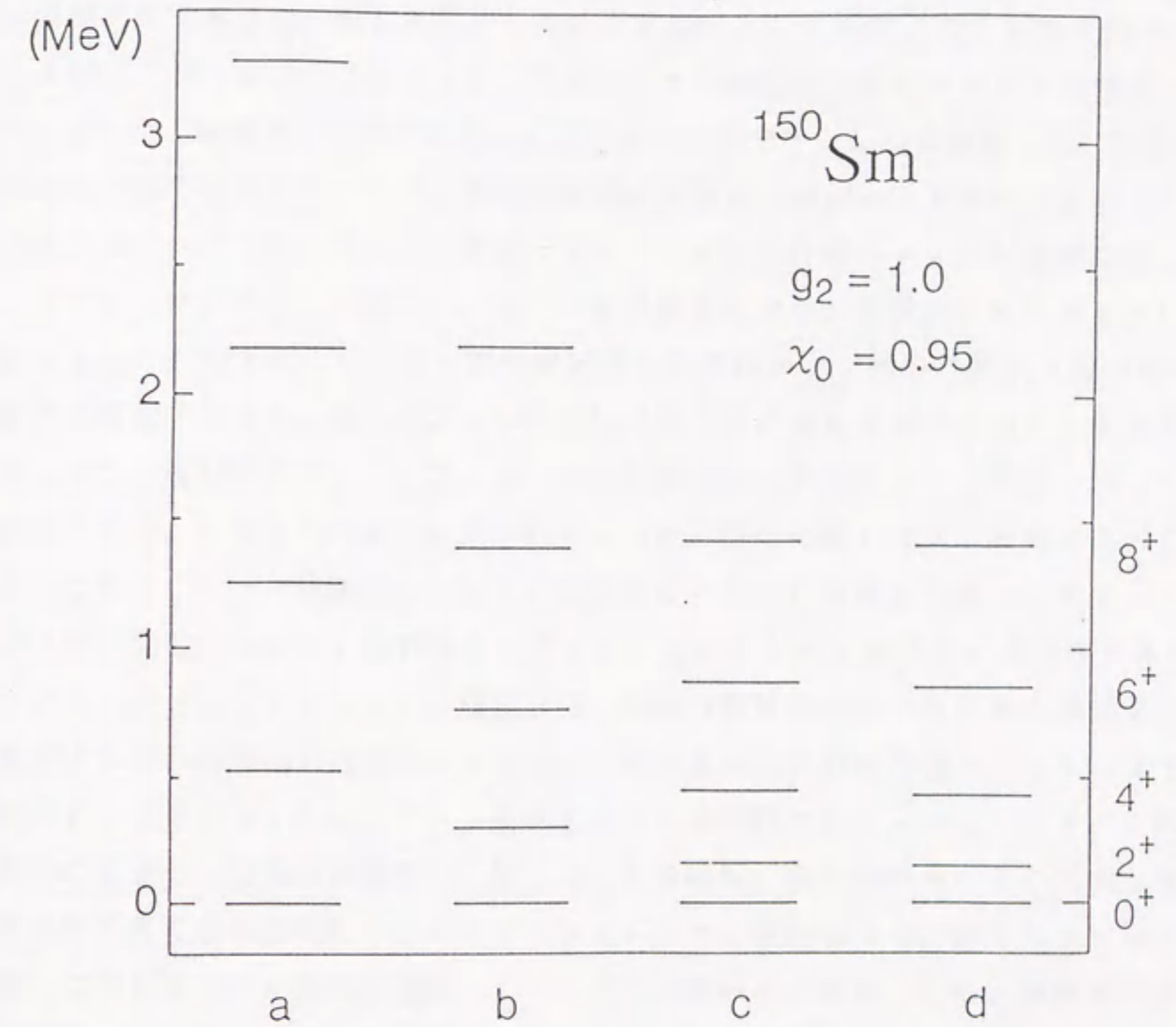


図 5. 5

サマリウム150の基底バンドの励起スペクトルの種々の方法による計算結果

a: 集団的ボソン・ハミルトニアン  $H^{[B]}$  だけ用いた対角化計算、

b: 自己無撞着 Feshbach 法による計算、c: Sakamoto-Kishimoto の方法による計算、

d: 断熱近似に基づく計算方法。

$0^+$ 、 $2^+$ 、 $4^+$  の非集団的モードからの結合効果をそれぞれの方法で取り扱っている。

四重極・四重極相互作用の強さ  $\chi_0 = 0.95$  は、 $\chi_c$  を単位とする。四重極対相互作用の強さ  $g_2 = 1.0$ 。

粒子数非保存から現れる spurious  $0^+$  mode は、RPA オーダーで取り除いてある。



## 第6章 総括と今後の展望

ボソン・フェルミオン展開法は、遷移領域核における非調和性の強い集団運動状態を、多体問題的にできるだけ厳密に記述することを目的として提唱された理論である。

本論文では、まず、このボソン・フェルミオン展開法と従来のボソン展開法との関連について論じた。対演算子の展開表現の集団的ボソン部分を、二つの理論で互いに比べたとき、両者は良く似た形をしているが、高次展開項の数係数に違いがみられる。しかしながら、オリジナルなボソン・フェルミオン変換に加えて、付加的な微小ユニタリ変換を行うことにより、ボソン・フェルミオン展開法における展開表現をボソン展開法におけるそれに完全に一致させることができる。ゆえに、高次展開項の集団的ボソン部分に関する数係数の違いは、本質的な問題ではなく、互いにユニタリ変換で結び付けられる表示の違いにすぎない。このため、ボソン展開法とボソン・フェルミオン展開法は、集団的ボソン部分に関しては、同等な理論である。しかしながら、非集団的モードの取扱いに関しては、両者の取扱いは非常に異なっており、ボソン展開法における非集団的モードの収束性の問題や、多フォノン空間の制限に伴う問題がないという意味で、ボソン・フェルミオン展開法に優位性がある。

次に、ボソン・フェルミオン展開法を、現実の遷移領域核における四重極集団運動状態に適用するための理論形式を与えた上で、これに基づいた数値計算を行った。まず、ボソン展開法およびボソン・フェルミオン展開法における展開のスモール・パラメータの大きさを数値的に評価し、両者の収束性を比較した。その結果、非集団的モードに関するボソン展開の収束性が良くないのに比べ、ボソン・フェルミオン展開法では、全てのフォノン・モードに関して収束性の良い展開が実現していることが確かめられた。次に、遷移領域核の記述において重要な役割を果たす、集団・非集団モード結合効果を取り扱う方法として、自己無撞着 Feshbach 法を提示し、この方法が十分実用的かつ有効な方法であることを示した。さらに、従来のボソン展開法の計算などで用いられてきた Feshbach 法と closure 近似を組み合わせる方法を使うと、集団・非集団モード結合効果を過大評価してしまうのに対し、自己無撞着 Feshbach 法による計算は、大規模な配位空間における厳密計算と同等の正確な結果を与えるということを指摘した。以上が、本論文で得られた成果である。

論文の最後にあたり、今後の展望について述べる。これまでに行われた研究により、ボソン・フェルミオン展開法は、従来のボソン展開法に伴う種々の問題点をほとんど回避しており、多体問題的手法として、曖昧さの少ない理論であることが確かめられた。また、実際の遷移領域核に対してこの方法を適用し、数値計算を実行するための処方箋も整い、集団・非集団結合効果を正確に取り入れる手段も手に入った。そこで、今後は、これらの信頼すべき取扱いに基づいて、遷移領域核における集団運動状態の定量的な記述を試みるのが目標である。具体的には、質量数 150 付近のサマリウム同位体の球形から変形への急激な構造



転移がどの程度まで記述できるかということに関心がある。この領域の原子核について、従来のボソン展開法による数値計算の仕事はいくつかあるが、それらは、いずれも多体問題の取扱いに何らかの問題を抱えながら行われたものである。また、その中には、3体力などの特殊な有効相互作用を取り入れて計算された仕事も含まれている。そこで、我々の信頼できる方法に基づいて、典型的な有効2体力だけを用いて、遷移領域核特有の構造転移がどこまで記述できるかを調べることは、大いに興味がある。

但し、これを行う際に、常に、理論の適用限界を意識しつつ解析を進めることが重要である。例えば、第5章でも指摘したように、たとえ、カイネマティカルに収束性の良い展開が実現していたとしても、遷移領域では、ダイナミカルな効果によって、相対的に展開の高次項の重要性が増したり、あるいは、実質的に展開の収束性が悪くなる可能性がある。そのような状況においては、もはや、非調和効果を展開理論で取り扱うこと自体に意味がなくなり、理論の適用限界を越えている。また、ボソン・フェルミオン展開法のような展開写像理論においては、常に、もとのフェルミオン空間と1対1に対応する物理的部分空間で固有値問題を解く必要があるが、現実の遷移領域核に対しては、物理的部分空間をどのように設定するか、あるいは、物理的部分空間における最大ボソン数はいくつかなどをきちんと調べながら、理論を適用していく必要がある。

以上に述べたように、実際に、遷移領域核の集団運動状態を解析することは、集団運動自身のダイナミクスあるいは、その発現機構を明らかにしてだけでなく、常に、使用する多体問題的手法に対して反省を加え、その適用限界を一つ一つ見極めていく作業である。これは、相当の労力を伴う大変な作業であるが、このような地道な努力を行ってこそ、現在ある理論の欠陥に気づき、現象に潜む新しい物理を見つけ、それを記述するためのより優れた理論の考案につながると思われる。



## 謝辞

大学院在学中、宮西敬直氏には、集団運動論の基礎からボソン・フェルミオン展開法に至るまで、懇切丁寧な指導をしていただき、研究の進行に関して常に適切なアドバイスをいただきました。ここに、氏の長年にわたるご厚情に深く感謝し、心よりお礼の言葉を申し上げます。

鈴鹿医療科学技術大学の谷口公一氏には、ボソン・フェルミオン展開法およびボソン展開法一般に関して、研究の遂行上欠かすことのできない、いくつかの重要な助言をいただきました。ボソン・フェルミオン展開法の構築に直接携わった経験の中から、著者の見落としがちな事項や理解のしにくい問題について、常に細やかな配慮をいただいたことに改めて感謝の言葉を申し上げます。

また、岐阜大学の坂本秀生氏には、ボソン展開法、有効相互作用などの問題に関して、御自身の経験から非常に有益な情報をいただき、かつ、部分的に数値計算プログラムのチェックなどもしていただきました。研究の進行に力をお貸しいただいたことに深く感謝しております。

この論文を仕上げるまでに、他にも、ずいぶんといろいろの方にお世話になりました。安野愈氏、斎藤栄氏を初めとするTH研の皆様、鈴鹿医療科学技術大学の酒井健次氏、近藤良彦氏、また、研究を支援していただいた物理学教室の方々、本当にお世話になりました。心より感謝の言葉を申し上げます。



付録 A 対演算子のボソン・フェルミオン表現

ここでは、第3章および第4章で必要な、フォノン演算子および散乱演算子の  $O(\epsilon^3)$  のオーダーまでの展開表現を与えておく。

$$\begin{aligned} \bar{X}_\mu = & \bar{X}_\mu^{(0)} + s_\mu^{[1]} \sum_{c_1 c_2 c_3} Y(\mu c_3 c_2 c_1) b_{c_1}^\dagger b_{c_2} b_{c_3} \\ & + s_\mu^{[2]} \sum_{c_1 c_2 n_1} Y(\mu n_1 c_2 c_1) b_{c_1}^\dagger b_{c_2} X_{n_1} \\ & + s_\mu^{[3]} \sum_{c_1 c_2 n_1} Y(\mu c_2 c_1 n_1) X_{n_1}^\dagger b_{c_1} b_{c_2} \\ & + s_\mu^{[4]} \sum_{c_1 q} \Gamma_q^{\mu c_1} B_q' b_{c_1} \\ & + \Delta(\bar{X}_\mu^{(2)}) . \end{aligned} \quad (A.1)$$

$$\bar{X}_c^{(0)} = b_c, \quad \bar{X}_n^{(0)} = X_n . \quad (A.2)$$

$$s_c^{[1]} = -\frac{1}{4}, \quad s_c^{[2]} = -\frac{1}{3}, \quad s_c^{[3]} = -\frac{1}{3}, \quad s_c^{[4]} = -\frac{1}{2}, \quad (A.3)$$

$$s_n^{[1]} = -\frac{1}{3}, \quad s_n^{[2]} = -\frac{1}{2}, \quad s_n^{[3]} = -\frac{1}{2}, \quad s_n^{[4]} = -1 . \quad (A.4)$$

$$\bar{B}_q = \bar{B}_q^{(1)} + \bar{B}_q^{(3)}, \quad (A.5)$$

$$\bar{B}_q^{(1)} = B_q' + \sum_{c_1 c_2} \Gamma_q^{c_2 c_1} b_{c_1}^\dagger b_{c_2} + \sum_{cn} (\Gamma_q^{nc} b_c^\dagger X_n + \Gamma_q^{cn} X_n^\dagger b_c), \quad (A.6)$$



$$\begin{aligned}
\overline{B}_q^{(3)} = & \sum_{c_1 c_2 c_3 c_4} \sum_{\mu} s_{\mu}^{[s1]} \left\{ \Gamma_q^{\mu c_1} Y(\mu c_4 c_3 c_2) + \Gamma_q^{c_4 \mu} Y(\mu c_1 c_2 c_3) \right\} b_{c_1}^{\dagger} b_{c_2}^{\dagger} b_{c_3} b_{c_4} \\
& + \sum_{c_1 c_2 c_3 n_1} \sum_{\mu} \left\{ s_{\mu}^{[s2]} \Gamma_q^{\mu c_1} Y(\mu n_1 c_3 c_2) + s_{\mu}^{[s3]} \Gamma_q^{c_3 \mu} Y(\mu c_1 c_2 n_1) \right. \\
& \quad \left. + s_{\mu}^{[s4]} \Gamma_q^{n_1 \mu} Y(\mu c_1 c_2 c_3) \right\} b_{c_1}^{\dagger} b_{c_2}^{\dagger} b_{c_3} X_{n_1} \\
& + \sum_{c_1 c_2 c_3 n_1} \sum_{\mu} \left\{ s_{\mu}^{[s2]} \Gamma_q^{c_3 \mu} Y(\mu n_1 c_1 c_2) + s_{\mu}^{[s3]} \Gamma_q^{\mu c_1} Y(\mu c_3 c_2 n_1) \right. \\
& \quad \left. + s_{\mu}^{[s4]} \Gamma_q^{\mu n_1} Y(\mu c_3 c_2 c_1) \right\} X_{n_1}^{\dagger} b_{c_1}^{\dagger} b_{c_2} b_{c_3} \\
& + \sum_{c_1 c_2 n_1 n_2} \sum_{\mu} s_{\mu}^{[s5]} \left\{ \Gamma_q^{n_2 \mu} Y(\mu n_1 c_1 c_2) \right. \\
& \quad \left. + \Gamma_q^{\mu n_1} Y(\mu n_2 c_2 c_1) \right\} b_{c_1}^{\dagger} b_{c_2} X_{n_1}^{\dagger} X_{n_2} \\
& + \sum_{c_1 c_2 n_1 n_2} \sum_{\mu} s_{\mu}^{[s6]} \left\{ \Gamma_q^{n_2 \mu} Y(\mu c_1 c_2 n_1) b_{c_1}^{\dagger} b_{c_2}^{\dagger} X_{n_1} X_{n_2} \right. \\
& \quad \left. + \Gamma_q^{\mu n_1} Y(\mu c_2 c_1 n_2) X_{n_1}^{\dagger} X_{n_2}^{\dagger} b_{c_1} b_{c_2} \right\} \\
& + \sum_{c_1 c_2 q'} \sum_{\mu} s_{\mu}^{[s7]} \left\{ \Gamma_q^{\mu c_1} \Gamma_{q'}^{\mu c_2} + \Gamma_q^{c_2 \mu} \Gamma_{q'}^{c_1 \mu} \right\} B_{q'}^{\dagger} b_{c_1}^{\dagger} b_{c_2} \\
& + \sum_{c_1 n_1 q'} \sum_{\mu} s_{\mu}^{[s8]} \left\{ \Gamma_q^{n_1 \mu} \Gamma_{q'}^{c_1 \mu} b_{c_1}^{\dagger} B_{q'}^{\dagger} X_{n_1} + \Gamma_q^{\mu n_1} \Gamma_{q'}^{\mu c_1} X_{n_1}^{\dagger} B_{q'}^{\dagger} b_{c_1} \right\} \\
& + \Delta(\overline{B}_q^{(3)}),
\end{aligned} \tag{A.7}$$



$$B'_q \equiv B_q - \sum_{c_1 c_2} \Gamma_q^{c_2 c_1} X_{c_1}^\dagger X_{c_2} - \sum_{cn} (\Gamma_q^{nc} X_c^\dagger X_n + \Gamma_q^{cn} X_n^\dagger X_c), \quad (A.8)$$

$$s_c^{[s1]} = 0, \quad s_n^{[s1]} = -\frac{1}{12}; \quad s_c^{[s2]} = 0, \quad s_n^{[s2]} = -\frac{1}{6};$$

$$s_c^{[s3]} = 0, \quad s_n^{[s3]} = -\frac{1}{6}; \quad s_c^{[s4]} = +\frac{1}{12}, \quad s_n^{[s4]} = 0;$$

$$s_c^{[s5]} = +\frac{1}{6}, \quad s_n^{[s5]} = 0; \quad s_c^{[s6]} = +\frac{1}{6}, \quad s_n^{[s6]} = 0;$$

$$s_c^{[s7]} = 0, \quad s_n^{[s7]} = -\frac{1}{2}; \quad s_c^{[s8]} = +\frac{1}{2}, \quad s_n^{[s8]} = 0.$$

(A.9)

なお、高次展開項に現れているスモール・パラメター  $Y(\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4)$  は、

$$Y(\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4) \equiv \sum_q \Gamma_q^{\mu_1 \mu_2} \Gamma_q^{\mu_3 \mu_4} \\ = \delta_{\mu_1 \mu_2} \delta_{\mu_3 \mu_4} + \delta_{\mu_1 \mu_3} \delta_{\mu_2 \mu_4} - \langle 0 | X_{\mu_3} X_{\mu_2} X_{\mu_1}^\dagger X_{\mu_4}^\dagger | 0 \rangle. \quad (A.10)$$

で定義されている。また、 $\Delta(\overline{X}_\mu^{(2)})$  および  $\Delta(\overline{B}_q^{(3)})$  は、 $X_c^\dagger$  および  $X_c$  の片方または両方をノーマル・オーダーで含む項を意味しているが、それらの“物理的状態”の間の行列要素は、それぞれ、 $O(\epsilon^4)$  または  $O(\epsilon^5)$  のオーダーになるため [TM91]、それらのあからさまな表現は省略する。



付録 B 多重極演算子のフォノン表示

単極対演算子 (4.7) は、準粒子表示およびフォノン表示で、次のように表される。

$$\hat{P}_0^\dagger(\rho) = \langle \hat{P}_0^\dagger(\rho) \rangle_{\text{BCS}} + \dot{P}_0^\dagger(\rho), \quad (B.1)$$

$$\langle \hat{P}_0^\dagger(\rho) \rangle_{\text{BCS}} = \sum_{a(\rho)} \hat{j}_a^2 u_a v_a = \frac{2\Delta_\rho}{G_0(\rho)}, \quad (B.2)$$

$$\begin{aligned} \dot{P}_0^\dagger(\rho) &= \sqrt{2} \sum_{a(\rho)} \hat{j}_a \left\{ u_a^2 A_{00}^\dagger(aa) - v_a^2 A_{00}(aa) - \sqrt{2} u_a v_a B_{00}^\dagger(aa) \right\} \\ &= \sum_{(\mu=0)} \left\{ p_\mu^{uu}(\rho) X_{\mu,00}^\dagger - p_\mu^{vv}(\rho) X_{\mu,00} \right\} - \sum_{ab(\rho)} p^{uv}(ab) B_{00}^\dagger(ab), \end{aligned} \quad (B.3)$$

$$p_\mu^{uu}(\rho) = \sqrt{2} \sum_{a(\rho)} \hat{j}_a u_a^2 \psi_{J=0}^{(\mu)}(aa), \quad (B.4)$$

$$p_\mu^{vv}(\rho) = \sqrt{2} \sum_{a(\rho)} \hat{j}_a v_a^2 \psi_{J=0}^{(\mu)}(aa), \quad (B.5)$$

$$p^{uv}(ab) = \delta_{ab} \left\{ 2 \hat{j}_a u_a v_a \right\}, \quad (B.6)$$

但し、 $\langle \cdots \rangle_{\text{BCS}}$  は、BCS 基底状態における期待値を表す。(B.1) から、単極対相互作用 (4.3) の主要部と残留相互作用部分が、

$$H_{P_0} = H_{P_0}^{(\text{main})} + H_{P_0}^{(\text{res})} + \text{const.}, \quad (B.7)$$

$$H_{P_0}^{(\text{main})} = -\frac{1}{4} \sum_{\rho=\pi,\nu} G_0(\rho) \langle \hat{P}_0^\dagger(\rho) \rangle_{\text{BCS}} \left\{ \dot{P}_0^\dagger(\rho) + \dot{P}_0(\rho) \right\}, \quad (B.8)$$

$$H_{P_0}^{(\text{res})} = -\frac{1}{4} \sum_{\rho=\pi,\nu} G_0(\rho) \dot{P}_0^\dagger(\rho) \dot{P}_0(\rho). \quad (B.9)$$

で定められる。 $H_{P_0}^{(\text{main})}$  は、BCS 変換によって、単一準粒子エネルギー  $H_0$  に吸収される。定数項は、後の計算では無視される。

粒子・空孔型の単極演算子 (4.9) は、準粒子表示およびフォノン表示で、次のように与えられる。

$$\hat{M}(a) = \langle \hat{M}(a) \rangle_{\text{BCS}} + \dot{M}(a), \quad (B.10)$$

$$\langle \hat{M}(a) \rangle_{\text{BCS}} = \hat{j}_a^2 v_a^2, \quad (B.11)$$

$$\begin{aligned} \dot{M}(a) &= \sqrt{2} \hat{j}_a u_a v_a \left\{ A_{00}^\dagger(aa) + A_{00}(aa) \right\} + \hat{j}_a (u_a^2 - v_a^2) B_{00}^\dagger(aa) \\ &= \sum_{\mu} l_\mu(a) \left\{ X_{\mu,00}^\dagger + X_{\mu,00} \right\} + m(a) B_{00}^\dagger(aa), \end{aligned} \quad (B.12)$$



$$l_\mu(a) = \delta_{J0} \left\{ \sqrt{2} \hat{j}_a u_a v_a \psi_0^{(\mu)}(aa) \right\}, \quad (B.13)$$

$$m(a) = \hat{j}_a (u_a^2 - v_a^2). \quad (B.14)$$

(B.10) から、粒子・空孔型の陽子・中性子単極相互作用 (4.5) の主要部と残留相互作用部分が、

$$H_M = H_M^{(\text{main})} + H_M^{(\text{res})} + \text{const.}, \quad (B.15)$$

$$H_M^{(\text{main})} = - \sum_{ab} G_{\pi\nu}(ab) \langle \widehat{M}(a) \rangle_{\text{BCS}} \dot{M}(b), \quad (B.16)$$

$$H_M^{(\text{res})} = - \frac{1}{2} \sum_{ab} G_{\pi\nu}(ab) \dot{M}(a) \dot{M}(b). \quad (B.17)$$

のように決められる。 $H_M^{(\text{main})}$  は、BCS 変換によって、単一準粒子エネルギー  $H_0$  に吸収される。定数項は後の計算では無視される。

四重極対演算子 (4.8) の準粒子表示およびフォノン表示は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} \widehat{P}_{2M}^\dagger(\rho) &= \sum_{ab(\rho)} D_{ab} q(ab) \left\{ u_a u_b A_{2M}^\dagger(ab) - v_a v_b A_{2M}^\dagger(ab) \right\} \\ &\quad - 2 \sum_{ab(\rho)} q(ab) u_a v_b B_{2M}^\dagger(ab) \\ &= \sum_{(J_\mu=2)} \left\{ q_\mu^{uu}(\rho) X_{\mu,2M}^\dagger - q_\mu^{vv}(\rho) X_{\mu,2M}^\dagger \right\} - 2 \sum_{ab(\rho)} q^{uv}(ab) B_{2M}^\dagger(ab), \end{aligned} \quad (B.18)$$

$$\langle \alpha | r^2 Y_{2M} | \beta \rangle = \langle j_a m_a j_b \widetilde{m}_\beta | 2M \rangle q(ab), \quad (B.19)$$

$$q(ab) = \frac{\langle a | r^2 Y_2 | b \rangle}{\sqrt{5}} = -\theta(ab2) q(ba), \quad (B.20)$$

$$q^{uv}(ab) = q(ab) u_a v_b, \quad q^{vu}(ab) = q(ab) v_a u_b, \quad (B.21)$$

$$q_\mu^{uu}(\rho) = 2 \sum_{a \leq b(\rho)} D_{ab}^{-1} q(ab) u_a u_b \psi_{J=2}^{(\mu)}(ab), \quad (B.22)$$

$$q_\mu^{vv}(\rho) = 2 \sum_{a \leq b(\rho)} D_{ab}^{-1} q(ab) v_a v_b \psi_{J=2}^{(\mu)}(ab). \quad (B.23)$$



粒子・空孔型の四重極演算子 (4.10) の準粒子表示およびフォノン表示は次のように与えられる。

$$\begin{aligned}\hat{Q}_{2M}(\rho) &= \sum_{a \leq b(\rho)} D_{ab}^{-1} Q(ab) (A_{2M}^\dagger(ab) + A_{2M}^\sim(ab)) + \sum_{ab(\rho)} R(ab) B_{2M}^\dagger(ab) \\ &= \sum_{\substack{\mu \\ (J_\mu=2)}} q_\mu^{(2)}(\rho) (X_{\mu, 2M}^\dagger + X_{\mu, 2M}^\sim) + \sum_{ab(\rho)} R(ab) B_{2M}^\dagger(ab)\end{aligned}\quad (B.24)$$

$$Q(ab) = q(ab)(u_a v_b + v_a u_b) = -\theta(ab2)Q(ba), \quad (B.25)$$

$$R(ab) = q(ab)(u_a u_b - v_a v_b) = -\theta(ab2)R(ba) \quad (B.26)$$

$$q_\mu^{(2)}(\rho) = \sum_{a \leq b(\rho)} D_{ab}^{-1} Q(ab) \psi_{J=2}^{(\mu)}(ab). \quad (B.27)$$



付録 C 有効ハミルトニアンフォノンの表示と各有効相互作用からの寄与

まず、有効ハミルトニアンフォノンの表示 (4.25)-(4.30) において、各有効相互作用からの寄与を表す数係数の具体的な表現を与える。

$H_{P_0}$ からの寄与

$$V_{X_A}^{[P_0]}(\mu_1, \mu_2) = \delta_{J_1 0} \delta_{J_2 0} \left\{ -\frac{1}{4} \sum_{\rho=\pi, \nu} G_0(\rho) p_{\mu_1}^{uu}(\rho) p_{\mu_2}^{uu}(\rho) \right\},$$

$$V_{X_B}^{[P_0]}(\mu_1, \mu_2) = \delta_{J_1 0} \delta_{J_2 0} \left\{ -\frac{1}{4} \sum_{\rho=\pi, \nu} G_0(\rho) p_{\mu_1}^{vv}(\rho) p_{\mu_2}^{vv}(\rho) \right\},$$

$$V_{V_A}^{[P_0]}(\mu_1, \mu_2) = \delta_{J_1 0} \delta_{J_2 0} \left\{ \frac{1}{4} \sum_{\rho=\pi, \nu} G_0(\rho) p_{\mu_1}^{uu}(\rho) p_{\mu_2}^{vv}(\rho) \right\},$$

$$V_{Y_A}^{[P_0]}(\mu; ab) = \delta_{J_0} \left\{ \frac{1}{4} G_0(\rho(a)) p_{\mu}^{uu}(\rho(a)) p^{vv}(ab) \right\},$$

$$V_{Y_B}^{[P_0]}(\mu; ab) = \delta_{J_0} \left\{ -\frac{1}{4} G_0(\rho(a)) p_{\mu}^{vv}(\rho(a)) p^{uv}(ab) \right\},$$

$$V_Z^{[P_0]}(a_1 b_1; a_2 b_2; k) = \delta_{k 0} \delta_{\rho(a_1)\rho(a_2)} \left\{ -\frac{1}{4} G_0(\rho(a_1)) p^{uv}(a_1 b_1) p^{uv}(a_2 b_2) \right\}. \quad (C.1)$$

$H_{P_2}$ からの寄与

$$V_{X_A}^{[P_2]}(\mu_1, \mu_2) = \delta_{J_1 2} \delta_{J_2 2} \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{\rho=\pi, \nu} G_2(\rho) q_{\mu_1}^{uu}(\rho) q_{\mu_2}^{uu}(\rho) \right\},$$

$$V_{X_B}^{[P_2]}(\mu_1, \mu_2) = \delta_{J_1 2} \delta_{J_2 2} \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{\rho=\pi, \nu} G_2(\rho) q_{\mu_1}^{vv}(\rho) q_{\mu_2}^{vv}(\rho) \right\},$$

$$V_{V_A}^{[P_2]}(\mu_1, \mu_2) = \delta_{J_1 2} \delta_{J_2 2} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{\rho=\pi, \nu} G_2(\rho) q_{\mu_1}^{uu}(\rho) q_{\mu_2}^{vv}(\rho) \right\},$$

$$V_{Y_A}^{[P_2]}(\mu; ab) = \delta_{J_2} \left\{ G_2(\rho(a)) q_{\mu}^{uu}(\rho(a)) q^{uv}(ab) \right\},$$

$$V_{Y_B}^{[P_2]}(\mu; ab) = \delta_{J_2} \left\{ -G_2(\rho(a)) q_{\mu}^{vv}(\rho(a)) q^{vu}(ab) \right\},$$

$$V_Z^{[P_2]}(a_1 b_1; a_2 b_2; k) = \delta_{k 2} \delta_{\rho(a_1)\rho(a_2)} \left\{ -2G_2(\rho(a_1)) q^{uv}(a_1 b_1) q^{uv}(a_2 b_2) \right\}. \quad (C.2)$$



$H_M$ からの寄与

$$\begin{aligned}
 V_{X_A}^{[M]}(\mu_1, \mu_2) &= V_{X_B}^{[M]}(\mu_1, \mu_2) = V_{V_A}^{[M]}(\mu_1, \mu_2) \\
 &= \delta_{J_1 0} \delta_{J_2 0} \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{ab} G_{\pi\nu}(ab) l_{\mu_1}(a) l_{\mu_2}(b) \right\}, \\
 V_{Y_A}^{[M]}(\mu; ab) &= V_{Y_B}^{[M]}(\mu; ab) \\
 &= \delta_{J_0} \delta_{ab} \left\{ -\frac{1}{2} \sum_e G_{\pi\nu}(ea) l_{\mu}(e) m(a) \right\}, \\
 V_Z^{[M]}(a_1 b_1; a_2 b_2; k) &= \delta_{k_0} \delta_{a_1 b_1} \delta_{a_2 b_2} \left\{ -\frac{1}{2} G_{\pi\nu}(a_1 a_2) m(a_1) m(a_2) \right\}. \quad (C.3)
 \end{aligned}$$

$H_{QQ}$ からの寄与

$$\begin{aligned}
 V_{X_A}^{[QQ]}(\mu_1, \mu_2) &= V_{X_B}^{[QQ]}(\mu_1, \mu_2) = V_{V_A}^{[QQ]}(\mu_1, \mu_2) \\
 &= \delta_{J_1 2} \delta_{J_2 2} \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{\rho_1 \rho_2 = \pi, \nu} \chi_2(\rho_1 \rho_2) q_{\mu_1}^{(2)}(\rho_1) q_{\mu_2}^{(2)}(\rho_2) \right\}, \\
 V_{Y_A}^{[QQ]}(\mu; ab) &= V_{Y_B}^{[QQ]}(\mu; ab) \\
 &= \delta_{J_2} \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{\rho_1 = \pi, \nu} \chi_2(\rho_1 \rho(a)) q_{\mu}^{(2)}(\rho_1) R(ab) \right\}, \\
 V_Z^{[QQ]}(a_1 b_1; a_2 b_2; k) &= \delta_{k_2} \left\{ -\frac{1}{2} \chi_2(\rho(a_1) \rho(a_2)) R(a_1 b_1) R(a_2 b_2) \right\}. \quad (C.4)
 \end{aligned}$$

さらに、フォノン表示の有効ハミルトニアンをボソン・フェルミオン展開する際に、 $\tau = P_0, P_2, M, QQ$  に対して、次の数係数を定義しておくのが便利である。

$$E(\mu_1, \mu_2) \equiv \sum_a E_a(\hat{j}_a / \hat{J}_1) \hat{\Gamma}_{(aa,0)}^{\mu_1 \mu_2}, \quad (C.5)$$

$$V_X^{[\tau]}(\mu_1, \mu_2) \equiv V_{X_A}^{[\tau]}(\mu_1, \mu_2) + V_{X_B}^{[\tau]}(\mu_1, \mu_2), \quad (C.6)$$

$$V_V^{[\tau]}(\mu_1, \mu_2) \equiv \frac{1}{2} \left\{ V_{V_A}^{[\tau]}(\mu_1, \mu_2) + V_{V_A}^{[\tau]}(\mu_2, \mu_1) \right\} \quad (\text{symmetrized}), \quad (C.7)$$

$$V_Y^{[\tau]}(\mu_1, \mu_2 \mu_3) \equiv \sum_{ab} V_Y^{[\tau]}(\mu_1; ab) \hat{\Gamma}_{(ab, J_1)}^{\mu_2 \mu_3}, \quad (C.8)$$

$$V_Z^{[\tau]}(\mu_1 \mu_2, \mu_3 \mu_4) \equiv \sum_k \sum_{a_1 b_1} \sum_{a_2 b_2} V_Z^{[\tau]}(a_1 b_1; a_2 b_2; k) \hat{\Gamma}_{(a_1 b_1, k)}^{\mu_1 \mu_2} \hat{\Gamma}_{(a_2 b_2, k)}^{\mu_3 \mu_4} \quad (C.9)$$

$$V_Y^{[\tau]}(\mu; ab) \equiv V_{Y_A}^{[\tau]}(\mu; ab) + V_{Y_B}^{[\tau]}(\mu; ab). \quad (C.10)$$



(C.5)-(C.9) の具体的な表現は次のように与えられる。

$H_0$ からの寄与

$$E(\mu_1, \mu_2) = \delta_{J_1 J_2} \sum_{a \leq b} (E_a + E_b) \psi_{J_1}^{(\mu_1)}(ab) \psi_{J_2}^{(\mu_2)}(ab). \quad (C.11)$$

$H_{P_0}$ からの寄与

$$\begin{aligned} V_X^{[P_0]}(\mu_1, \mu_2) &= \delta_{J_1 0} \delta_{J_2 0} \left\{ -\frac{1}{4} \sum_{\rho=\pi, \nu} G_0(\rho) \left\{ p_{\mu_1}^{uu}(\rho) p_{\mu_2}^{uu}(\rho) + p_{\mu_1}^{vv}(\rho) p_{\mu_2}^{vv}(\rho) \right\} \right\}, \\ V_V^{[P_0]}(\mu_1, \mu_2) &= \delta_{J_1 0} \delta_{J_2 0} \left\{ \frac{1}{8} \sum_{\rho=\pi, \nu} G_0(\rho) \left\{ p_{\mu_1}^{uu}(\rho) p_{\mu_2}^{vv}(\rho) + p_{\mu_2}^{uu}(\rho) p_{\mu_1}^{vv}(\rho) \right\} \right\}, \\ V_Y^{[P_0]}(\mu_1, \mu_2 \mu_3) &= \delta_{J_1 0} \delta_{J_2 J_3} \left\{ \frac{1}{4} \sum_{\rho=\pi, \nu} G_0(\rho) \left\{ p_{\mu_1}^{uu}(\rho) - p_{\mu_1}^{vv}(\rho) \right\} p_{\mu_2 \mu_3}^{(0)}(\rho) \right\}, \\ V_Z^{[P_0]}(\mu_1 \mu_2, \mu_3 \mu_4) &= \delta_{J_1 J_2} \delta_{J_3 J_4} \left\{ -\frac{1}{4} \sum_{\rho=\pi, \nu} G_0(\rho) p_{\mu_1 \mu_2}^{(0)}(\rho) p_{\mu_3 \mu_4}^{(0)}(\rho) \right\} \end{aligned} \quad (C.12)$$

$$\begin{aligned} p_{\mu_1 \mu_2}^{(0)}(\rho) &\equiv \sum_{ab(\rho)} p^{uv}(ab) \hat{\Gamma}_{(ab, 0)}^{\mu_1 \mu_2} \\ &= \delta_{J_1 J_2} \left\{ 2\hat{J}_1 \sum_{a \leq b(\rho)} (u_a v_a + u_b v_b) \psi_{J_1}^{(\mu_1)}(ab) \psi_{J_2}^{(\mu_2)}(ab) \right\} \\ &= p_{\mu_2 \mu_1}^{(0)}(\rho). \end{aligned} \quad (C.13)$$

$H_{P_2}$ からの寄与

$$V_X^{[P_2]}(\mu_1, \mu_2) = \delta_{J_1 2} \delta_{J_2 2} \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{\rho=\pi, \nu} G_2(\rho) \left\{ q_{\mu_1}^{uu}(\rho) q_{\mu_2}^{uu}(\rho) + q_{\mu_1}^{vv}(\rho) q_{\mu_2}^{vv}(\rho) \right\} \right\},$$



$$\begin{aligned}
V_V^{[P_2]}(\mu_1, \mu_2) &= \delta_{J_1 2} \delta_{J_2 2} \left\{ \frac{1}{4} \sum_{\rho=\pi, \nu} G_2(\rho) \left\{ q_{\mu_1}^{uu}(\rho) q_{\mu_2}^{vv}(\rho) + q_{\mu_2}^{uu}(\rho) q_{\mu_1}^{vv}(\rho) \right\} \right\}, \\
V_Y^{[P_2]}(\mu_1, \mu_2 \mu_3) &= \delta_{J_1 2} \Delta(J_1 J_2 J_3) \left\{ \frac{1}{2} \sum_{\rho=\pi, \nu} G_2(\rho) \left\{ \left( q_{\mu_1}^{uu}(\rho) - q_{\mu_1}^{vv}(\rho) \right) q_{\mu_2 \mu_3}^{(+)}(\rho) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left( q_{\mu_1}^{uu}(\rho) + q_{\mu_1}^{vv}(\rho) \right) q_{\mu_2 \mu_3}^{(-)}(\rho) \right\} \right\}, \\
V_Z^{[P_2]}(\mu_1 \mu_2, \mu_3 \mu_4) &= \Delta(J_1 J_2 2) \Delta(J_3 J_4 2) \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{\rho=\pi, \nu} G_2(\rho) \left( q_{\mu_1 \mu_2}^{(+)}(\rho) + q_{\mu_1 \mu_2}^{(-)}(\rho) \right) \right. \\
&\quad \left. \cdot \left( q_{\mu_3 \mu_4}^{(+)}(\rho) + q_{\mu_3 \mu_4}^{(-)}(\rho) \right) \right\} \quad (C.14)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q_{\mu_1 \mu_2}^{(\pm)}(\rho) &\equiv \sum_{a \leq b(\rho)} D_{ab}^{-2} q(ab) (u_a v_b \pm v_a u_b) \left\{ \hat{\Gamma}_{(ab, 2)}^{\mu_1 \mu_2} \pm (-)^{J_1 + J_2} \hat{\Gamma}_{(ab, 2)}^{\mu_2 \mu_1} \right\} \\
&= \pm (-)^{J_1 + J_2} q_{\mu_2 \mu_1}^{(\pm)}(\rho). \quad (C.15)
\end{aligned}$$

$H_M$ からの寄与

$$\begin{aligned}
V_X^{[M]}(\mu_1, \mu_2) &= \delta_{J_1 0} \delta_{J_2 0} \left\{ - \sum_{ab} G_{\pi\nu}(ab) l_{\mu_1}(a) l_{\mu_2}(b) \right\}, \\
V_V^{[M]}(\mu_1, \mu_2) &= \delta_{J_1 0} \delta_{J_2 0} \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{ab} G_{\pi\nu}(ab) l_{\mu_1}(a) l_{\mu_2}(b) \right\}, \\
V_Y^{[M]}(\mu_1, \mu_2 \mu_3) &= \delta_{J_1 0} \delta_{J_2 J_3} \left\{ - \sum_{ab} G_{\pi\nu}(ab) l_{\mu_1}(a) m_{\mu_2 \mu_3}^{(0)}(b) \right\}, \\
V_Z^{[M]}(\mu_1 \mu_2, \mu_3 \mu_4) &= \delta_{J_1 J_2} \delta_{J_3 J_4} \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{ab} G_{\pi\nu}(ab) m_{\mu_1 \mu_2}^{(0)}(a) m_{\mu_3 \mu_4}^{(0)}(b) \right\} \quad (C.16)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_{\mu_1 \mu_2}^{(0)}(a) &\equiv m(a) \hat{\Gamma}_{(aa, 0)}^{\mu_1 \mu_2} \\
&= \delta_{J_1 J_2} \left\{ \hat{J}_1 (u_a^2 - v_a^2) \sum_b D_{ab}^2 \psi_{J_1}^{(\mu_1)}(ab) \psi_{J_2}^{(\mu_2)}(ab) \right\}. \quad (C.17)
\end{aligned}$$



H<sub>QQ</sub>からの寄与

$$\begin{aligned}
 V_X^{[QQ]}(\mu_1, \mu_2) &= \delta_{J_1 2} \delta_{J_2 2} \left\{ - \sum_{\rho_1 \rho_2 = \pi, \nu} \chi_2(\rho_1 \rho_2) q_{\mu_1}^{(2)}(\rho_1) q_{\mu_2}^{(2)}(\rho_2) \right\}, \\
 V_V^{[QQ]}(\mu_1, \mu_2) &= \delta_{J_1 2} \delta_{J_2 2} \left\{ - \frac{1}{2} \sum_{\rho_1 \rho_2 = \pi, \nu} \chi_2(\rho_1 \rho_2) q_{\mu_1}^{(2)}(\rho_1) q_{\mu_2}^{(2)}(\rho_2) \right\}, \\
 V_Y^{[QQ]}(\mu_1, \mu_2 \mu_3) &= \delta_{J_1 2} \Delta(J_1 J_2 J_3) \left\{ - \sum_{\rho_1 \rho_2 = \pi, \nu} \chi_2(\rho_1 \rho_2) q_{\mu_1}^{(2)}(\rho_1) \tau_{\mu_2 \mu_3}^{(2)}(\rho_2) \right\}, \\
 V_Z^{[QQ]}(\mu_1 \mu_2, \mu_3 \mu_4) &= \Delta(J_1 J_2 2) \Delta(J_3 J_4 2) \left\{ - \frac{1}{2} \sum_{\rho_1 \rho_2 = \pi, \nu} \chi_2(\rho_1 \rho_2) \tau_{\mu_1 \mu_2}^{(2)}(\rho_1) \tau_{\mu_3 \mu_4}^{(2)}(\rho_2) \right\} \quad (C.18)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tau_{\mu_1 \mu_2}^{(2)}(\rho) &\equiv \sum_{ab(\rho)} R(ab) \hat{\Gamma}_{(ab, 2)}^{\mu_1 \mu_2} \\
 &= \sum_{a \leq b(\rho)} D_{ab}^{-2} R(ab) \left\{ \hat{\Gamma}_{(ab, 2)}^{\mu_1 \mu_2} + (-)^{J_1 + J_2} \hat{\Gamma}_{(ab, 2)}^{\mu_2 \mu_1} \right\} \\
 &= (-)^{J_1 + J_2} \tau_{\mu_2 \mu_1}^{(2)}(\rho). \quad (C.19)
 \end{aligned}$$

(C.14)、(C.18)において使用した記号

$$\Delta(J_1 J_2 J_3) = \begin{cases} 1 & (\text{if } |J_1 - J_2| \leq J_3 \leq J_1 + J_2) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (C.20)$$

は、フォノン・モードの角運動量に対する三角条件を保証するためのものである。また、 $V_Y^{[P_2]}(\mu_1, \mu_2 \mu_3)$  および  $V_Z^{[P_2]}(\mu_1 \mu_2, \mu_3 \mu_4)$  の表現を書き下す際に、関係式

$$2 \sum_{ab(\rho)} q(ab) u_a v_b \hat{\Gamma}_{(ab, 2)}^{\mu_1 \mu_2} = q_{\mu_1 \mu_2}^{(+)}(\rho) + q_{\mu_1 \mu_2}^{(-)}(\rho), \quad (C.21)$$

$$2 \sum_{ab(\rho)} q(ab) v_a u_b \hat{\Gamma}_{(ab, 2)}^{\mu_1 \mu_2} = q_{\mu_1 \mu_2}^{(+)}(\rho) - q_{\mu_1 \mu_2}^{(-)}(\rho), \quad (C.22)$$

を利用した。



付録D 角運動量結合形式で書かれた対演算子のボソン・フェルミオン表現

フォノン表示で書かれた有効ハミルトニアンを、ボソン・フェルミオン展開する際に、付録Aで与えられた対演算子のボソン・フェルミオン表現を角運動量結合形式に直しておく必要がある。以下にその表現を与える。

J = 2 集団的フォノン演算子

$$\begin{aligned}
 \overline{X}_{c,2M} = & b_{c,2M} + s_c^{[1]} \sum_{\mathbf{k}} \frac{\widehat{k}}{2} C_{\mathbf{k}}(cccc) \left[ b_c^\dagger [b_c b_c]^{(\mathbf{k})} \right]_M^{(2)} \\
 & + s_c^{[2]} \sum_{n_1} \sum_{\mathbf{k}} \frac{\widehat{k}}{2} C_{\mathbf{k}}(cccn_1) \left[ b_c^\dagger [b_c X_{n_1}]^{(\mathbf{k})} \right]_M^{(2)} \\
 & + s_c^{[3]} \sum_{n_1} \sum_{\mathbf{k}} \frac{\widehat{k}}{2} C_{\mathbf{k}}(cn_1cc) \left[ X_{n_1}^\dagger [b_c b_c]^{(\mathbf{k})} \right]_M^{(2)} \\
 & + s_c^{[4]} \sum_{ef} \sum_{\mathbf{k}} \frac{\widehat{k}}{2} \widehat{\Gamma}_{(ef,\mathbf{k})}^{cc} \left[ b_c B_{\mathbf{k}}'(ef) \right]_M^{(2)} \\
 & + \Delta(\overline{X}_{c,2M}^{(2)})
 \end{aligned} \tag{D.1}$$

J = 2 非集団的フォノン演算子

$$\begin{aligned}
 \overline{X}_{n,2M} = & X_{n,2M} + s_n^{[1]} \sum_{\mathbf{k}} \frac{\widehat{k}}{2} C_{\mathbf{k}}(nccc) \left[ b_c^\dagger [b_c b_c]^{(\mathbf{k})} \right]_M^{(2)} \\
 & + s_n^{[2]} \sum_{n_1} \sum_{\mathbf{k}} \frac{\widehat{k}}{2} C_{\mathbf{k}}(nccn_1) \left[ b_c^\dagger [b_c X_{n_1}]^{(\mathbf{k})} \right]_M^{(2)} \\
 & + s_n^{[3]} \sum_{n_1} \sum_{\mathbf{k}} \frac{\widehat{k}}{2} C_{\mathbf{k}}(nn_1cc) \left[ X_{n_1}^\dagger [b_c b_c]^{(\mathbf{k})} \right]_M^{(2)} \\
 & + s_n^{[4]} \sum_{ef} \sum_{\mathbf{k}} \frac{\widehat{k}}{2} \widehat{\Gamma}_{(ef,\mathbf{k})}^{nc} \left[ b_c B_{\mathbf{k}}'(ef) \right]_M^{(2)} \\
 & + \Delta(\overline{X}_{n,2M}^{(2)})
 \end{aligned} \tag{D.2}$$



J = 0 非集团的フォノン演算子

$$\begin{aligned}
 \bar{X}_{n,00} = & X_{n,00} + s_n^{[1]} \hat{2} C_2(nccc) \left[ b_c^\dagger [b_c b_c]^{(2)} \right]^{(0)} \\
 & + s_n^{[2]} \sum_{(J_{n_1}=0 \sim 4)} \hat{2} C_2(nccn_1) \left[ b_c^\dagger [b_c X_{n_1}]^{(2)} \right]^{(0)} \\
 & + s_n^{[3]} \sum_{(J_{n_1}=0,2,4)} \hat{J}_{n_1} C_{J_{n_1}}(nn_1cc) \left[ X_{n_1}^\dagger [b_c b_c]^{(J_{n_1})} \right]^{(0)} \\
 & + s_n^{[4]} \sum_{ef} \hat{2} \hat{\Gamma}_{(ef,2)}^{nc} \left[ b_c B_2'(ef) \right]^{(0)} \\
 & + \Delta(\bar{X}_{n,00}^{(2)})
 \end{aligned} \tag{D.3}$$

J = 2 散乱演算子

$$\begin{aligned}
 \bar{B}_{2M}^{(1)\dagger}(ab) = & B_{2M}^{\dagger}(ab) + \hat{\Gamma}_{(ab,2)}^{cc} \left[ b_c^\dagger b_c \right]_M^{(2)} \\
 & + \sum_{(J_n=0 \sim 4)} \hat{\Gamma}_{(ab,2)}^{nc} \left[ X_n^\dagger b_c \right]_M^{(2)} \\
 & + \sum_{(J_n=0 \sim 4)} \hat{\Gamma}_{(ab,2)}^{cn} \left[ b_c^\dagger X_n \right]_M^{(2)}
 \end{aligned} \tag{D.4}$$

J = 0 散乱演算子

$$\begin{aligned}
 \bar{B}_{00}^{(1)}(aa) = & B_{00}^{\dagger}(aa) + \frac{1}{2} \hat{\Gamma}_{(aa,0)}^{cc} (b_c^\dagger \cdot b_c) \\
 & + \sum_{(J_n=2)} \frac{1}{2} \hat{\Gamma}_{(aa,0)}^{nc} \left[ (b_c^\dagger \cdot X_n) + (X_n^\dagger \cdot b_c) \right]
 \end{aligned} \tag{D.5}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{B}_{00}^{(3)}(aa) = & \sum_{\mu} \sum_{\mathbf{k}} s_{\mu}^{[s1]} \delta_{J2} \frac{2}{\hat{J}_n} \hat{\Gamma}_{(aa,0)}^{\mu c} C_{\mathbf{k}}(\mu ccc) \left( [b_c^\dagger b_c]^{(\mathbf{k})} \cdot [b_c b_c]^{(\mathbf{k})} \right) \\
 & + \sum_{\mu n} \sum_{\mathbf{k}} \left\{ \delta_{J2} \frac{\hat{k}}{2 \hat{J}_n} \hat{\Gamma}_{(aa,0)}^{\mu c} \left\{ s_{\mu}^{[s2]} C_{\mathbf{k}}(\mu ccn) + s_{\mu}^{[s3]} C_{\mathbf{k}}(\mu ncc) \right\} \right. \\
 & + \left. \delta_{JJ_n} (-)^{J_n} \frac{\hat{k}}{\hat{J}_n^2} \hat{\Gamma}_{(aa,0)}^{n\mu} s_{\mu}^{[s4]} C_{\mathbf{k}}(\mu ccc) \right\} \left[ \left( [b_c^\dagger b_c]^{(\mathbf{k})} b_c \right)^{(J_n)} \cdot X_n \right] + h.c. \\
 & + (\text{other coupling terms})
 \end{aligned} \tag{D.6}$$



(D.1)-(D.3)、(D.6)の高次展開項に現れている“C-係数”は、 $O(\epsilon^2)$ のオーダーの量であり、次のように定義されている。

$$C_J(\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4) = \hat{J}_1\hat{J}_2\hat{J}_3\hat{J}_4 \sum_{abcd} \psi_{J_1}^{(\mu_1)}(ab)\psi_{J_2}^{(\mu_2)}(cd)\psi_{J_3}^{(\mu_3)}(ac)\psi_{J_4}^{(\mu_4)}(bd) \\ \cdot \begin{Bmatrix} j_a & j_b & J_1 \\ j_c & j_d & J_2 \\ J_3 & J_4 & J \end{Bmatrix} D_{ab}D_{cd}D_{ac}D_{bd} \\ = \sum_{\mathbf{k}} \hat{k}^2 \begin{Bmatrix} J_1 & J_2 & J \\ J_3 & J_4 & k \end{Bmatrix} \hat{C}_{\mathbf{k}}(\mu_1\mu_4\mu_3\mu_2) \quad (D.7)$$

$$\hat{C}_{\mathbf{k}}(\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4) = \sum_{ab} \hat{\Gamma}_{(ab,\mathbf{k})}^{\mu_1\mu_2} \hat{\Gamma}_{(ab,\mathbf{k})}^{\mu_3\mu_4} \quad (D.8)$$

但し、(D.7)の右辺に限り、添え字“c”を一粒子軌道の意味で使用している。

この“C-係数”は、2フォノン状態 ( $\mu_1 \leq \mu_2$ )

$$|\mu_1\mu_2; JM\rangle_F = \frac{1}{\sqrt{1+\delta_{\mu_1\mu_2}}} \sum_{M_1M_2} \langle J_1M_1J_2M_2|JM\rangle X_{\mu_1}^\dagger X_{\mu_2}^\dagger |0\rangle_F \quad (D.9)$$

のノルムと、関係式

$${}_F\langle \mu_1\mu_2; JM | \mu_3\mu_4; JM \rangle_F = \delta_{\mu_1\mu_3} \delta_{\mu_2\mu_4} \\ - \frac{1}{\sqrt{(1+\delta_{\mu_1\mu_2})(1+\delta_{\mu_3\mu_4})}} C_J(\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4) \quad (D.10)$$

によって結び付けられている。

また、“C-係数”は、フォノン・モードを表す添え字に関して、次の入れ替え対称性を持つことが示される。

$$C_J(\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4) = (-)^{J_1+J_2+J} C_J(\underline{\mu_2\mu_1}\mu_3\mu_4) \\ = (-)^{J_3+J_4+J} C_J(\mu_1\mu_2\underline{\mu_4\mu_3}) \\ = C_J(\underline{\mu_3\mu_4} \mu_1\mu_2) \\ = (-)^{J_1+J_2+J_3+J_4} C_J(\underline{\mu_4\mu_3\mu_2\mu_1}) \quad (D.11)$$



付録 E 4 次のボソン演算子の組み替え

任意のハミルトニアンをボソン展開する際に現れる、ボソン演算子について4次の項は、行列要素の評価が簡単ないくつかの基本演算子で書き換えておくのが便利である。これを行うための系統だった方法は、すでに、Kishimoto-Tamura[KT72][KT76] および Sakamoto-Kishimoto[SK88] によって考案されている。ここでは、彼らの方法を参考にして、ボソン・フェルミオン展開を行う際に現れる、4次のボソン演算子を書き直す方法を提示する。

我々が、有効ハミルトニアンのボソン・フェルミオン展開を遂行すると、次のような2種類の4次のボソン演算子が現れる。

$$H_{31(k)}^{[B]} = ([b^\dagger b^\dagger]^{(k)} \cdot [b^\dagger b]^{(k)}) + ([b^\dagger b]^{(k)} \cdot [b b]^{(k)}), \quad (E.1)$$

$$H_{22(k)}^{[B]} = ([b^\dagger b^\dagger]^{(k)} \cdot [b b]^{(k)}) \quad (E.2)$$

これらの演算子は、“4次の基本演算子”(4.41)-(4.44)の線形結合で表現できることが証明されている。[KT72]

$$H_{31(k)}^{[B]} = g(k)H_{31}^{[B]}, \quad (E.3)$$

$$H_{22(k)}^{[B]} = g_{22P}(k)H_{22P}^{[B]} + g_{22N}(k)H_{22N}^{[B]} + g_{22J}(k)H_{22J}^{[B]} \quad (E.4)$$

$$g(k) = \frac{1}{2}\{1 + (-)^k\} \frac{1}{35}\{5\delta_{k0} + 2\hat{k}^2\}, \quad (E.5)$$

$$g_{22P}(k) = \frac{1}{2}\{1 + (-)^k\} \frac{1}{35}\{10\delta_{k0} - \hat{k}^2 + 10\hat{k}^2 W(2222; 1k)\}, \quad (E.6)$$

$$g_{22N}(k) = \frac{1}{2}\{1 + (-)^k\} \frac{1}{35}\{-5\delta_{k0} + 3\hat{k}^2 - 10\hat{k}^2 W(2222; 1k)\}, \quad (E.7)$$

$$g_{22J}(k) = \frac{1}{2}\{1 + (-)^k\} \frac{1}{105}\{5\delta_{k0} - \hat{k}^2 + 20\hat{k}^2 W(2222; 1k)\} \quad (E.8)$$

そこで、展開の際、 $i = 2(\rho)$ ,  $H_0, P_2(X), P_2(V), QQ(X), QQ(V)$ 、 $\rho = \pi, \nu$  に対し、係数

$$\begin{aligned} C^{[i]} &= \widehat{C}_0^{[i]} + C_+^{[i]} + C_-^{[i]}, \\ C_P^{[i]} &= 2\widehat{C}_1^{[i]} - C_+^{[i]} + 2C_-^{[i]}, \\ C_N^{[i]} &= -2\widehat{C}_1^{[i]} + 3C_+^{[i]} - C_-^{[i]}, \\ C_J^{[i]} &= 4\widehat{C}_1^{[i]} - C_+^{[i]} + C_-^{[i]} \end{aligned} \quad (E.9)$$

を定義しておくのが便利である。



ここで、 $0 \leq k \leq 4$  に対し、

$$\begin{aligned}
 \widehat{C}_k^{[2(\rho)]} &= \sum_{\mu} s_{\mu}^{[1]} q_{\mu}^{(2)}(\rho) \widehat{C}_k(\mu ccc), \\
 \widehat{C}_k^{[H_0]} &= \sum_{\mu} s_{\mu}^{[*1]} E(c, \mu) \widehat{C}_k(\mu ccc), \\
 \widehat{C}_k^{[P_2(X)]} &= \sum_{\mu} s_{\mu}^{[1]} V_X^{[P_2]}(c, \mu) \widehat{C}_k(\mu ccc), \\
 \widehat{C}_k^{[P_2(V)]} &= \sum_{\mu} s_{\mu}^{[1]} V_V^{[P_2]}(c, \mu) \widehat{C}_k(\mu ccc), \\
 \widehat{C}_k^{[QQ(X)]} &= \sum_{\mu} s_{\mu}^{[1]} V_X^{[QQ]}(c, \mu) \widehat{C}_k(\mu ccc), \\
 \widehat{C}_k^{[QQ(V)]} &= \sum_{\mu} s_{\mu}^{[1]} V_V^{[QQ]}(c, \mu) \widehat{C}_k(\mu ccc),
 \end{aligned} \tag{E.10}$$

$$\begin{aligned}
 C_{\pm}^{[i]} &= \sum_{l=0}^4 (\pm)^l \left(\frac{\widehat{l}}{2}\right)^2 \widehat{C}_l^{[i]}, \\
 C_{k,\pm}^{[i]} &= \sum_{l=0}^4 (\pm)^l \widehat{l}^2 W(2222; kl) \widehat{C}_l^{[i]}
 \end{aligned} \tag{E.11}$$

と定義されているとする。これらの係数は、 $C(\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4)$  および  $\widehat{C}(\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4)$  の定義から導かれる関係式

$$\begin{aligned}
 \widehat{C}_0^{[i]} = C_+^{[i]} = C_{0,-}^{[i]} &= \sum_{k=0}^4 \left(\frac{\widehat{k}}{2}\right)^2 C_{k,+}^{[i]}, \\
 C_{k,+}^{[i]} &= (-)^k C_{k,+}^{[i]} = \frac{1 + (-)^k}{2} C_{k,+}^{[i]}, \\
 C_{k,-}^{[i]} &= (-)^k \widehat{C}_k^{[i]}, \quad C_{0,\pm}^{[i]} = C_{\mp}^{[i]}, \\
 \widehat{C}_k^{[i]} &= \sum_{l=0}^4 \widehat{l}^2 W(2222; kl) C_{l,+}^{[i]},
 \end{aligned} \tag{E.12}$$



$$\begin{aligned}
C_{k,+}^{[2(\rho)]} &= \sum_{\mu} s_{\mu}^{[1]} q_{\mu}^{(2)}(\rho) C_k(\mu ccc) , \\
C_{k,+}^{[H_0]} &= \sum_{\mu} s_{\mu}^{[*1]} E(c, \mu) C_k(\mu ccc) , \\
C_{k,+}^{[P_2(X)]} &= \sum_{\mu} s_{\mu}^{[1]} V_X^{[P_2]}(c, \mu) C_k(\mu ccc) , \\
C_{k,+}^{[P_2(V)]} &= \sum_{\mu} s_{\mu}^{[1]} V_V^{[P_2]}(c, \mu) C_k(\mu ccc) , \\
C_{k,+}^{[QQ(X)]} &= \sum_{\mu} s_{\mu}^{[1]} V_X^{[QQ]}(c, \mu) C_k(\mu ccc) , \\
C_{k,+}^{[QQ(V)]} &= \sum_{\mu} s_{\mu}^{[1]} V_V^{[QQ]}(c, \mu) C_k(\mu ccc) \quad (E.13)
\end{aligned}$$

を満足していることが証明できる。以上で定義された係数および関係式を利用すると、非常にコンパクトな表現

$$\sum_{k=0}^4 C_{k,+}^{[i]} H_{31(k)}^{[B]} = \left( \frac{1}{7} C^{[i]} \right) H_{31}^{[B]} , \quad (E.14)$$

$$\sum_{k=0}^4 C_{k,+}^{[i]} H_{22(k)}^{[B]} = \left( \frac{1}{7} C_P^{[i]} \right) H_{22P}^{[B]} + \left( \frac{1}{7} C_N^{[i]} \right) H_{22N}^{[B]} + \left( \frac{1}{21} C_J^{[i]} \right) H_{22J}^{[B]} \quad (E.15)$$

が得られる。我々が、ボソン・フェルミオン展開法を遂行する際に取り扱う4次のボソン演算子は全て、(E.14) または (E.15) の左辺の形で現れる。ゆえに、この公式を使えば、右辺のように、基本演算子の一次結合として展開の表現が簡潔にまとめられ、あとは、(E.9) の係数さえ用意しておけば、これらの行列要素は簡単に計算できる。



付録F ボソン・ハミルトニアン の展開係数

ここでは、(4.36) で定義されている、純粋な集団的ボソン・ハミルトニアン  $H^{[B]}$  の展開係数の具体的な表現を与える。

$$h_{11}^{[B]} = h_{11}^{[B,H_0]} + h_{11}^{[B,P_0]} + h_{11}^{[B,P_2]} + h_{11}^{[B,M]} + h_{11}^{[B,QQ]}$$

$$h_{11}^{[B,H_0]} = E(c, c)$$

$$h_{11}^{[B,\tau_0]} = \frac{2}{2} \sum_{n_1 n_2} s_{n_1}^{[2]} V_{X_B}^{[\tau_0]}(n_1, n_2) \widehat{C}_0(n_1 n_2 c c) + \frac{1}{5} \sum_{\mu} V_Z^{[\tau_0]}(\mu c, \mu c)$$

(for  $\tau_0 = P_0, M$ )

$$\begin{aligned} h_{11}^{[B,\tau_2]} &= V_X^{[\tau_2]}(c, c) + 4 \sum_{\mu} s_{\mu}^{[1]} V_{X_B}^{[\tau_2]}(c, \mu) \widehat{C}_0(\mu c c c) \\ &\quad + 2 \sum_{n \mu} s_{\mu}^{[2]} V_{X_B}^{[\tau_2]}(n, \mu) \widehat{C}_0(\mu n c c) \\ &\quad + \sum_{\mu} V_Z^{[\tau_2]}(c \mu, c \mu) \end{aligned}$$

(for  $\tau_2 = P_2, QQ$ )

(F.1)

$$h_{20}^{[B]} = h_{20}^{[B,P_0]} + h_{20}^{[B,P_2]} + h_{20}^{[B,M]} + h_{20}^{[B,QQ]}$$

$$h_{20}^{[B,\tau_0]} = \sum_{n_1 n_2} s_{n_1}^{[3]} V_V^{[\tau_0]}(n_1, n_2) \widehat{C}_2(n_1 c c n_2)$$

(for  $\tau_0 = P_0, M$ )

$$\begin{aligned} h_{20}^{[B,\tau_2]} &= V_V^{[\tau_2]}(c, c) + s_c^{[1]} V_V^{[\tau_2]}(c, c) C_0(c c c c) \\ &\quad + 2 \sum_n s_c^{[3]} V_V^{[\tau_2]}(c, n) C_0(c n c c) \\ &\quad + \sum_{n_1 n_2} s_{n_1}^{[3]} V_V^{[\tau_2]}(n_1, n_2) C_0(n_1 n_2 c c) \end{aligned}$$

(for  $\tau_2 = P_2, QQ$ )

(F.2)

$$h_{21}^{[B]} = h_{21}^{[B,P_2]} + h_{21}^{[B,QQ]}$$



$$h_{21}^{[B, \tau_2]} = V_Y^{[\tau_2]}(c, cc) \quad (\text{for } \tau_2 = P_2, QQ) \quad (F.3)$$

$$h_{30}^{[B]} = 0 \quad (F.4)$$

$$h_{22P}^{[B]} = h_{22P}^{[B, H_0]} + h_{22P}^{[B, P_2]} + h_{22P}^{[B, QQ]}$$

$$h_{22P}^{[B, H_0]} = \frac{2}{7} C_P^{[H_0]}$$

$$h_{22P}^{[B, \tau_2]} = \frac{2}{7} C_P^{[\tau_2(X)]} + \frac{2}{7} V_Z^{[\tau_2]}(cc, cc) \quad (\text{for } \tau_2 = P_2, QQ) \quad (F.5)$$

$$h_{22N}^{[B]} = h_{22N}^{[B, H_0]} + h_{22N}^{[B, P_0]} + h_{22N}^{[B, P_2]} + h_{22N}^{[B, M]} + h_{22N}^{[B, QQ]}$$

$$h_{22N}^{[B, H_0]} = \frac{2}{7} C_N^{[H_0]}$$

$$h_{22N}^{[B, \tau_0]} = \frac{1}{5} V_Z^{[\tau_0]}(cc, cc) \quad (\text{for } \tau_0 = P_0, M)$$

$$h_{22N}^{[B, \tau_2]} = \frac{2}{7} C_N^{[\tau_2(X)]} \quad (\text{for } \tau_2 = P_2, QQ) \quad (F.6)$$

$$h_{22J}^{[B]} = h_{22J}^{[B, H_0]} + h_{22J}^{[B, P_2]} + h_{22J}^{[B, QQ]}$$

$$h_{22J}^{[B, H_0]} = \frac{2}{21} C_J^{[H_0]}$$

$$h_{22J}^{[B, \tau_2]} = \frac{2}{21} C_J^{[\tau_2(X)]} + \frac{1}{14} V_Z^{[\tau_2]}(cc, cc) \quad (\text{for } \tau_2 = P_2, QQ) \quad (F.7)$$

$$h_{31}^{[B]} = h_{31}^{[B, P_2]} + h_{31}^{[B, QQ]}$$

$$h_{31}^{[B, \tau_2]} = \frac{2}{7} C^{[\tau_2(V)]} \quad (\text{for } \tau_2 = P_2, QQ) \quad (F.8)$$

$$h_{40}^{[B]} = 0 \quad (F.9)$$



付録G ボソン・フェルミオン結合ハミルトニアン<sup>の</sup>展開係数

ここでは、(4.54) で与えられているボソン・フェルミオン結合ハミルトニアン  $H^{[BF]}$  の、 $O(\epsilon^1)$  のオーダーまでの展開係数の具体的な表現を与える。

$$h_{10}^{[BF]}(n) = h_{10}^{[BF, H_0]}(n) + h_{10}^{[BF, P_2]}(n) + h_{10}^{[BF, QQ]}(n)$$

$$h_{10}^{[BF, H_0]}(n) = E(c, n)$$

$$h_{10}^{[BF, \tau_2]}(n) = V_X^{[\tau_2]}(c, n) \quad (\text{for } \tau_2 = P_2, QQ)$$

(G.1)

$$h_{01}^{[BF]}(n) = h_{01}^{[BF, P_2]}(n) + h_{01}^{[BF, QQ]}(n)$$

$$h_{01}^{[BF, \tau_2]}(n) = 2V_V^{[\tau_2]}(c, n)$$

(for  $\tau_2 = P_2, QQ$ )

(G.2)

$$h_{20}^{[BF]}(n) = h_{20}^{[BF, P_2]}(n) + h_{20}^{[BF, QQ]}(n)$$

$$h_{20}^{[BF, \tau_2]}(n) = \frac{\hat{2}}{\hat{J}_n} V_Y^{[\tau_2]}(c, nc)$$

(for  $\tau_2 = P_2, QQ$ )

(G.3)

$$h_{11}^{[BF]}(n) = h_{11}^{[BF, P_0]}(n) + h_{11}^{[BF, P_2]}(n) + h_{11}^{[BF, M]}(n) + h_{11}^{[BF, QQ]}(n)$$

$$h_{11}^{[BF, \tau_0]}(n) = V_Y^{[\tau_0]}(n, cc)$$

(for  $\tau_0 = P_0, M$ )

$$h_{11}^{[BF, \tau_2]}(n) = (-)^{J_n} \frac{\hat{2}}{\hat{J}_n} V_Y^{[\tau_2]}(c, cn) + V_Y^{[\tau_2]}(n, cc)$$

(for  $\tau_2 = P_2, QQ$ )

(G.4)

$$h_{02}^{[BF]}(n) = 0$$

(G.5)



ここでは、粒子・空孔型の四重極演算子  $\widehat{Q}_{2M}(\rho)$  の、ボソン・フェルミオン表現

$$\overline{Q}_{2M}(\rho) = Q_{2M}^{[B]}(\rho) + Q_{2M}^{[F]}(\rho) + Q_{2M}^{[BF]}(\rho). \quad (H.1)$$

を与える。

まず、純粋なボソン部分の  $O(\epsilon^2)$  のオーダーまでの表現は、次のような形にまとめられる。

$$Q_{2M}^{[B]}(\rho) = \sum_{mm'i} q_{mm'i}^{[B]}(\rho) Q_{mm'i}^{[B]} \quad (H.2)$$

$$\begin{aligned} Q_{10}^{[B]} &= b_{2M}^\dagger + b_{2M}^{\sim}, \\ Q_{11}^{[B]} &= [b^\dagger b]_M^{(2)}, \\ Q_{20}^{[B]} &= [b^\dagger b^\dagger]_M^{(2)} + [b b]_M^{(2)}, \\ Q_{21P}^{[B]} &= (b^\dagger \cdot b^\dagger) b_{2M}^{\sim} + b_{2M}^\dagger (b \cdot b), \\ Q_{21N}^{[B]} &= b_{2M}^\dagger (b^\dagger \cdot b) + (b^\dagger \cdot b) b_{2M}^{\sim}, \\ Q_{21J}^{[B]} &= [H_{22J}^{[B]}, b_{2M}^\dagger] + [b_{2M}^{\sim}, H_{22J}^{[B]}], \\ Q_{30}^{[B]} &= b_{2M}^\dagger (b^\dagger \cdot b^\dagger) + (b \cdot b) b_{2M}^{\sim} \end{aligned} \quad (H.3)$$

$$\begin{aligned} q_{10}^{[B]}(\rho) &= q_c^{(2)}(\rho), & q_{11}^{[B]}(\rho) &= r_{cc}^{(2)}(\rho), & q_{20}^{[B]}(\rho) &= 0, \\ q_{21P}^{[B]}(\rho) &= \frac{1}{7} C_P^{[2(\rho)]}, & q_{21N}^{[B]}(\rho) &= \frac{1}{7} C_N^{[2(\rho)]}, & q_{21J}^{[B]}(\rho) &= \frac{1}{42} C_J^{[2(\rho)]}, \\ q_{30}^{[B]}(\rho) &= 0. \end{aligned} \quad (H.4)$$

但し、3次のボソン項の表式を導く際に、次の恒等式 [SK88] を利用した。

$$\begin{aligned} [[b^\dagger b^\dagger]^{(k)} b]_M^{(2)} &= \frac{\widehat{2}}{k} \left\{ g_{22P}(k) (b^\dagger \cdot b^\dagger) b_{2M}^{\sim} + g_{22N}(k) b_{2M}^\dagger (b^\dagger \cdot b) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} g_{22J}(k) [H_{22J}^{[B]}, b_{2M}^\dagger] \right\}. \end{aligned} \quad (H.5)$$

純粋なフェルミオン部分の  $O(\epsilon^0)$  までの表現は、

$$Q_{2M}^{[F]}(\rho) = \sum_n q_n^{(2)}(\rho) (X_{n,2M}^\dagger + X_{n,2M}^{\sim}). \quad (H.6)$$



で与えられる。

ボソン・フェルミオン結合部分の  $O(\epsilon^1)$  までの表現は、

$$Q_{2M}^{[BF]}(\rho) = \sum_n \tau_{nc}^{(2)}(\rho) [X_n^\dagger b]_M^{(2)} + \sum_n \tau_{cn}^{(2)}(\rho) [b^\dagger X_n]_M^{(2)} \quad (H.7)$$

で与えられる。



## References

- [BK68] M.Baranger and K.Kumar, Nucl.Phys.A122(1968),241
- [Bo51] A.Bohr, Phys.Rev.81(1951),134
- [Bo52] A.Bohr, Mat.Fys.Medd.Dan.Vid.Selsk.26, no.14(1952)
- [BM53] A.Bohr and B.R.Mottelson, Mat.Fys.Medd.Dan.Vid.Selsk.27, no.16(1953)
- [BS69] D.R.Bes and R.A.Sorensen, Adv.in Nucl.Phys. vol.2(1969),129
- [Fe58] H.Feshbach, Ann. of Phys.5(1958),357 ; 19(1962),287
- [HJJ76] G.Holzwarth, D.Janssen and R.V.Jolos, Nucl.Phys.A261(1976),1
- [HJS49] O.Haxel, J.H.D.Jensen, and H.E.Suess, Phys.Rev.75(1949),1766
- [Ku88] R.Kuchta, Nucl.Phys.A489(1988),1
- [KlM91] A.Klein and E.R.Marshalek, Rev.Mod.Phys.63(1991),375
- [KM60] M.Kobayasi and T.Marumori, Prog.Theor.Phys.23(1960),387
- [KM93] A.Kajiyama and Y.Miyanishi, RCNP report, RCNP-P-127(1993),49
- [KM95] A.Kajiyama and Y.Miyanishi, Prog.Theor.Phys.93(1995),653
- [KS63] L.S.Kisslinger and R.A.Sorensen, Rev.Mod.Phys.35(1963),853
- [KT72] T.Kishimoto and T.Tamura, Nucl.Phys.A192(1972),246
- [KT76] T.Kishimoto and T.Tamura, Nucl.Phys.A270(1976),317
- [KT83] T.Kishimoto and T.Tamura, Phys.Rev.C27(1983),341  
 T.Tamura and T.Kishimoto, Prog.Theor.Phys.Suppl.74& 75(1983),282
- [KTK83] T.Kishimoto, T.Tamura and T.Kammuri,  
 Prog.Theor.Phys.Suppl.74&75 (1983),170
- [KTM95] A.Kajiyama, K.Taniguchi and Y.Miyanishi,  
 Research Reports of Suzuka University of  
 Medical Science and Technology, Number 2(1995),109
- [LH75] S.G.Lie and G.Holzwarth, Phys.Rev.C12(1975),1035
- [Li83] C.T.Li, Phys.Lett.120B(1983),251
- [Ma80] E.R.Marshalek, Nucl.Phys.A347(1980),253
- [May49] M.G.Mayer, Phys.Rev.75(1949),209
- [MG63] H.Morinaga and P.C.Gugelot, Nucl.Phys.46(1963),210
- [MMSK80] T.Marumori, T.Maskawa, F.Sakata, and A.Kuriyama,  
 Prog.Theor.Phys.64(1980),1294
- [MT92] Y.Miyanishi and K.Taniguchi, private communication



- [MYT64] T.Marumori, M.Yamamura and T.Tokunaga,  
Prog.Theor.Phys.31(1964),1009
- [Ni69] S.G.Nilsson et al., Nucl.Phys.A131(1969),1
- [RS80] P.Ring and P.Schuck, The Nuclear Many-Body Problem (Springer,1980)
- [Sa67] M.Sakai, Nucl.Phys.A104(1967),301
- [SK88] H.Sakamoto and T.Kishimoto, Nucl.Phys.A486(1988),1
- [SK89a] H.Sakamoto and T.Kishimoto, Nucl.Phys.A501(1989),205
- [SK89b] H.Sakamoto and T.Kishimoto, Nucl.Phys.A501(1989),242
- [SK90] H.Sakamoto and T.Kishimoto, Phys.Lett.B245(1990),321
- [SK91] H.Sakamoto and T.Kishimoto, Nucl.Phys.A528(1991),73
- [T83] T.Tamura, Phys.Rev.C28(1983),2480
- [Ta85] K.Takada, Nucl.Phys.A439(1985),489
- [Ta86] K.Takada, Phys.Rev.C34(1986),750
- [Ta88] K.Takada, Phys.Rev.C38(1988),2450
- [TKM94] K.Taniguchi, A.Kajiyama and Y.Miyanishi, Prog.Theor.Phys.92(1994),975
- [TM90] K.Taniguchi and Y.Miyanishi, Prog.Theor.Phys.84(1990),568
- [TM91] K.Taniguchi and Y.Miyanishi, Prog.Theor.Phys.86(1991),151
- [TS91] K.Takada and Y.R.Shimizu, Nucl.Phys.A523(1991),354
- [TT86] K.Takada and S.Tazaki, Nucl.Phys.A448(1986),56
- [TTT87] H.Tsukuma, H.Thorn and K.Takada, Nucl.Phys.A466(1987),70
- [TU61] T.Tamura and T.Udagawa, Prog.Theor.Phys.26(1961),947
- [TY87] K.Takada and K.Yamada, Nucl.Phys.A462(1987),561
- [TYT89] K.Takada, K.Yamada and H.Tsukuma, Nucl.Phys.A496(1989),224
- [YT88] K.Yamada and K.Takada, Nucl.Phys.A480(1988),143
- [YTT89] K.Yamada, K.Takada and H.Tsukuma, Nucl.Phys.A496(1989),239