

報告番号 甲第 3590 号

学位論文
ダルブー共変な $(2+1)$ 次元の
ソリトン方程式と局在解

1996年
(今井 健二)

①

学位論文

ダルブー共変な $(2+1)$ 次元の
ソリトン方程式と局在解

1996年

(今井 健二)

目次

1	Introduction	1
2	Darboux 変換及び binary Darboux 変換	7
2.1	線形方程式系	7
2.2	Darboux 変換	8
2.3	Binary Darboux 変換	11
2.4	Darboux 共変条件	14
3	Darboux 共変な $(2+1)$ 次元の soliton 方程式の導出	15
3.1	積分可能条件	15
3.2	DT1, BDT1 に対して共変な soliton 方程式の導出	16
3.3	DT2, BDT2 に対して共変な soliton 方程式の導出	18
4	Darboux 共変な $(2+1)$ 次元の soliton 方程式の multi-soliton 解	22
4.1	DT1, BDT1 に対して共変な soliton 方程式の multi-soliton 解	22
4.1.1	DT1 に対して共変な soliton 方程式の場合	23
4.1.2	BDT1 に対して共変な soliton 方程式の場合	25
4.2	DT2, BDT2 に対して共変な soliton 方程式の multi-soliton 解	26
4.2.1	DT2 に対して共変な soliton 方程式の場合	27
4.2.2	BDT2 に対して共変な soliton 方程式の場合	30
5	$(2+1)$ 次元の soliton 方程式の局在解	32
5.1	Darboux 変換に対して共変な soliton 方程式の局在解	32
5.1.1	DT1 に対して共変な soliton 方程式の場合	33
5.1.2	DT2 に対して共変な soliton 方程式の場合	33
5.2	BDT1 に対して共変な soliton 方程式の局在解	34
5.3	Ishimori-II 方程式の lump 解	37
5.3.1	Multi-vortex 解	37
5.3.2	その他の lump 解	38
6	Conclusions	42

A Multi-soliton 解の構成	44
A.1 DT1, BDT1 に対して共変な soliton 方程式	44
A.1.1 DT1 に対して共変な場合	44
A.1.2 BDT1 に対して共変な場合	46
A.2 DT2, BDT2 に対して共変な soliton 方程式	49
A.2.1 DT2 に対して共変な場合	49
A.2.2 BDT2 に対して共変な場合	50

Abstract

空間 1 次元のソリトン方程式に比べて, 空間 2 次元のソリトン方程式とその解についてはまだ知られていないことが多い. 例えば, 多くの $(1+1)$ 次元のソリトン方程式を系統的に導出する方法として AKNS, KN, WKI などのスキームが知られているが, $(2+1)$ 次元のソリトン方程式を導出する一般的なスキームはまだ見つかっていない. しかし例えば, $(1+1)$ 次元のソリトン方程式である非線形 Schrödinger 方程式, Heisenberg 方程式に対応する $(2+1)$ 次元のソリトン方程式である Davey-Stewartson (DS) 方程式, Ishimori (Ish) 方程式が, Lax pair と呼ばれる一組の線形方程式系の積分可能条件から導出されることは分かっている.

本論文では, これらの Lax pair を一般化した一組の線形偏微分方程式系にダルブー共変条件を課すことにより, 既知の DS 方程式, Ish 方程式のみならず, $(1+1)$ 次元の m -KdV 方程式の $(2+1)$ 次元版を含む未知の高次のソリトン方程式も系統的に導出した. さらに, ダルブー変換を用いてこれらの $(2+1)$ 次元のソリトン方程式の dromion, vortex 等の 2 元的に局在する解を含む multi-soliton 解を構成した. 特に, Ishimori 方程式の soliton 解として vortex-vortex の相互作用のみならず, vortex と antivortex の相互作用をも記述する multi-soliton 解などの新しい解を見出した.

Chapter 1

Introduction

一般に非線形発展方程式の厳密解を求めるのは非常に難しい。しかし $(1+1)$ 次元（空間 1 次元 + 時間 1 次元）の非線形偏微分方程式の場合には、ある特殊な一群が soliton と呼ばれる大域的な厳密解を持つことが知られている。soliton とは次の性質を持つ大域的な解のことである。

- (1) 空間的に局在している孤立波であり、その性質（速さや高さ等）を変えずに進行する。
- (2) soliton 同士の衝突に対して壊れずに安定である、即ちその個別性を保持している。

soliton 解を持つ非線形発展方程式は多数存在している。例えば、Korteweg-de Vries (K-dV) 方程式、nonlinear Schrödinger (NS) 方程式、modified K-dV (m-KdV) 方程式、sine-Gordon (SG) 方程式、Heisenberg 強磁性体 (Heisenberg) 方程式…。これらの方程式の中には水の表面波、プラズマ波動、非線形光学等いろいろな物理的な場面に登場するものが多い。実際、上で紹介した方程式は特定の物理系に対して初めて発見された (soliton 方程式の一般論については文献 [1], [2], [3], [4] などを参照)。

上で説明した soliton 方程式は幾つかの共通の性質を持つ。

- (1) 任意の個数の soliton の間の相互作用（衝突）を表す大域解を持っている。この解を multi-soliton 解という。
- (2) 無限個の保存則を持っている。
- (3) ある一組の線形方程式系に対する積分可能条件から導出される。この線形方程式系を Lax pair という。

これらの諸性質は互いに密接に関連している。

性質 (3) は multi-soliton 解を構成するのにしばしば使われている。性質 (3) を用いて解を求める際の重要な点は非線形発展方程式 (soliton 方程式) を解くことをそれに付随する線形方程式系 (Lax pair) を解くことに帰着させることである。そのような方法の代表的なものとして逆散乱法がある。逆散乱法は非線形方程式の初期値問題を解析的に解くための (ほとんど唯一の) 方法である。例として、1 次元 Schrödinger 方程式と波動関数の時間

発展を表す線形偏微分方程式から成る一組の線形方程式系を考える [5][6]. その積分可能条件 (2つの線形方程式系が同時に解を持つための条件) からポテンシャルの時間発展方程式として K-dV 方程式が得られる, つまり上の線形方程式系は K-dV 方程式の Lax pair である. K-dV 方程式の初期値問題を解くためには次の手順を進めばよい. まず時刻 $t=0$ における Schrödinger 方程式の散乱問題を解き, その時刻の散乱データ (反射係数, 離散固有値, 規格化定数) を求める. 続いて, 波動関数の時間発展方程式から散乱データの時間発展を求め, 時刻 $t=t$ での散乱データを求める. 最後に時刻 $t=t$ での散乱データからその時刻のポテンシャルを再構成する. 最後の手順は逆散乱問題といい, これが解けるかがこの方法の核心であるが, 今は Gel'fand-Levitan-Marchenko (GLM) 方程式という線形積分方程式に帰着する. こうして時刻 $t=0$ におけるポテンシャルから時刻 $t=t$ におけるポテンシャルを求めることが出来た. Schrödinger 方程式のポテンシャルは K-dV 方程式の従属変数であったので, K-dV 方程式の初期値問題は幾つかの線形方程式を解くことに分解され, (少なくとも理論上は) 解けたことになる. しかし一般の初期値問題を具体的に解くことはやはり難しい. ところが無反射ポテンシャルと呼ばれる反射係数 $=0$ のポテンシャルが初期値の場合には解くことができ, その無反射性はいつまでも保持し続けることが分かる. これが上で述べた multi-soliton 解であり, 個々の soliton が離散固有値に対応している. 反射係数 $\neq 0$ の場合には離散固有値に対応する soliton 以外に連続固有値からの寄与であるさざ波と呼ばれる振幅が小さい (従ってほとんど線形の) 波が現われる.

この方法は他の (1+1) 次元の soliton 方程式に対しても適用される. 例えば, Schrödinger 方程式とその時間発展偏微分方程式の組の代わりに, 或る 2 成分の波動関数についての固有値方程式と波動関数の時間発展方程式 (簡単のためこちらも固有値方程式の形で与える) の組を考える. これは AKNS scheme と呼ばれており, 時間発展方程式の次数の与え方によって NS 方程式, m-KdV 方程式, SG 方程式, Heisenberg 方程式等の Lax pair になっている (線形方程式の係数が soliton 方程式の従属変数である) [7][8][9]. また固有値方程式を別のタイプに変えたものも知られており, KN scheme や WKI scheme 等と呼ばれている. それらは derivative nonlinear Schrödinger (DNS) 方程式, massive Thirring 方程式, 弾性棒内を伝わる波動を記述する方程式等の (1+1) 次元の soliton 方程式の Lax pair になっている [10][11]. そして AKNS scheme, KN scheme, WKI scheme に対しても逆散乱法が適用できることが分かっており, その soliton 解が構成されている.

逆散乱法は或る与えられた非線形発展方程式の解を求めるのにはあまり適していない. というのは, その非線形発展方程式の Lax pair を探すのが非常に難しい (存在しない場合が多い) からである. むしろ散乱問題及び逆散乱問題を解くことができる固有値方程式を探し出して, 最初に与えておく. そして固有関数の時間発展方程式を一般的な形式で (固有値の有限べき級数展開の形で) 与え, それらの積分可能条件から逆散乱法で解くことのできる非線形発展方程式 (と固有関数の時間発展方程式) を導出するという方法をとる. こうすれば固有関数の時間発展方程式の (中の固有値の) 次数を上げていくことにより (1+1) 次元の soliton 方程式が次々と求められる. 実際 AKNS scheme, KN scheme, WKI scheme ではそのようにして (1+1) 次元の soliton 方程式のグループを導く.

それでは, 固有値方程式も一般的な形式で与えた場合はどうなるのであろうか. つまり, 逆散乱法で解けるかどうかは後回しにして, 固有値の勝手な有限べき級数展開の形で線形

方程式系を最初に与えておいて、その積分可能条件から非線形方程式 (soliton 方程式) を系統的に導出することを考えるのである。この場合、soliton 方程式はおろか閉じた方程式さえも導くことはできない。その理由は積分可能条件だけでは線形方程式の係数 (ポテンシャル) に任意函数の不定性が残るからである。従って積分可能条件が閉じた方程式になるためには、線形方程式に何らかの制限を新たに課す必要がある。しかもその制限は閉じた方程式を解く事と結びついていたほうがよい。例えば「固有値方程式の散乱問題、逆散乱問題が解ける」というのもその一つの制限である。しかしここでは Darboux 変換に関連した制限を課すことを考える。

Darboux 変換というのは線形方程式に対する一種の gauge 変換である。まず、線形方程式の解 (波動函数) に関しては線形の変換を与える。例えば、固有値方程式の場合には固有値についての 1 次函数を波動函数に掛ける形で与えればよい。そして、その変換に対して線形方程式が共変である (不変ではない) ように線形方程式の係数 (ポテンシャル) の変換を決めるのである (この変換は Sturm-Liouville 方程式を解くために G. Darboux によって最初に導入されたため、その名が付いている [12])。従って DT による係数の変換が soliton 方程式の一つの解から別の解への変換を与えることになる。例えば、はじめに soliton 方程式の (0 のような) 自明な解を与えると、DT によって 1-soliton 解へと変換される。もう一度変換すると、2-soliton 解へと変換される。こうして DT を繰り返して行くと multi-soliton 解が構成される [13]。DT は逆散乱法のように複雑な解析的手続きを経なくても multi-soliton 解をほとんど代数的操作だけで構成することができる。実際、波動函数の線形変換から直接に線形方程式の係数の変換を求めるだけである。このような DT に対する共変条件を一般的な形式の線形方程式系に課すべき制限とすれば、DT 共変な soliton 方程式が得られる。H. Hayashi と K. Nozaki はそのようにして $su(2)$ 線形系から AKNS scheme や KN scheme を含む広い $(1+1)$ 次元の soliton 方程式のグループを系統的に導出した [14] (ただしその中に WKI scheme は含まれていない。WKI scheme と DT の関係については未だ不明である)。本論文では彼らの研究を $(2+1)$ 次元 (空間 2 次元 + 時間 1 次元) の soliton 方程式へと拡張することを試みる。その前に $(2+1)$ 次元の soliton 方程式について知られていることをレビューする。

$(2+1)$ 次元の soliton 方程式は $(1+1)$ 次元のそれに比べると知られているものが少ないが、K-dV 方程式、NS 方程式、Heisenberg 方程式に対応するものとして Kadomtsev-Petviashvili (KP) 方程式、Davey-stewartson (DS) 方程式、Ishimori (Ish) 方程式等が知られている [15][16][17]。KP 方程式は以下の方程式である。

$$(u_t + u_{xxx} + 6uu_x)_x + 3\varepsilon^2 u_{yy} = 0.$$

ここで $\varepsilon = -i$ のときを KP-I 方程式といい、 $\varepsilon = 1$ のときを KP-II 方程式という。また DS 方程式、Ish 方程式はそれぞれ式 (3.14)、(3.26) であり、両方とも I, II の 2 種類のタイプが知られている。これらの方程式は KP 方程式以外は、2 個の従属変数を持つ偏微分方程式の組であり、一見複雑な形をしているが、必ずしも物理的に無意味であるとは言えない。実際、KP 方程式は K-dV 方程式の記述する空間 1 次元の物理系 (例えば、浅い水の波、イオン音波等) に横方向の摂動を加えた場合の方程式として、DS 方程式は水の表面波等で搬送波の

空間 2 次元的な変調を記述する方程式として導出されており、また Ishi 方程式は 2 次元空間の古典スピン系に対するモデル方程式として知られている。

まず、これらの $(2+1)$ 次元の soliton 方程式の Lax pair と逆散乱法について述べる。Lax pair は空間 2 次元の線形偏微分方程式と波動関数の時間発展偏微分方程式で構成されている [18][19][21][17]。これらは空間 1 次元の固有値方程式と時間発展方程式で固有値を横方向（空間の新しい方向）の偏微分作用素に置き換えたものである。実際、こうしなければならないという必然性はないが、少なくともこの操作によって $(2+1)$ 次元へ拡張されている事は明らかである。このような Lax pair を用いて逆散乱法を考えることはできる。しかし $(2+1)$ 次元の場合には以下に述べるような問題が生じるため、この方法は格段に難しくなる。 $(1+1)$ 次元の場合には、無限遠方でのポテンシャル（soliton 方程式の従属変数）の値が 0 の場合の散乱問題と逆散乱問題を考えればよかった。 $(2+1)$ 次元においても同様にして逆散乱法を構成する事はできるし、一応初期値問題を解く事は可能である。しかし、解いてみても soliton のような興味ある解を導き出すことができない。このことを物理的に説明すると、初期値として与えられた（多次元の）空間の全方向に局在している波動は分散の効果ですべての方向に広がろうとする。非線形の効果はその動径方向の形を保とうとするが、全体が放射状に広がるため、結局、波形を保つ事はできない。実際、以下に述べるような安定に存在している解を見てみると、line soliton は無限遠方でも有限な値を取るし、空間 2 次元的な局在解であってもすべての従属変数が無限遠方で減衰しているものはあまりない。従って逆散乱法を使って上のような解を構成するためには、無限遠方での非自明な境界条件を考慮に入れなければならないといけなくなる。

一方、散乱問題を考えずに（従って境界条件の困難を回避して）逆散乱法（の一部）を使って $(2+1)$ 次元の soliton 方程式の解を求める方法が考えられている。この方法は dressing method（または ZS scheme）と呼ばれている [19]。まず逆散乱法で解くために重要な役割を演じている GLM 方程式という積分方程式が 2 個の積分作用素の関係式に帰着される事に注目する。そして Lax pair を作っている 2 個の微分作用素をそれぞれ定数係数の部分と変数係数（soliton 方程式の従属変数）の部分に分ける。前者を undressed operator、後者を dressed operator と呼ぶ。2 個の積分作用素の内 1 個は undressed operator と交換可能であると考えて、その積分核の満たすべき線形方程式を導く。もう 1 個は dressed operator と関連づけて、soliton 方程式の従属変数をその積分核で表す。こうして soliton 方程式の解を構成することができる。即ち、まず線形方程式を解いて 1 個目の積分核を求め、次に積分方程式を解いて 2 個目の積分核を求め、最後に積分核による従属変数の表現式から解を求める。この求め方は逆散乱法の後半部分を抽出したものであると考えられ、初期値問題を解く事は難しいが、より広いクラスの方程式に対して適用することができる。

次に $(2+1)$ 次元の soliton 方程式の multi-soliton 解について述べる [24]。まず当然ではあるが、対応する $(1+1)$ 次元の soliton 方程式の soliton 解を含んでいる。それは 1 次元方向にのみ局在しており、無限に長いまっすぐな紐のようであるため、line soliton 解と呼ばれている。個々の line soliton はその速さや向きや振幅を変える事はない。しかし複数の line soliton が相互作用する場合には空間 2 次元特有の性質が現われる。例えば、2 本の line soliton が相互作用している、つまり 2 本の line が交差している場合には、その交差点付近に新たな方向を持った有限の長さの第 3 の line soliton が現われる。しかも 2 本の line があ

る特殊な角度をなしている時には第3の line soliton は半無限に長くなり, その結果全体の形状はY字形になる(この現象は共鳴相互作用と呼ばれている). line soliton の相互作用はいつまでも終わることはない. しかし各々の line soliton の個別性は相互作用によって失われる事はない. KP 方程式や DS 方程式に対する multi-line soliton 解は dressing method や直接法(Hirota の方法)によって求められている [22][23][20][21].

また $(2+1)$ 次元の場合には2次元空間のあらゆる方向に局在している解(いわゆる局在解)も存在する. 例えば KP-I 方程式や DS-II 方程式には無限遠方においてべき函数的に減衰する解がある事が知られている [20][25]. このようにべき函数的な局在解を一般に lump 解と呼んでいる. DS-I 方程式には無限遠方で指数函数的に減衰する解がある. この局在解は dromion 解と呼ばれている. Dromion 解は $(1+1)$ 次元の soliton とは異なる性格を持っている. 例えば dromion 同士の衝突によって振幅が(場合によっては個数さえも)変わってしまう [28]. Dromion 解は M. Boiti 達によって Bäcklund 変換を用いて最初に発見され [26], その後 J. Hietarinta と R. Hirota によって multi-dromion 解 $((M, N)$ -dromion 解)が直接法により構成された [28]. しかし彼らは DS-I 方程式より一般的な発展方程式の multi-soliton 解(いわゆる double-Wronskian 型)を求めたため, DS-I 方程式の解にする(DS reduction)ときに parameter について複雑な制限を課さねばならなかった. そこで C. R. Gilson と J. J. C. Nimmo は彼らとは別のアプローチで直接法を用いて multi-dromion 解の別の表式(Grammian 型)を構成し, parameter の問題を解決した [29]. また A. S. Fokas と P. M. Santini は非自明な無限遠方の境界条件に対して逆散乱法を発展させ, dromion 解を求めている [27]. Ish-II 方程式には vortex 解と antivortex 解と呼ばれる2種類の lump 解がある. Y. Ishimori は Hirota の方法を使って, multi-vortex (及び multi-antivortex) 解の表式を構成した [17]. ただし, この表式の中には vortex と antivortex が共存している解や line soliton 解は含まれていない. Ish-I 方程式には無限遠方でべき函数的に減衰する解, 指数函数的に減衰する解, べき函数的な減衰と指数函数的な減衰が混ざった解などいろいろなタイプの局在解がある [31]. この解の一群は V. G. Dubrovsky と B. G. Konopelchenko により dressing method を発展させた \bar{d} -dressing method という方法を用いて発見された.

続いて $(2+1)$ 次元での Darboux 変換(DT)について述べる. DT を用いれば, 複雑な解析的操作が必要な逆散乱法又は dressing method と比べると, ほとんど代数的操作より multi-soliton 解を構成することができる. また, 直接法(Hirota の方法)でも代数的操作のみから解を構成できるが, 系を双線形型に変換するためには発見的手法に頼らざるを得ない. 一方, DT は素性の明らかな線形偏微分方程式の解の間の変換であるため, 機械的な解の構成を可能とする. KP 方程式と DS 方程式に対しては $(1+1)$ 次元の DT で固有値を横方向の偏微分演算子に置き換えたものが導入されている [13]. ところがこのような DT に対して共変な DS 方程式は DS-II 方程式だけであり, DS-I 方程式はそうではない. DS-I 方程式は binary Darboux 変換(BDT)という別の変換に対して共変なのである. BDT はある方法によって DT から作られたものであり, 最初 KP 方程式や DS-I 方程式に対して V. B. Matveev と M. A. Salle によって導入された [32][13]. また J. J. C. Nimmo は BDT を用いて multi-dromion 解を含むより広い Grammian 型の解を構成した [33][34].

本論文ではこれらの既知の DT 及び BDT に加えて, 変形された DT および BDT を新たに導入する. そしてこれらの拡張された DT に対して共変な $(2+1)$ 次元の soliton 方程

式を系統的に導出し, その解について議論する. Chapter 2 で $(1+1)$ 次元系で議論された $su(2)$ 線形系の代わりに 2 成分の波動関数についての一組の線形偏微分方程式系 (空間の偏微分方程式と時間発展方程式) を導入する. ただし係数は $su(2)$ の要素よりもっと一般化されている. 最も一般化された場合は任意の 2×2 行列として与えられるが, その他に $su(2)$ を拡張した制限 (この論文では自己共役性の制限と呼ぶ) を課す場合も考える. 次に DT 及び BDT をそれぞれ 2 種類ずつ導入し, ある種の自己共役性の制限を課した線形系がこれらの変換に対し共変であることを述べる. 次に chapter 3 では, 線形方程式系の積分可能条件を具体的に計算し, 実際に閉じた非線形発展方程式が導出されるのを見る. これらの中には既に知られている $(2+1)$ 次元の soliton 方程式だけでなく, 未知の発展方程式も含まれている (ここまでの議論は論文 [35], [36] に基づいている). Chapter 4 では前章で得られた非線形方程式 (soliton 方程式) の multi-soliton 解の表式を DT 及び BDT を用いて構成する. Chapter 5 では前章で求めた multi-soliton 解の表式を用いて, $(2+1)$ 次元の soliton 方程式の局在解について考察する. 特に, Ishimori-II 方程式の vortex 解, antivortex 解について詳しく議論する (ここでの議論は論文 [30] に基づく).

Chapter 2

Darboux 変換及び binary Darboux 変換

まず, section 2.1 で線形偏微分方程式系を一般的な形式で与える. 次に section 2.2, 2.3 において Darboux 変換, binary Darboux 変換を導入し, section 2.1 で与えられた線形方程式系がこれらの変換に対して共変であることを示す. Section 2.4 においてこのような DT, BDT に対する共変条件を壊さないように係数行列に制限を課す.

2.1 線形方程式系

まず以下のような 2×2 行列 Ψ に対する一組の線形偏微分方程式系を一般的な形式で導入する.

$$\begin{aligned}\Psi_y &= L\Psi, & L &= \sum_{m=0}^{\infty} U_m \partial^m, \\ \Psi_t &= B\Psi, & B &= \sum_{n=0}^{\infty} V_n \partial^n.\end{aligned}\tag{2.1}$$

ここで $\partial = \partial/\partial x$ であり, x, y, t の下付き添字は偏微分を表す. また U_m, V_n は 2×2 複素行列であり, x, y, t の関数である (ある非負整数 M, N があって $m \geq M+1, n \geq N+1$ のとき $U_m = 0, V_n = 0$ とする). ここで「一般的な形式で」とは, 係数行列には 2×2 複素行列であること以外に何の制限も課していないことを意味しているが, 以下のように線形方程式系 (2.1) が自己共役な線形系である場合, つまり方程式系 (2.1) に以下のような制限を課す場合も考える.

$$L = \tilde{L}, \quad B = \tilde{B}.\tag{2.2}$$

ここで \tilde{L}, \tilde{B} はそれぞれ L, B に対して共役な線形作用素である, 即ち

$$\tilde{\tilde{L}} = L, \quad \tilde{\tilde{B}} = B$$

となる線形作用素である（具体的には次節以降において Darboux 変換に対して共変なものとして導入される）。本論文では (2.2) を自己共役性の制限と呼ぶことにする。

線形方程式系 (2.1) が矛盾なく解を持つためには線形作用素 L, B がいわゆる積分可能条件（両立条件ともいう）

$$(\Psi_y)_t = (\Psi_t)_y$$

即ち,

$$L_t = B_y + [B, L], \quad (2.3)$$

を満足しなければならない。ここで $[B, L] = BL - LB$ 。条件 (2.3) によって係数行列についての閉じた時間発展方程式が得られるとき, (2.3) をその閉じた時間発展方程式の Lax 形式, 線形作用素 L, B を Lax pair と呼ぶ。もしある非線形発展方程式が Lax 形式で書かれることがわかれば, その非線形方程式の可積分性についてのさまざまな情報を得ることが可能になる。しかし線形方程式系 (2.1) が一般的な形式で与えられている場合（また制限 (2.2) を加えている場合でも）, 係数行列についての閉じた発展方程式を得ることは出来ない。なぜなら積分可能条件 (2.3) を計算した時に係数行列には不定性が現われてしまうからである。従って本論文では閉じた発展方程式を得るために線形方程式系 (2.1) に課すべき制限として Darboux 変換に対する共変条件を考えることにする。

次節に移る前に, 簡単な準備をしておく。 2×2 複素行列に対して以下のような基底を与える。

$$e_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad e_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \\ e_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

そして U_m 及び V_n を以下のように成分表示するものとする。

$$U_m = \sum_{j=1}^3 U_{mj} e_j + U_{m4} e_4, \\ V_n = \sum_{j=1}^3 V_{nj} e_j + V_{n4} e_4.$$

一般に U_{mj}, V_{nj} ($j = 1, 2, 3, 4$) は複素数である。

2.2 Darboux 変換

Darboux 変換は線形方程式の解空間に対する線形の変換として導入される。そしてこの変換に対して線形方程式が共変であるように線形方程式の係数の変換が与えられる。このとき係数の変換は非線形になる。つまり Darboux 変換は線形方程式の解空間と係数行列の空間の直積に対しては非線形の変換である。この節では 2 種類の Darboux 変換を導入する。

まず, 線形系 (2.1) に対して以下のような変換を導入する.

$$\begin{aligned}\Psi^{(1)} &= \Psi_x - \sigma\Psi, \\ \sigma &= \Psi_{1,x}\Psi_1^{-1}.\end{aligned}\tag{2.4}$$

ここで Ψ 及び Ψ_1 は (2.1) の solution matrix である ($\det \Psi_1 \neq 0$). この変換 (2.4) は Darboux 変換 (DT) と呼ばれている [13]. 本論文では以後 DT1 と呼ぶことにする. 線形系 (2.1) はもし係数行列 U_m (及び V_n) に対する変換 $U_m^{(1)}$ (及び $V_n^{(1)}$) が以下のように与えられるならば, DT1 に対して共変である.

$$U_m^{(1)} = U_m + U_{m+1,x} - \sigma U_{m+1} + \sum_{k=m+1}^{\infty} \binom{k}{m+1} U_k^{(1)} \sigma_{(k-m-1)x},\tag{2.5}$$

($m = 0, 1, \dots, M-1, M, \dots$). ここで $\binom{l}{k} = \frac{l!}{k!(l-k)!}$ であり, m の下付き添字は x に関する m 階偏微分を表す. 式 (2.5) より $U_m^{(1)}$ を陽に書き表すと

$$U_M^{(1)} = U_M,\tag{2.6}$$

$$U_{M-1}^{(1)} = U_{M-1} + [U_M, \sigma] + U_{M,x},\tag{2.7}$$

$$U_{M-2}^{(1)} = U_{M-2} + [U_{M-1}, \sigma] + [U_M, \sigma]\sigma + U_{M-1,x} + U_{M,x}\sigma + MU_M\sigma_x,\tag{2.8}$$

$$\begin{aligned}U_{M-3}^{(1)} &= U_{M-3} + [U_{M-2}, \sigma] + [U_{M-1}, \sigma]\sigma + [U_M, \sigma]\sigma^2 \\ &\quad + U_{M-2,x} + U_{M-1,x}\sigma + U_{M,x}\sigma^2 + MU_M\sigma_x\sigma \\ &\quad + (M-1)\{U_{M-1} + [U_M, \sigma] + U_{M,x}\}\sigma_x \\ &\quad + \binom{M}{M-2}U_M\sigma_{xx},\end{aligned}\tag{2.9}$$

\vdots

自己共役性の制限 (2.2) を以下のように導入する.

$$U_m, V_n \in \overline{\text{su}}(2).\tag{2.10}$$

ここで $\overline{\text{su}}(2)$ とは $\text{su}(2)$ の基底 e_1, e_2, e_3 及び単位行列 e_4 によって生成される実線形空間であるとする, 即ち

$$\overline{\text{su}}(2) \equiv \left\{ \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ -u_{12}^* & u_{11}^* \end{pmatrix} \middle| u_{11}, u_{12} \in \mathbf{C} \right\}.$$

* は複素共役 (行列にかかる場合はエルミート共役) を表す. ((2.10) は以下のように \tilde{L} , \tilde{B} を導入することに対応する.

$$\begin{aligned}\tilde{L} &= \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{U}_k \partial^k, & \tilde{U}_m &= \sum_{j=1}^3 U_{mj}^* e_j + U_{m4}^* e_4, \\ \tilde{B} &= \sum_{l=0}^{\infty} \tilde{V}_l \partial^l, & \tilde{V}_n &= \sum_{j=1}^3 V_{nj}^* e_j + V_{n4}^* e_4.\end{aligned}\tag{2.11}$$

実際, このとき (2.10) と (2.2) は同じである.) 自己共役性の制限 (2.10) が課せられた線形系はその solution matrix を以下のような形に限定すると

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi & -\psi'^* \\ \psi' & \psi^* \end{pmatrix} \in \overline{\text{su}}(2), \quad (2.12)$$

自己共役性の制限 (2.10) も含めて Darboux 変換に対して共変になる (このことは $\overline{\text{su}}(2)$ は和, 積, スカラー倍, 微分演算, (存在すれば) 逆演算について閉じていることから簡単に分かる). 線形系 (2.1) の solution matrix を (2.12) のように取るのは難しいことではない. なぜなら 制限 (2.10) の下では, (2.1) の任意の solution vector $\begin{pmatrix} \psi \\ \psi' \end{pmatrix}$ に対して

$$e_3 \begin{pmatrix} \psi \\ \psi' \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} -\psi'^* \\ \psi^* \end{pmatrix} \text{ は常に (2.1) の解であるからである.}$$

次に, 線形系 (2.1) に対してもうひとつの変換を新たに導入する.

$$\begin{aligned} \Psi^{(1)} &= \Psi - \tau \Psi_x, \\ \tau &= \Psi_1(\Psi_{1,x})^{-1}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

本論文では変換 (2.13) を DT2 と呼ぶことにする. この変換に対しても DT1 と全く同様のことが成立する. つまり, 線形系 (2.1) はもし係数行列の変換 $U_m^{(1)}$ (及び $V_n^{(1)}$) が以下のように与えられるならば, DT2 に対しても共変である.

$$U_m^{(1)} \tau = \tau U_m - U_{m+1} + \tau U_{m+1,x} + U_{m+1}^{(1)} - \sum_{k=m+1}^{\infty} \binom{k}{m} U_k^{(1)} \tau_{(k-m)x}, \quad (2.14)$$

$$U_0^{(1)} = U_0 - \tau U_{0,x}, \quad (2.15)$$

($m = 1, 2, \dots, M-1, M, \dots$). 式 (2.14) より $U_m^{(1)}$ を陽に書き表すと

$$U_M^{(1)} = \tau U_M \tau^{-1}, \quad (2.16)$$

$$U_{M-1}^{(1)} = \tau \{ U_{M-1} + [U_M, \tau^{-1}] + U_{M,x} - M U_M \tau^{-1} \tau_x \} \tau^{-1}, \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} U_{M-2}^{(1)} &= \tau \left[U_{M-2} + [U_{M-1}, \tau^{-1}] + [U_M, \tau^{-1}] \tau^{-1} \right. \\ &\quad \left. + U_{M-1,x} + U_{M,x} \tau^{-1} - M U_M \tau^{-1} \tau_x \tau^{-1} \right. \\ &\quad \left. - (M-1) \{ U_{M-1} + [U_M, \tau^{-1}] + U_{M,x} \} \tau^{-1} \tau_x \right. \\ &\quad \left. + \binom{M}{M-2} U_M \{ 2(\tau^{-1} \tau_x)^2 - \tau^{-1} \tau_{xx} \} \right] \tau^{-1}, \end{aligned} \quad (2.18)$$

\vdots

式 (2.15) は $U_0 = V_0 = \text{定数}$ とおいてもかまわないことを示している (よって以後 0 とおく). DT1 の場合と同様に DT2 に対しても solution matrix を (2.12) のように限定すると, 自己共役な線形系 (2.1), (2.10) は共変になる.

2.3 Binary Darboux 変換

Binary Darboux 変換は Darboux 変換に対する binary 変換として構成される. その方法を簡単に説明すると, まず二組の線形系 (線形系 (2.1) とそれに対して共役な線形系) から出発し, この二組の線形系が両方とも共変となるように Darboux 変換を拡張する. そしてこの拡張された Darboux 変換から二組の線形系が同じものであっても成り立つような新たな変換を構成する. これが binary Darboux 変換であり, 自己共役な線形系はこの変換に対して共変である. 従って常に binary Darboux 変換は自己共役性の制限とペアになっている. 本節では DT1, DT2 から構成された 2 種類の binary Darboux 変換を導入する.

まず L, B に対し共役な線形作用素 \tilde{L}, \tilde{B} を以下のように導入する.

$$\begin{aligned}\tilde{L} &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \partial^k U_k^*, \\ \tilde{B} &= \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^{l+1} \partial^l V_l^*.\end{aligned}\tag{2.19}$$

そして線形系 (2.1) に対して以下のような変換を導入する.

$$\begin{aligned}\Psi^{(1)} &= \Psi - \alpha \partial^{-1} (\Psi_1^* \Psi), \\ \alpha &= \Psi_1 \Omega^{-1}, \\ \Omega &= \partial^{-1} (\Psi_1^* \Psi_1).\end{aligned}\tag{2.20}$$

ここで Ψ 及び Ψ_1 は (2.1) の solution matrix である. また ∂^{-1} は以下の線積分として定義される.

$$\begin{aligned}\partial^{-1} (\Psi_1^* \Psi) &= \int_{(x_0, y_0, t_0)}^{(x, y, t)} \tilde{\omega}(\Psi_1, \Psi) + C, \\ \tilde{\omega}(\Psi_1, \Psi) &= \Psi_1^* \Psi dx + Y dy + T dt.\end{aligned}\tag{2.21}$$

Y, T は上の線積分が経路によらないための条件

$$d\tilde{\omega}(\Psi_1, \Psi) = 0$$

より定める. しかしそれでも Y, T には y, t の任意関数だけの不定性がある. この不定性は「 Y, T は Ψ, Ψ_1, U_m, V_n 及びその x 微分の斉次式で表される」と考えて取り除くことにする. Y, T の具体形を書き表すと

$$\begin{aligned}Y &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^m (-1)^{m-k} (\Psi_1^* U_m)_{(m-k)x} \Psi_{(k-1)x}, \\ T &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} (\Psi_1^* V_n)_{(n-k)x} \Psi_{(k-1)x}\end{aligned}\tag{2.22}$$

となる (Y, T を求めるときに自己共役性の制限 (2.19), (2.2) を用いている). C は積分定数を表す任意の定数行列である. この積分定数の存在は dromion 解の構成にとって不可欠

である (chapter 5を参照). この変換 (2.20) は binary Darboux 変換 (BDT) と呼ばれている [13]. 本論文では以後 BDT1 と呼ぶことにする. 自己共役性の制限 (2.19), (2.2) を課した線形方程式系 (2.1) はもし係数行列 U_m (及び V_n) に対する変換 $U_m^{(1)}$ (及び $V_n^{(1)}$) が以下のように与えられるならば, BDT1 に対して共変である.

$$U_m^{(1)} = U_m + \sum_{l=m+1}^{\infty} U_l^{(1)} \left\{ \sum_{k=m+1}^l \binom{l}{k} \binom{k-1}{m} \alpha_{(l-k)x} \Psi_{1, (k-m-1)x}^* \right\} + \sum_{l=m+1}^{\infty} (-1)^{l-m} \alpha_{(\Psi_1^* U_l)_{(l-m-1)x}} \quad (2.23)$$

($m = 0, 1, \dots, M-1, M, \dots$). 式 (2.23) より $U_m^{(1)}$ を陽に書き表すと

$$U_M^{(1)} = U_M, \quad (2.24)$$

$$U_{M-1}^{(1)} = U_{M-1} + [U_M, \alpha \Psi_1^*], \quad (2.25)$$

$$U_{M-2}^{(1)} = U_{M-2} + [U_{M-1}, \alpha \Psi_1^*] + [U_M, \alpha \Psi_1^*] \alpha \Psi_1^* - [U_M, \alpha \Psi_{1,x}^*] + \alpha \Psi_1^* U_{M,x} + M U_M (\alpha \Psi_1^*),_x, \quad (2.26)$$

\vdots

自己共役性の条件を課した線形系が BDT に対して共変であるためには, 正確には以下に述べるように, 積分定数に対して条件をつける必要がある. まず自己共役性の制限より

$$\Omega^* = \Omega \quad (2.27)$$

でなければならない. これは例えば, 条件

$$U_M = (-1)^{M+1} U_M^*, \\ U_{M-1} = (-1)^M U_{M-1}^* + (-1)^{M+1} M U_{M,x}^*$$

が BDT1 に対して共変であることから容易に分かる.

$$\tilde{\omega}(\Psi_1, \Psi)^* = \tilde{\omega}(\Psi, \Psi_1)$$

であるので, 積分定数に対する条件

$$C^* = C \quad (2.28)$$

を得る.

Darboux 変換の場合に対応して, 線形系 (2.1) に対するもうひとつの変換を新たに導入することが出来る. まず L, B に対して共役な線形作用素 \tilde{L}, \tilde{B} を以下のように新たに導入する.

$$\tilde{L} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \partial^{k-1} U_k^* \partial, \quad (2.29) \\ \tilde{B} = \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l-1} \partial^{l-1} V_l^* \partial.$$

簡単のため $U_0 = V_0 = 0$ とおいた. そして線形系 (2.1) に対する変換を以下のように導入する.

$$\begin{aligned}\Psi^{(1)} &= \Psi - \gamma \partial^{-1}(\Psi_1^* \Psi_x), \\ \gamma &= \Psi_1 \Lambda^{-1}, \\ \Lambda &= \partial^{-1}(\Psi_1^* \Psi_{1,x}).\end{aligned}\tag{2.30}$$

ここで ∂^{-1} は以下の線積分として定義される.

$$\begin{aligned}\partial^{-1}(\Psi_1^* \Psi_x) &= \int_{(x_0, y_0, t_0)}^{(x, y, t)} \tilde{\lambda}(\Psi_1, \Psi) + C, \\ \tilde{\lambda}(\Psi_1, \Psi) &= \Psi_1^* \Psi_x dx + Y dy + T dt.\end{aligned}\tag{2.31}$$

Y, T は BDT1 と同様にして決められる. Y, T の具体形を書き表すと

$$\begin{aligned}Y &= \Psi_1^* \Psi_y - \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{k=2}^m (-1)^{m-k} (\Psi_{1,x}^* U_m)_{(m-k)x} \Psi_{(k-1)x}, \\ T &= \Psi_1^* \Psi_t - \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=2}^n (-1)^{n-k} (\Psi_{1,x}^* V_n)_{(n-k)x} \Psi_{(k-1)x}.\end{aligned}\tag{2.32}$$

C は積分定数を表わす任意の定数行列である. 本論文では変換 (2.30) を BDT2 と呼ぶことにする. 自己共役性の制限 (2.29), (2.2) を課した線形方程式系 (2.1) はもし係数行列の変換 $U_m^{(1)}$ (及び $V_n^{(1)}$) が以下のように与えられるならば, BDT2 に対して共変である.

$$\begin{aligned}U_m^{(1)} \beta &= \beta U_m - \sum_{l=m+1}^{\infty} U_l^{(1)} \left\{ \sum_{k=m+1}^l \binom{l}{k} \binom{k-1}{m} \gamma_{(l-k)x} \Psi_{1,(k-m)x}^* + \binom{l}{m} \beta_{(l-m)x} \right\} \\ &\quad - \sum_{l=m+1}^{\infty} (-1)^{(l-m)} \gamma(\Psi_{1,x}^* U_l)_{(l-m-1)x}\end{aligned}\tag{2.33}$$

($m = 1, 2, \dots, M-1, M, \dots$) . ここで

$$\beta = 1 - \gamma \Psi_1^* = 1 - \Psi_1 \Lambda^{-1} \Psi_1^*\tag{2.34}$$

とおいた. 式 (2.33) より $U_m^{(1)}$ を陽に書き表すと

$$U_M^{(1)} = \beta U_M \beta^{-1},\tag{2.35}$$

$$U_{M-1}^{(1)} = \beta \{ U_{M-1} - [U_M, \beta^{-1} \gamma \Psi_{1,x}^*] - M U_M \beta^{-1} \beta_x \} \beta^{-1},\tag{2.36}$$

\vdots

BDT1 と同様に積分定数に条件をつける必要がある. まず自己共役性の制限より

$$\beta^* \beta = 1\tag{2.37}$$

でなければならない。これは例えば、条件

$$U_M = (-1)^{M-1} U_M^*$$

が BDT2 に対して共変であることから簡単に得られる。式 (2.34) より

$$\Lambda + \Lambda^* = \Psi_1^* \Psi_1. \quad (2.38)$$

従って

$$\tilde{\lambda}(\Psi_1, \Psi) = d(\Psi_1^* \Psi) - \tilde{\lambda}(\Psi, \Psi_1)^*$$

(これは部分積分に対応する) より、積分定数に対する条件

$$C + C^* = \Psi_1^* \Psi_1 |_{(x_0, y_0, t_0)} \quad (2.39)$$

を得る。

2.4 Darboux 共変条件

Section 2.2, 2.3 で述べたとおり自己共役な線形系は DT や BDT に対して共変であるので (何も課さない場合は DT に対してのみ共変), 積分可能条件も Darboux 共変である。従って本論文では Darboux 共変条件を壊さないように以下の制限を課すことにする。

「DT 及び BDT に対する不変量 = 定数。」

この制限の下で DT 及び BDT に対する不変量は以下の様に得られる。DT1, BDT1 に対する不変量は、式 (2.6), (2.7), (2.24), (2.25) より

$$U_M, (U_M \cdot U_{M-1}), U_{(M-1)4}. \quad (2.40)$$

DT2, BDT2 に対する不変量は、式 (2.16), (2.35) より

$$|U_M|^2, U_{M4}. \quad (2.41)$$

ここで行列 U_m と U_k の内積及び絶対値を以下のように定義した。

$$(U_m \cdot U_k) = \sum_{j=1}^3 U_{mj} U_{kj},$$

$$|U_m|^2 = (U_m \cdot U_m)$$

($|U_m|^2$ は必ずしも非負実数ではない。ただし U_m が実のときは非負である)。次章ではこの制限の下で閉じた非線形時間発展方程式が系統的に導き出される。

Chapter 3

Darboux 共変な $(2+1)$ 次元の soliton 方程式の導出

本章では線形系 (2.1) に対する積分可能条件 (2.3) から具体的に係数行列の閉じた非線形時間発展方程式の導出を試みる. まず section 3.1 で積分可能条件から係数行列の関係式を導く. 続いて線形系に対して「Darboux 不変量 = const.」という制限を課す. その結果閉じた非線形時間発展方程式が導出される. Section 3.2 では DT1 及び BDT1 に対する共変条件から Davey-Stewartson 方程式や同タイプの高次の方程式が得られる. Section 3.3 では DT2 及び BDT2 に対する共変条件から Ishmori 方程式や同タイプの高次の方程式が得られる. Chapter 4 においてこれらの非線形発展方程式の multi-soliton 解を求めるが, これはこれらの方程式が $(2+1)$ 次元の soliton 方程式であることを意味する.

3.1 積分可能条件

この論文では $M = 1$ の場合を考える. 線形方程式系 (2.1) に対する積分可能条件 (2.3) から以下のような係数行列に対する関係式が得られる.

$$[U_1, V_n] + [U_0, V_{n+1}] + U_1 V_{n+1, x} - \binom{n+1}{n} V_{n+1} U_{1, x} - \sum_{k=n+2}^{\infty} V_k \left\{ \binom{k}{n} U_{1, (k-n)x} + \binom{k}{n+1} U_{0, (k-n-1)x} \right\} - V_{n+1, y} = 0 \quad (3.1)$$

$$U_{1, t} = V_{1, y} - [U_1, V_0] - [U_0, V_1] - U_1 V_{1, x} + V_1 U_{1, x} + \sum_{k=2}^{\infty} V_k \left\{ U_{1, kx} + \binom{k}{1} U_{0, (k-1)x} \right\}, \quad (3.2)$$

$$U_{0, t} = V_{0, y} - [U_0, V_0] - U_1 V_{0, x} + \sum_{k=1}^{\infty} V_k U_{0, kx}. \quad (3.3)$$

$(n = N, N-1, \dots, 2, 1)$. (3.1) は V_n を U_1, U_0 で表すための関係式であり, (3.2), (3.3) はそれぞれ U_1, U_0 の時間発展方程式であると解釈すると V_0 に任意性が現われ, 閉じた方

程式を得ることは出来ない。

3.2 DT1, BDT1 に対して共変な soliton 方程式の導出

この節では線形系の DT1, BDT1 に対する共変条件から DT1, BDT1 に対して共変な非線形方程式を導出する。(2.40) より U_1 をゼロではない定数行列とし, また簡単のため $U_{14}, V_{N4}, U_{04}, V_{(N-1)4}, (U_1 \cdot U_0)$ をゼロとおく。

まず関係式 (3.1) から以下のように V_n が U_1, U_0 によって陽な表現で書かれる。

$$V_N = v_N U_1, \quad (3.4)$$

$$V_{N-1} = v_N U_0, \quad (v_{N-1} = \text{const.} = 0 \text{ とおいた}) \quad (3.5)$$

$$V_{N-2} = v_N \left\{ -\frac{1}{A} [U_1, U_0, y] + \frac{N-1}{2} U_{0,x} \right\} + v_{N-2} U_1 + w_{N-2} e_4, \quad (3.6)$$

$$V_{N-3} = v_N \left\{ -\frac{1}{A} U_{0,yy} - \frac{N-2}{2A} [U_1, U_0, xy] + \frac{(N-1)^2}{4} U_{0,xx} \right\} + v_{N-2} U_0 + v_{N-3} U_1 + w_{N-3} e_4, \quad (3.7)$$

⋮

ここで v_N はゼロではない定数, $A = |U_1|^2$ である。また $v_{N-2}, w_{N-2}, v_{N-3}, w_{N-3}$ は以下の関係式を満たす x, y, t のスカラー関数である。

$$v_{N-2,y} - w_{N-2,x} = -\frac{1}{2A} v_N (|U_0|^2)_y, \quad (3.8)$$

$$w_{N-2,y} + \frac{A}{4} v_{N-2,x} = \frac{N-1}{8} v_N (|U_0|^2)_x,$$

$$v_{N-3,y} - w_{N-3,x} \quad (3.9)$$

$$= -v_N \left\{ (U_1 \cdot [U_0, \frac{1}{A^2} U_{0,yy} - \frac{N-1}{4A} U_{0,xx}]) + \frac{N-2}{4A} (|U_0|^2)_{xy} \right\},$$

$$w_{N-3,y} + \frac{A}{4} v_{N-3,x}$$

$$= v_N \left\{ -\frac{N-2}{4A} (U_1 \cdot [U_0, y, U_0, x]) + \frac{(N-1)(N-2)}{16} (|U_0|^2)_{xx} \right\}.$$

まず $N=2$ の場合を考える。式 (3.4), (3.5), (3.6) を式 (3.3) へ代入すれば, U_0 についての方程式が得られる。

$$U_{0,t} = [U_1, v_2 (-\frac{1}{A} U_{0,yy} + \frac{1}{4} U_{0,xx}) + v_0 U_0]. \quad (3.10)$$

そして式 (3.8) から w_0 を消去すれば, 以下の方程式が得られる。

$$v_{0,yy} + \frac{A}{4} v_{0,xx} = v_2 \left\{ -\frac{1}{2A} (|U_0|^2)_{yy} + \frac{1}{8} (|U_0|^2)_{xx} \right\}. \quad (3.11)$$

この節の最初に課した Darboux 共変条件より

$$U_1 = 2\varepsilon e_1 = \varepsilon \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad (3.12)$$

$$U_0 = -i(u_1 + u_2)e_2 - (u_1 - u_2)e_3 = \begin{pmatrix} 0 & u_1 \\ u_2 & 0 \end{pmatrix},$$

及び

$$\begin{aligned} v_2 &= \varepsilon a, \\ \phi &= \varepsilon v_0 + \frac{\varepsilon^2 a}{2A} |U_0|^2, \end{aligned}$$

のように置く. ただし ε, a は複素定数, u_1, u_2 は x, y, t の複素関数とする. このとき方程式 (3.10), (3.11) は以下の閉じた非線形方程式に帰着する.

$$\begin{aligned} iu_{1,t} &= \frac{a}{2}(u_{1,yy} - \varepsilon^2 u_{1,xx} - 2u_1^2 u_2) - 2\phi u_1, \\ -iu_{2,t} &= \frac{a}{2}(u_{2,yy} - \varepsilon^2 u_{2,xx} - 2u_2^2 u_1) - 2\phi u_2, \\ \phi_{yy} + \varepsilon^2 \phi_{xx} &= -\varepsilon^2 a (u_1 u_2)_{xx}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

本論文では方程式 (3.13) を generalized Davey-Stewartson (GDS) 方程式と呼ぶことにする. GDS 方程式は自己共役性の制限を課さずに導出されているので, DT1 だけに対して共変な方程式である. Chapter 2 において DT1, BDT1 に対して共変な自己共役性の制限をそれぞれ 1 種類ずつ導入した. DT1 に対して共変な制限 (2.10) は $U_1^* = -U_1, U_0^* = -U_0$ かつ v_2, v_0, w_0 が実であることに帰着し, BDT1 に対して共変な制限 (2.2), (2.19) は $U_1^* = U_1, U_0^* = -U_0$ かつ v_2, v_0, w_0 が純虚数であることに帰着する. これらは以下のようにまとめられる.

- (1) $u_2 = -u_1^*$ ($u_1 = u$ とおく). a は実定数, ϕ は x, y, t の実関数である.
- (2) ε は 2 つの値を取り, $\varepsilon = +1$ が DT1 に対して共変な制限に対応し, $\varepsilon = -i$ が BDT1 に対して共変な制限に対応する.

従って条件 (1), (2) の下で GDS 方程式 (3.13) は以下の非線形方程式に帰着される.

$$\begin{aligned} iu_t &= \frac{a}{2}(u_{yy} - \varepsilon^2 u_{xx} + 2|u|^2 u) - 2\phi u, \\ \phi_{yy} + \varepsilon^2 \phi_{xx} &= \varepsilon^2 a (|u|^2)_{xx}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

方程式 (3.14) は Davey-Stewartson (DS) 方程式と呼ばれている. $\varepsilon = +1$ のとき DS-II 方程式といい, DT1 に対して共変な soliton 方程式である. また $\varepsilon = -i$ のとき DS-I 方程式といい, BDT1 に対して共変な soliton 方程式である.

次に $N = 3$ の場合を考える. $N = 2$ の場合と同様にして次の方程式を得る.

$$U_{0,t} = -\frac{v_3}{A} \left\{ (U_{0,yy} - \frac{3A}{4} U_{0,xx})_y + \frac{3}{2} |U_0|^2 U_{0,y} \right\} + (\phi_x U_0)_y + \phi_y U_{0,x} + \tilde{v}_0 [U_1, U_0], \quad (3.15)$$

$$\phi_{yy} + \frac{A}{4} \phi_{xx} = \frac{3v_3}{8} (|U_0|^2)_x, \quad (3.16)$$

$$\tilde{v}_{0,yy} + \frac{A}{4} \tilde{v}_{0,xx} = \frac{3v_3}{4A} (U_1 \cdot [U_0, U_{0,xy}]_x). \quad (3.17)$$

ここで

$$\begin{aligned} \phi_x &= v_1 + \frac{v_3}{2A} |U_0|^2, \quad \phi_y = w_1, \\ \tilde{v}_0 &= v_0 - \frac{1}{2} v_{1,x} + \frac{v_3}{A^2} (U_1 \cdot [U_0, U_{0,y}]) \end{aligned}$$

とおいた ((3.8) の第一式より ϕ をこう置いても構わない). ここで Darboux 共変条件より (3.12) とおくことができ, また自己共役性の制限は $N = 2$ の場合と同じように扱うことができる. ただし DT1 共変の場合には v_3, ϕ, \tilde{v}_0 がすべて実であり, 一方 BDT1 共変の場合には v_3, ϕ は実であるが, \tilde{v}_0 は純虚数であるという点が異なっている. このことから方程式 (3.15), (3.16), (3.17) は複素変数の m-KdV 方程式 (Hirota 方程式とも言う) を (2+1) 次元に拡張した方程式になる. 特に $u_i = 0$ 即ち u が実である場合, 式 (3.17) より $\tilde{v}_0 = 0$ と置くことができるため, 方程式 (3.15), (3.16) は以下の方程式に帰着される.

$$\begin{aligned} u_t &= -\frac{v_3}{4\varepsilon^2} \left\{ (u_{yy} - 3\varepsilon^2 u_{xx})_y + 6u^2 u_y \right\} + (\phi_x u)_y + \phi_y u_x, \quad (3.18) \\ \phi_{yy} + \varepsilon^2 \phi_{xx} &= \frac{3v_3}{2} (u^2)_x. \end{aligned}$$

これは m-KdV 方程式を (2+1) 次元に拡張した方程式である.

3.3 DT2, BDT2 に対して共変な soliton 方程式の導出

この節では線形系の DT2, BDT2 に対する共変条件から DT2, BDT2 に対して共変な非線形方程式を導出する. (2.41) より $|U_1|^2 \equiv A$ をゼロではない定数行列とし, また簡単のため U_{14}, V_{N4} をゼロとおく ($U_0 = V_0 = 0$ であった). まず関係式 (3.1) から以下のように V_n が U_1 によって陽な表現で書かれる.

$$V_N = v_N U_1, \quad (3.19)$$

$$V_{N-1} = v_N \left\{ -\frac{1}{A} [U_1, U_{1,y}] + \frac{N-1}{2} U_{1,x} \right\} + v_{N-1} U_1 + w_{N-1} e_4, \quad (3.20)$$

$$V_{N-2} = v_N \left\{ -\frac{1}{A} U_{1,yy} - \frac{N-2}{2A} [U_1, U_{1,xy}] + \frac{1}{2A} [U_{1,x}, U_{1,y}] + \frac{(N-1)^2}{4} U_{1,xx} \right\}$$

$$\begin{aligned}
& + v_{N-1} \left\{ -\frac{1}{A} [U_1, U_{1,y}] + \frac{N-2}{2} U_{1,x} \right\} + \frac{N-1}{A} w_{N-1} [U_1, U_{1,x}] \\
& + v_{N-2} U_1 + w_{N-2} e_4, \\
& \vdots
\end{aligned} \tag{3.21}$$

ここで v_N はゼロではない定数であり, また $v_{N-1}, w_{N-1}, v_{N-2}, w_{N-2}$ は以下の関係式を満たす x, y, t のスカラー関数である.

$$v_{N-1, y} - w_{N-1, x} = 0, \tag{3.22}$$

$$w_{N-1, y} + \frac{A}{4} v_{N-1, x} = \frac{N}{4A} v_N (U_1 \cdot [U_{1,x}, U_{1,y}]),$$

$$v_{N-2, y} - w_{N-2, x} \tag{3.23}$$

$$\begin{aligned}
& = v_N \left\{ \left(U_1 \cdot \left\{ \frac{1}{A^2} U_{1,yy} - \frac{(N-1)^2}{4A} U_{1,xx} - \frac{N-1}{2A^2} [U_{1,x}, U_{1,y}] \right\}_y \right) \right. \\
& \quad \left. - \frac{(N-2)^2}{4A} (U_{1,x} \cdot U_{1,xy}) - \frac{(N-1)(N-2)}{4A} (U_{1,xx} \cdot U_{1,y}) \right\} \\
& \quad - \frac{N-1}{A^2} w_{N-1} (U_1 \cdot [U_{1,x}, U_{1,y}]),
\end{aligned}$$

$$w_{N-2, y} + \frac{A}{4} v_{N-2, x}$$

$$\begin{aligned}
& = v_N \left\{ \left(U_1 \cdot \left\{ \frac{1}{4A} U_{1,yy} + \frac{(2N-1)(N-1)(N-3)}{48} U_{1,xx} \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{N^2-3N+1}{8A} [U_{1,x}, U_{1,y}] \right\}_x \right) \\
& \quad \left. + \left(U_{1,x} \cdot \left\{ -\frac{N-2}{4A} U_{1,yy} + \frac{(N-1)^2(N-2)}{8} U_{1,xx} \right\} \right) \right\} \\
& \quad + \frac{N-1}{4A} v_{N-1} (U_1 \cdot [U_{1,x}, U_{1,y}]).
\end{aligned}$$

まず $N=2$ の場合を考える. 式 (3.19), (3.20) を式 (3.2) へ代入すると, U_1 についての時間発展方程式が得られる. また式 (3.22) から

$$v_1 = \phi_x, \quad w_1 = \phi_y.$$

となるスカラー関数 ϕ を導入することができる. 従って

$$U_{1,t} = -\frac{v_2}{A} [U_1, U_{1,yy} - \frac{A}{4} U_{1,xx}] + \phi_x U_{1,y} + \phi_y U_{1,x}, \tag{3.24}$$

$$\phi_{yy} + \frac{A}{4} \phi_{xx} = \frac{v_2}{2A} (U_1 \cdot [U_{1,x}, U_{1,y}]).$$

この節の最初に課した Darboux 共変条件より

$$U_1 = 2\varepsilon (S_3 e_1 + S_1 e_2 + S_2 e_3) = i\varepsilon \begin{pmatrix} S_3 & S_1 + iS_2 \\ S_1 - iS_2 & -S_3 \end{pmatrix}, \tag{3.25}$$

$$S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = 1,$$

及び

$$v_2 = \varepsilon a$$

と置くことができる. ただし ε, a は複素定数, S_1, S_2, S_3 は x, y, t の複素関数とする. ここで U_1 を $\vec{S} = (S_1, S_2, S_3)$ という複素ベクトルと考えて, $[e_j, e_k] = \varepsilon_{jkl} e_l$ (j, k, l は 1, 2, 3 のうちのどれかで, ε_{jkl} は $\varepsilon_{123} = +1$ の完全反対称テンソル) を考慮に入れると, 方程式 (3.24) は以下の閉じた非線形方程式に帰着する.

$$\begin{aligned} \vec{S}_t &= -\frac{a}{2} \vec{S} \times (\vec{S}_{yy} - \varepsilon^2 \vec{S}_{xx}) + \phi_x \vec{S}_y + \phi_y \vec{S}_x, \\ \phi_{yy} + \varepsilon^2 \phi_{xx} &= \varepsilon^2 a (\vec{S} \cdot (\vec{S}_x \times \vec{S}_y)), \\ (|\vec{S}|^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = 1). \end{aligned} \quad (3.26)$$

(ここで (\cdot) , \times は複素ベクトルに対するスカラー積とベクトル積であるが,

$$\begin{aligned} (\vec{S} \cdot \vec{S}') &= S_1 S'_1 + S_2 S'_2 + S_3 S'_3, \\ \vec{S} \times \vec{S}' &= (S_2 S'_3 - S_3 S'_2, S_3 S'_1 - S_1 S'_3, S_1 S'_2 - S_2 S'_1,) \end{aligned}$$

のように実ベクトルに対する演算と代数的に同様に定義する.) 本論文では方程式 (3.26) を generalized Ishimori (GIsh) 方程式と呼ぶことにする. GIsh 方程式は自己共役性の制限を課さずに導出されているので, DT2 だけに対して共変な方程式である. Chapter 2 より DT2, BDT2 に対して共変な自己共役性の制限をそれぞれ 1 通りずつ導入した. DT2 に対して共変な制限 (2.10) は $U_1^* = -U_1$ かつ v_2, v_1, w_1 (即ち ϕ) が実であることに帰着し, BDT2 に対して共変な制限 (2.2) かつ (2.29) は $U_1^* = U_1$ かつ v_2 が純虚数で v_1, w_1 (即ち ϕ) が実数であることに帰着する. これらは以下のようにまとめられる.

- (1) a は実定数, \vec{S}, ϕ は x, y, t の実関数である.
- (2) ε は 2 つの値を取り, $\varepsilon = +1$ が DT2 に対して共変な制限に対応し, $\varepsilon = -i$ が BDT2 に対して共変な制限に対応する.

このような制限の下で非線形方程式 (3.26) は Ishimori (Ish) 方程式と呼ばれている. $\varepsilon = +1$ のとき Ish-II 方程式といい, DT2 に対して共変な soliton 方程式である. また $\varepsilon = -i$ のとき Ish-I 方程式といい, BDT2 に対して soliton 共変な方程式である.

次に $N = 3$ の場合を考える. $N = 2$ の場合と同様にして U_1 に対する閉じた発展方程式を得る (あまりに複雑なので省略する). 特別な場合として $U_1 = 2\varepsilon(\cos\theta e_1 + \sin\theta e_2)$ とおく. 自己共役性の制限から ε を $N = 2$ の場合と同じ定義とし, v_3 を実数, θ, v_1, w_1 を実関数とする. このとき $v_2 = w_2 = 0$ と置くことができるので, 以下のような実関数 ϕ を導入すると

$$\begin{aligned} \phi_x &= v_1 + \frac{3v_3}{2A^2} |U_{1,y}|^2, \\ \phi_y &= w_1 - \frac{v_3}{2A} (U_1 \cdot U_{1,xy}), \end{aligned}$$

U_1 の発展方程式は以下の方程式に帰着される.

$$\begin{aligned}\theta_t + \frac{v_3}{4\varepsilon^2} \left\{ (\theta_{yy} - 3\varepsilon^2 \theta_{xx})_y + \frac{1}{2} (\theta_y^2 + 3\varepsilon^2 \theta_x^2) \theta_y \right\} - \phi_x \theta_y - \phi_y \theta_x &= 0, \\ \phi_{yy} + \varepsilon^2 \phi_{xx} &= \frac{3v_3}{8} \{ \theta_y^2 + \varepsilon^2 \theta_x^2 \}_x.\end{aligned}\quad (3.27)$$

方程式 (3.27) は方程式 (3.18) とは別の形で m-KdV 方程式を (2+1) 次元に拡張した方程式である. 実際, 方程式 (3.27) において x に関する偏微分の項を消去すれば,

$$\theta_t + \frac{v_3}{4\varepsilon^2} \left\{ \theta_{yyy} + \frac{1}{2} \theta_y^3 \right\} = 0$$

が得られるが, この方程式はさらに y に関して偏微分すれば θ_y について m-KdV 方程式になる.

Chapter 4

Darboux 共変な $(2+1)$ 次元の soliton 方程式の multi-soliton 解

この章では chapter 3 において導出した Darboux 共変な $(2+1)$ 次元の soliton 方程式の multi-soliton 解を構成する。これらの soliton 方程式の従属変数は線形方程式系の係数行列に対応しているので, DT, BDT に対する係数行列の変換が soliton 方程式の一つの解から別の解への変換を与える。例えば, はじめに soliton 方程式の自明な解を変換すると 1-soliton 解が得られ, もう一度変換すると, 2-soliton 解が得られる。このように変換を繰り返して行くと multi-soliton 解が構成される。はじめに section 4.1 で DT1, BDT1 に対して共変な soliton 方程式の multi-soliton 解を構成する。続いて section 4.2 で DT2, BDT2 に対して共変な soliton 方程式の multi-soliton 解を構成する。本章で求めた multi-soliton 解の表式は $(2+1)$ 次元に固有の解も含んでいる。Chapter 5 ではそのような解の例として 2 次元空間のすべての方向への局在解について考察する。

4.1 DT1, BDT1 に対して共変な soliton 方程式の multi-soliton 解

この節では DS 方程式の厳密解を求めることを念頭に置いて DS 方程式の従属変数についてのみ考察するが, この変数は高次の発展方程式の従属変数の一部にも対応しているので, $N=2$ に限らないで議論する (ただし高次の発展方程式においては V_n ($n \leq N-3$) に起因する従属変数があるので, その変数についても別に考える必要が生じる)。つまりここでは,

$$U_1 = \varepsilon \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad U_0 = \begin{pmatrix} 0 & u_1 \\ u_2 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\phi = \varepsilon \left(v_{N-2} + \frac{v_N}{2A} |U_0|^2 \right)$$

と置いて, DT1 や BDT1 を M 回繰り返して得られる u_1, u_2, ϕ の変換 $u_1^{(M)}, u_2^{(M)}, \phi^{(M)}$ を構成する (詳細な計算は Appendix A.1 で行うが, ここでは M 回の変換が 1 回の変換と類似しているという性質からもっと簡単に構成される). 本節では結果だけを述べる. こうして DS 方程式 (や高次の発展方程式) の multi-soliton 解が構成される.

4.1.1 DT1 に対して共変な soliton 方程式の場合

DT1 を M 回繰り返して得られる u_1, u_2, ϕ の変換 $u_1^{(M)}, u_2^{(M)}, \phi^{(M)}$ は

$$u_1^{(M)} = u_1 + 2i\varepsilon \frac{G_1}{W}, \quad (4.1)$$

$$u_2^{(M)} = u_2 + 2i\varepsilon \frac{G_2}{W}, \quad (4.2)$$

$$\phi^{(M)} = \phi + \frac{\varepsilon N v_N}{2} (\ln W)_{xx} \quad (4.3)$$

である. ここで G_1, G_2, W は $M=1$ の場合

$$G_1 = \psi_1 \psi_{2,x} - \psi_{1,x} \psi_2, \quad (4.4)$$

$$G_2 = \psi'_1 \psi'_{2,x} - \psi'_{1,x} \psi'_2,$$

$$W = \psi_1 \psi'_2 - \psi_2 \psi'_1$$

であり, 一般の M に対しては

$$G_1 = \begin{pmatrix} F_{1, (M-1)x} \\ F_{1, Mx} \\ F_{1, (M-2)x} \\ F_{2, (M-2)x} \\ \vdots \\ F_{1, x} \\ F_{2, x} \\ F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}, \quad G_2 = \begin{pmatrix} F_{2, (M-1)x} \\ F_{2, Mx} \\ F_{1, (M-2)x} \\ F_{2, (M-2)x} \\ \vdots \\ F_{1, x} \\ F_{2, x} \\ F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} F_{1, (M-1)x} \\ F_{2, (M-1)x} \\ F_{1, (M-2)x} \\ F_{2, (M-2)x} \\ \vdots \\ F_{1, x} \\ F_{2, x} \\ F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}, \quad (4.5)$$

である. ただし

$$F_1 = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4, \dots, \psi_{2M-1}, \psi_{2M}), \quad (4.6)$$

$$F_2 = (\psi'_1, \psi'_2, \psi'_3, \psi'_4, \dots, \psi'_{2M-1}, \psi'_{2M}) \quad (4.7)$$

と置いた. また $F_{p, mx}$ ($p=1, 2$) は $1 \times 2M$ 行列 F_p のすべての要素を x で m 階偏微分して得られる行列である.

(ψ_j, ψ'_j) ($j=1, 2, 3, 4, \dots, 2M-1, 2M$) は線形系 (2.1) の solution vector として与えられる (係数行列は変換する前のものを用いる). 簡単のために係数行列が

$$U_0 = V_{N-1} = V_n = 0, \quad (n \leq N-3) \quad (4.8)$$

の場合を考える. このとき ψ_j, ψ'_j は以下の線形方程式系の $2M$ 組の独立な解を与えればよい.

$$\psi_j = \psi_j(z_1, t), \quad z_1 = x + iy, \quad (4.9)$$

$$\psi'_j = \psi'_j(z_2, t), \quad z_2 = x - iy, \quad (4.10)$$

$$\psi_{j,t} = i\varepsilon v_N \psi_{j, Nz_1} + i\tilde{\phi}_1(z_1, t) \psi_{j, (N-2)z_1}, \quad (4.11)$$

$$\psi'_{j,t} = -i\varepsilon v_N \psi'_{j, Nz_2} - i\tilde{\phi}_2(z_2, t) \psi'_{j, (N-2)z_2}, \quad (4.12)$$

ここで $\tilde{\phi}_1(z_1, t)$ と $\tilde{\phi}_2(z_2, t)$ はそれぞれ z_1, t と z_2, t についての任意の複素関数であり, (変換する前の) 非線形方程式の従属変数との関係は

$$u_1 = u_2 = 0, \quad \phi = \frac{1}{2} (\tilde{\phi}_1(z_1, t) + \tilde{\phi}_2(z_2, t)) \quad (4.13)$$

(他の従属変数はすべてゼロ) で与えられる. (4.13) は確かに非線形方程式の自明な解になっている.

式 (4.1), (4.2), (4.3) は一般の (自己共役性の制限を課していない) 線形系を伴う DT1 に対して共変な soliton 方程式の multi-soliton 解である. 特に $N = 2$ の場合, GDS 方程式 (3.13) の multi-soliton 解である.

$\mathfrak{su}(2)$ 線形系を伴う DT1 に対して共変な非線形方程式の解への reduction は

$$\psi'_{2l-1} = -\psi_{2l}^*, \quad \psi'_{2l} = \psi_{2l-1}^* \quad (4.14)$$

($l = 1, 2, \dots, M$) となるように ψ'_j を与えればよい. なぜなら (4.14) は $\mathfrak{su}(2)$ 線形系が DT1 に対して共変であるための条件 (2.12) だからである. 実際, 条件 (4.14) の下で $G_2 = G_1^*$ かつ W が実であることが示される. 従って制限 (2.10) が変換前の係数行列に課されていれば, 即ち $\varepsilon = +1, u_2 = -u_1^*$ かつ v_N, ϕ が実であれば, $u_2^{(M)} = -\{u_1^{(M)}\}^*$ かつ $\phi^{(M)}$ が実であることが容易に分かる. ψ_j は線形方程式 (2.1) から得られるが, 変換前の係数行列を (4.8) で与える場合には以下の線形方程式に帰着される.

$$\psi_j = \psi_j(z, t), \quad z = x + iy, \quad (4.15)$$

$$\psi_{j,t} = i v_N \psi_{j, Nz} + i\tilde{\phi}(z, t) \psi_{j, (N-2)z}, \quad (4.16)$$

ここで $\tilde{\phi}(z, t)$ は z, t についての任意の複素関数であり, 非線形方程式の従属変数と

$$u (= u_1) = 0, \quad \phi = \frac{1}{2} (\tilde{\phi}(z, t) + \tilde{\phi}(z, t)^*) \quad (4.17)$$

(他の従属変数はすべてゼロ) で結ばれている. (4.17) は確かに非線形方程式の自明な解になっている.

以上より, 条件 (4.14) の下で $u (= u_1), \phi$ の変換 $u^{(M)} (= u_1^{(M)}), \phi^{(M)}$ の式 (4.1), (4.3) は $\mathfrak{su}(2)$ 線形系を伴う DT1 に対して共変な soliton 方程式の multi-soliton 解である. 特に $N = 2$ の場合, DS-II 方程式 (3.14) の multi-soliton 解となる.

4.1.2 BDT1 に対して共変な soliton 方程式の場合

線形系 (2.1) が BDT1 に対して共変であるとき, その係数行列には自己共役性の制限 (2.2), (2.19) が課されていた. この制限は今注目している変数 (定数) に関しては

$$\begin{aligned} \varepsilon &= -i, & u_2 &= -u_1^*, \\ v_N^* &= (-1)^{N+1} v_N, & \phi^* &= (-1)^N \phi \end{aligned}$$

となる. 従ってこの小節では $u (= u_1)$, ϕ の変換 $u^{(M)} (= u_1^{(M)})$, $\phi^{(M)}$ を求めればよい. Appendix A.1.2 を見れば分かるように, それは式 (4.1), (4.3) で与えられる. ただし G_1, W の中身は, DT1 の場合の式 (4.4), (4.5) とは全く異なっている.

$$G_1 = \begin{vmatrix} \Omega_A & F_2^* \\ F_1 & 0 \end{vmatrix}, \quad W = |\Omega_A|. \quad (4.18)$$

ここで F_1, F_2 はそれぞれ式 (4.6), (4.7) で与えられる. また $2 \times 2M$ 行列 Ψ_A を

$$\Psi_A = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 & \psi_4 & \cdots & \psi_{2M-1} & \psi_{2M} \\ \psi'_1 & \psi'_2 & \psi'_3 & \psi'_4 & \cdots & \psi'_{2M-1} & \psi'_{2M} \end{pmatrix}. \quad (4.19)$$

と置くと, $2M \times 2M$ 行列 Ω_A が以下のように定義される.

$$\begin{aligned} \Omega_A &= \partial^{-1}(\Psi_A^* \Psi_A) \\ &= \int_{(x_0, y_0, t_0)}^{(x, y, t)} \tilde{\omega}(\Psi_A, \Psi_A) + C_A. \end{aligned} \quad (4.20)$$

$\tilde{\omega}(\Psi_A, \Psi_A)$ は式 (2.21) で与えられ, $2M \times 2M$ 行列 C_A は任意の定数行列である. ただし以下の条件が課される.

$$C_A^* = C_A. \quad (4.21)$$

(ψ_j, ψ'_j) ($j = 1, 2, 3, 4, \dots, 2M-1, 2M$) は線形系 (2.1) の solution vector として与えられる.

以後, 簡単のために

$$U_0 = V_{N-1} = 0 = V_{N-2} = \cdots = V_1 = 0 \quad (4.22)$$

の場合を考える. まず ψ_j, ψ'_j については以下の線形方程式系の $2M$ 組の独立な解を与えればよい.

$$\psi_j = \psi_j(\xi, t), \quad \xi = x + y, \quad (4.23)$$

$$\psi'_j = \psi'_j(\eta, t), \quad \eta = x - y, \quad (4.24)$$

$$\psi_{j,t} = v_N \psi_{j,N\xi} + i\phi_1(\xi, t)\psi_j, \quad (4.25)$$

$$\psi'_{j,t} = -v_N \psi'_{j,N\eta} - i\phi_2(\eta, t)\psi'_j, \quad (4.26)$$

ここで $\phi_1(\xi, t)$ と $\phi_2(\eta, t)$ はそれぞれ ξ, t と η, t についての任意の実関数であり, (変換する前の) 非線形方程式の従属変数とは

$$\begin{aligned} u_1 = u_2 = 0, \\ \phi = \begin{cases} \frac{1}{2}(\phi_1(\xi, t) + \phi_2(\eta, t)) & (N = 2) \\ 0 & (N \geq 3) \end{cases} \end{aligned} \quad (4.27)$$

(v_0, w_0 を除き他の従属変数はすべてゼロ) で結ばれる. (4.27) は確かに非線形方程式の自明な解になっている. 次に Ω_A は式 (4.20) で与えられているが,

$$\Omega_A = (\omega_{jk}), \quad C_A = (c_{jk}) \quad (4.28)$$

と置いて, (4.22) の場合でその成分を計算すると,

$$\omega_{jk} = \omega_{jk}[\psi] + \omega_{jk}[\psi'] + c_{jk}, \quad (4.29)$$

$$\omega_{jk}[\psi] \equiv \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} \left\{ \psi_j^* \psi_k d\xi + v_N \sum_{n=1}^N (-1)^{N-n} \psi_{j, (N-n)\xi}^* \psi_{k, (n-1)\xi} dt \right\}, \quad (4.30)$$

$$\omega_{jk}[\psi'] \equiv \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} \left\{ \psi'_j \psi'_k d\eta - v_N \sum_{n=1}^N (-1)^{N-n} \psi'_{j, (N-n)\eta} \psi'_{k, (n-1)\eta} dt \right\}, \quad (4.31)$$

($j, k = 1, 2, 3, 4, \dots, 2M-1, 2M$) を得る. ただし積分定数 c_{jk} には式 (4.21) から以下の条件を課す必要がある.

$$c_{jk}^* = c_{kj}. \quad (4.32)$$

以上より $u (= u_1)$, ϕ の変換 $u^{(M)} (= u_1^{(M)})$, $\phi^{(M)}$ の式 (4.1), (4.3) は BDT1 に対して共変な soliton 方程式の multi-soliton 解である. ただし G_1, W は (4.18) で与えられるとする. 特に $N = 2$ の場合, DS-I 方程式 (3.14) の multi-soliton 解である.

4.2 DT2, BDT2 に対して共変な soliton 方程式の multi-soliton 解

この節では Ishimori (Ish) 方程式の厳密解を求めることを念頭に置いて Ish 方程式の従属変数についてのみ考察するが, section 4.1 と同様に $N = 2$ に限らないで議論する. つまりここでは,

$$\begin{aligned} U_1 = i\varepsilon \begin{pmatrix} S_3 & S_1 + iS_2 \\ S_1 - iS_2 & -S_3 \end{pmatrix}, \\ S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = 1, \\ \phi_x = v_{N-1}, \quad \phi_y = w_{N-1} \end{aligned}$$

と置いて DT2, BDT2 を M 回繰り返して得られる $\vec{S} = (S_1, S_2, S_3)$, ϕ の変換 $\vec{S}^{(M)}$, $\phi^{(M)}$ を構成する (詳細な計算については Appendix A.2 で述べる). 本節では結果だけを述べる. こうして Ishimori 方程式 (や高次の発展方程式) の multi-soliton 解が構成される.

4.2.1 DT2 に対して共変な soliton 方程式の場合

簡単のために $\vec{S} = (0, 0, 1)$, 即ち

$$U_1 = i\varepsilon \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (4.33)$$

を変換する場合を考える. M 回 DT2 を繰り返して得られる変換 $\vec{S}^{(M)}$, $\phi^{(M)}$ の表式は以下のようになる.

$$S_3^{(M)} = \frac{f_1 f_2 - g_1 g_2}{f_1 f_2 + g_1 g_2}, \quad (4.34)$$

$$S_1^{(M)} + iS_2^{(M)} = \frac{-2f_1 g_1}{f_1 f_2 + g_1 g_2}, \quad (4.35)$$

$$S_1^{(M)} - iS_2^{(M)} = \frac{-2f_2 g_2}{f_1 f_2 + g_1 g_2} \quad (4.36)$$

$$\phi^{(M)} = \phi - \frac{Nv_N}{2} \ln \frac{f_1 f_2 + g_1 g_2}{D^2} \quad (4.37)$$

ここで f_1, f_2, g_1, g_2, D は $M=1$ の場合

$$f_1 = (\psi_1 \psi'_{2,x} - \psi_2 \psi'_{1,x}), \quad (4.38)$$

$$f_2 = (-\psi'_1 \psi_{2,x} + \psi'_2 \psi_{1,x}),$$

$$g_1 = (-\psi_1 \psi_{2,x} + \psi_2 \psi_{1,x}),$$

$$g_2 = (-\psi'_1 \psi'_{2,x} + \psi'_2 \psi'_{1,x}),$$

$$D = \psi_{1,x} \psi'_{2,x} - \psi_{2,x} \psi'_{1,x}$$

であり, 一般の M に対しては

$$f_1 = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_{2, Mx} \\ F_{1, (M-1)x} \\ F_{2, (M-1)x} \\ \vdots \\ F_{1, xx} \\ F_{2, xx} \\ F_{1, x} \\ F_{2, x} \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} F_{1, Mx} \\ F_2 \\ F_{1, (M-1)x} \\ F_{2, (M-1)x} \\ \vdots \\ F_{1, xx} \\ F_{2, xx} \\ F_{1, x} \\ F_{2, x} \end{pmatrix}, \quad (4.39)$$

$$g_1 = \begin{vmatrix} F_{1, Mx} \\ F_1 \\ F_{1, (M-1)x} \\ F_{2, (M-1)x} \\ \vdots \\ F_{1, xx} \\ F_{2, xx} \\ F_{1, x} \\ F_{2, x} \end{vmatrix}, \quad g_2 = \begin{vmatrix} F_{2, Mx} \\ F_2 \\ F_{1, (M-1)x} \\ F_{2, (M-1)x} \\ \vdots \\ F_{1, xx} \\ F_{2, xx} \\ F_{1, x} \\ F_{2, x} \end{vmatrix}, \quad D = \begin{vmatrix} F_{1, Mx} \\ F_{2, Mx} \\ F_{1, (M-1)x} \\ F_{2, (M-1)x} \\ \vdots \\ F_{1, xx} \\ F_{2, xx} \\ F_{1, x} \\ F_{2, x} \end{vmatrix}.$$

である。ただし F_1, F_2 は式 (4.6), (4.7) で与えられる。式 (4.39) より

$$f_1 f_2 + g_1 g_2 = \begin{vmatrix} F_{1, (M-1)x} \\ F_{2, (M-1)x} \\ \vdots \\ F_{1, x} \\ F_{2, x} \\ F_1 \\ F_2 \end{vmatrix} D \quad (4.40)$$

が示される（これは行列式の恒等式として有名な Plücker の関係式

$$\begin{aligned} & |a_0 a_1 b_1 b_2 \cdots b_n| |a_2 a_3 b_1 b_2 \cdots b_n| \\ & - |a_0 a_2 b_1 b_2 \cdots b_n| |a_1 a_3 b_1 b_2 \cdots b_n| \\ & + |a_0 a_3 b_1 b_2 \cdots b_n| |a_1 a_2 b_1 b_2 \cdots b_n| = 0 \end{aligned} \quad (4.41)$$

($a_0, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, \dots, b_n$ は $n+2$ 次の列ベクトル) そのものである)。

${}^t(\psi_j, \psi'_j)$ ($j = 1, 2, 3, 4, \dots, 2M-1, 2M$) は線形系 (2.1) の solution vector として与えられる (係数行列は変換する前のものを用いる)。簡単のために (4.33) かつ

$$V_n = 0, \quad (n \leq N-2) \quad (4.42)$$

の場合を考えると、 ψ_j, ψ'_j については以下の線形方程式系の $2M$ 組の独立な解を与えればよい。

$$\psi_j = \psi_j(z_1, t), \quad z_1 = x + i\epsilon y, \quad (4.43)$$

$$\psi'_j = \psi'_j(z_2, t), \quad z_2 = x - i\epsilon y, \quad (4.44)$$

$$\psi_{j,t} = i\epsilon v_N \psi_{j, N z_1} + i\epsilon \left\{ \tilde{\phi}_1(z_1, t) \right\}_{z_1} \psi_{j, (N-1)z_1}, \quad (4.45)$$

$$\psi'_{j,t} = -i\epsilon v_N \psi'_{j, N z_2} - i\epsilon \left\{ \tilde{\phi}_2(z_2, t) \right\}_{z_2} \psi'_{j, (N-1)z_2}, \quad (4.46)$$

ここで $\tilde{\phi}_1(z_1, t)$ と $\tilde{\phi}_2(z_2, t)$ はそれぞれ z_1, t と z_2, t についての任意の複素関数であり、(変換する前の) 非線形方程式の従属変数との関係は

$$\phi = \frac{1}{2} (\tilde{\phi}_1(z_1, t) + \tilde{\phi}_2(z_2, t)) \quad (4.47)$$

(他の従属変数はすべてゼロ) で与えられる。(4.33), (4.47) は確かに非線形方程式の自明な解になっている。

式 (4.34), (4.35), (4.36), (4.37) は一般の (自己共役性の制限を課していない) 線形系を伴う DT2 に対して共変な soliton 方程式の multi-soliton 解である。特に $N = 2$ の場合, generalized Ishimori 方程式 (3.26) の multi-soliton 解である。

$\text{su}(2)$ 線形系を伴う DT2 に対して共変な非線形方程式の解への reduction は subsection 4.1.1 と同様に ψ_j, ψ'_j ($j = 1, 2, 3, 4, \dots, 2M-1, 2M$) に対して (4.14) と与えればよい。実際, 条件 (4.14) の下で $f_2 = f_1^*, g_2 = g_1^*$ かつ D が実であることが示される。従って係数行列に対して制限 (2.10) が変換前に課されていれば, 即ち $\varepsilon = +1$ で v_N, S_1, S_2, S_3, ϕ が実であれば, $S_1^{(M)}, S_2^{(M)}, S_3^{(M)}, \phi^{(M)}$ も実になる。このとき式 (4.34), (4.35), (4.37) より変換は以下のようになる ((4.36) は (4.35) と等価な式になる)。

$$S_3^{(M)} = \frac{|f_1|^2 - |g_1|^2}{|f_1|^2 + |g_1|^2}, \quad (4.48)$$

$$S_1^{(M)} + iS_2^{(M)} = \frac{-2f_1g_1}{|f_1|^2 + |g_1|^2}, \quad (4.49)$$

$$\phi^{(M)} = \phi - \frac{Nv_N}{2} \ln \frac{|f_1|^2 + |g_1|^2}{D^2} \quad (4.50)$$

ψ_j についての方程式は線形方程式 (2.1) から得られるが, (4.42) の場合には以下の線形方程式に帰着される。

$$\psi_j = \psi_j(z, t), \quad z = x + iy, \quad (4.51)$$

$$\psi_{j,t} = iv_N \psi_{j, Nz} + i \left\{ \tilde{\phi}(z, t) \right\}_z \psi_{j, (N-1)z}, \quad (4.52)$$

ここで $\tilde{\phi}(z, t)$ は z, t についての任意の複素関数であり, 非線形方程式の従属変数と

$$\phi = \frac{1}{2} (\tilde{\phi}(z, t) + \tilde{\phi}(z, t)^*) \quad (4.53)$$

(他の従属変数はすべてゼロ) で結ばれている。(4.33), (4.53) は確かに非線形方程式の自明な解になっている。 ψ'_j は条件 (4.14) で与えればよい。

以上より, 条件 (4.14) の下で式 (4.48), (4.49), (4.50) は $\text{su}(2)$ 線形系を伴う DT2 に対して共変な soliton 方程式の multi-soliton 解である。特に $N = 2$ の場合, Ish-II 方程式 (3.26) の multi-soliton 解となる。

4.2.2 BDT2 に対して共変な soliton 方程式の場合

線形系 (2.1) が BDT2 に対して共変であるとき、係数行列には自己共役性の制限 (2.2), (2.29) が課されていた。この制限は今注目している変数に関して言えば S_1, S_2, S_3 が実であり、

$$\varepsilon = -i, \quad v_N^* = (-1)^{N+1} v_N, \quad \phi^* = (-1)^N \phi$$

であるということである。この小節でも $\vec{S} = (0, 0, 1)$ (即ち (4.33)), ϕ の変換 $\vec{S}^{(M)}, \phi^{(M)}$ を求める。Appendix A.2.2 より、それは式 (4.48), (4.49), (4.50) で与えられる。ただし f_1, g_1, D の中身は DT2 の場合の式 (4.38), (4.39) と全く異なっている。 F_1, F_2, Ψ_A をそれぞれ式 (4.6), (4.7), (4.19) とすると、

$$f_1 = \begin{vmatrix} \Lambda_A & F_1^* \\ F_1 & 1 \end{vmatrix}, \quad g_1 = \begin{vmatrix} \Lambda_A & F_2^* \\ F_1 & 0 \end{vmatrix}, \quad D = |\Lambda_A|. \quad (4.54)$$

ここで $2M \times 2M$ 行列 Λ_A は以下のように定義される。

$$\begin{aligned} \Lambda_A &= \partial^{-1}(\Psi_A^* \Psi_A, x) \\ &= \int_{(x_0, y_0, t_0)}^{(x, y, t)} \tilde{\lambda}(\Psi_A, \Psi_A) + C_A. \end{aligned} \quad (4.55)$$

$\tilde{\lambda}(\Psi_A, \Psi_A)$ は式 (2.31) で与えられ、 $2M \times 2M$ 任意定数行列 C_A には以下の条件が課される。

$$C_A^* + C_A = \Psi_A^* \Psi_A|_{(x_0, y_0, t_0)}. \quad (4.56)$$

(ψ_j, ψ'_j) ($j = 1, 2, 3, 4, \dots, 2M-1, 2M$) は線形系 (2.1) の solution vector として与えられる。ここで subsection 4.2.1 の最後の方の議論において W が実であったのと異なり、 D は実ではない。このことは $\phi^{(M)}$ が以下のように書き直せることから分かる。

$$\begin{aligned} \phi^{(M)} &= \phi - \frac{Nv_N}{2} \ln \frac{D^*}{D} \\ &= \phi + iNv_N \arg D. \end{aligned} \quad (4.57)$$

(4.50) から (4.57) を導く際に、 f_1, g_1, D の間に成り立つ以下の関係式を用いた (これは (A.24) である)。

$$|f_1|^2 + |g_1|^2 = |D|^2. \quad (4.58)$$

以後、簡単のために (4.33) かつ

$$V_{N-1} = V_{N-2} = \dots = V_2 = 0 \quad (4.59)$$

の場合を考える。まず ψ_j, ψ'_j については以下の線形方程式系の $2M$ 組の独立な解を与えればよい。

$$\psi_j = \psi_j(\xi, t), \quad \xi = x + y, \quad (4.60)$$

$$\psi'_j = \psi'_j(\eta, t), \quad \eta = x - y, \quad (4.61)$$

$$\psi_{j,t} = v_N \psi_{j,N\xi} + \{\phi_1(\xi, t)\}_\xi \psi_{j,\xi}, \quad (4.62)$$

$$\psi'_{j,t} = -v_N \psi'_{j,N\eta} - \{\phi_2(\eta, t)\}_\eta \psi'_{j,\eta}, \quad (4.63)$$

ここで $\phi_1(\xi, t)$ と $\phi_2(\eta, t)$ はそれぞれ ξ, t と η, t についての任意の実関数であり, (変換する前の) 非線形方程式の従属変数とは

$$\phi = \begin{cases} \frac{1}{2}(\phi_1(\xi, t) + \phi_2(\eta, t)) & (N = 2) \\ 0 & (N \geq 3) \end{cases} \quad (4.64)$$

(v_1, w_1 を除き他の従属変数はすべてゼロ) で結ばれる. (4.33), (4.64) は確かに非線形方程式の自明な解になっている.

次に Λ_A は式 (4.55) で与えられているが,

$$\Lambda_A = (\lambda_{jk}), \quad C_A = (c_{jk}) \quad (4.65)$$

と置いて, (4.33) かつ (4.59) の場合でその成分を計算すると,

$$\lambda_{jk} = \lambda_{jk}[\psi] + \lambda_{jk}[\psi'] + c_{jk}, \quad (4.66)$$

$$\lambda_{jk}[\psi] \equiv \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} \left\{ \psi_j^* \psi_{k, \xi} d\xi + \left(v_N \sum_{n=1}^N (-1)^{N-n} \psi_{j, (N-n)\xi}^* \psi_{k, n\xi} + \{\phi_1(\xi, t)\}_\xi \psi_j^* \psi_{k, \xi} \right) dt \right\} + \frac{1}{2} \psi_j^* \psi_k \Big|_{(x_0, y_0, z_0)}, \quad (4.67)$$

$$\lambda_{jk}[\psi'] \equiv \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} \left\{ \psi'_j{}^* \psi'_{k, \eta} d\eta - \left(v_N \sum_{n=1}^N (-1)^{N-n} \psi'_{j, (N-n)\eta}{}^* \psi'_{k, n\eta} + \{\phi_2(\eta, t)\}_\eta \psi'_j{}^* \psi'_{k, \eta} \right) dt \right\} + \frac{1}{2} \psi'_j{}^* \psi'_k \Big|_{(x_0, y_0, z_0)}, \quad (4.68)$$

($j, k = 1, 2, 3, 4, \dots, 2M-1, 2M$) を得る. ただし積分定数 c_{jk} には式 (4.56) から以下の条件を課す必要がある.

$$c_{jk} + c_{kj}^* = 0. \quad (4.69)$$

式 (4.48), (4.49), (4.50) (もしくは (4.57)) は BDT2 に対して共変な soliton 方程式の multi-soliton 解である. ただし f_1, g_1, D は (4.54) で与えられるとする. 特に $N = 2$ の場合, Ish-I 方程式 (3.26) の multi-soliton 解である.

Chapter 5

(2 + 1) 次元の soliton 方程式の局在解

本章では chapter 3 で導いた Darboux 共変な (2 + 1) 次元の soliton 方程式の局在解について考察する. Chapter 4 において構成した multi-soliton 解は (1 + 1) 次元の soliton 方程式の multi-soliton 解の拡張である line soliton 解ばかりではなく 2 次元空間のあらゆる方向に局在している解も含んでいる. まず section 5.1 では multi-soliton 解の表式から DS-II 方程式と Ishimori-II 方程式の局在解である lump 解を, 続いて section 5.2 では DS-I 方程式の局在解である dromion 解を構成する. さらに section 5.3 では Ish-II 方程式の 2 種類の lump 解である vortex 解と antivortex 解について詳しく議論する.

5.1 Darboux 変換に対して共変な soliton 方程式の局在解

この節では $\mathfrak{su}(2)$ 線形系を伴う DT1 または DT2 に対して共変な soliton 方程式の局在解について一括して考える (自己共役性の制限を課さないで導出した soliton 方程式の局在解については本論文では扱わない).

まず multi-soliton 解を構成するための要素である ψ_j ($j = 1, 2, 3, 4, \dots, 2M-1, 2M$) の満たすべき方程式は, DT1 に対して共変な soliton 方程式の場合 (4.15), (4.16) であり, DT2 に対して共変な soliton 方程式の場合 (4.51), (4.52) であった. もう一つの構成要素である ψ'_j ($j = 1, 2, 3, 4, \dots, 2M-1, 2M$) は ψ_j に対して (4.14) と与えればよい. 簡単のため $\tilde{\phi}(z, t) = 0$ (DT1 の場合), $\{\tilde{\phi}(z, t)\}_z = 0$ (DT2 の場合) とおく. このとき ψ_j の満たすべき方程式は両方とも線形方程式

$$\psi_j = \psi_j(z, t), \quad z = x + iy, \quad (5.1)$$

$$\psi_{j,t} = iv_N \psi_{j,Nz} \quad (5.2)$$

に帰着する. さて, 線形方程式 (5.2) の多項式解を求めると,

$$\psi_j = \sum_{m=0}^{M_j} A_{jm} P_m(z, t), \quad (5.3)$$

($j = 1, 2, \dots, 2M-1, 2M$) . ここで M_j は任意の非負整数, A_{jm} は任意の複素定数とする. また $P_m(z, t)$ は z, t の多項式である.

$$P_m(z, t) = \sum_{\substack{r, s \geq 0 \\ r + sN = m}} \frac{1}{r!s!} z^r (iv_N t)^s. \quad (5.4)$$

本節で考えている soliton 方程式の局在解は線形方程式の多項式解 (5.3) から構成することができる. それは 2 次元空間のあらゆる方向でべき函数的に減衰している. このような局在解を lump 解という.

ところで線形方程式 (5.2) は指数函数解も持っているが, こちらは line soliton 解を構成する.

5.1.1 DT1 に対して共変な soliton 方程式の場合

DT1 に対して共変な soliton 方程式の lump 解は多項式 (5.3), (5.4) を multi-soliton 解の表式に代入すれば得られる. ここで multi-soliton 解は式 (4.1), (4.3) 及び (4.4) (もしくは式 (4.5)), (4.6), (4.7) で与えられる.

このようにして求めた解が確かに lump 解になっていることを, $N = 2$ (即ち DS-II 方程式) に対する $M = 1$ の場合の解を例にとって確かめる. 最も簡単な場合は, $M_1 = 1, M_2 = 0$ である, 即ち

$$\psi_1 = A_{11}z + A_{10}, \quad \psi_2 = A_{20}. \quad (5.5)$$

従って,

$$u^{(1)} = \frac{2i\kappa}{|z - \zeta|^2 + |\kappa|^2}, \quad (5.6)$$

$$\phi^{(1)} = v_2 \left\{ \ln(|z - \zeta|^2 + |\kappa|^2) \right\}_{xx}$$

を得る. ここで $\kappa = -A_{20}/A_{11}^*$, $\zeta = -A_{10}/A_{11}$ と置いた. これが DS-II 方程式の lump 解である (Figure 5.1, 5.2) .

5.1.2 DT2 に対して共変な soliton 方程式の場合

DT2 に対して共変な soliton 方程式の lump 解も同様に多項式 (5.3), (5.4) を multi-soliton 解の表式に代入すれば得られる. multi-soliton 解は (4.48), (4.49), (4.50) 及び (4.38) (もしくは (4.39)), (4.6), (4.7) で与えられる.

この解が確かに lump 解になっていることを, $N = 2$ (即ち Ish-II 方程式) に対する $M = 1$ の場合の解を例にとって確かめる. 最も簡単な場合は, $M_1 = 1, M_2 = 0$, 即ち式 (5.5) である. 従って,

$$S_3^{(1)} = \frac{|z - \zeta|^2 - |\kappa|^2}{|z - \zeta|^2 + |\kappa|^2}, \quad (5.7)$$

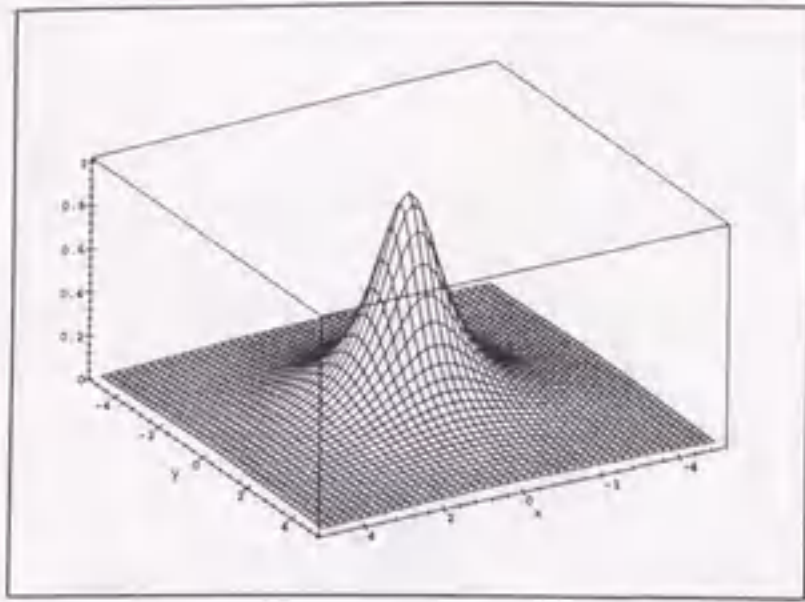


Figure 5.1: DS-II 方程式の lump 解. 横軸は空間座標 (x, y) を, 縦軸は u を表す.

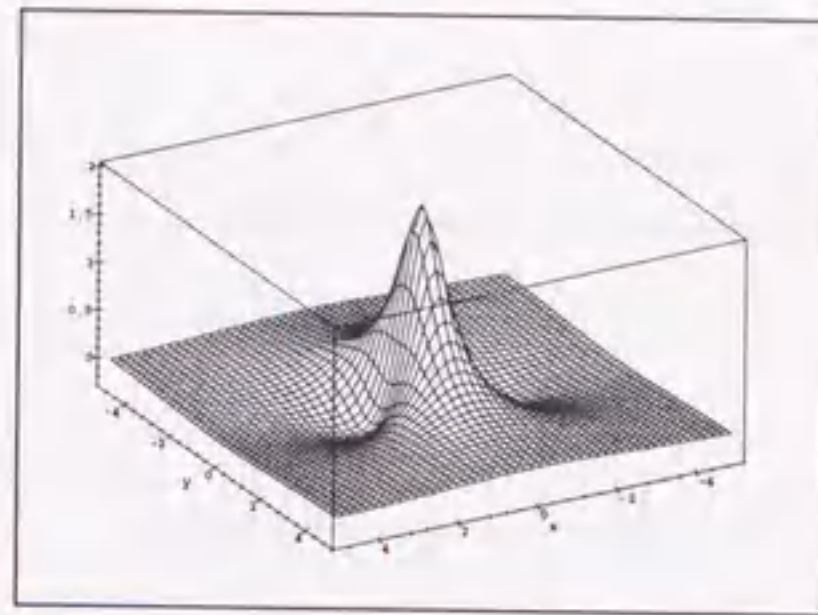


Figure 5.2: lump 解における ϕ .

$$S_1^{(1)} + iS_2^{(1)} = \frac{2\kappa(z - \zeta)}{|z - \zeta|^2 + |\kappa|^2},$$

$$\phi^{(1)} = -v_2 \ln(|z - \zeta|^2 + |\kappa|^2)$$

を得る. ここで $\kappa = -A_{20}/A_{11}^*$, $\zeta = -A_{10}/A_{11}$ と置いた. これは $\sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty$ につれてべき函数的に $\vec{S} \rightarrow (0, 0, 1)$ となるので, lump 解である (ただし, ϕ は発散している). その中心では $\vec{S} = (0, 0, -1)$ であって, その周りの \vec{S} の水平成分の様子から vortex 解と呼ばれている (Figure 5.3, 5.4, 5.5).

実は, Ish-II 方程式にはもう 1 種類 lump 解が存在する. それは vortex 解に対して以下の簡単な変換を行えば得られるもので, antivortex 解と呼ばれる.

$$z \mapsto z^*, \quad \phi^{(M)} \mapsto -\phi^{(M)}.$$

(この変換の下で Ish-II 方程式は不変である.) DS-II 方程式の lump 解はこの変換に対して不変である. つまり, DS-II 方程式の lump 解には antivortex に対応するような解はない. antivortex 解の S_3 , ϕ は明らかに vortex 解と同じであるが, S_1, S_2 は全く異なっている (Figure 5.6).

Section 5.3 で vortex (antivortex) 解についてもっと詳しく議論する. また $\{\tilde{\phi}(z, t)\}_z \neq 0$ の場合についても考察する.

5.2 BDT1 に対して共変な soliton 方程式の局在解

この節では BDT1 に対して共変な soliton 方程式の局在解について考える (BDT2 の場合は本論文では扱わない).

まず ψ_j, ψ'_j ($j = 1, 2, 3, 4, \dots, 2M-1, 2M$) の満たすべき方程式は, (4.23), (4.24), (4.25), (4.26) であった. 今 $\phi_1(\xi, t) = \phi_2(\eta, t) = 0$ の場合を考える. このとき線形方程式

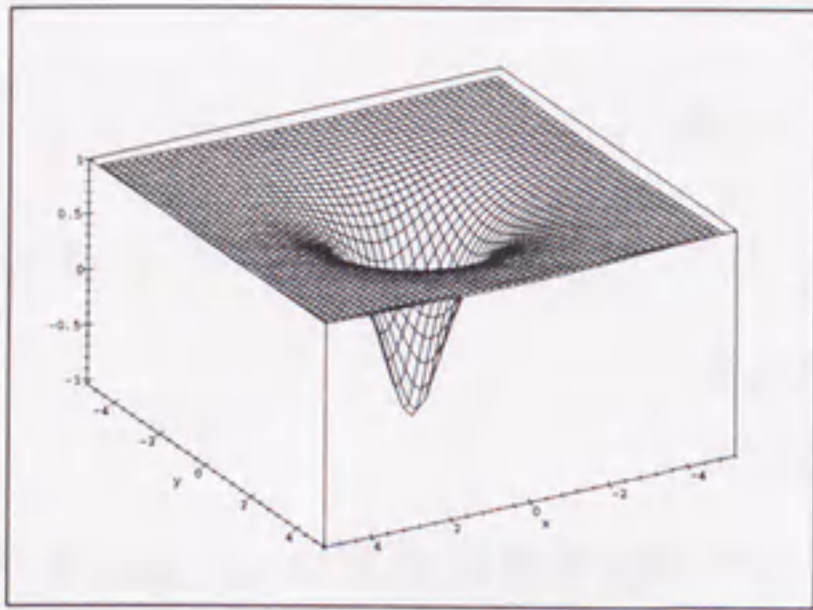


Figure 5.3: Ishimori-II 方程式の 1-vortex 解. 横軸は空間座標 (x, y) を, 縦軸が S_3 を表す.

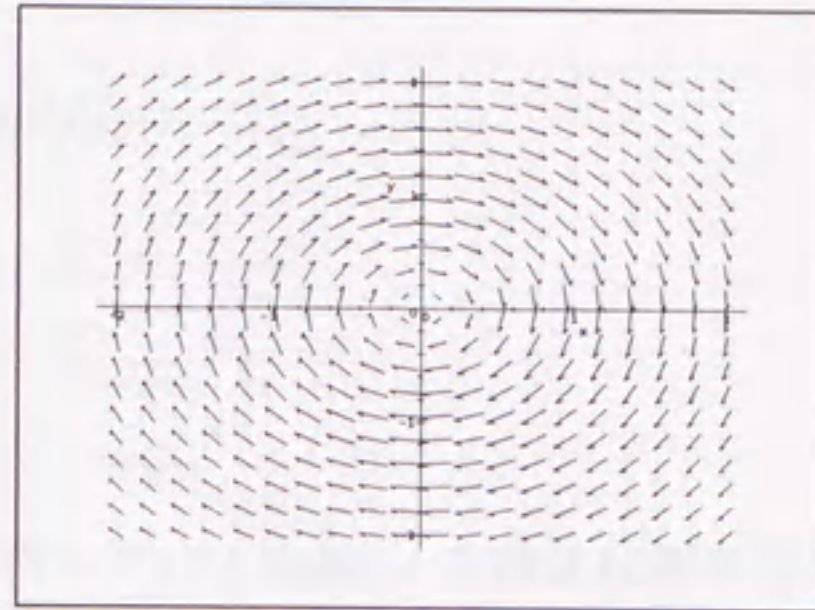


Figure 5.4: 同じく 1-vortex 解. S_1, S_2 を矢印で表す.

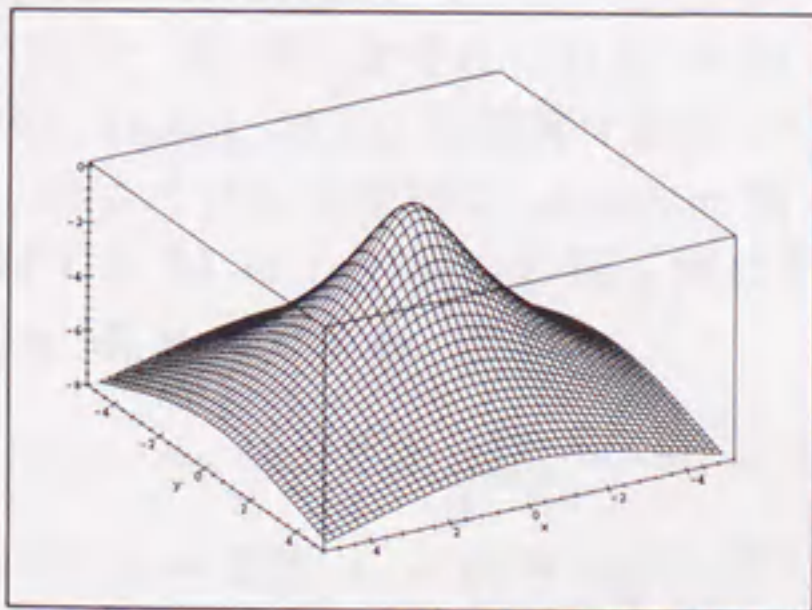


Figure 5.5: 1-vortex 解. 縦軸は ϕ を表す.

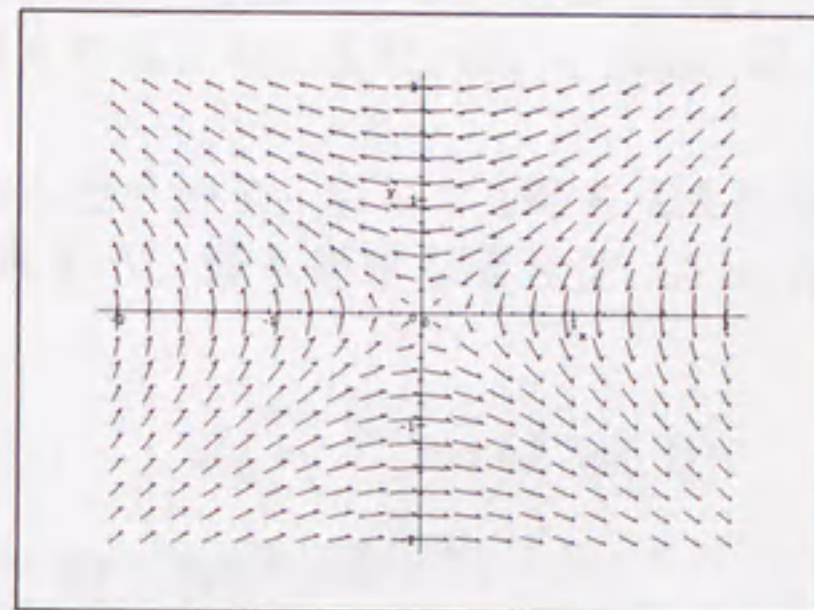


Figure 5.6: Ish-II 方程式の 1-antivortex 解の S_1, S_2 成分.

(4.24), (4.26) の指数関数解は,

$$\psi_j = \sum_{m=1}^{M_j} A_{jm} \exp(E_m(\xi, t)), \quad (5.8)$$

$$\psi'_j = \sum_{m=1}^{M'_j} A'_{jm} \exp(E'_m(\eta, t)), \quad (5.9)$$

($j = 1, 2, \dots, 2M - 1, 2M$) . ここで $E_m(\xi, t)$, $E'_m(\eta, t)$ は

$$E_m(\xi, t) = p_m \xi + v_N p_m^N t, \quad (5.10)$$

$$E'_m(\eta, t) = q_m \eta - v_N q_m^N t \quad (5.11)$$

であり, p_m, q_m は任意の複素定数である. 本節で扱っている soliton 方程式は無限遠方において指数関数的に減衰する局在解を持つ. このような局在解は dromion 解と呼ばれている [26][28][27]. Dromion 解を構成するためには, 以下の条件を満たすように ψ_j, ψ'_j を取る必要がある. $J + K = 2M$ なる正の整数 J, K に対して,

$$\begin{aligned} \psi'_j &= 0, & (1 \leq j \leq J). \\ \psi_j &= 0, & (J + 1 \leq j \leq J + K = 2M). \end{aligned} \quad (5.12)$$

この条件 (5.12) は J. J. C. Nimmo によって DS-I 方程式に対して導入されたものである [33]. 実際, DS-I 方程式に対して条件 (5.12) と指数関数解から Grammian 型の (J, K) -dromion 解 [29] が導かれている.

一般に BDT1 に対して共変な soliton 方程式の局在解を求めるためには, 条件 (5.12) の下で指数関数解 (5.8), (5.9), (5.10), (5.11) を multi-soliton 解の表式に代入すればよい. multi-soliton 解 $u^{(M)} (=u_1^{(M)})$, $\phi^{(M)}$ は (4.1), (4.3) で与えられる. ここで G_1, W は式 (4.18) で, F_1, F_2 はそれぞれ式 (4.6), (4.7) で与えればよい. また, $\Omega_A = (\omega_{jk})$ は (4.29), (4.30), (4.31), (4.32) を計算すればよい.

このようにして実際に dromion 解が得られるかどうかを, $N = 2$ (即ち DS-I 方程式) に対する $M = 1$ の場合の解を例にとって見てみよう. 最も簡単な場合は, $J = K = 1$, $M_1 = M'_2 = 1$ である. 即ち,

$$\psi_1 = A_{11} \exp(E(\xi, t)), \quad \psi_2 = 0, \quad \psi'_1 = 0, \quad \psi'_2 = A'_{21} \exp(E'(\eta, t)). \quad (5.13)$$

ここで $E = E(\xi, t) = p\xi + v_2 p^2 t$, $E' = E'(\eta, t) = q\eta - v_2 q^2 t$. 従って,

$$u^{(1)} = \frac{2\kappa \exp(E + E'^*)}{(\exp(E + E^*) + A_0)(\exp(E' + E'^*) + A'_0) - \frac{|\kappa|^2}{(p+p^*)(q+q^*)}}, \quad (5.14)$$

$$\phi^{(1)} = -iv_2 \left\{ \ln \left((\exp(E + E^*) + A_0)(\exp(E' + E'^*) + A'_0) - \frac{|\kappa|^2}{(p+p^*)(q+q^*)} \right) \right\}_{xx}$$

を得る. ここで $\kappa = c_{12}(p+p^*)(q+q^*)/(A_{11}^* A'_{21})$, $A_0 = c_{11}(p+p^*)/|A_{11}|^2$, $A'_0 = c_{22}(q+q^*)/|A'_{21}|^2$ と置いた. これは 1-dromion 解である.

5.3 Ishimori-II 方程式の lump 解

この節では特に Ishimori-II 方程式の lump 解について考察する. Ish-II 方程式は subsection 5.1.2 において紹介したように vortex 解及び antivortex 解と呼ばれている 2 種類の lump 解を持っている. また, 複数の vortex 同士の相互作用を表す multi-vortex 解の表式が直接法等によって既に求められている [17][24]. そこで本節では, まず DT2 を用いて構成した Ish-II 方程式の lump 解の表式が直接法によって求められた multi-vortex 解を特殊な場合として含んでいることを示す. さらにこの表式がそれまで知られていなかった lump 解, 例えば vortex と antivortex の相互作用を表す解や円運動する vortex 解等を含んでいることを述べる [30].

5.3.1 Multi-vortex 解

式 (5.3) において $M_{2l-1} = j, M_{2l} = 0$ ($l = 1, 2, \dots, M$) と置くと, f_1, g_1, D についての式 (4.39) は

$$\begin{aligned} f_1 &= \sum_{m=0}^M a_m P_m(z, (-1)^{N-1}t), \\ g_1 &= \left\{ \sum_{m=0}^{M-1} b_m P_m(z, (-1)^{N-1}t) \right\}^*, \\ D &= 1 \end{aligned} \quad (5.15)$$

に帰着される. ここで多項式 $P_m(z, t)$ ($m \geq 1$) の間に成り立つ以下の関係式を用いた (証明略).

$$\begin{vmatrix} P_1 & P_2 & \cdots & P_{m-1} & P_m \\ 1 & P_1 & \cdots & P_{m-2} & P_{m-1} \\ & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & \ddots & P_1 & P_2 \\ 0 & & & 1 & P_1 \end{vmatrix} = P_m(z, (-1)^{N-1}t). \quad (5.16)$$

係数 a_m, b_m は A_{jm} によって表されるが, A_{jm} の任意性より任意の複素定数とみなすことが出来る. $N = 2$ のとき, $t \mapsto -t, S_3^{(M)} \mapsto -S_3^{(M)}, \phi^{(M)} \mapsto -\phi^{(M)}$ とすると, いわゆる Ish-II 方程式の multi-vortex 解が得られる. 従ってこれは multi-vortex 解の一般の N への拡張であるといえる. また multi-antivortex 解は multi-vortex 解に対して以下の変換を行えば得られる.

$$z \mapsto z^*, \quad \phi^{(M)} \mapsto -\phi^{(M)}.$$

式 (5.15) を代入した式 (4.48), (4.49), (4.50) は M 個の vortex 同士の相互作用を表している. One-vortex 解 ($M = 1$) は static であり, vortex はその形状及び, 中心の位置を特徴づける 2 個の parameter $\kappa = -b_0/a_1^*, \zeta = a_0/a_1$ を持っている. $|\kappa|, \arg \kappa$ はそれぞれ vortex のサイズと中心の周りの渦の様子を表す $\vec{S}^{(1)}$ の方向を示している (Figure 5.4).

Two-vortex 解 ($M=2$) は二つの vortex の相互作用 (衝突) を表している. 渦の形状を特徴づける parameter に注目すると, 衝突の前後で変わらずに同じ値 b_1^*/a_2^* を取る事が分かる (Figure 5.7, 5.8). この soliton 的な性質は一般に M 個の vortex 間の衝突に対しても成立する.

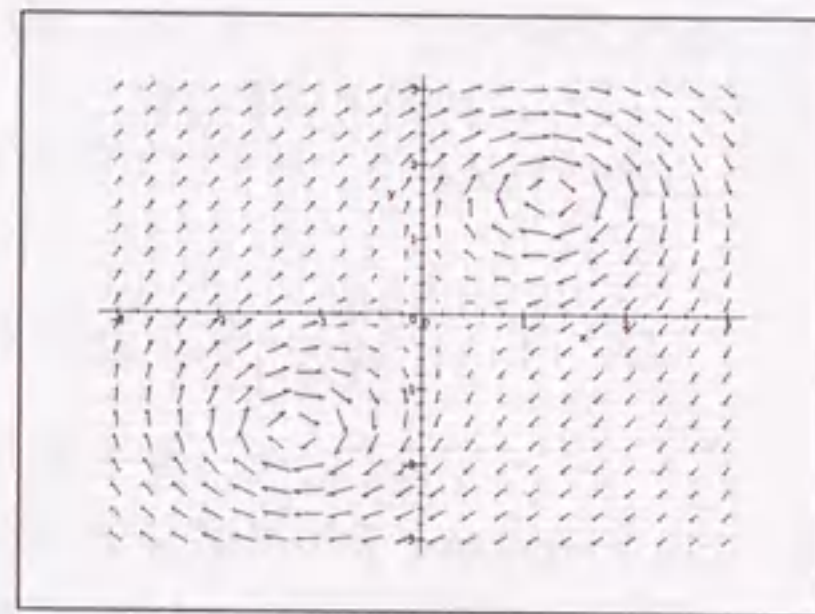
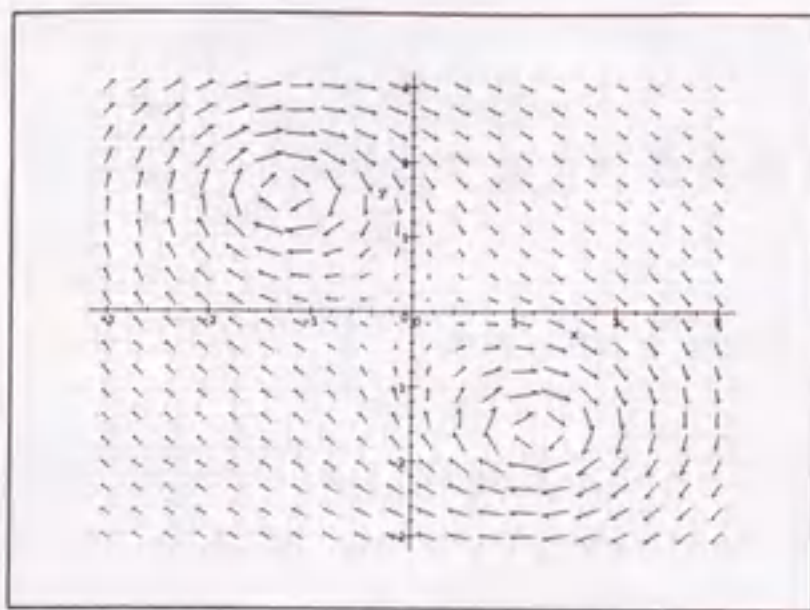


Figure 5.7: Ishimori-II 方程式の 2-vortex 解. 衝突前 ($t = -1$) での様子 ($t = 0$ で衝突のピーク).

Figure 5.8: 同じく衝突後 ($t = +1$) での様子. 衝突によってその形状は変化を受けない.

また vortex の中心に着目すると, 一般に multi-vortex 解についてその dynamics を考えることが出来る. M 個の vortex の中心の位置 $\zeta_m(t)$ ($m = 1, 2, \dots, M$) は f_1 の零点として定義される. 即ち,

$$f_1 = a_M \prod_{m=1}^M \{z - \zeta_m(t)\}. \quad (5.17)$$

f_1 は以下の線形方程式を満足することが (5.15) から分かるので

$$f_{1,t} = (-1)^{N-1} i v_N f_{1,Nz},$$

(5.17) を代入して ζ_m の運動方程式を求めることが出来る.

$$\frac{d\zeta_m}{dt} = -iNv_N \sum_{m_1 \neq m} \sum_{m_2 \neq m, m_1} \dots \sum_{m_{N-1} \neq m, m_1, \dots, m_{N-2}} \left\{ \prod_{j=1}^{N-1} \frac{1}{\zeta_{m_j} - \zeta_m} \right\}, \quad (5.18)$$

($m = 1, 2, \dots, M$). 方程式 (5.18) はすべての N, M について可積分である. なぜなら式 (5.15) の第一式と (5.17) が等価であることから $2M-1$ の保存量を作ることが出来るからである.

5.3.2 その他の lump 解

この小節では特に $N = 2$ (Ish-II 方程式), $M = 1$ の場合を考える ($v_2 = a$ と置く).

Vortex と antivortex の相互作用

$\phi_z = 0$ の場合, 式 (5.3) において以下のように選ぶことが出来る.

$$\psi_1 = A_{12}P_2(z, t) + A_{10}, \quad \psi_2 = A_{21}z. \quad (5.19)$$

(これは subsection 5.3.1 で考えた multi-vortex 解には含まれていない場合である.) ここで A_{12}, A_{10}, A_{21} は複素定数である. この場合 f_1 は三個の零点を持っている. 一つは $z=0$ で, 残りは次の方程式で表される直線と円の 2 個の交点である. それを $z = \pm\zeta$ と置くことにする.

$$(A + \mu)x + \tilde{\nu}y = 0, \quad x^2 + y^2 = 2\left(A - \frac{|A_{21}|^2}{|A_{12}|^2}\right). \quad (5.20)$$

ここで $\mu + i\nu = A_{10}/A_{12}$, $\tilde{\nu} = \nu + at$, $A = \sqrt{\mu^2 + \tilde{\nu}^2}$ と置いた.

零点 $z=0$ は antivortex の中心であり, その形状を特徴づける parameter は $-A_{21}/A_{12}^*$ で与えられる. 一方, 残りの零点 $z = \pm\zeta$ は 2 個の vortex の中心であり, その parameter は同じ値 $-(A_{21}\zeta)/(A_{12}\zeta)^*$ を取る. つまり, この解は 2 個の同種の vortex が antivortex の周りで衝突している様を表している (Figure 5.9, 5.10, 5.11, 5.12). $(at) \rightarrow \pm\infty$ につれて $\zeta^2 \sim -2iat$ であるので, 2 個の vortex の parameter の符号 (即ち, \vec{S} の xy 成分の向き) は衝突の前後で両方とも反転する. この現象は vortex 同士の相互作用では見られなかったもので, vortex, antivortex の非 soliton 的な性質を表しているものと考えられる.

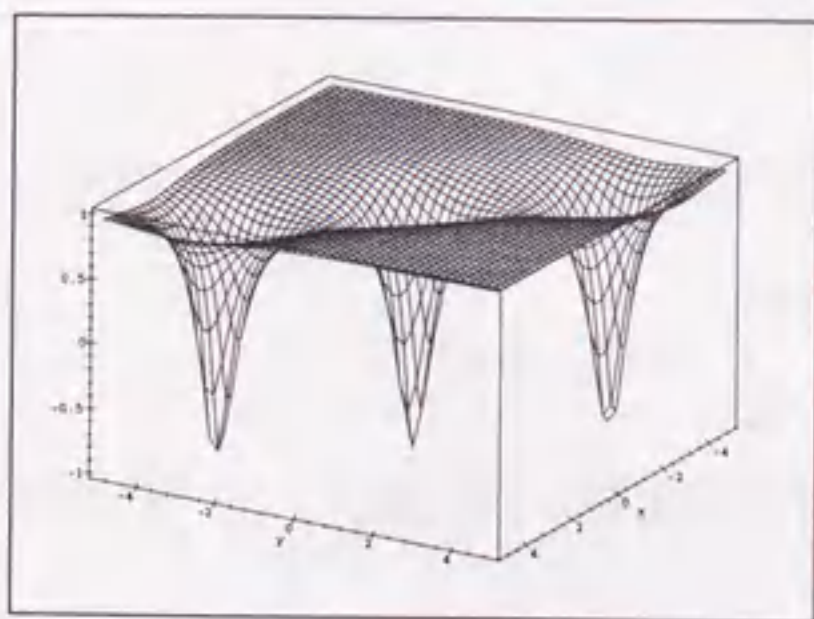


Figure 5.9: 2 個の vortex と 1 個の antivortex の相互作用 ($t = 5$ での様子). 縦軸は S_3 を表す. 真ん中にあるのが antivortex である.

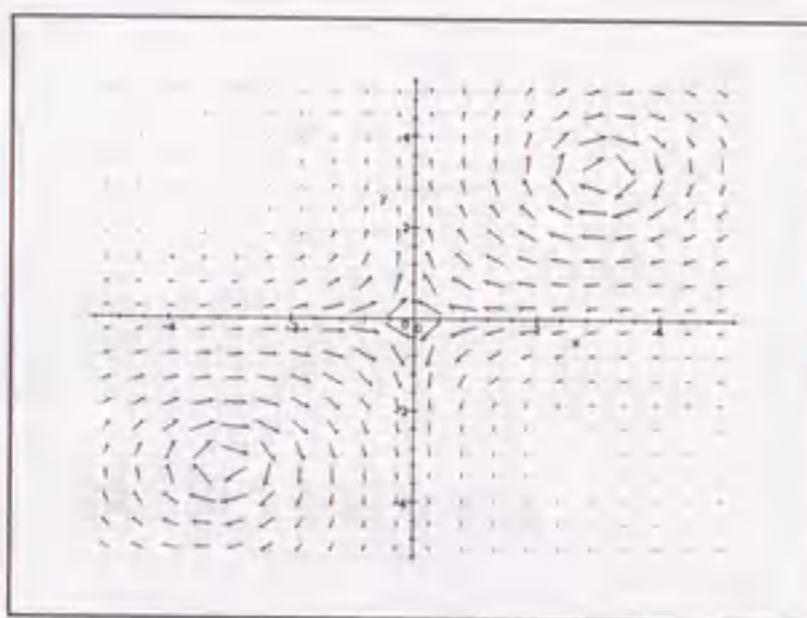


Figure 5.10: 衝突前 ($t = -5$) の S_1, S_2 の様子. この図から真ん中にあるものが antivortex であることが分かる.

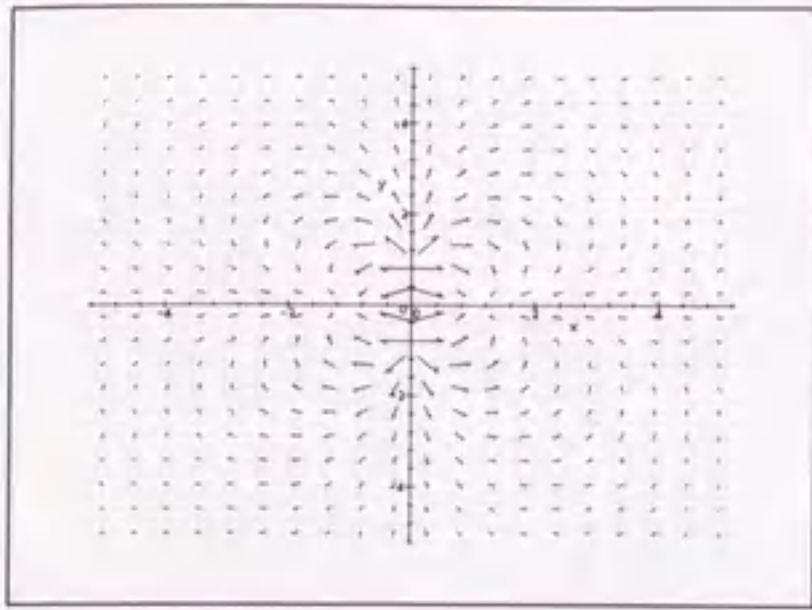


Figure 5.11: 衝突のピーク ($t = 0$) の様子.

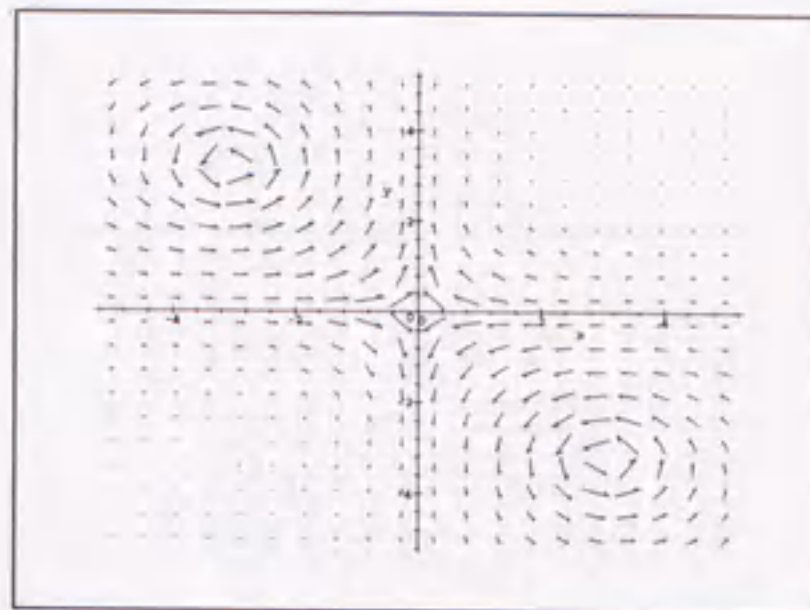


Figure 5.12: 衝突後 ($t = 5$) の S_1, S_2 の様子. vortex の向きが両方とも反転しているのが分かる.

円運動する vortex 解

ここでは $\phi \neq 0$ の場合を考える. 最も簡単な場合は $\phi = \frac{1}{2}\rho z^2 + c. c.$ である. このとき線形方程式 (4.52) の z についての多項式解は以下ようになる.

$$\psi_j = \sum_{m=0}^{M_j} A_{jm} R_m(z, t). \quad (5.21)$$

ここで M_j は非負整数, A_{jm} は複素定数で,

$$R_m(z, t) = \sum_{r=0}^{[m/2]} \left(\frac{a}{4\rho}\right)^r \frac{z^{m-2r}}{r!(m-2r)!} \exp(2i\rho m t) \quad (5.22)$$

とする. $[x]$ は x を越えない最大の整数を表す. この種の最も単純な解は

$$\psi_1 = A_{11} z \exp(2i\rho t) + A_{10}, \quad \psi_2 = A_{20}. \quad (5.23)$$

で与えられる. この解は以下のような中心の位置と形状を表す parameter を持つ一つの vortex を表している.

$$\zeta(t) = -(A_{10}/A_{11}) \exp(-2i\rho t), \quad \kappa(t) = -(A_{20}/A_{11}^*) \exp(+2i\rho^* t).$$

ρ が実数のとき, vortex 自身が角速度 -2ρ で円運動をしながら, 中心の周りの $\vec{S}^{(1)}$ の水平成分 (xy 方向成分) の向きを振動数 $+2\rho$ で周期的に回転させる解を表す (Figure 5.13, 5.14, 5.15, 5.16).

ρ が純虚数で $A_{10} = 0$ のとき, 時間 $(-i\rho t)$ が $-\infty$ から $+\infty$ へ進むにつれて, vortex は大きくなっていき, $\vec{S}^{(1)}$ の方向は全体として $S_3^{(1)}$: $+1 \rightarrow -1$ へと反転していく.

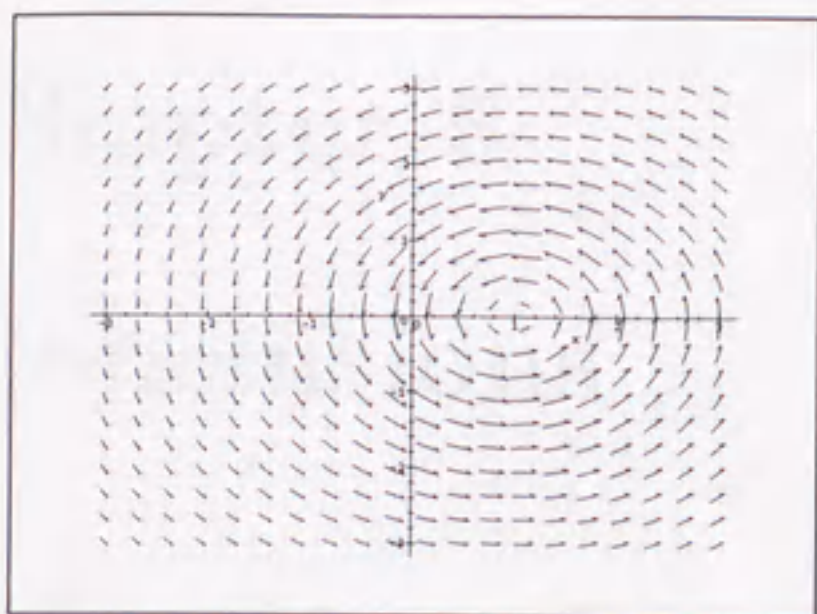


Figure 5.13: 円運動する 1-vortex 解の様子 ($t = 0, t = 1$) .

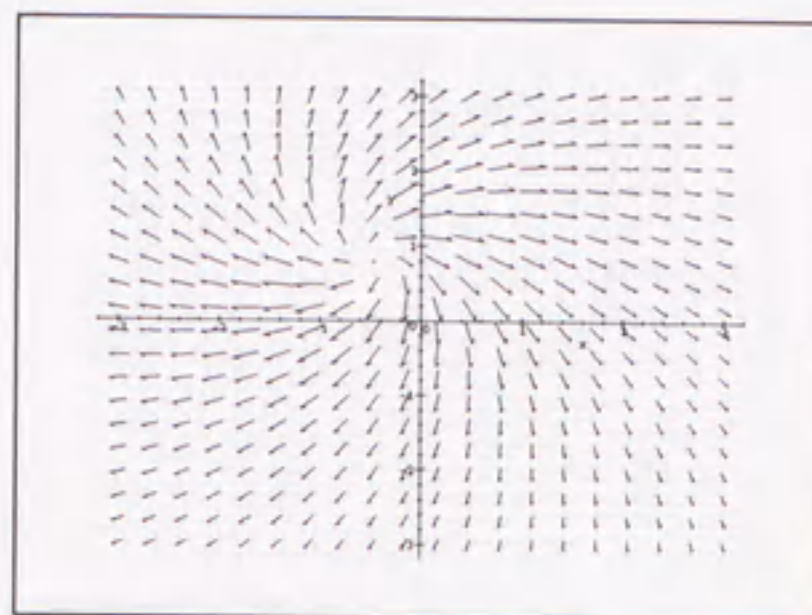


Figure 5.14: 円運動する 1-vortex 解の様子 ($t = +0.33$) .

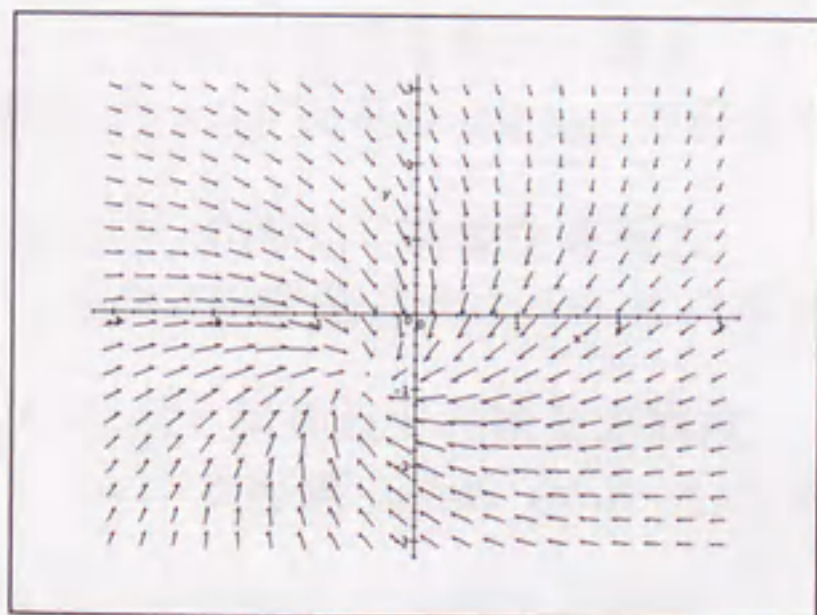


Figure 5.15: 円運動する 1-vortex 解の様子 ($t = +0.66$) .

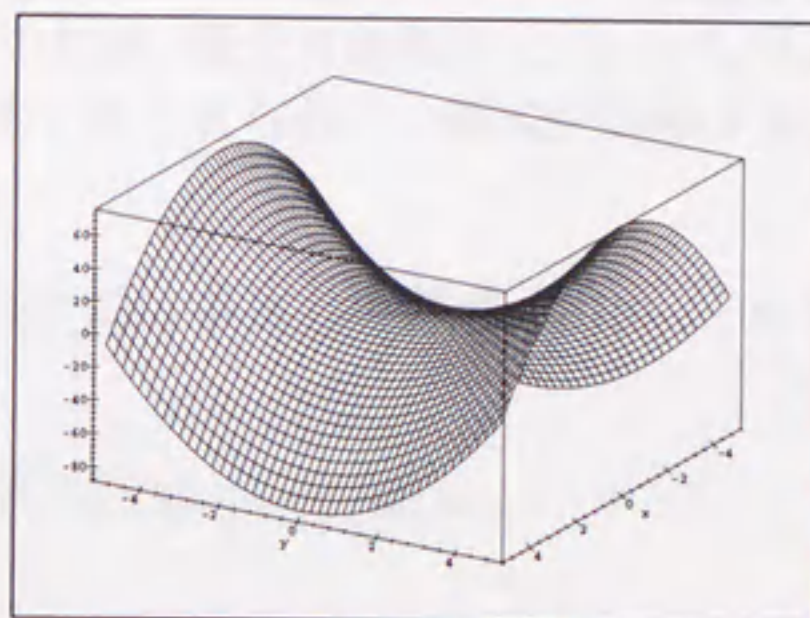


Figure 5.16: ϕ の様子 ($t = 0$) .

Chapter 6

Conclusions

本論文の前半では, 2×2 行列で値づけられた一組の線形偏微分方程式系 (2.1) を一般的な形式で与えておいて, それから $(2+1)$ 次元の soliton 方程式 (及びその Lax Pair) を系統的に導出することができた [35][36]. ここで「一般的な」という言葉は係数行列が任意の 2×2 行列であるという意味で用いているが, 実際には, 制限 (2.2) が課される場合も同時に考えていた (本論文ではこの制限を自己共役性の制限と呼んでいた), というのは, この制限は以下に述べる Darboux 共変性と密接に関係があるからである. Darboux 変換 及び binary Darboux 変換 はそれぞれ 2 種類ずつ導入した. DT1 (2.4), BDT1 (2.20) は既に知られていたものであるが [32], DT2 (2.13), BDT2 (2.30) はこの論文によって新たに導入されたものである. 制限 (2.2) を課していない一般的な線形系及び制限 (2.10) を課した線形系は DT1, DT2 の両方に対して共変であった. また制限 (2.19) を課した線形系は BDT1 に対して, 制限 (2.29) を課した線形系は BDT2 に対して共変であった. そこでこの Darboux 共変性を壊さないように「Darboux 変換または binary Darboux 変換に対する不変量を定数と置く,」という制限を新たに課すことにした. その結果, 積分可能条件 (2.3) から Darboux 共変な $(2+1)$ 次元の soliton 方程式が導出された. 以下得られた方程式を列挙すると,

- DT1 に対して共変な方程式:
GDS 方程式 (3.13), DS-II 方程式 (3.14) ($\varepsilon = 1$), 高次の方程式 (3.18) ($\varepsilon = 1$).
- BDT1 に対して共変な方程式:
DS-I 方程式 (3.14) ($\varepsilon = -i$), 高次の方程式 (3.18) ($\varepsilon = -i$).
- DT2 に対して共変な方程式:
GIsh 方程式 (3.26), Ish-II 方程式 (3.26) ($\varepsilon = 1$), 高次の方程式 (3.27) ($\varepsilon = 1$).
- BDT2 に対して共変な方程式:
Ish-I 方程式 (3.26) ($\varepsilon = -i$), 高次の方程式 (3.27) ($\varepsilon = -i$).

(これだけでなく時間発展線形方程式の次数 N の値を上げていくと, 無限に方程式を得ることができるが, これ以上はあまりに複雑になる.) 高次の方程式は両方とも m -KdV 方

程式の 2 次元化である。方程式 (3.18) の方は Boiti 達の論文 [26] の中で別の方法によって見いだされているが、もう一つの方程式 (3.27) の方は新しい方程式である。

本論文の後半では、まず上で導いた方程式の multi-soliton 解を DT, BDT によって構成した。これを求めるためにはこれらの変換を繰り返していけばよい。一般の M-soliton 解の表式を求めるには、M 回繰り返して得られる変換と 1 回だけの変換とがかなりの類似性を持っている事に注目すれば、multi-soliton 解は比較的容易に求めることができる。この類似性は特に BDT において著しい。しかもこの方法は発見的手法に基づく直接法と異なり、例えば、Ishimori 方程式等の解 (4.34), (4.35), (4.36), (4.37) の式の形が必然的に導き出せる利点がある。このようにして求めた multi-soliton 解の表式は空間 1 次元的な性質をいくらかでも引き摺っている line soliton 解ばかりでなく、空間 2 次元的な局在をする解も含んでいる。本論文では DT1, DT2 に対して共変な soliton 方程式 (DS-II 方程式, Ish-II 方程式等) の lump 解や、BDT1 に対して共変な方程式 (DS-I 方程式等) の dromion 解を求めた。特に、Ishimori-II 方程式の 2 種類の lump 解、即ち vortex 解と antivortex 解についてはより詳しく調べた [30]。本論文で求めた解は vortex 同士の相互作用 (衝突) を表す解としてそれまで知られていた multi-vortex 解ばかりでなく、新しい振る舞いをする解も含んでいることを見出した。Vortex 同士はその相互作用によって自分たちの性質 (渦の大きさと向き) を変えずに保たれる、いわゆる soliton 的な性質を持っている。ところが今回見つかった解によると、2 個の vortex の間に antivortex があるときは vortex は衝突の前後でその性質を変える (渦の向きを反転させる)、つまり非 soliton 的な振る舞いをする。また back ground における $\phi \neq 0$ の場合の最も簡単な解として、円運動をする vortex 解を導いた (このとき渦の向きも同じ周期で回転する)。このように補助的な変数 ϕ の存在が vortex 解の振る舞いの多様性を生じさせている。

[謝 辞]

指導教官である野崎一洋教授には、この研究の当初から貴重な御指導・御助言を数多くいただき、この場を借りて深く感謝いたします。また、小西哲郎助教授、R 研究室の他の方々にも、コロキウム等を通じて熱心に御議論・御助言していただきました。本当にありがとうございました。

Appendix A

Multi-soliton 解の構成

A.1 DT1, BDT1 に対して共変な soliton 方程式

A.1.1 DT1 に対して共変な場合

まず

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix}$$

と置くと, 式 (2.7) より DT1 に対する u_1, u_2 の変換

$$u_1^{(1)} = u_1 + 2i\varepsilon\sigma_{12}, \quad u_2^{(1)} = u_2 - 2i\varepsilon\sigma_{21} \quad (\text{A.1})$$

が得られる. 次に式 (3.6) より

$$v_{N-2} = \frac{(U_1 \cdot V_{N-2})}{|U_1|^2}$$

であるので, section 4.1 の冒頭で述べた ϕ の定義及び (2.8) より ϕ の変換

$$\phi^{(1)} = \phi + \frac{\varepsilon N v_N}{2} (\sigma_{11} + \sigma_{22})_x \quad (\text{A.2})$$

が得られる. 従って (A.1), (A.2) より, $\sigma_{12}, \sigma_{21}, \sigma_{11} + \sigma_{22}$ を求めればよい.

$$\Psi_1 = \begin{pmatrix} \psi_1 & \psi_2 \\ \psi'_1 & \psi'_2 \end{pmatrix}$$

と置いて DT1 の定義式 (2.4) より σ を成分計算すると

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{1}{W} (\psi_{1,x} \psi'_2 - \psi_{2,x} \psi'_1), & \sigma_{12} &= \frac{1}{W} (\psi_1 \psi_{2,x} - \psi_{1,x} \psi_2), \\ \sigma_{21} &= \frac{1}{W} (\psi'_{1,x} \psi'_2 - \psi'_{1,x} \psi'_{2,x}), & \sigma_{22} &= \frac{1}{W} (-\psi'_{1,x} \psi_2 + \psi'_{2,x} \psi_1), \\ W &= \psi_1 \psi'_2 - \psi_2 \psi'_1. \end{aligned}$$

さらに

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11} + \sigma_{22} &= \frac{1}{W}(\psi_{1,x}\psi'_{2} - \psi_{2,x}\psi'_{1} - \psi'_{1,x}\psi_2 + \psi'_{2,x}\psi_1) \\
 &= \frac{1}{W}(\psi_1\psi'_{2} - \psi_2\psi'_{1})_x \\
 &= \frac{W_x}{W} \\
 &= (\ln W)_x.
 \end{aligned}$$

従ってこの結果を整理すると, $M=1$ について (4.1), (4.2), (4.3) 及び (4.4) を得る.

次に, DT1 を M 回行なって得られる変換を考える. これを M -DT1 と呼ぶことにする. M -DT1 は以下のように表わされる.

$$\Psi^{(M)} = \Psi_{Mx} - \sum_{m=0}^{M-1} \sigma_m \Psi_{mx}. \quad (\text{A.3})$$

ここで係数行列 σ_m ($m=0, 1, \dots, M-1$) は次の方程式から決定される.

$$\Psi_{l, Mx} - \sum_{m=0}^{M-1} \sigma_m \Psi_{l, mx} = 0, \quad (\text{A.4})$$

($l=1, 2, \dots, M$) . 方程式 (A.4) において

$$\Psi_l = \begin{pmatrix} \psi_{2l-1} & \psi_{2l} \\ \psi'_{2l-1} & \psi'_{2l} \end{pmatrix}$$

は線形系 (2.1) の M 個の独立な解である. (A.4) は σ_m についての非斉次連立一次方程式なので, Cramer の公式を適用すれば, すべての σ_m を Ψ_l ($l=1, 2, \dots, M$) で表すことが出来る. M -DT1 に対する係数行列 U_1, U_0, V_{N-2} の変換 $U_1^{(M)}, U_0^{(M)}, V_{N-2}^{(M)}$ は

$$U_1^{(M)} = U_1, \quad (\text{A.5})$$

$$U_0^{(M)} = U_0 + [U_1, \sigma_{M-1}] + MU_{1,x}, \quad (\text{A.6})$$

$$\begin{aligned}
 V_{N-2}^{(M)} &= V_{N-2} + [V_{N-1}, \sigma_{M-1}] + [V_N, \sigma_{M-1}]\sigma_{M-1} + [V_N, \sigma_{M-2}] \\
 &\quad + MV_{N-1,x} + \binom{M}{M-2} V_{N,xx} + MV_{N,x}\sigma_{M-1} - (M-1)\sigma_{M-1}V_{N,x} \\
 &\quad + NV_N\sigma_{M-1,x}.
 \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

式 (A.6), (A.7) と式 (2.7), (2.8) の類似性より u_1, u_2, ϕ の変換 $u_1^{(M)}, u_2^{(M)}, \phi^{(M)}$ は (A.1), (A.2) と同じ式である. ただ σ の代わりを

$$\sigma_{M-1} = \begin{pmatrix} \sigma_{M-1,11} & \sigma_{M-1,12} \\ \sigma_{M-1,21} & \sigma_{M-1,22} \end{pmatrix}$$

がしている点だけが異なっている。従って連立方程式 (A.4) を解いて $\sigma_{M-1, 12}$, $\sigma_{M-1, 21}$, $\sigma_{M-1, 11} + \sigma_{M-1, 22}$ を求めれば, (4.1), (4.2), (4.3) における G_1, G_2, W を決定することが出来る。このようにして (4.5), (4.6), (4.7) を得る。ここで公式

$$\frac{\partial}{\partial x} \begin{vmatrix} \vec{a}_1 \\ \vec{a}_2 \\ \vdots \\ \vec{a}_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{a}_{1,x} \\ \vec{a}_2 \\ \vdots \\ \vec{a}_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{a}_1 \\ \vec{a}_{2,x} \\ \vdots \\ \vec{a}_n \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} \vec{a}_1 \\ \vec{a}_2 \\ \vdots \\ \vec{a}_{n,x} \end{vmatrix} \quad (\text{A.8})$$

($\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ は n 次の行ベクトル) を用いると,

$$\begin{aligned} \sigma_{M-1, 11} + \sigma_{M-1, 22} &= \frac{1}{W} \begin{vmatrix} F_{1, Mx} \\ F_{2, (M-1)x} \\ F_{1, (M-2)x} \\ F_{2, (M-2)x} \\ \vdots \\ F_{1, x} \\ F_{2, x} \\ F_1 \\ F_2 \end{vmatrix} + \frac{1}{W} \begin{vmatrix} F_{1, (M-1)x} \\ F_{2, Mx} \\ F_{1, (M-2)x} \\ F_{2, (M-2)x} \\ \vdots \\ F_{1, x} \\ F_{2, x} \\ F_1 \\ F_2 \end{vmatrix} \\ &= (\ln W)_x \end{aligned}$$

が示される。

A.1.2 BDT1 に対して共変な場合

$$\sigma = \alpha \Psi_1^* = \Psi_1 \Omega^{-1} \Psi_1^* \quad (\text{A.9})$$

と置けば, 式 (2.25), (2.26) と式 (2.7), (2.8) の類似性より u, ϕ の変換 $u^{(1)}, \phi^{(1)}$ は (A.1), (A.2) で表現される。従って $\sigma_{12}, \sigma_{11} + \sigma_{22}$ を求めればよい (subsection 4.1.2 の冒頭の説明より σ_{12} を考える必要はない)。ここで

$$\Psi_1 = \begin{pmatrix} \psi_1 & \psi_2 \\ \psi'_1 & \psi'_2 \end{pmatrix}, \quad \Omega = \begin{pmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} \\ \omega_{21} & \omega_{22} \end{pmatrix}$$

と置き, 式 (A.9) を成分計算すると

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{1}{W} (\psi_1 \psi_1^* \omega_{22} - \psi_1 \psi_2^* \omega_{12} - \psi_2 \psi_1^* \omega_{21} + \psi_2 \psi_2^* \omega_{11}), \\ \sigma_{12} &= \frac{1}{W} (\psi_1 \psi'_1{}^* \omega_{22} - \psi_1 \psi'_2{}^* \omega_{12} - \psi_2 \psi'_1{}^* \omega_{21} + \psi_2 \psi'_2{}^* \omega_{11}), \\ \sigma_{22} &= \frac{1}{W} (\psi'_1 \psi'_1{}^* \omega_{22} - \psi'_1 \psi'_2{}^* \omega_{12} - \psi'_2 \psi'_1{}^* \omega_{21} - \psi'_2 \psi'_2{}^* \omega_{11}), \\ W &= \omega_{11} \omega_{22} - \omega_{12} \omega_{21}. \end{aligned}$$

さらに (Ω の定義より) $\Omega_x = \Psi_1^* \Psi_1$, 即ち

$$\omega_{jk, x} = \psi_j^* \psi_k + \psi_j'^* \psi_k'$$

を用いると,

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} = (\ln W)_x$$

が示される. 従って $M=1$ について (4.1), (4.2), (4.3) 及び (4.18) を得る.

次に, BDT1 を M 回行って得られる変換を考える. これを M-BDT1 と呼ぶことにすると, M-BDT1 は以下のように表わされる.

$$\Psi^{(M)} = \Psi - \sum_{m=1}^M \alpha_m \partial^{-1}(\Psi_m^* \Psi).$$

ここで係数 α_m ($m = 1, 2, \dots, M$) は次の非斉次連立一次方程式から決定される.

$$\Psi_l - \sum_{m=1}^M \alpha_m \Omega_{ml} = 0, \quad \Omega_{ml} = \partial^{-1}(\Psi_m^* \Psi_l),$$

($l = 1, 2, \dots, M$) . ここで

$$\Psi_l = \begin{pmatrix} \psi_{2l-1} & \psi_{2l} \\ \psi'_{2l-1} & \psi'_{2l} \end{pmatrix}$$

は線形系 (2.1) の M 個の独立な解であり, また

$$\partial^{-1}(\Psi_m^* \Psi_l) = \int_{(x_0, y_0, t_0)}^{(x, y, t)} \tilde{\omega}(\Psi_m, \Psi_l) + C_{ml}$$

である. C_{ml} は 2×2 積分定数行列である.

M-BDT1 は以下のように書き表すことも出来る. 以下のような $2 \times 2M$ 行列及び $2M \times 2M$ 行列を導入すると

$$\Psi_A = \begin{pmatrix} \Psi_1 & \Psi_2 & \cdots & \Psi_M \end{pmatrix}, \quad \alpha_A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_M \end{pmatrix},$$

$$\Omega_A = \begin{pmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} & \cdots & \Omega_{1M} \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} & \cdots & \Omega_{2M} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Omega_{M1} & \Omega_{M2} & \cdots & \Omega_{MM} \end{pmatrix}, \quad C_A = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1M} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2M} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{M1} & C_{M2} & \cdots & C_{MM} \end{pmatrix},$$

M-BDT1 は

$$\begin{aligned} \Psi^{(M)} &= \Psi - \alpha_A \partial^{-1}(\Psi_A^* \Psi), \\ \alpha_A &= \Psi_A \Omega_A^{-1}, \\ \Omega_A &= \partial^{-1}(\Psi_A^* \Psi_A) \end{aligned} \tag{A.10}$$

と表現される。ここで

$$\partial^{-1}(\Psi_A^* \Psi_A) = \int_{(x_0, y_0, t_0)}^{(x, y, t)} \tilde{\omega}(\Psi_A, \Psi_A) + C_A \quad (\text{A.11})$$

であり、積分定数行列 C_A には以下の制限が課される。

$$C_A^* = C_A. \quad (\text{A.12})$$

この表式と BDT1 の定義式 (2.20) が全く同じ表式であることから、明らかに係数行列 U_m (及び V_n) の変換 $U_m^{(M)}$ (及び $V_n^{(M)}$) は BDT1 ($M=1$) のそれと全く同じ形のはずである。従って $u^{(M)}$, $\phi^{(M)}$ を得るためには

$$\sigma = \alpha_A \Psi_A^* = \Psi_A \Omega_A^{-1} \Psi_A^* \quad (\text{A.13})$$

と置いたときの σ_{12} , $\sigma_{11} + \sigma_{22}$ を求めればよい。ここで上で定義した行列の成分表示をそれぞれ以下のように与えておく。

$$\Psi_A = \begin{pmatrix} \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 & \psi_4 & \cdots & \psi_{2M-1} & \psi_{2M} \\ \psi'_1 & \psi'_2 & \psi'_3 & \psi'_4 & \cdots & \psi'_{2M-1} & \psi'_{2M} \end{pmatrix},$$

$$\Omega_A = (\omega_{jk}), \quad C_A = (c_{jk})$$

($j, k = 1, 2, 3, 4, \dots, 2M-1, 2M$)。式 (A.13) を成分計算して σ の各成分を求めると、

$$\sigma_{11} = \frac{1}{|\Omega_A|} \sum_{j, k=1}^{2M} \Delta_{jk}(\Omega_A) \psi_j^* \psi_k, \quad \sigma_{12} = \frac{1}{|\Omega_A|} \sum_{j, k=1}^{2M} \Delta_{jk}(\Omega_A) \psi'_j{}^* \psi_k,$$

$$\sigma_{21} = \frac{1}{|\Omega_A|} \sum_{j, k=1}^{2M} \Delta_{jk}(\Omega_A) \psi_j^* \psi'_k, \quad \sigma_{22} = \frac{1}{|\Omega_A|} \sum_{j, k=1}^{2M} \Delta_{jk}(\Omega_A) \psi'_j{}^* \psi'_k$$

を得る。ここで $\Delta_{jk}(\Omega_A)$ は Ω_A の第 (j, k) 余因子とする。以下の公式を用いると

$$|A| z - \sum_{j, k} \Delta_{jk}(A) x_j y_k = \begin{vmatrix} & & & & x_1 \\ & & & & x_2 \\ & & & & \vdots \\ & & & & x_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n & z \end{vmatrix} \quad (\text{A.14})$$

(A は $n \times n$ 行列) ,

$$\sigma_{12} = \frac{1}{|\Omega_A|} \begin{vmatrix} & & & & \psi'_1{}^* \\ & & & & \psi'_2{}^* \\ & & & & \vdots \\ & & & & \psi'_{2M}{}^* \\ \psi_1 & \psi_2 & \cdots & \psi_{2M} & 0 \end{vmatrix}$$

と書ける. また $\Omega_{A,x} = \Psi_A^* \Psi_A$, 即ち

$$\omega_{jk,x} = \psi_j^* \psi_k + \psi_j' \psi_k'$$

を用いると,

$$\begin{aligned} \sigma_{11} + \sigma_{22} &= \frac{1}{|\Omega_A|} \sum_{j,k=1}^{2M} \Delta_{jk}(\Omega_A) \omega_{jk,x} \\ &= \frac{|\Omega_{A,x}|}{|\Omega_A|} \\ &= (\ln |\Omega_A|)_x \end{aligned}$$

が示される (公式 (A.8) を用いた).

従って以上の結果を整理すると, $u^{(M)} (= u_1^{(M)})$, $\phi^{(M)}$ について (4.1), (4.3) 及び (4.18) を得る.

A.2 DT2, BDT2 に対して共変な soliton 方程式

A.2.1 DT2 に対して共変な場合

まず式 (3.20) より

$$\begin{aligned} v_{N-1} &= \frac{(U_1 \cdot V_{N-1})}{|U_1|^2}, \\ w_{N-1} &= V_{N-1} \text{ の第 } e_4 \text{ 成分} \end{aligned}$$

であるので, section 4.2 の冒頭に述べた ϕ の定義及び (2.17) より ϕ の変換

$$\phi^{(1)} = \phi - \frac{Nv_N}{2} \ln(\det \tau) \quad (\text{A.15})$$

が得られる. 以後, 簡単のために変換する前の \vec{S} が式 (4.33) である場合を考える.

$$\tau = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} f_1 & g_1 \\ -g_2 & f_2 \end{pmatrix}$$

と置くと, 式 (2.16) 及び (A.15) より $M=1$ について $\vec{S} = (S_1, S_2, S_3)$ 及び ϕ の変換 (4.34), (4.35), (4.36), (4.37) を得る. さらに線形系 (2.1) の solution matrix を

$$\Psi_1 = \begin{pmatrix} \psi_1 & \psi_2 \\ \psi_1' & \psi_2' \end{pmatrix}$$

と置いて DT2 の定義式 (2.13) に代入して τ を成分計算すると f_1, f_2, g_1, g_2, D の表式 (4.38) を得る.

次に, DT2 を M 回行って得られる変換を考える. これを M-DT2 と呼ぶことにする. M-DT2 は以下のように表わされる.

$$\Psi^{(M)} = \Psi - \sum_{m=1}^M \tau_m \Psi_{mx}. \quad (\text{A.16})$$

ここで係数 τ_m ($m = 1, 2, \dots, M$) は次の方程式から決定される.

$$\Psi_l - \sum_{m=1}^M \tau_m \Psi_{l, mx} = 0, \quad (\text{A.17})$$

($l = 1, 2, \dots, M$) . 方程式 (A.17) の中の

$$\Psi_l = \begin{pmatrix} \psi_{2l-1} & \psi_{2l} \\ \psi'_{2l-1} & \psi'_{2l} \end{pmatrix}$$

は線形系 (2.1) の M 個の独立な解である. 方程式 (A.17) は τ_m についての非斉次連立一次方程式なので Cramer の公式を適用すればすべての τ_m を Ψ_l ($l = 1, 2, \dots, M$) を用いて表すことが出来る. 係数行列 U_1, V_{N-1} の変換 $U_1^{(M)}, V_{N-1}^{(M)}$ は以下のように与えられる.

$$U_1^{(M)} = \tau_M U_1 \tau_M^{-1}, \quad (\text{A.18})$$

$$V_{N-1}^{(M)} = \tau_M \{ V_{N-1} + [V_N, \tau_M^{-1} \delta_{1M} - \tau_M^{-1} \tau_{M-1}] + M V_{N,x} - N V_N \tau_M^{-1} \tau_{M,x} \} \tau_M^{-1}, \quad (\text{A.19})$$

(δ_{1M} は Kronecker のデルタ記号である) . 式 (A.18), (A.19) と式 (2.16), (2.17) の類似性より上での議論 ($M = 1$) がそのまま使える. つまり,

$$\tau_M = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} f_1 & g_1 \\ -g_2 & f_2 \end{pmatrix}$$

と置くと, $\vec{S} = (0, 0, 1)$, ϕ の変換 $\vec{S}^{(M)}$, $\phi^{(M)}$ は (4.34), (4.35), (4.36), (4.37) であることが分かる. 従ってあとは連立方程式 (A.17) を解いて f_1, f_2, g_1, g_2, D を求めるだけである. こうして式 (4.39), (4.6), (4.7) を得る.

A.2.2 BDT2 に対して共変な場合

Appendix A.1.2 での議論において M-BDT1 が BDT1 と全く同じ形であったことから考えて, ここでは最初から M-BDT2 を以下のように導入する.

$$\Psi^{(M)} = \Psi - \gamma_A \partial^{-1} (\Psi_A^* \Psi_x), \quad (\text{A.20})$$

$$\gamma_A = \Psi_A \Lambda_A^{-1},$$

$$\Lambda_A = \partial^{-1} (\Psi_A^* \Psi_{A,x}).$$

ここで

$$\partial^{-1}(\Psi_A^* \Psi_A, x) = \int_{(x_0, y_0, t_0)}^{(x, y, t)} \tilde{\lambda}(\Psi_A, \Psi_A) + C_A. \quad (\text{A.21})$$

である. 積分定数の $2M \times 2M$ 行列 C_A には以下の制限が課される.

$$C_A^* + C_A = \Psi_A^* \Psi_A|_{(x_0, y_0, t_0)}. \quad (\text{A.22})$$

M-BDT2 は BDT2 と比べて, Ψ_A が線形系 (2.1) の M 個の独立な解を横に並べた $2 \times 2M$ 行列であるという点だけが拡張されている. 従って係数行列 U_m (及び V_n) の変換 $U_m^{(M)}$ (及び $V_n^{(M)}$) は BDT2 のそれと全く同じ形である. そこで式 (2.34) で定義される β を以下のように拡張すると, 式 (2.35), (2.36) と式 (2.7), (2.8) の類似性から $\vec{S} = (0, 0, 1)$, ϕ の変換 $\vec{S}^{(M)}$, $\phi^{(M)}$ の式 (4.34), (4.35), (4.36), (4.37) を得る.

$$\beta = 1 - \Psi_A \Lambda_A^{-1} \Psi_A^* = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} f_1 & g_1 \\ -g_2 & f_2 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.23})$$

後は f_1, f_2, g_1, g_2, D を求めればよい. まず式 (2.37) より

$$|f_1|^2 + |g_1|^2 = |D|^2, \quad (\text{A.24})$$

$$f_1^* g_2 - f_2 g_1^* = 0, \quad (\text{A.25})$$

$$|g_1|^2 = |g_2|^2 \quad (\text{A.26})$$

である. ここで以下のように幾つかの行列の成分表示を与える.

$$\Psi_A = \begin{pmatrix} \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 & \psi_4 & \cdots & \psi_{2M-1} & \psi_{2M} \\ \psi'_1 & \psi'_2 & \psi'_3 & \psi'_4 & \cdots & \psi'_{2M-1} & \psi'_{2M} \end{pmatrix},$$

$$\Lambda_A = (\lambda_{jk}), \quad C_A = (c_{jk})$$

($j, k = 1, 2, 3, 4, \dots, 2M-1, 2M$). 式 (A.23) を成分計算して β の各成分を求めると,

$$\beta_{11} = 1 - \frac{1}{|\Lambda_A|} \sum_{j, k=1}^{2M} \Delta_{jk}(\Lambda_A) \psi_j^* \psi_k, \quad \beta_{12} = -\frac{1}{|\Lambda_A|} \sum_{j, k=1}^{2M} \Delta_{jk}(\Lambda_A) \psi'_j \psi_k,$$

$$\beta_{21} = -\frac{1}{|\Lambda_A|} \sum_{j, k=1}^{2M} \Delta_{jk}(\Lambda_A) \psi_j^* \psi'_k, \quad \beta_{22} = 1 - \frac{1}{|\Lambda_A|} \sum_{j, k=1}^{2M} \Delta_{jk}(\Lambda_A) \psi'_j \psi'_k$$

を得る. ここで $D = |\Lambda_A|$ と置いて, 公式 (A.14) を用いると f_1, f_2, g_1, g_2 が求まる.

$$f_1 = \begin{vmatrix} \Lambda_A & F_1^* \\ F_1 & 1 \end{vmatrix}, \quad g_1 = \begin{vmatrix} \Lambda_A & F_2^* \\ F_1 & 0 \end{vmatrix}, \quad g_2 = -\begin{vmatrix} \Lambda_A & F_1^* \\ F_2 & 0 \end{vmatrix}, \quad f_2 = \begin{vmatrix} \Lambda_A & F_2^* \\ F_2 & 1 \end{vmatrix}. \quad (\text{A.27})$$

ここで F_1, F_2 は (4.6), (4.7) である. (2.37) より $\Lambda_A = \Psi_A^* \Psi_A - \Lambda_A^*$ が成り立つので, f_2 にこの式を代入し, 行列式の列についての線形性を利用して各列を展開していくと, $f_2 = f_1^*$ が導かれる. また (A.25) より $g_2 = g_1^*$ も得られる.

従って以上の結果を整理すると, $\vec{S}^{(M)}$, $\phi^{(M)}$ について式 (4.48), (4.49), (4.50) 及び (4.54) が得られる.

Bibliography

- [1] 和達三樹: 非線形波動, 岩波講座 現代の物理学 14 (岩波書店, 1992).
- [2] M. J. Ablowitz and H. Segur: Solitons and the Inverse Scattering Transform (SIAM, Philadelphia, 1981) (アプロビッツ・シーガー著, 薩摩順吉, 及川正行訳: ソリトンと逆散乱変換 (日本評論社, 1991)).
- [3] P. G. Drazin and R. S. Johnson: Solitons: an introduction (Cambridge University Press, 1989)
- [4] 広田良吾: 直接法によるソリトンの数理 (岩波書店, 1992).
- [5] C. S. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal and R. M. Miura: Phys. Rev. Lett. **19** (1967) 1975.
- [6] P. D. Lax: Commun. Pure Appl. math. **21** (1968) 159.
- [7] M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newell and H. Segur: Phys. Rev. Lett. **31** (1973) 125; Stud. Appl. Math. **53** (1974) 249.
- [8] M. Lakshmanan: Phys. Lett. **A61** (1977) 53.
- [9] L. A. Takhtajan: Phys. Lett. **A64** (1977) 235.
- [10] D. J. Kaup and A. C. Newell: J. Math. Phys. **19** (1978) 798.
- [11] M. Wadati, K. Konno and Y. Ichikawa: J. Phys. Soc. Jpn. **47** (1979) 1698.
- [12] G. Darboux: Compt. Rend. **94** (1882) 1456.
- [13] V. B. Matveev and M. A. Salle: Darboux Transformations and Solitons (Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1991).
- [14] H. Hayashi and K. Nozaki: J. Phys. Soc. Jpn. **63** (1994) 27.
- [15] B. B. Kadomtsev and V. I. Petviashvili: Sov. Phys. Dokl. **15** (1970) 539.
- [16] A. Davey and K. Stewartson: Proc. Roy. Soc. Lond. **A338** (1974) 101.

- [17] Y. Ishimori: *Prog. Theor. Phys.* **72** (1984) 33.
- [18] V. S. Dryuma: *Pis'ma ZETF* **19** (1974) 753; *Sov. Phys. ZETP Lett.* **19** (1974) 387.
- [19] V. E. Zakharov and A. B. Shabat: *Funk. Anai. Pril.* **8** (1974) 43; *Func. Anal. Appl.* **8** (1974) 228.
- [20] S. V. Manakov, V. E. Zakharov, L. A. Bordag, A. R. Its and V. B. Matveev: *Phys. Lett.* **A63** (1977) 205.
- [21] D. Anker and N. C. Freeman: *Proc. Roy. Soc. Lond.* **A360** (1978) 529.
- [22] J. Satsuma: *J. Phys. Soc. Jpn.* **40** (1976) 286.
- [23] M. J. Ablowitz and J. Satsuma: *J. Math. Phys.* **19** (1978) 2180.
- [24] B. G. Konopelchenko: *Solitons in Multidimensions* (World Scientific, 1993).
- [25] J. Satsuma and M. J. Ablowitz: *J. Math. Phys.* **20** (1979) 1496.
- [26] M. Boiti, J. J. -P. Leon, L. Martina, and F. Pempinelli: *Phys. Lett.* **A132** (1988) 432.
- [27] A. S. Fokas and P. M. Santini: *Phys. Rev. Lett.* **63** (1989) 1329; *Physica* **D44** (1990) 99.
- [28] J. Hietarinta and R. Hirota: *Phys. Lett.* **A145** (1990) 237.
- [29] C. R. Gilson and J. J. C. Nimmo: *Proc. Roy. Soc. Lond.* **A435** (1991) 339.
- [30] K. Imai and K. Nozaki: *Prog. Theo. Phys.* **96** (1996) 521.
- [31] v. G. Dubrovsky and B. G. Konopelchenko: *Physica* **D48** (1991) 367; *Physica* **D55** (1992) 1.
- [32] V. B. Matveev and M. A. Salle: *Some Topics On Inverse Problems*, ed. P. Sabatier (World Scientific, 1988) p.182.
- [33] J. J. C. Nimmo: *Inverse Problems* **8** (1992) 291.
- [34] J. J. C. Nimmo: Preprint (University of Glasgow, Department of Mathematics Paper No.94/54).
- [35] K. Imai and K. Nozaki: *Physica* **D75** (1994) 451.
- [36] K. Imai and K. Nozaki: *J. Phys. Soc. Jpn.* **65** (1996) 53.

副論文