学位論文

寿命比$\tau(\Lambda_b)/\tau(B_d)$の問題と重いクォークの有効理論

1997 年

松 井 吉 光

①

学 位 論 文

寿命比 $\tau(\Lambda_b)/\tau(B_d)$ の問題と重いクォークの有効理論

1997 年

松 井 吉 光

名古屋大学大学院理学研究科 素粒子・宇宙物理学専攻

素粒子論研究室（E 研）

要旨

弱い相互作用を通してのみ崩壊する重いクォークを1個含むハドロンの寿命を理論的に評価する手法が、重いクォークの有効理論から導き出されている。その手法とは演算子積展開 (OPE) と、重いクォークの質量の逆数を展開パラメータとする展開とを組み合わせた展開によって、ハドロンの寿命を近似的に求めるものである。現在のところ、この手法によってハドロンの寿命の絶対値を算出するには到っていないが、2つのハドロンの寿命の比は $1/m_Q^2$ のオーダーまで模型に依存しない形で求められている。その結果は

$$\begin{aligned}\frac{\tau(B^-)}{\tau(B_d)} &= 1+\mathcal{O}(1/m_b^3),\\ \frac{\tau(B_s)}{\tau(B_d)} &= (1.00\pm0.01)+\mathcal{O}(1/m_b^3),\\ \frac{\tau(\Lambda_b)}{\tau(B_d)} &= 0.98+\mathcal{O}(1/m_b^3)\end{aligned}$$

となる。これを実験結果

$$\begin{aligned}\frac{\tau(B^-)}{\tau(B_d)} &= 1.07\pm0.04,\\ \frac{\tau(B_s)}{\tau(B_d)} &= 0.95\pm0.05,\\ \frac{\tau(\Lambda_b)}{\tau(B_d)} &= 0.78\pm0.06\end{aligned}$$

と比較すると、中間子の寿命比についてはだいたい実験値を説明できている。しかし、重粒子 Λ_b と中間子 B_d の寿命比の理論値と実験値は大幅にずれてしまっている。このずれをどのように解決するかが、現在重いクォークの有効理論における大きな課題となっている。

この問題を解決する方法として、全崩壊幅の表式に現れるボトムクォークの質量の5乗 m_b^5 という因子をそのボトムクォークを含むハドロンの質量の5乗 $m_{H_b}^5$ で置き換える、即ち全崩壊幅を $(m_{H_b}/m_b)^5$ 倍するとの仮定を置く方法がこれまでに提案されている。

本論文では、寿命比 $\tau(\Lambda_b)/\tau(B_d)$ の実験値とのずれの問題を、演算子積展開の展開パラメータに着目し、従来ボトムクォークのポール質量に等しいとしているその値は、ボトムクォークのポール質量からずれている可能性があり、このずれの効果を取り入れることによって解決する方法について検討した。その結果、展開パラメータをボトムクォークとチャームクォークのポール質量の差程度に置くことによってこの問題が解決できることを示した。

さらに、従来の方法とこの論文で提案した新しい方法で寿命比 $\tau(\Omega_b)/\tau(B_d)$ を求めたところ、両者で全く異なる結果が得られ、重粒子 Ω_b の寿命の測定が行われれば、いずれの仮定が正しいか判別できることを明らかにした。

目 次

第 1 章

序 論

量子色力学 QCD は、$SU(3)$ カラー対称性に基づいたゲージ理論で、ハドロンを構成するクォークの強い相互作用を記述する基本理論とされている。その特徴の 1 つが、漸近的自由性を持っていることである。その漸近的自由性は、高エネルギー領域において QCD が摂動論的に取り扱えることを保証しており、それによって QCD はその領域におけるハドロンの諸現象の解析に重要な役割を果たし、実験的にも正しさが裏付けられている。しかし、低エネルギーの領域においては QCD の結合定数は大きくなり、摂動論的手法を用いることが不可能で、そのことがハドロンの強い相互作用の低エネルギーでの振舞いを QCD を使って直接調べることを困難にしている。そこで、QCD の持つ対称性などの性質を基に有効理論が構成され、その有効理論が低エネルギーにおけるハドロンの物理の解析に重要な役割を果たしてきた。

QCD の有効理論の中で近年発展したのが、重いクォークを 1 個含むハドロンの系を対象とする有効理論である [1, 2]。この有効理論は QCD のラグランジアンから、クォークの質量が十分に大きいという条件の下で直接導きだされた理論で、重いクォークの有効理論 (HQET) と呼ばれている。ハドロン中の重いクォークは、ハドロンを構成する強い相互作用を媒介している軟グルーオンとの相互作用によって、QCD の典型的なエネルギースケール Λ_{QCD} 程度の大きさの運動量ゆらぎを受けている。重いクォークの質量 m_Q が Λ_{QCD} に比べ十分大きく、$\Lambda_{QCD}/m_Q \simeq 0$ がよい近似で成立する場合には、重いクォークの運動はハドロンを構成している軽い自由度 (軽いクォークと軟グルーオン) の影響を無視できるようになる。また、重いクォークのスピンを変化させる相互作用も Λ_{QCD}/m_Q のオーダーでしか効かないので無視できるようになる。したがって、$\Lambda_{QCD}/m_Q \simeq 0$ では軽い自由度に

	I	S	ボトムクォーク	チャームクォーク
中間子	$\frac{1}{2}$	0	$B, B^*, B_0^*, B_1, B_2^*, \cdots$	$D, D^*, D_0^*, D_1, D_2^*, \cdots$
	0	± 1	$B_s, B_s^*, \cdots$	$D_s, D_s^*, \cdots$
重粒子	0	0	$\Lambda_b, \cdots$	$\Lambda_c, \cdots$
	1	0	$\Sigma_b, \Sigma_b^*, \cdots$	$\Sigma_c, \Sigma_c^*, \cdots$
	$\frac{1}{2}$	-1	$\Xi_b, \Xi_b', \Xi_b^*, \cdots$	$\Xi_c, \Xi_c', \Xi_c^*, \cdots$
	0	-2	$\Omega_b, \Omega_b^*, \cdots$	$\Omega_c, \Omega_c^*, \cdots$

表 1.1: 重いクォークを 1 個含むハドロン。ここで、I はアイソスピン、S はストレンジネスを表す。

とって重いクォークはカラー電荷源でしかなくなる。このため、重いクォークと軽い自由度のスピンはそれぞれが独立した保存量になる。さらに、重いクォークの有効理論のラグランジアンの主要項はフレーバーにも依存しない。したがって、$\Lambda_{QCD}/m_Q \to 0$ の極限では、軽い自由度との相互作用は重いクォークのスピンとフレーバーの双方に依存しない。この対称性が重いクォークの対称性で、重いクォークを含むハドロンの性質を調べる上で、非常に重要な役割を果たしている。

現実に存在する 3 世代 6 フレーバーのクォークのうち、$\Lambda_{QCD}/m_Q \simeq 0$ がよい近似で成立すると考えられるクォークは、チャームクォーク (c)、ボトムクォーク (b)、トップクォーク (t) である。この中でトップクォークは、弱い相互作用を媒介する粒子である W ボゾンよりも重いため、軽いクォークとハドロンを形成するより前に $t \to b + W^+$ という過程を通して崩壊してしまうので、重いクォークの有効理論の対象とはならない [3]。したがって、この有効理論が扱うのは主にボトムクォークとチャームクォークである。そして、重いクォークの有効理論の対象となるハドロンは表 1.1 にあるように、それらを 1 個含む基底状態、または励起状態のハドロンである。

現実の重いクォークの質量 $m_{b,c}$ は無限大ではないので、実際のハドロンの性質を調べるためには、Λ_{QCD}/m_Q 程度の大きさの重いクォークの対称性からのずれも考慮しなければならない。重いクォークの有効理論は $1/m_Q$ を展開パラメータとする系統的な展開を与えており、この有効理論は重いクォークの対称性からの補正がどのような形で寄与するのかを調べる上でも重要な役割を果たしている。ストレンジクォーク (s) は一般に軽いクォークとして扱われており、ボトムクォーク、チャームクォークを 1 個含むハドロンを扱う場合

も、軽いクォークとして扱われている。しかし、ストレンジクォークを 1 個とアップクォーク・ダウンクォークで構成されるハドロンを扱う場合には、この Λ_{QCD}/m_s のオーダーの補正の効果を取り入れることによって、重いクォークの有効理論が適用できる可能性が示されている [4]。

この重いクォークの有効理論は、表 1.1 に示したような重いクォークを 1 個含むハドロン系の諸現象の解析に適用されるわけであるが、特に弱い相互作用によるセミレプトニック崩壊の解析に大きな威力を発揮してきた。この有効理論を用いると、セミレプトニック崩壊の遷移行列要素に現れる、QCD の非摂動論的な効果を含む複数個の独立な形状因子の間に関係をつけることができ、独立な形状因子を減らすことができる。ボトムクォークを含む擬スカラー中間子 $\bar{B}$ のチャームクォークを含む擬スカラー中間子 D 及びベクトル中間子 D^* へのセミレプトニック崩壊 $\bar{B} \to D\,\ell\,\nu_\ell$ 及び $\bar{B} \to D^*\,\ell\,\nu_\ell$ を例にあげると、遷移行列要素に存在する 6 個の独立な形状因子に関係がつき唯一の統一関数で記述できるようになる [1]。このことを用いると、セミレプトニック崩壊 $\bar{B} \to D^{(*)}\ell\nu_\ell$ の実験データから形状因子に制限をつけることができ、さらに、統一関数の規格化条件から、小林・益川行列 [5] の要素 $|V_{cb}|$ を特定の模型によることなしに決定することができる [6]。

これまで重いクォークの有効理論は主に、重いクォークを 1 個含む中間子の系に適用され、その結果の実験との矛盾は現在までのところほとんど見つかっていない。唯一、中間子の軌道励起状態の強い相互作用を通じての崩壊の振幅について得られた結果 [7] は実験値からずれてしまっているが、Λ_{QCD}/m_Q 補正を考慮することによって矛盾しないことが期待できる [8]。しかし、最近ボトムクォークを 1 個含む重粒子が実験で見つかり、重いクォークの有効理論の重粒子系への適用が検証されるようになって、従来のアプローチにいくつかの問題点が浮び上がってきた。1 つは有効理論を使って導きだされた重いクォークを 1 個含むハドロンの質量関係式

$$\frac{m_{B^*} - m_B}{m_{D^*} - m_D} = \frac{m_{\Sigma_b^*} - m_{\Sigma_b}}{m_{\Sigma_c^*} - m_{\Sigma_c}} \simeq \frac{m_c}{m_b} \sim 0.3 \qquad (1.1)$$

の問題で、実験値を代入すると中間子のパートは 0.33 [9] であるのに対して重粒子のパートは 0.84 ± 0.21 [9, 10] となり、クォークの質量の比からも大幅にずれてしまっている。この問題を解決する方法として、これまでに重粒子の粒子の同定を変更することが提案されている [11]。ただこの問題に関しては、重粒子 Σ_b、Σ_b^* の質量は一つの実験グループでし

か測定されておらず、大きな不定性があるので、もう少し実験誤差が小さくなるまで様子をみる必要がある。

もう1つの問題が、本論文の主題である寿命比 $\tau(\Lambda_b)/\tau(B_d)$ の問題である。重いクォークの有効理論で、重いクォークの質量を無限大とする極限をとると寿命比 $\tau(\Lambda_b)/\tau(B_d)$ は1となる。寿命比の1からのずれは $1/m_Q$ 展開の高次の補正項からくる寄与で説明できると期待された。実際に $1/m_Q$ 展開の高次補正を考慮すると、寿命比は

$$\frac{\tau(\Lambda_b)}{\tau(B_d)} = 0.98 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{m_b^3}\right) \tag{1.2}$$

と書ける [12]。$1/m_b^3$ のオーダーの補正項の計算は具体的な模型を仮定しないと実行できないが、これまでにいくつかの模型でこの計算は実行され [13, 14, 15]、その結果をまとめると寿命比は

$$\frac{\tau(\Lambda_b)}{\tau(B_d)} \geq 0.94 \tag{1.3}$$

となる。それに対して、寿命比 $\tau(\Lambda_b)/\tau(B_d)$ の実験値 [16] は

$$\frac{\tau(\Lambda_b)}{\tau(B_d)} = 0.78 \pm 0.06 \tag{1.4}$$

である。理論値と実験値のこの大幅なずれが、寿命比 $\tau(\Lambda_b)/\tau(B_d)$ の問題である。本論文は、この問題の理論的な解決法を提案するとともに、その実験的検証を提示する。

本論文の構成は以下の通りである。第2章では重いクォークの有効理論の概要について述べる。そこでは重いクォークの有効理論のラグランジアンのQCDからの導出、重いクォークの対称性、重いクォークを1個含むハドロンの質量関係式について述べる。第3章では重いクォークの有効理論で、重いクォークを1個含む弱い相互作用を通してのみ崩壊するハドロンの寿命がどのように記述されるかについて述べる。第4章では本論文の主題である Λ_b と B_d の寿命比の問題について述べる。そこではまず、Λ_b と B_d の寿命比が第3章の定式化でどのように計算されてきたかを述べ、その計算結果が実験値とずれる問題について説明する。そして、その理論値と実験値のずれを解決する方法としてこれまでに提案されてきた方法を紹介し、それとは異なる新たな解決の可能性について議論する。第5章では、Λ_b と B_d の寿命比の問題を解決する方法の正否を確かめるため、現在は未発見の重粒子である Ω_b の B_d との寿命比の予言について述べる。まとめと討論は第6章に与える。

第 2 章

重いクォークの有効理論

2.1 重いクォークの有効理論と有効ラグランジアン

重いクォークの有効理論はQCDの近似理論で、扱う対象はQCDの典型的なエネルギースケール Λ_{QCD} ($\Lambda_{QCD} \cong 100 \sim 300\, MeV$) より十分重いクォークを1個含むハドロンである。そのようなハドロンは強い相互作用による重いクォーク・軽いクォーク・グルーオンの束縛状態で、低エネルギー領域において軽いクォークとグルーオンの持つエネルギーは重いクォーク c、b の質量 m_c、m_b に比べて十分小さいと考えられる。重いクォークはハドロン内において、そのようなエネルギーの低いグルーオン（軟グルーオン）と相互作用しており、そのときの重いクォークの運動量は

$$p_Q^\mu = m_Q v^\mu + k^\mu \tag{2.1}$$

と書ける。ここで v^μ はハドロンの4元速度 ($|v|^2 = 1$)、k^μ は軟グルーオンとの相互作用によって生じる運動量ゆらぎで、その大きさは Λ_{QCD} 程度であると考えられる。重いクォークの極限 $\Lambda_{QCD}/m_Q \to 0$ をとれば、重いクォークの4元速度はハドロンの4元速度に一致し、軟グルーオンとの相互作用の下で不変になる。したがって、重いクォークの有効理論では重いクォークの状態を記述するのに、運動量の代わりに速度を用いる。この極限において、速度の異なる状態は軟グルーオンとの相互作用によって混じり合うことがない。これを重いクォークの速度の超選択則という [17]。

重いクォークの有効理論の出発点は、QCDラグランジアン

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(x)\,(i\,\not{D} - m_Q)\,\psi(x) \tag{2.2}$$

である。ここで D_μ は共変微分 $D_\mu = \partial_\mu + ig_s A^a_\mu t^a$ で、g_s、A^a_μ、t^a はそれぞれ、結合定数、グルーオン場、$SU(3)$ カラー対称性の生成子である。重いクォークの有効理論では、重いクォークの場 $\psi(x)$ を

$$\psi(x) \longrightarrow e^{-im_Q v\cdot x}\left\{ h(x)^Q_v + \chi^Q_v(x) \right\} \tag{2.3}$$

のように再定義する。ここで $h^Q_v(x)$ と $\chi^Q_v(x)$ は $\not{v}$ の固有状態で

$$\begin{cases} \not{v} h^Q_v(x) = h^Q_v(x) \\ \not{v}\chi^Q_v(x) = -\chi^Q_v(x) \end{cases} \tag{2.4}$$

を満足する場である。式 (2.3) を代入すると、QCD ラグランジアン (2.2) は

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{eff} &= \bar{h}^Q_v iv\cdot Dh^Q_v - \bar{\chi}^Q_v(iv\cdot D + 2m_Q)\chi^Q_v \\ &\quad + \bar{h}^Q_v i\not{D}_\perp \chi^Q_v + \bar{\chi}^Q_v i\not{D}_\perp h^Q_v \end{aligned} \tag{2.5}$$

のように変形できる。ここで $D^\mu_\perp$ は共変微分 D^μ の v^μ と直交する成分で、$D^\mu_\perp = D^\mu - v^\mu v\cdot D$ で定義される。式 (2.5) から $h^Q_v(x)$ と $\chi^Q_v(x)$ についての Euler-Lagrange 方程式を導くと

$$\begin{cases} iv\cdot Dh^Q_v = -i\not{D}_\perp \chi^Q_v \\ (iv\cdot D + 2m_Q)\chi^Q_v = i\not{D}_\perp h^Q_v \end{cases} \tag{2.6}$$

となる。2 式目を $\chi^Q_v(x)$ について、形式的に解くと

$$\chi^Q_v = \frac{1}{iv\cdot D + 2m_Q - i\epsilon} i\not{D}_\perp h^Q_v \tag{2.7}$$

が得られる。この式は $\chi^Q_v(x)$ がおよそ $h^Q_v(x)$ の $1/m_Q$ 程度で、重いクォークの場 $\psi(x)$ の小さい成分であることを示している。式 (2.7) を有効ラグランジアン (2.5) に代入し、$1/m_Q$ のべき級数で展開すると

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{eff} &= \bar{h}^Q_v iv\cdot Dh^Q_v + \frac{1}{2m_Q}\bar{h}^Q_v(i\not{D}_\perp)^2 h^Q_v + \mathcal{O}(\frac{1}{m_Q^2}) \\ &= \bar{h}^Q_v iv\cdot Dh^Q_v + \frac{1}{2m_Q}\bar{h}^Q_v(iD_\perp)^2 h^Q_v + \frac{g_s}{4m_Q}\bar{h}^Q_v\sigma_{\mu\nu}G^{\mu\nu}h^Q_v + \mathcal{O}(\frac{1}{m_Q^2}) \end{aligned} \tag{2.8}$$

となる。ここで $G^{\mu\nu}$ は

$$G^{\mu\nu} = \frac{i}{g_s}[D^\mu, D^\nu] \tag{2.9}$$

で定義されるグルーオン場の強さテンソルで、$\sigma_{\mu\nu}$ は

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu] \tag{2.10}$$

である。この有効ラグランジアンは運動方程式を用いる導出法以外に、経路積分を用いて $\chi^Q_v(x)$ についての積分を実行することによっても導出することが出来る [18]。重いクォークの極限 $m_Q \to \infty$ において、有効ラグランジアン (2.8) の第 2 項目以降の項は $(\Lambda_{QCD}/m_Q)^n$ $(n \geq 1)$ 程度の大きさだから無視することができるくらい小さくなる。したがって、この極限における有効ラグランジアンは

$$\mathcal{L}_{eff} = \bar{h}^Q_v iv\cdot Dh^Q_v \tag{2.11}$$

となる。重いクォークのフレーバーが N_f 個ある場合には有効ラグランジアンは

$$\mathcal{L}_{eff} = \sum_{i=1}^{N_f} \bar{h}^{Q_i}_v iv\cdot Dh^{Q_i}_v \tag{2.12}$$

と書ける。この有効ラグランジアンには重いクォークの質量 m_{Q_i} も γ 行列も存在しない。したがって、有効ラグランジアンはスピンとフレーバーについての対称性を持っているといえる。これが、重いクォークの対称性と呼ばれている対称性で、これについては次節で詳しく述べる。

有効ラグランジアン (2.12) には異なる 4 元速度を持つ重いクォークの場が含まれていない。軟グルーオンとの相互作用だけを扱う場合、速度の超選択則により異なる速度を持つ重いクォークの状態は混じり合わないので、異なる速度を持つクォークの場が有効ラグランジアンに存在する必要がない。このことは、弱い相互作用のように、異なる速度を持つ重いクォークの場を結び付ける相互作用を扱う場合に問題になってくる。しかし、そのように速度の異なる重いクォークの場を扱わなければならない場合でも、速度の超選択則があるために有効ラグランジアンはそれ程複雑にはならず

$$\mathcal{L}_{eff} = \sum_v \sum_{i=1}^{N_f} \bar{h}^{Q_i}_v iv\cdot Dh^{Q_i}_v \tag{2.13}$$

のように、単なる和で書くことができる [17]。

実際にはハドロンを構成するクォークは重いものでも質量は無限大ではなく有限である。したがって、有効ラグランジアン (2.8) の第 2 項目以降を無視するのは近似であり、Λ_{QCD}/m_Q

が無視できないほど大きい場合には第 2 項目以降も考慮する必要がある。式 (2.8) の第 2 項目以降の項には、重いクォークの質量 m_{Q_i} や γ 行列が存在するので、スピンとフレーバーについての対称性は存在しない。

2.2 重いクォークの対称性

重いクォークの有効理論は、重いクォークの質量を無限大にとる極限 $m_{Q_i} \to \infty$ において、重いクォークのフレーバーが N_f 個ある場合の有効ラグランジアンとして、

$$\mathcal{L}_{eff} = \sum_{i=1}^{N_f} \bar{h}_v^{Q_i} iv \cdot D h_v^{Q_i} \tag{2.12}$$

を与える。この有効ラグランジアンにはフレーバーに依存する重いクォークの質量 m_{Q_i} が現れていないから、重いクォークのフレーバーについての対称性を持っているといえる。しかし、この対称性は N_f 個の重いクォークの質量 m_{Q_i} が縮退することを意味しているわけではない。元来 QCD ラグランジアンは質量項 m_{Q_i} を持つが、フレーバーの異なる重いクォークの質量 m_{Q_i}、m_{Q_j} が異なっていても、重いハドロンにおいてともに

$$\frac{\Lambda_{QCD}}{m_{Q_i}} \simeq 0\,, \quad \frac{\Lambda_{QCD}}{m_{Q_j}} \simeq 0 \tag{2.13}$$

の近似が成り立つならば、その質量の差を問題にしなければならない場合を除いて、重いクォーク Q_i、Q_j のフレーバーについての対称性が存在する。これが重いクォークの有効理論のフレーバー対称性の特徴である。

有効ラグランジアン (2.12) には γ 行列が存在しないから、このラグランジアンから導かれる重いクォークの場とグルーオン場との相互作用は重いクォークのスピンに影響を与えない。これが、重いクォークの有効理論の重いクォークのスピンについての対称性の起因となっている。したがって、有効ラグランジアンは、重いクォークのスピンについての $SU(2)$ 変換の下での不変性を持っている。そのスピン $SU(2)$ の生成子は重いクォークの静止系において

$$S_Q^i = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\gamma_5\gamma^0\gamma^i \tag{2.14}$$

で与えられる。ここで、σ^i は Pauli 行列で、Dirac 行列 γ は

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \tag{2.15}$$

ととった。I は 2×2 の単位行列である。4 元速度 v^μ に対して垂直で、お互いも直交する 3 個の単位ベクトル $e^{i\mu}$ $(i = 1, 2, 3)$ を

$$v_\mu e^{i\mu} = 0\,, \tag{2.16}$$

$$e^{i\mu} e_\mu^j = -\delta^{ij} \tag{2.17}$$

となるようにとれば、

$$S_v^i = \frac{1}{2}\gamma_5 \not{v} \not{e}^i \tag{2.18}$$

の 3 個の行列 S_v^i は $SU(2)$ の生成子の交換関係を満足し、$\not{v}$ と交換する。

$$\begin{aligned} \left[S_v^i\,, S_v^j\right] &= i\varepsilon^{ijk} S_v^k\,, \\ \left[\not{v}\,, S_v^i\right] &= 0 \end{aligned} \tag{2.19}$$

また、静止系では (2.14) に帰着する。したがって、S_v^i は一般の系における重いクォークのスピン $SU(2)$ の生成子である考えられる。この重いクォークのスピンについての微小 $SU(2)$ 変換

$$h_v^{Q_i}(x) \longrightarrow (1 + i\vec{\epsilon} \cdot \vec{S}_v) h_v^{Q_i}(x) \tag{2.20}$$

に対して、

$$[iv \cdot D\,, i\vec{\epsilon} \cdot \vec{S}_v] = 0 \tag{2.21}$$

より、有効ラグランジアン (2.12) は不変になっていることがわかる。

今、重いクォークを 1 個含むハドロンを考えると、その全角運動量 $\vec{J}$ は、重いクォークのスピン $\vec{S}_Q$ と、軽いクォークと軟グルーオン (軽い自由度) が全体として持つ角運動量 $\vec{S}_\ell$ との和

$$\vec{J} = \vec{S}_Q + \vec{S}_\ell \tag{2.22}$$

で表すことができる。重いクォークのスピンは軟グルーオンとの相互作用において保存する。また、強い相互作用において全角運動量 $\vec{J}$ は保存するから、重いクォークを 1 個含むハドロンの系において $\vec{J}$、$\vec{S}_Q$ とともに軽い自由度の角運動量 $\vec{S}_\ell$ も保存する。このことは、重いクォークの対称性により、軽い自由度を支配するダイナミクスが重いクォークのスピンに依存しなくなることを意味する。また、強い相互作用はパリティ変換に対して不変な相互作用なので、パリティも保存量である。したがって、重いクォークを 1 個含むハドロン

	I	S	S_ℓ^P	ボトムクォーク	チャームクォーク
中間子	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}^-$	$B,\ B^*$	$D,\ D^*$
			$\frac{1}{2}^+$	$B_0^*,\ B_1$	$D_0^*,\ D_1$
			$\frac{3}{2}^+$	$B_1,\ B_2^*$	$D_1,\ D_2^*$
			$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
	0	±1	$\frac{1}{2}^-$	$B_s,\ B_s^*$	$D_s,\ D_s^*$
			$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
重粒子	0	0	0^+	Λ_b	Λ_c
	1	0	1^+	$\Sigma_b,\ \Sigma_b^*$	$\Sigma_c,\ \Sigma_c^*$
	$\frac{1}{2}$	-1	0^+	Ξ_b	Ξ_c
	$\frac{1}{2}$	-1	1^+	$\Xi_b',\ \Xi_b^*$	$\Xi_c',\ \Xi_c^*$
	0	-2	1^+	$\Omega_b,\ \Omega_b^*$	$\Omega_c,\ \Omega_c^*$

表 2.1: 重いクォークを 1 個含むハドロン。ここで、I、S、S_ℓ^P はそれぞれアイソスピン、ストレンジネス、軽い自由度のスピン・パリティを表す。

の状態は保存量である軽い自由度のスピンとパリティによっても分類することができるようになる。この分類を使って、実際の表 1.1 にあるボトムクォークまたは、チャームクォークを 1 個含むハドロンは表 2.1 のように分類することができる。重いクォークのスピン・パリティは $1/2^+$ なので、同じ S_ℓ^P を持つ同じ重いクォーク Q を 1 個含むハドロンには、表 2.1 のように

$$J_\pm^P = S_\ell^P \pm \frac{1^+}{2} \tag{2.23}$$

の 2 つの状態があり、この 2 つの状態は縮退する。ただし、$S_\ell^P = 0^+$ を持つバリオンは $J_\pm^P = 1/2^+$ の Λ_Q 状態または、Ξ_Q 状態しか存在しない。

同じ S_ℓ^P を持つ 2 つの状態が縮退することを示すために、ここでは例として $S_\ell^P = 1/2^-$ を持つ重いクォークを 1 個含む中間子の場合について考える。このとき、重いクォークを 1 個含む中間子の状態は全角運動量が $J_+^P = 1^-$、$J_-^P = 0^-$ の 2 つの状態がある。0^- の重いクォークを 1 個含む中間子を P_{Q_v}、1^- の重いクォークを 1 個含む中間子を V_{Q_v} で表すことにすると、重いクォークを 1 個含む中間子のスピンの z 成分が 0 になるように z 軸を定め

たとき、P_{Q_v}、V_{Q_v} の状態は

$$\begin{aligned} |P_{Q_v}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\Uparrow\downarrow\rangle - |\Downarrow\uparrow\rangle), \\ |V_{Q_v}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\Uparrow\downarrow\rangle + |\Downarrow\uparrow\rangle) \end{aligned} \tag{2.24}$$

で表せる。ここで、太い矢印は重いクォークのスピン状態を、細い矢印は軽い自由度のスピン状態を表す。$|P_{Q_v}\rangle$ に重いクォークのスピン演算子 $S_{Q_v}^i$ の z 成分を作用させると

$$\begin{aligned} S_{Q_v}^z|P_{Q_v}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(S_{Q_v}^z|\Uparrow\downarrow\rangle - S_{Q_v}^z|\Downarrow\uparrow\rangle\right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}}(|\Uparrow\downarrow\rangle + |\Downarrow\uparrow\rangle) = \frac{1}{2}|V_{Q_v}\rangle \end{aligned} \tag{2.25}$$

が得られる。同様に $|V_{Q_v}\rangle$ に $S_{Q_v}^z$ を作用させると

$$S_{Q_v}^z|V_{Q_v}\rangle = \frac{1}{2}|P_{Q_v}\rangle \tag{2.26}$$

が得られる。スピン演算子 $S_{Q_v}^i$ は式 (2.18) で与えられるから、有効ラグランジアン (2.12) から構成した有効ハミルトニアンとも交換する。したがって、この 2 つの状態 $|P_{Q_v}\rangle$、$|V_{Q_v}\rangle$ のエネルギーは縮退し、2 つの重い中間子の質量は $m_{P_Q} = m_{V_Q}$ となる。

しかし、現実に存在する全角運動量 $J^P = 1^-$、$J^P = 0^-$ を持つ 2 つの重いクォークを 1 個含む中間子 (チャームクォークを含むものとしては P_{Q_v} は D に、V_{Q_v} は D^* に対応し、ボトムクォークを含むものとしては P_{Q_v} は B に、V_{Q_v} は B^* に対応する) の場合、$m_{P_Q} = m_{V_Q}$ は成り立っておらず、この 2 つの質量 m_{P_Q}、m_{V_Q} は Λ_{QCD}/m_Q 程度の違いがある。このずれを重いクォークの有効理論は、前節でも触れた有効ラグランジアン (2.8) の $1/m_Q$ の高次の項からくる補正の効果として説明できるとしている。

2.3 重いクォークを含むハドロンの質量関係式

重いクォークの有効理論で Λ_{QCD}/m_Q のオーダーの補正の効果まで考慮に入れると、重いクォークを 1 個含むハドロンの質量は

$$m_{H_Q} = m_Q + \bar{\Lambda} - \frac{\lambda_1}{2m_Q} - d_H\frac{\lambda_2}{2m_Q} + \mathcal{O}\left(\frac{\Lambda_{QCD}^2}{m_Q^2}\right) \tag{2.27}$$

で与えられる。この質量公式のオーダー 1 の補正項 $\bar{\Lambda}$ はハドロン内の軽い自由度の質量で、その大きさは Λ_{QCD} のオーダーの量である。$1/m_Q$ のオーダーの補正項は、有効ラグラン

ジアン (2.8) の $1/m_Q$ オーダーの項に起因する。パラメータ λ_1 、λ_2 はそれぞれ、有効ラグランジアン (2.8) の $1/m_Q$ オーダーの項のハドロンの状態についての行列要素

$$\lambda_1 \equiv \frac{1}{2m_{H_Q}} \langle H_Q | \bar{h}_Q \, (iD_\perp)^2 \, h_Q \, | H_Q \rangle , \tag{2.28}$$

$$d_H \lambda_2 \equiv \frac{1}{4m_{H_Q}} \langle H_Q | \bar{h}_Q \, g_s \sigma_{\mu\nu} G^{\mu\nu} h_Q \, | H_Q \rangle \tag{2.29}$$

で定義される。ここで、d_H は Clebsh 因子で、重いクォークのスピン $\vec{S}_Q$ と軽い自由度の角運動量 $\vec{S}_\ell$ を用いて

$$d_H = -4 \langle \vec{S}_Q \cdot \vec{S}_\ell \rangle \tag{2.30}$$

と書ける。$\langle \vec{S}_Q \cdot \vec{S}_\ell \rangle$ はさらに

$$2 \langle \vec{S}_Q \cdot \vec{S}_\ell \rangle = J(J+1) - S_Q(S_Q+1) - S_\ell(S_\ell+1) \tag{2.31}$$

と書くことができる。ここで、J、S_Q、S_ℓ はそれぞれ全角運動量の大きさ、重いクォークのスピンの大きさ、軽い自由度の角運動量の大きさを表す。パラメータ λ_1、λ_2 は QCD の非摂動的な効果を含む量で Λ^2_{QCD} のオーダーの量である。

式 (2.27) を用いると、重いクォークを 1 個含む擬スカラー中間子 P_Q とベクトル中間子 V_Q の質量はそれぞれ

$$\begin{aligned} m_{P_Q} &= m_Q + \bar{\Lambda}^{meson} - \frac{\lambda_1^{meson}}{2m_Q} - \frac{3\lambda_2^{meson}}{2m_Q} + \cdots , \\ m_{V_Q} &= m_Q + \bar{\Lambda}^{meson} - \frac{\lambda_1^{meson}}{2m_Q} + \frac{\lambda_2^{meson}}{2m_Q} + \cdots \end{aligned} \tag{2.32}$$

のようにパラメータ $\bar{\Lambda}^{meson}$、λ_1^{meson}、λ_2^{meson} を使って書くことができる。同様に重いクォークを 1 個含む重粒子 Λ_Q、Σ_Q、Σ_Q^* の質量も

$$\begin{aligned} m_{\Lambda_Q} &= m_Q + \bar{\Lambda}_T^{baryon} - \frac{\lambda_1^{baryon}}{2m_Q} + \cdots , \\ m_{\Sigma_Q} &= m_Q + \bar{\Lambda}_S^{baryon} - \frac{\lambda_{1\,S}^{baryon}}{2m_Q} - \frac{4\lambda_{2\,S}^{baryon}}{2m_Q} + \cdots , \\ m_{\Sigma_Q^*} &= m_Q + \bar{\Lambda}_S^{baryon} - \frac{\lambda_{1\,S}^{baryon}}{2m_Q} + \frac{2\lambda_{2\,S}^{baryon}}{2m_Q} + \cdots \end{aligned} \tag{2.33}$$

のようにパラメータ $\bar{\Lambda}_{T,S}^{baryon}$ 、$\lambda_{1T,S}^{baryon}$ 、$\lambda_{2T,S}^{baryon}$ を使って書くことができる。

重いクォークを 1 個含むハドロンの質量公式 (2.32)、(2.33) を組みあわせると

$$\frac{1}{4}(3m_{B^*} + m_B) - \frac{1}{4}(3m_{D^*} + m_D) = m_{\Lambda_b} - m_{\Lambda_c} , \tag{2.34}$$

$$\frac{1}{3}\left(2m_{\Sigma_b^*} + m_{\Sigma_b}\right) - m_{\Lambda_b} = \frac{1}{3}\left(2m_{\Sigma_c^*} + m_{\Sigma_c}\right) - m_{\Lambda_c} , \tag{2.35}$$

$$\frac{m_{B^*} - m_B}{m_{D^*} - m_D} = \frac{m_{\Sigma_b^*} - m_{\Sigma_b}}{m_{\Sigma_c^*} - m_{\Sigma_c}} \simeq \frac{m_c}{m_b} \tag{2.36}$$

などの近似的な質量関係式が得られる (例えば、[11] を参照)。さらに、カラーの数 N_c の逆数を展開パラメータとする $1/N_c$ 展開と組み合わせると、重いクォークを 1 個含む重粒子について様々な質量関係式が得られる [19]。その質量関係式を駆使すると、実験で発見されていない、または実験で質量が測定されていない重粒子 Ξ_b、Ξ_b'、Ξ_b^*、Ω_b、Ω_b^* の質量を

$$\begin{aligned} m_{\Xi_b} &= 5.8057 \pm 0.0081 \, \mathrm{GeV} \\ m_{\Xi_b'} &= 5.9509 \pm 0.0085 \, \mathrm{GeV} \\ m_{\Xi_b^*} &= 5.9661 \pm 0.0083 \, \mathrm{GeV} \\ m_{\Omega_b} &= 6.0687 \pm 0.0111 \, \mathrm{GeV} \\ m_{\Omega_b^*} &= 6.0832 \pm 0.0110 \, \mathrm{GeV} \end{aligned} \tag{2.37}$$

と予言することができる [19]。

第 3 章

ボトムクォークを含むハドロンの寿命

本章では、弱い相互作用を通してのみ崩壊するボトムクォークを 1 個含むハドロンの寿命が、重いクォークの有効理論でどのように記述されるかについて述べる。

3.1 演算子積展開

ボトムクォークを 1 個含むハドロン H_b の全崩壊幅は光学定理により、

$$\Gamma(H_b \to X_f) = \frac{1}{m_{H_b}} \mathrm{Im} \langle H_b | \hat{T} | H_b \rangle \tag{3.1}$$

と書ける [12]。ここで、$\hat{T}$ は遷移演算子で $H_b \to X_f$ を記述する有効ラグランジアンの T 積

$$\hat{T} = i \int d^4x \, \mathrm{T}\{ \mathcal{L}_W(x) \, \mathcal{L}_W(0) \} \tag{3.2}$$

で与えられる。ボトムクォーク崩壊の有効ラグランジアン $\mathcal{L}_W$ は弱い相互作用の有効ラグランジアンで、

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_W \;=\; & -\frac{4G_F}{\sqrt{2}} V_{cb} \Big\{ c_1(m_b) \left[\bar{d}'_L \gamma_\mu u_L \, \bar{c}_L \gamma^\mu b_L + \bar{s}'_L \gamma_\mu c_L \, \bar{c}_L \gamma^\mu b_L \right] \\ & + c_2(m_b) \left[\bar{c}_L \gamma_\mu u_L \, \bar{d}'_L \gamma^\mu b_L + \bar{c}_L \gamma_\mu c_L \, \bar{s}'_L \gamma^\mu b_L \right] \\ & + \sum_{\ell = e, \mu, \tau} \bar{\ell}_L \gamma_\mu \nu_\ell \, \bar{c}_L \gamma^\mu b_L \Big\} + \mathrm{h.c.} \end{aligned} \tag{3.3}$$

である。ここで、ψ_L は $(1 - \gamma_5)\psi/2$ で定義される左手型のフェルミオン場を表し、s' と d' は弱い相互作用の固有状態を表している。ボトムクォークの崩壊には $b \to u$ という過程

も考えられるが、KM 行列の要素 $|V_{ub}|$ が $|V_{cb}|$ に比べ小さいので、この計算への寄与は非常に小さいと考えられるので無視する。また、他にも $b \to s$ という過程もループの効果によって存在するが、この過程も分岐比が小さいので同様の理由で無視する。有効ラグランジアン (3.3) にある $c_{1,2}(m_b)$ という因子は繰り込み群の効果に因るもので、その組み合わせである $c_\pm = c_1 \pm c_2$ は近似を主要 log 項までで留めると

$$c_\pm(m_b) = \left(\frac{\alpha_s(m_W)}{\alpha_s(m_b)} \right)^{-\frac{a_\pm}{2b_0}}, \qquad a_- = -2a_+ = 8, \qquad b_0 = 11 - \frac{2}{3} n_f \tag{3.4}$$

と書ける。ここで n_f はフレーバー数である。

式 (3.1) の全崩壊幅 $\Gamma(H_b \to X_f)$ を計算するためには、非局所演算子 $\hat{T}$ の行列要素を評価しなければならない。しかし、我々は非局所演算子の行列要素を直接求める方法を知らない。そこで、非局所演算子を局所演算子積で展開する演算子積展開の手法を用いて、全崩壊幅を近似的に計算する方法を採る。ボトムクォークの崩壊ではエネルギーの放出が QCD の典型的なエネルギースケールである Λ_{QCD} に比べ十分に大きいので、この近似はよい近似であると考えられる。この演算子積展開の手法を用いると、式 (3.1) の全崩壊幅 $\Gamma(H_b \to X_f)$ は

$$\begin{aligned} \Gamma(H_b \to X_f) = \frac{G_F^2 m_b^5}{192\pi^3} \frac{1}{2m_{H_b}} \Big\{ & c_3(f) \langle H_b | \bar{b} b | H_b \rangle + c_5(f) \frac{\langle H_b | \bar{b} \, g_s \sigma_{\mu\nu} G^{\mu\nu} b | H_b \rangle}{\Delta^2} \\ & + \sum_i c_6^i(f) \frac{\langle H_b | (\bar{b} \, \Gamma_i q) (\bar{q} \Gamma_i b) | H_b \rangle}{\Delta^3} + \ldots \Big\} \end{aligned} \tag{3.5}$$

のように展開することができる [12]。ここで、$c_n(f)$ は質量次元を持たない係数関数で、終状態の量子数、繰り込み群の因子、位相因子に対する依存性を全て含んでいる。Γ_i は γ-行列の適当な組み合わせを表す。また、Δ は演算子積展開の展開パラメータで質量次元 1 を持つ量である。式 (3.5) の演算子積展開がよい近似であるためには Λ_{QCD} に比べ、この Δ は十分に大きい量でなければならない。

3.2 パラメータ表示

式 (3.5) の Dirac スピノール $b(x)$ は QCD の演算子で、第 2 章で述べたように重いクォークの有効理論では

$$b(x) = e^{-im_b v \cdot x} \{ h_b(x) + \chi_b(x) \} \tag{3.6}$$

のように $h_b(x)$ と $\chi_b(x)$ という大きい成分と小さい成分に分解でき、Euler-Lagrange 方程式 (2.6) から $b(x)$ は $h_b(x)$ と $1/m_b$ 展開の式で表すことができる。従って、式 (3.5) の第 1 項と第 2 項の行列要素はそれぞれ

$$\frac{1}{2m_{H_b}}\langle H_b|\,\bar{b}b\,|H_b\rangle \;=\; 1-\frac{\mu_\pi^2(H_b)-\mu_G^2(H_b)}{4m_b^2}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{m_b^3}\right), \tag{3.7}$$

$$\frac{1}{2m_{H_b}}\langle H_b|\,\bar{b}\,g_s\sigma_{\mu\nu}G^{\mu\nu}b\,|H_b\rangle \;=\; 2\mu_G^2(H_b)+\mathcal{O}\left(\frac{1}{m_b}\right) \tag{3.8}$$

のように $1/m_b$ 展開することができる [12, 20]。ここで、$\mu_\pi^2(H_b)$ と $\mu_G^2(H_b)$ は式 (2.29) のパラメータ λ_1、λ_2 とほぼ同じで、それぞれ

$$\mu_\pi^2(H_b) \;\equiv\; -\frac{1}{2m_{H_b}}\langle H_b|\,\bar{h}_b\,(iD_\perp)^2\,h_b\,|H_b\rangle = -\lambda_1\,,$$

$$\mu_G^2(H_b) \;\equiv\; \frac{1}{4m_{H_b}}\langle H_b|\,\bar{h}_b\,g_s\sigma_{\mu\nu}G^{\mu\nu}h_b\,|H_b\rangle = d_H\lambda_2 \tag{3.9}$$

で定義される $\mathcal{O}(\Lambda_{QCD}^2)$ の量である。

式 (3.5) の第 3 項目の行列要素も以下のようなパラメータを使って表すことができる [12, 21]。第 3 項目は局所クォーク 4 体演算子の行列要素であるが、中間子についての局所クォーク 4 体演算子としては

$$\begin{aligned}
O_{V-A}^q &= \bar{b}_L\gamma_\mu q_L\,\bar{q}_L\gamma^\mu b_L\,,\\
O_{S-P}^q &= \bar{b}_R\,q_L\,\bar{q}_L\,b_R\,,\\
T_{V-A}^q &= \bar{b}_L\gamma_\mu t_a q_L\,\bar{q}_L\gamma^\mu t_a b_L\,,\\
T_{S-P}^q &= \bar{b}_R\,t_a q_L\,\bar{q}_L\,t_a b_R
\end{aligned} \tag{3.10}$$

の 4 つの演算子が考えられる。ここで、$t_a=\lambda_a/2$ は $SU(3)$ カラー対称性の生成子である。その行列要素は

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2m_{B_q}}\langle B_q|\,O_{V-A}^q\,|B_q\rangle &\equiv \frac{f_{B_q}^2 m_{B_q}}{8}B_1\,,\\
\frac{1}{2m_{B_q}}\langle B_q|\,O_{S-P}^q\,|B_q\rangle &\equiv \frac{f_{B_q}^2 m_{B_q}}{8}B_2\,,\\
\frac{1}{2m_{B_q}}\langle B_q|\,T_{V-A}^q\,|B_q\rangle &\equiv \frac{f_{B_q}^2 m_{B_q}}{8}\varepsilon_1\,,\\
\frac{1}{2m_{B_q}}\langle B_q|\,T_{S-P}^q\,|B_q\rangle &\equiv \frac{f_{B_q}^2 m_{B_q}}{8}\varepsilon_2
\end{aligned} \tag{3.11}$$

のようにパラメータ B_i と ε_i を用いて表すことができる。ここで、f_{B_q} は中間子 B_q の崩壊定数で

$$\langle\,0\,|\,\bar{q}\gamma_\mu\gamma_5 b\,|\,B_q(p)\,\rangle = i f_{B_q}p_\mu \tag{3.12}$$

で定義される。局所クォーク 4 体演算子 (3.10) の中間子状態についての行列要素 (3.11) は、カレントの積の間に真空の状態を挿入する近似、即ちファクトリゼーションの近似を適用すると

$$\begin{aligned}
\langle B_q|\,O_{V-A}^q\,|B_q\rangle &= \left(\frac{m_b+m_q}{m_{B_q}}\right)\langle B_q|\,O_{S-P}^q\,|B_q\rangle = \frac{f_{B_q}^2 m_{B_q}^2}{4}\,,\\
\langle B_q|\,T_{V-A}^q\,|B_q\rangle &= \langle B_q|\,T_{S-P}^q\,|B_q\rangle = 0
\end{aligned} \tag{3.13}$$

となる。この近似はパラメータを $B_i=1$、$\varepsilon_i=0$ と置くことに対応している。したがって、B_i-1、ε_i は式 (3.11) のそれぞれの行列要素に、ファクトライズ不可能な項がどのくらい寄与するのかを表す指標になっている。

また、重粒子の場合、式 (3.5) の第 3 項の行列要素として、中間子の場合の局所クォーク 4 体演算子 O_{V-A} と

$$\tilde{O}_{V-A}^q = \bar{b}_L^i\gamma_\mu q_L^j\,\bar{q}_L^j\gamma^\mu b_L^i \tag{3.14}$$

の 2 つの演算子が考えられる。ここで、i、j はカラーの指標である。その行列要素はそれぞれ

$$\begin{aligned}
\langle\Lambda_b|\,\tilde{O}_{V-A}^q\,|\Lambda_b\rangle &\equiv -\tilde{B}_{\Lambda_b}\,\langle\Lambda_b|\,O_{V-A}^q\,|\Lambda_b\rangle\,,\\
\langle\Omega_b|\,\tilde{O}_{V-A}^q\,|\Omega_b\rangle &\equiv -\tilde{B}_{\Omega_b}\,\langle\Omega_b|\,O_{V-A}^q\,|\Omega_b\rangle\,,\\
\frac{1}{2m_{\Lambda_b}}\,\langle\Lambda_b|\,O_{V-A}^q\,|\Lambda_b\rangle &\equiv -\frac{f_{B_q}^2 m_{B_q}}{48}\,r_{\Lambda_b}\,,\\
\frac{1}{2m_{\Omega_b}}\,\langle\Omega_b|\,O_{V-A}^q\,|\Omega_b\rangle &\equiv -\frac{f_{B_q}^2 m_{B_q}}{8}\,r_{\Omega_b}
\end{aligned} \tag{3.15}$$

のように $\tilde{B}$ と r というパラメータを使って表すことができる。相互作用に寄与する軽いクォークが価クォークだけであるとすると、重粒子のカラーの波動関数は全体で反対称なので O_{V-A}^q と $\tilde{O}_{V-A}^q$ の重粒子についての行列要素は符号だけが異なることになる。したがって、この価クォーク近似の下では $\tilde{B}_{\Lambda_b,\,\Omega_b}=1$ である。また、非相対論的クォーク模型

では O^q_{V-A} の中間子 B_q 状態と重粒子 Λ_b、Ω_b 状態についての行列要素の違いは、主にボトムクォークの位置に軽いクォークが存在する確率の違いに起因する。したがって、非相対論的クォーク模型ではパラメータ r_{Λ_b}、r_{Ω_b} はそれぞれ

$$r_{\Lambda_b} = \frac{\left|\psi^{\Lambda_b}_{bq}(0)\right|^2}{\left|\psi^{B_q}_{b\bar{q}}(0)\right|^2}, \quad r_{\Omega_b} = \frac{\left|\psi^{\Omega_b}_{bq}(0)\right|^2}{\left|\psi^{B_q}_{b\bar{q}}(0)\right|^2} \tag{3.16}$$

と書くことができる。さらに波動関数の2乗 $|\psi(0)|^2$ はハドロンの質量と関係がつくので、それぞれパラメータ r_{Λ_b}、r_{Ω_b} はハドロンの質量を用いて

$$r_{\Lambda_b} = \frac{4}{3}\frac{m_{\Sigma^*_b} - m_{\Sigma_b}}{m_{B^*_q} - m_{B_q}}, \quad r_{\Omega_b} = \frac{4}{3}\frac{m_{\Omega^*_b} - m_{\Omega_b}}{m_{B^*_q} - m_{B_q}} \tag{3.17}$$

のように表すことができる。ここでは、$\left|\psi^{\Lambda_b}_{bq}(0)\right|^2 = \left|\psi^{\Sigma_b}_{bq}(0)\right|^2$ という仮定を用いた。

以上のようなパラメータを用いると式 (3.5) の第3項目の行列要素はそれぞれのハドロンについて

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2m_B}\sum_i c^i_6(f)\langle B^-|\,(\bar{b}\,\Gamma_i q)\,(\bar{q}\Gamma_i b)\,|B^-\rangle \\
&\quad = \eta\,(1-z)^2\left\{(2c_+^2 - c_-^2)\,B_1 + 3(c_+^2 + c_-^2)\,\varepsilon_1\right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2m_B}\sum_i c^i_6(f)\langle B_d|\,(\bar{b}\,\Gamma_i q)\,(\bar{q}\Gamma_i b)\,|B_d\rangle \\
&\quad = -\eta\,(1-z)^2\left\{\frac{1}{3}(2c_+ - c_-)^2\left[\left(1+\frac{z}{2}\right)B_1 - (1+2z)\,B_2\right]\right. \\
&\qquad \left. + \frac{1}{2}(c_+ + c_-)^2\left[\left(1+\frac{z}{2}\right)\varepsilon_1 - (1+2z)\,\varepsilon_2\right]\right\} \\
&\qquad - \eta\sqrt{1-4z}\,\frac{|V_{cd}|^2}{|V_{ud}|^2}\left\{\frac{1}{3}(2c_+ - c_-)^2\,[(1-z)\,B_1 - (1+2z)\,B_2]\right. \\
&\qquad \left. + \frac{1}{2}(c_+ + c_-)^2\,[(1-z)\,\varepsilon_1 - (1+2z)\,\varepsilon_2]\right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2m_{B_s}}\sum_i c^i_6(f)\langle B_s|\,(\bar{b}\,\Gamma_i q)\,(\bar{q}\Gamma_i b)\,|B_s\rangle \\
&\quad = -\eta'\,(1-z)^2\,\frac{|V_{us}|^2}{|V_{cs}|^2}\left\{\frac{1}{3}(2c_+ - c_-)^2\left[\left(1+\frac{z}{2}\right)B_1 - (1+2z)\,B_2\right]\right. \\
&\qquad \left. + \frac{1}{2}(c_+ + c_-)^2\left[\left(1+\frac{z}{2}\right)\varepsilon_1 - (1+2z)\,\varepsilon_2\right]\right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\qquad - \eta'\sqrt{1-4z}\left\{\frac{1}{3}(2c_+ - c_-)^2\,[(1-z)\,B_1 - (1+2z)\,B_2]\right. \\
&\qquad \left. + \frac{1}{2}(c_+ + c_-)^2\,[(1-z)\,\varepsilon_1 - (1+2z)\,\varepsilon_2]\right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2m_{\Lambda_b}}\sum_i c^i_6(f)\langle \Lambda_b|\,(\bar{b}\,\Gamma_i q)\,(\bar{q}\Gamma_i b)\,|\Lambda_b\rangle \\
&\quad = \eta\,\frac{r_{\Lambda_b}}{16}\left\{8(1-z)^2\left[(c_-^2 - c_+^2) + (c_-^2 + c_+^2)\,\tilde{B}_{\Lambda_b}\right]\right. \\
&\qquad - \left[(1-z)^2(1+z) + \sqrt{1-4z}\,\frac{|V_{cd}|^2}{|V_{ud}|^2}\right] \\
&\qquad \left. \times\left[(c_- - c_+)(5c_+ - c_-) + (c_- + c_+)^2\,\tilde{B}_{\Lambda_b}\right]\right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2m_{\Omega_b}}\sum_i c^i_6(f)\langle \Omega_b|\,(\bar{b}\,\Gamma_i q)\,(\bar{q}\Gamma_i b)\,|\Omega_b\rangle \\
&\quad = -\eta'\,\frac{r_{\Omega_b}}{24}\sqrt{1-4z}\left[(c_- - c_+)(5c_+ - c_-) + (c_- + c_+)^2\,\tilde{B}_{\Omega_b}\right]
\end{aligned} \tag{3.18}$$

となり、模型に依存しないパラメータで表示することができる。ここで、z は位相因子でボトムクォークとチャームクォークのポールクォーク質量比の2乗 $z \equiv m_c^2/m_b^2$ で定義する。本論文では z の値として文献 [12] の $z = 0.083 \pm 0.015$ という値を使用する。また、η と η' はそれぞれ

$$\begin{aligned}
\eta &\equiv 16\pi^2 f_B^2 m_B |V_{cb}|^2 |V_{ud}|^2, \\
\eta' &\equiv 16\pi^2 f_{B_s}^2 m_{B_s} |V_{cb}|^2 |V_{cs}|^2
\end{aligned} \tag{3.19}$$

で定義する。本論文では B 中間子の崩壊定数 f_B の値として文献 [22] の $f_B \simeq 0.18\,\mathrm{GeV}$ という値を使用する。また、軽いクォークに対する $SU(3)$ フレーバー対称性の破れの効果は、ストレンジクォークの質量だけであると仮定し、B_i と ε_i は B 中間子と B_s 中間子で共通であるとし、崩壊定数は $f_{B_s} \simeq f_B$ とおいた。

3.3 繰り込み群による補正

第3.1節でボトムクォークを含むハドロンの全崩壊幅の演算子積展開を行った。その際には触れなかったが演算子積展開 (3.5) はエネルギースケールがボトムクォークのポール

クォーク質量 m_b のところで定義されていると考えられる [12]。そのことはボトムクォークの崩壊の有効ラグランジアン (3.3) が、エネルギースケール m_b で定義されていることからも分かる。もし、演算積展開の展開パラメータ Δ が演算子積展開が定義されるエネルギースケール (この場合はボトムクォークのポールクォーク質量 m_b) からずれると、QCD の繰り込み群による補正の効果を考える必要がでてくる [23]。

一般に、x だけ離れた 2 つの局所演算子 $\mathcal{O}_1(x)$、$\mathcal{O}_2(0)$ の積は x が非常に 0 に近い場合、局所演算子 $\mathcal{O}_n(0)$ の線形結合

$$[\mathcal{O}_1(x)]_M\,[\mathcal{O}_2(0)]_M = \sum_n C^n_{12}(x;M)\,[\mathcal{O}_n(0)]_M \tag{3.20}$$

のように展開することができる。ここで、M はこの演算子積展開が定義される繰り込みスケールを表し、係数 $C^n_{12}(x;M)$ は c-数関数である。この係数関数 $C^n_{12}(x;M)$ は Callan-Symanzik 方程式

$$\left[M\frac{\partial}{\partial M} + \beta\frac{\partial}{\partial \beta} + \gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_n\right] C^n_{12}(x;M) = 0 \tag{3.21}$$

を満たす。ここで、γ_1、γ_2、γ_n はそれぞれ $\mathcal{O}_1$、$\mathcal{O}_2$、$\mathcal{O}_n$ の異常次元を表す。演算子の異常次元 $\gamma_{\mathcal{O}}$ は 1 ループのレベルでは、

$$\gamma_{\mathcal{O}} = -a_{\mathcal{O}}\,\frac{g_s^2}{(4\pi)^2} \tag{3.22}$$

の形に書くことができる。

式 (3.21) を解くと、演算子積展開の展開パラメータ Δ が繰り込みのスケール M からずれた場合、係数関数 $C^n_{12}(x;M)$ は

$$C^n_{12}(x;\Delta) \simeq \left(\frac{\alpha_s(M)}{\alpha_s(\Delta)}\right)^{(a_n - a_1 - a_2)/2b_0} C^n_{12}(x;M) \tag{3.23}$$

のような補正を受けることが分かる [23]。ここで、a_1、a_2、a_n はそれぞれ $\mathcal{O}_1$、$\mathcal{O}_2$、$\mathcal{O}_n$ の異常次元を式 (3.22) の様な形に書いた場合の $a_{\mathcal{O}}$ を表す。また、b_0 は $11 - 2n_f/3$ である。ボトムハドロンの寿命比を求める場合、演算子積展開 (3.5) が定義されている繰り込みスケールは m_b であるから、展開パラメータ Δ が m_b からずれることを考える場合はこの補正を考慮しなければならない。

第 4 章

寿命比 $\tau(\Lambda_b)/\tau(B_d)$

本章では最初に、寿命比 $\tau(\Lambda_b)/\tau(B_d)$ がどのように計算され、実験とどれくらい食い違っているかを概括し、次にこれまでにどのような解決法が提案されてきたかについて述べる。最後に、新たな問題解決の可能性について議論する。

4.1 寿命比 $\tau(\Lambda_b)/\tau(B_d)$ の問題

前章においてボトムクォークを含むハドロンの寿命が演算子積展開と重いクォークの有効理論でどのように表されるかについて述べた。その結果、前章で定義したパラメータを用いると Λ_b と B_d の寿命比は模型によらず

$$\begin{aligned}\frac{\tau(\Lambda_b)}{\tau(B_d)} &= 1 + \frac{\mu_\pi^2(\Lambda_b) - \mu_\pi^2(B_d)}{4m_b^2} + \left(\frac{1}{4} + c_M\frac{m_b^2}{\Delta^2}\right)\frac{\mu_G^2(B_d) - \mu_G^2(\Lambda_b)}{m_b^2} \\ &\quad + \frac{1}{\Delta^3}\left\{k_1B_1 + k_2B_2 + k_3\varepsilon_1 + k_4\varepsilon_2 + \left(k_5 + k_6\widetilde{B}_{\Lambda_b}\right)r_{\Lambda_b}\right\} + \cdots\end{aligned} \tag{4.1}$$

と表すことができる [12]。ここで、c_M と k_i は繰り込み群因子、位相因子等が含まれる質量次元を持たない係数で、エネルギースケール μ が m_b のところではそれぞれ

$$\begin{aligned}c_M &\equiv \frac{2c_5(f)}{c_3(f)} \\ &\cong -\frac{2\left(3A_0(1-z)^4 + 2(c_+^2 - c_-^2)(1-z)^3 + 2(1-z)^4\right)}{3A_0z_0 + 2z_0},\end{aligned} \tag{4.2}$$

$$k_1 \equiv -\frac{\eta}{3(3A_0z_0 + 2z_0)}(2c_+ - c_-)^2\left((1-z)^2(1+\frac{z}{2}) + \sqrt{1-4z}(1-z)\left|\frac{V_{cd}}{V_{ud}}\right|^2\right),$$

$$
\begin{aligned}
k_2 &\equiv \frac{\eta}{3(3A_0 z_0 + 2z_0)}(2c_+ - c_-)^2(1+2z)\left((1-z)^2 + \sqrt{1-4z}\left|\frac{V_{cd}}{V_{ud}}\right|^2\right), \\
k_3 &\equiv -\frac{\eta}{2(3A_0 z_0 + 2z_0)}(c_+ + c_-)^2\left((1-z)^2(1+\frac{z}{2}) + \sqrt{1-4z}(1-z)\left|\frac{V_{cd}}{V_{ud}}\right|^2\right), \\
k_4 &\equiv \frac{\eta}{2(3A_0 z_0 + 2z_0)}(c_+ + c_-)^2(1+2z)\left((1-z)^2 + \sqrt{1-4z}\left|\frac{V_{cd}}{V_{ud}}\right|^2\right), \\
k_5 &\equiv \frac{\eta}{16(3A_0 z_0 + 2z_0)}\left\{(c_- - c_+)(5c_+ - c_-)\left((1-z)^2(1+z) + \sqrt{1-4z}\left|\frac{V_{cd}}{V_{ud}}\right|^2\right)\right. \\
&\quad \left. -8(c_+^2 - c_-^2)(1-z)^2\right\}, \\
k_6 &\equiv \frac{\eta}{16(3A_0 z_0 + 2z_0)}\left\{(c_+ + c_-)^2\left((1-z)^2(1+z) + \sqrt{1-4z}\left|\frac{V_{cd}}{V_{ud}}\right|^2\right)\right. \\
&\quad \left. -8(c_+^2 + c_-^2)(1-z)^2\right\}
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

で与えられる [12, 21, 24]。ここで、A_0 と z_0 は

$$
\begin{aligned}
A_0 &\cong \frac{c_+^2 + c_-^2}{2} + \frac{c_+^2 - c_-^2}{6}, \\
z_0 &= 1 - 8z + 8z^3 - z^4 - 12z^2 \log z
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

を表し、$c_\pm$ と z は前章と同様で、それぞれ式 (3.4) 及び m_c^2/m_b^2 で定義される。

式 (4.1) で寿命比 $\tau(\Lambda_b)/\tau(B_d)$ を求めるためには、演算子積展開の展開パラメータ Δ、及びパラメータ μ_π^2、μ_G^2、B_i、ε_i、r_{Λ_b}、$\tilde{B}_{\Lambda_b}$ の値が必要である。μ_π^2、μ_G^2 は第 3 章で述べた重いクォークを含むハドロンの質量関係式の λ_1、λ_2 と式 (3.9) で関連づけられている。したがって、各ハドロンの質量とその質量関係式を用いると

$$
\begin{aligned}
\mu_\pi^2(\Lambda_b) - \mu_\pi^2(B_d) &= -(0.01 \pm 0.03)\ (\mathrm{GeV})^2, \\
\mu_G^2(B_d) &\simeq \frac{3}{4}(m_{B^*}^2 - m_B^2) \simeq 0.36\ (\mathrm{GeV})^2, \\
\mu_G^2(\Lambda_b) &\simeq 0
\end{aligned}
\tag{4.5}
$$

の様に模型に依存せず求めることができる。しかし、$1/\Delta^3$ 項に現れてくるパラメータ B_i、ε_i、r_{Λ_b}、$\tilde{B}_{\Lambda_b}$ の値に関しては、模型に依存する形でしか求められていない。まず $\tilde{B}_{\Lambda_b}$ は、

価クォーク近似がよいとして

$$
\tilde{B}_{\Lambda_b} = 1 \tag{4.6}
$$

とする。B_i 、ε_i は QCD 和則を用いて評価されており [15]、その値はエネルギースケールが m_b では

$$
\begin{aligned}
B_1(\mu = m_b) &\simeq 1.01 \pm 0.01, \\
B_1(\mu = m_b) &\simeq 0.99 \pm 0.01, \\
\varepsilon_1(\mu = m_b) &\simeq -0.08 \pm 0.02, \\
\varepsilon_2(\mu = m_b) &\simeq -0.01 \pm 0.03
\end{aligned}
\tag{4.7}
$$

と求められている。r_{Λ_b} は非相対論的クォーク模型、QCD 和則等を用いた評価がなされてきている。非相対論的クォーク模型では r_{Λ_b} は中間子 B_d と重粒子 Λ_b の波動関数の比

$$
r_{\Lambda_b} = \left|\frac{\psi_{bq}^{\Lambda_b}(0)}{\psi_{b\bar{q}}^{B_d}(0)}\right|^2 \tag{4.8}
$$

と等しくなる。さらに

$$
\left|\psi_{bq}^{\Lambda_b}(0)\right|^2 \simeq \left|\psi_{bq}^{\Sigma_b}(0)\right|^2 \tag{4.9}
$$

を仮定すると、波動関数 $\left|\psi_{bq}^{\Sigma_b}(0)\right|^2$ 、$\left|\psi_{b\bar{q}}^{B_d}(0)\right|^2$ はそれぞれ質量差 $m_{\Sigma_b^*} - m_{\Sigma_b}$、$m_{B_d^*} - m_{B_d}$ に関係していることから

$$
r_{\Lambda_b} = \frac{4}{3}\frac{m_{\Sigma_b^*} - m_{\Sigma_b}}{m_{B_d^*} - m_{B_d}} \tag{4.10}
$$

のようにハドロンの質量を用いて求めることができる。ただ、Σ_b と Σ_b^* 質量差については不確定な要素があるので、ここでは重いクォークの有効理論の質量関係式

$$
\frac{m_{\Sigma_b^*} - m_{\Sigma_b}}{m_{B^*} - m_B} = \frac{m_{\Sigma_c^*} - m_{\Sigma_c}}{m_{D^*} - m_D} \tag{4.11}
$$

を用いる。その結果、

$$
r_{\Lambda_b} = r_{\Lambda_c} \simeq 0.61 \tag{4.12}
$$

が得られる [21]。一方、QCD 和則では

$$
r_{\Lambda_b} \simeq 0.2 \pm 0.1 \tag{4.13}
$$

という結果が得られている [14]。

最後に、演算子積展開の展開パラメータ Δ は、これまでの文献 [12, 13, 14, 15, 20, 24, 25] に従い、ボトムクォークの質量 m_b に等しいとする。これはボトムクォークを含むハドロンの崩壊の典型的なエネルギーを示す量が、ボトムクォークの質量 m_b しかないためと考えられる。

以上を用いた寿命比 $\tau(\Lambda_b)/\tau(B_d)$ の計算結果をまとめると

$$\frac{\tau(\Lambda_b)}{\tau(B_d)} \geq 0.94 \tag{4.14}$$

となる。しかし、これは実験値 [16]

$$\frac{\tau(\Lambda_b)}{\tau(B_d)} = 0.78 \pm 0.06 \tag{4.15}$$

から 2σ 以上ずれてしまっている。これが寿命比 $\tau(\Lambda_b)/\tau(B_d)$ の問題である。

4.2 これまでに提案された問題の解決法

この寿命比 $\tau(\Lambda_b)/\tau(B_d)$ の問題の解決法として Altarelli らによって提案されたのが、式 (3.5) の先頭のボトムクォーク質量の 5 乗の因子 m_b^5 をハドロンの質量の 5 乗 $m_{H_b}^5$ に置き換える、即ち

$$\Gamma(H_b \to X_f) \to \left(\frac{m_{H_b}}{m_b}\right)^5 \Gamma(H_b \to X_f) \tag{4.16}$$

とする方法である [26]。この場合、寿命比はほとんど質量の比で決まってしまい、

$$\frac{\tau\,(\Lambda_b)}{\tau\,(B_d)} \sim \left(\frac{m_{B_d}}{m_{\Lambda_b}}\right)^5 = 0.73 \pm 0.01 \tag{4.17}$$

となる。この結果は実験値 (4.15) をほぼ再現している。この置き換え (4.16) は、第 2 章の質量公式でハドロンの質量が

$$m_{H_b} = m_b \left\{1 + \frac{\bar{\Lambda}}{m_b} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{m_b^2}\right)\right\} \tag{4.18}$$

と展開できることから、ちょうど $1/m_b$ のオーダーの補正項を全崩壊幅を表す式 (3.5) に導入することに対応している。しかし、この置き換え (4.16) は純粋に仮定であり、$1/m_b$ のオーダーの補正項を導入する物理的理由についてもまだはっきりしていない。

この置き換え (4.16) を少し変更し、全崩壊幅を置き換えるのではなく、全崩壊幅 Γ を

$$\Gamma_{total} = \Gamma_{NL} + \Gamma_{SL} \tag{4.19}$$

のように、ノンレプトニック崩壊の崩壊幅 Γ_{NL} とセミレプトニック崩壊の崩壊幅 Γ_{SL} に分離し、ノンレプトニック崩壊の崩壊幅だけを

$$\Gamma_{NL} \to \left(\frac{m_{H_b}}{m_b}\right)^5 \Gamma_{NL} \tag{4.20}$$

のように置き換えるという解決法が Cheng によって提案された [21]。この置き換えを用いると、寿命比 $\tau(\Lambda_b)/\tau(B_d)$ は

$$\frac{\tau\,(\Lambda_b)}{\tau\,(B_d)} = 0.78 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{m_b^3}\right) \tag{4.21}$$

となり、よく実験値 (4.15) を再現する。また、この置き換えを用いるとそれぞれの寿命 $\tau\,(\Lambda_b)$、$\tau\,(B_d)$ の絶対値も再現できるとしている [21]。ただ、この絶対値の計算は模型に依存しない形では実行できず、この計算は非相対論的クォーク模型を用いて行われている。したがって、適用する模型によってはこの絶対値の結果は変わる可能性がある。

これらの置き換え (4.16)、(4.20) はいまのところ純粋に仮定である。したがって、これらの方法が正しいとするには、置き換えの物理的意味を明らかにしなければならない。

4.3 問題の解決の新たな可能性

本節では、寿命比 $\tau(\Lambda_b)/\tau(B_d)$ の問題の解決法として、新たな可能性について議論する。その手がかりとして、ここでは演算子積展開の展開パラメータ Δ に着目する。これまでにこの寿命比の問題を扱った文献 [12, 13, 14, 15, 20, 24, 25] では、すべてこの展開パラメータ Δ をボトムクォークの質量 m_b に等しいと置いている。しかし、これらの文献では $\Delta = m_b$ と置く明確な物理的説明がなされていない。Shifman と Blok は文献 [25] でこの Δ の値について議論しているが、彼らは

$$\Delta = m_b - m_c \tag{4.22}$$

ととり、重いクォークの極限では m_c が無視できるとし

$$\Delta \to m_b \gg \Lambda_{QCD} \tag{4.23}$$

とおけるという議論を行っている。しかし、重いクォークの有効理論で重いクォークの極限 $m_b, m_c \to \infty$ をとるとき、クォークの質量比 m_c/m_b を一定に保って極限操作をするのが自然であり、$\Delta = m_b$ と置く物理的根拠は明確ではない。また、クォークの質量 m_b の値は繰り込み群によって大幅に変化するので、$\Delta = m_b$ とした場合にはどのエネルギースケールの値を採用すべきかという問題も現れてくる。では一体、展開パラメータ Δ としてどういう値をとるべきであろうか？ 現時点では、我々はこの問題に対する明確な解答を持っていない。そこで、ここではこの展開パラメータ Δ として正しい値をとれば、弱い相互作用でしか崩壊できないボトムクォークを1個含むハドロンの全ての寿命比の実験値を再現するべきであるとの立場から、現在までに実験で測定されている寿命比の実験値から逆に Δ を求めることを考える。

現在までに実験で寿命が測定されているのはボトムクォークを1個含むハドロンは B_d、Λ_b の他に B^- と B_s がある。それらの B_d との寿命の比の実験値は

$$\frac{\tau(B^-)}{\tau(B_d)} = 1.07 \pm 0.04\,, \tag{4.24}$$

$$\frac{\tau(B_s)}{\tau(B_d)} = 0.95 \pm 0.05 \tag{4.25}$$

である [16]。これらの寿命比は第3章の定式化を用いると、それぞれ

$$\frac{\tau(B^-)}{\tau(B_d)} = 1 + \frac{1}{\Delta^3}\{k_7 B_1 + k_8 B_2 + k_9 \varepsilon_1 + k_{10}\varepsilon_2\}\,, \tag{4.26}$$

$$\frac{\tau(B_s)}{\tau(B_d)} = 1 + \frac{1}{\Delta^3}\{k_{11} B_1 + k_{12} B_2 + k_{13} \varepsilon_1 + k_{14}\varepsilon_2\} \tag{4.27}$$

と書ける。k_i は式 (4.1) と同様、繰り込み群の因子、位相因子等を含む係数である。Λ_b と B_d の寿命比の場合 (4.1) と異なるのは、$1/m_b^2$ と $1/\Delta^2$ のオーダーの項がキャンセルして消えてしまっていることである。

そこで、3つの寿命比 (4.15)、(4.24)、(4.25) を再現するよう展開パラメータ Δ を求める。式 (4.1)、(4.26)、(4.27) 中のパラメータ B_i 、ε_i 、r_{Λ_b} 、$\widetilde{B}_{\Lambda_b}$ を自由なパラメータとすると展開パラメータ Δ には全く制限がつかない。しかし、パラメータ B_i 、ε_i 、r_{Λ_b} 、$\widetilde{B}_{\Lambda_b}$ は局所クォーク4体演算子の行列要素を表すパラメータであるから、その値には物理的に何等かの制限がある。ここでは、模型を用いた局所クォーク4体演算子の行列要素の計算結果をパラメータのとりうる範囲を制限するのに利用する。パラメータ B_i 、ε_i につ

いては、QCD和則を用いた計算の結果 (4.7) はおよそ

$$|B_i - 1| \sim 10^{-2}\,,$$
$$|\varepsilon_i| \sim 10^{-2} \tag{4.28}$$

であることを示している。これは局所4体クォーク演算子の行列要素に対して、$\mu = m_b$ のエネルギースケールで、ファクトライズ不可能な項の寄与がそれ程大きくないことを示していると考えられる。このことから、パラメータ B_i 、ε_i のとりうる値を

$$|B_i - 1| \le 0.1\,,$$
$$|\varepsilon_1| \le 0.1\,,$$
$$|\varepsilon_2| \le 0.05 \tag{4.29}$$

と制限することにする。パラメータ r_{Λ_b} に関しては、QCD和則を用いた計算の結果 [14] は $r_{\Lambda_b} \sim 0.2 \pm 0.1$、また、非相対論的クォーク模型を用いた計算の結果 [21] として $r_{\Lambda_b} \sim 0.6$ が得られている。したがって、パラメータ r_{Λ_b} のとりうる値を

$$0.1 \le r_{\Lambda_b} \le 0.6 \tag{4.30}$$

と制限することにする。また、パラメータ $\widetilde{B}_{\Lambda_b}$ に関しては価クォーク近似がよいとして1という値を採用する。

以上のようにパラメータ B_i 、ε_i 、r_{Λ_b} 、$\widetilde{B}_{\Lambda_b}$ に制限 (4.29)、(4.30) を課して、3つの寿命比の実験値 (4.15)、(4.24)、(4.25) を再現するように展開パラメータ Δ を求めた結果

$$\Delta = 3.28 \pm 0.70\,\mathrm{GeV} \tag{4.31}$$

という値が得られた。この時、第3章で述べたQCDの繰り込み群による補正の効果も考慮した。この値はボトムクォークのポール質量 $m_b = 4.8 \pm 0.2\,\mathrm{GeV}$[12] と考えるには少し小さい。では、一体この値はどのような物理的な意味があるのであろうか? 文献 [25] では極限をとる前の段階では Δ は式 (4.22) であるとしている。実際のポールクォーク質量の質量差は $m_b - m_c = 3.40 \pm 0.06\,\mathrm{GeV}$[12] となり、得られた結果 (4.31) によく一致している。この結果は、ボトムクォークの寿命比の計算を行う際、チャームクォークの質量を無視することができないことを表しており、重いクォークの有効理論では、重いクォークの質量

比 m_c/m_b を一定に保ったまま、重いクォークの極限 $m_b, m_c \to \infty$ をとるのが妥当であることを示唆している。また、この質量差 $m_b - m_c$ の値は繰り込み群によってほとんど変化しないので、クォークの質量 m_b とは異なり、どのエネルギースケールの値を採用するかというのはそれほど問題にはならないので、展開パラメータ Δ としてはより適しているということができる。

第 5 章

寿命比 $\tau(\Omega_b)/\tau(B_d)$ の予言

前章では寿命比 $\tau(\Lambda_b)/\tau(B_d)$ の問題について述べ、その解決法としてこれまでに考えられた方法と、新たな可能性について述べた。ただ、現在までに測定されているボトムクォークを 1 個含むハドロンの寿命の比を扱うだけならば、両者の結果は同じなので全く区別がつかない。したがって、それぞれの解決法が正しいかどうかは、他のボトムハドロンにそれぞれの解決法を適用してみて実験を再現するかどうかを調べる必要がある。そこで、本章では重粒子 Ω_b と B_d の寿命比にそれぞれの解決法を適用し、それぞれの寿命比の予言値を求める。重粒子 Ω_b に比べて先に発見されると考えられるものに重粒子 Ξ_b があり、このハドロンも弱い相互作用を通じてしか崩壊しないのでこの寿命比の定式化で扱えると考えられる。しかし、この重粒子 Ξ_b を考える場合は重粒子 Ξ_b' との混合を考慮に入れる必要がでてくるため [27]、少し複雑な議論が必要となる。ここでは、そういった状態の混合についての議論を必要としない重粒子 Ω_b だけを扱うことにする。

5.1 寿命比 $\tau(\Omega_b)/\tau(B_d)$

寿命比 $\tau(\Omega_b)/\tau(B_d)$ は式 (4.1) と同様、模型に依存しないパラメータを使って

$$
\begin{aligned}
\frac{\tau(\Omega_b)}{\tau(B_d)} &= 1 + \frac{\mu_\pi^2(\Omega_b) - \mu_\pi^2(B_d)}{4m_b^2} + \left(\frac{1}{4} + c_M \frac{m_b^2}{\Delta^2}\right) \frac{\mu_G^2(B_d) - \mu_G^2(\Omega_b)}{m_b^2} \\
&\quad + \frac{1}{\Delta^3} \left\{ k_1 B_1 + k_2 B_2 + k_3 \varepsilon_1 + k_4 \varepsilon_2 + \left(k_{15} + k_{16} \widetilde{B}_{\Omega_b}\right) r_{\Omega_b} \right\} + \cdots \qquad (5.1)
\end{aligned}
$$

のように書き表すことができる。ここで、c_M と $k_{1\sim4}$ は式 (4.1) と全く同じ係数で、$k_{15,16}$ も式 (4.1) 同様繰り込み群因子、位相因子等が含まれる質量次元を持たない係数である。

μ_π^2、μ_G^2 は第3章で述べた重いクォークを含むハドロンの質量関係式と関連づけられているが、それを使うためには重粒子 Ω_b の質量を知らなければならないという問題がある。したがって

$$\begin{aligned}&\mu_\pi^2(\Omega_b) - \mu_\pi^2(B_d)\,,\\&\mu_G^2(\Omega_b) - \mu_G^2(B_d)\end{aligned} \tag{5.2}$$

を直接求めるのは困難なので、ここでは

$$\begin{aligned}\mu_\pi^2(\Omega_b) &\simeq \mu_\pi^2(\Sigma_b)\,,\\ \mu_G^2(\Omega_b) &\simeq \mu_G^2(\Sigma_b)\end{aligned} \tag{5.3}$$

という仮定を用いる。この仮定は軽いクォークについての $SU(3)$ フレーバー対称性によって正当化することができる。Σ_b と B_d に関する質量関係式を用いると

$$\begin{aligned}&\left\{\frac{1}{3}\left(2m_{\Sigma_b^*} + m_{\Sigma_b}\right) - \frac{1}{3}\left(2m_{\Sigma_c^*} + m_{\Sigma_c}\right)\right\} - \left\{\frac{1}{4}\left(3m_{B^*} + m_B\right) - \frac{1}{3}\left(2m_{D^*} + m_D\right)\right\}\\&\qquad = \left\{\mu_\pi^2(B_d) - \mu_\pi^2(\Sigma_b)\right\}\left(\frac{1}{2m_c} - \frac{1}{2m_b}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{m_Q^2}\right)\end{aligned} \tag{5.4}$$

と

$$\begin{aligned}\mu_G^2(B_d) &\simeq \frac{3}{4}\left(m_{B^*}^2 - m_B^2\right),\\ \mu_G^2(\Sigma_b) &\simeq \frac{1}{6}\left(m_{\Sigma_b^*}^2 - m_{\Sigma_b}^2\right)\end{aligned} \tag{5.5}$$

という式が得られる。重粒子 Σ_b と Σ_b^* の質量の実験値 [10]

$$\begin{aligned}m_{\Sigma_b} &= 5.796 \pm 0.008\,\mathrm{GeV}\,,\\ m_{\Sigma_b^*} &= 5.852 \pm 0.008\,\mathrm{GeV}\end{aligned} \tag{5.6}$$

を式 (5.4)、(5.5) 代入して計算を行うと、式 (5.2) は

$$\begin{aligned}\mu_\pi^2(\Omega_b) - \mu_\pi^2(B_d) &\sim 0.03\,(\mathrm{GeV})^2\,,\\ \mu_G^2(\Omega_b) - \mu_G^2(B_d) &\sim -0.25\,(\mathrm{GeV})^2\end{aligned} \tag{5.7}$$

となる。重粒子 Σ_b と Σ_b^* の質量の実験値には第1章で述べたような困難があり、結果 (5.7) にはそこからの不定性が入ってくるが、この不定性は最終的な結果にはほとんど影響しない。

5.2 寿命比 $\tau(\Omega_b)/\tau(B_d)$ の予言

まず、展開パラメータ Δ を式 (4.31) のようにボトムクォークのポール質量 m_b ではなく、$m_b - m_c$ とする解決法による寿命比 $\tau(\Omega_b)/\tau(B_d)$ の計算について述べる。パラメータ B_i と ε_i については、寿命比 $\tau(\Lambda_b)/\tau(B_d)$ の計算の時に使用した制限 (4.29) を課すことにする。r_{Ω_b} に関しては非相対論的クォーク模型の結果 $r_{\Omega_b} = 0.53$ [21] を用いる。また、$\tilde{B}_{\Omega_b}$ は寿命比 $\tau(\Lambda_b)/\tau(B_d)$ の計算と同様、価クォーク近似がよいとして1と置く。以上の値を用い、Δ を式 (4.31) で得られた $\Delta = 3.28 \pm 0.70\,\mathrm{GeV}$ という値をとるとして計算を行うと

$$\frac{\tau(\Omega_b)}{\tau(B_d)} = 1.10 \pm 0.06 \tag{5.8}$$

という結果が得られた。

式 (4.16) の様にボトムクォークの質量の5乗 m_b^5 をハドロンの質量の5乗 $m_{H_b}^5$ に置き換える解決法を用いて同様に寿命比 $\tau(\Omega_b)/\tau(B_d)$ の計算を行うと、寿命比はほぼハドロンの質量の5乗で決まり、およそ

$$\frac{\tau(\Omega_b)}{\tau(B_d)} \sim \left(\frac{m_{B_d}}{m_{\Omega_b}}\right)^5 \simeq 0.55 \tag{5.9}$$

という結果になる。ここで、重粒子 Ω_b の質量として式 (2.37) の予言値 $m_{\Omega_b} = 6.06\,\mathrm{GeV}$ を用いた。式 (4.20) の様にノンレプトニック崩壊の崩壊幅だけを置き換える解決法では、寿命比 $\tau(\Omega_b)/\tau(B_d)$ は

$$\frac{\tau(\Omega_b)}{\tau(B_d)} \simeq 0.65 \tag{5.10}$$

となる [21]。

以上の結果を比較すると、前者は

$$\tau(\Omega_b) \geq \tau(B_d) \tag{5.11}$$

で後者は

$$\tau(\Omega_b) < \tau(B_d) \tag{5.12}$$

となり、全く異なる結果となった。したがって実験によって重粒子 Ω_b の寿命が測定されれば、両者のどちらが解決法としてよいかが判別されると期待される。

第 6 章

まとめと討論

本論文では、寿命比 $\tau(\Lambda_b)/\tau(B_d)$ の問題を演算子積展開の展開パラメータ Δ をボトムクォークのポール質量 m_b からずらし、$\Delta = 3.28 \pm 0.70\,\mathrm{GeV}$ ととることによって解決できることを示した。この展開パラメータ Δ の値は、現在までの実験で測定されている寿命比 $\tau(B^-)/\tau(B_d)$、$\tau(B_s)/\tau(B_d)$ を矛盾なく説明できるよう求めた。この Δ の値はボトムクォークとチャームクォークの質量の差 $m_b - m_c$ と解釈できる値となった。これは、弱い相互作用を通じてしか崩壊しないボトムクォークを1個含むハドロンが、主にチャームクォークを含む終状態に崩壊するという実験事実に基づくと、自然な結果であると考えられる。ただし、展開パラメータ Δ の値が $m_b - m_c$ となる物理的理由についてはまだ明確にはできていないので、現時点ではこれは仮説である。今後、今までに実験で測定されていないボトムクォークを含むハドロンの寿命を矛盾なく説明できるかどうか検証される必要がある。第5章では、まだ実験で発見されていない重粒子 Ω_b の中間子 B_d との寿命比の予言を、この仮説を用いて行った。

第4章では、寿命比 $\tau(\Lambda_b)/\tau(B_d)$ の問題の解決法としてこれまでに提案されている、全崩壊幅 $\Gamma(H_b \to X_f)$ または、ノンレプトニック崩壊についての崩壊幅 Γ_{NL} を

$$\Gamma \to \left(\frac{m_{H_b}}{m_b}\right)^5 \Gamma \tag{6.1}$$

とずらす、即ち崩壊幅のボトムクォークの質量の5乗 m_b^5 の因子をハドロンの質量の5乗 m_{H_b} に置き換えることを仮定する方法も紹介した。この仮定は、全崩壊幅 $\Gamma(H_b \to X_f)$ に $1/m_b$ オーダーの補正項を新たに導入することに対応すると考えられている。第5章では、この解決法と本論文での新たな解決法とは、寿命比 $\tau(\Omega_b)/\tau(B_d)$ の予言値が大幅に異なる

ことを示した。

本論文では触れなかったが、このボトムクォークを1個含むハドロンの寿命を求める定式化は、チャームクォークを1個含むハドロンにも適用できるとされている。したがって、チャームクォークを1個含むハドロンが D、D_s、Σ_c、Ω_c は既に実験で寿命が測定されているので、現状でも本論文で述べた寿命比 $\tau(\Lambda_b)/\tau(B_d)$ の問題の解決法を検証できるのではないかと考えるかもしれない。しかし、チャームクォークを1個含むハドロンの場合、Λ_{QCD}/m_c または $\Lambda_{QCD}/(m_c - m_s)$ がそれ程小さくないので、ボトムクォークの場合に比べ高次の補正項の寄与が大きくなってしまい、解決法を検証する場としては適さないと考えられる。

もし、実験によって重粒子 Ω_b が発見され寿命が測定されれば、いずれの解決法がより自然を記述するのに適しているのか判別がつくであろう。今後の実験が多いに期待される。

謝辞

松田正久先生、伊藤稔明先生には本論文の内容につき、ご助言をいただき心から感謝申し上げます。本論文を読んでいただきご助言をいただいた、北門新作先生、松岡武夫先生に心から感謝致します。

参考文献

[1] N. Isgur and M.B. Wise, Phys. Lett. **B232** (1989) 113; **B237** (1990) 527.

[2] M. Neubert, Phys. Rep. **245** (1994) 259.

[3] H. Inazawa and T. Morii, Phys. Lett. **247** (1990) 107;
T. Ito and S. Sawada, Int. J. Mod. Phys. **A10** (1995) 3143.

[4] T. Ito, 学位論文「重いクォークの有効理論とストレンジ・ハドロン」(1994).

[5] M. Kobayashi and T. Maskawa, Prog. Theor. Phys. **49** (1973) 652.

[6] M. Neubert, Phys. Lett. **B264** (1991) 455.

[7] N. Isgur and M.B. Wise, Phys. Rev. Lett. **66** (1991) 1130.

[8] K. Nakashima, T. Ito, Y. Matsui, S. Sawada and T.B. Suzuki,
Prog. Theor. Phys. **95** (1996) 599.

[9] Particle Data Group, Phys. Rev. **D54** (1996) 1.

[10] DELPHI Collaboration, P. Abreu et al., DELPHI 95-107 PHYS 542 (1995).

[11] A. Falk, Phys. Rev. Lett. **77** (1996) 223.

[12] M. Neubert and C.T. Sachrajda, Nucl. Phys. **B483** (1997) 339.

[13] J.L. Rosner, Phys. Lett. **B379** (1996) 267.

[14] P. Colangelo and F. De Fazio, Phys. Lett. **B387** (1996) 371.

[15] M.S. Baek, J. Lee, C. Liu and H.S. Song, hep-ph/9709386.

[16] For updated world averages of B hadron lifetimes, see J. Alcavaz et al.
(LEP B Lifetime Group), http://wwwcn.cern.ch/~claires/lepblife.html.

[17] H. Georgi, Phys. Lett. **B240** (1990) 447.

[18] T. Mannel, W. Roberts and Z. Ryzak, Nucl. Phys. **B368** (1992) 204.

[19] E. Jenkins, Phys. Rev. **D54** (1996) 4515 ; *ibid.* **D55** (1997) 10.

[20] I.I. Bigi, B. Blok, M. Shifman, N. Uraltsev, and A. Vainshtein, in *B Decays*,
edited by S. Stone, Second Edition (World Scientific, Singapore, 1994), p. 132.

[21] H.Y. Cheng, Phys. Rev. **D56** (1997) 2783.

[22] C.T. Sachrajda, Nucl. Instrum. Meth. **A384** (1996) 26.

[23] M.E. Peskin and D.V. Schroeder, "An Introduction to Quantum Field Theory"
(Addison Wesley, 1995).

[24] I.I. Bigi, N.G. Uraltsev and A.I. Vainshtein, Phys. Lett. **B293** (1992) 430.

[25] B. Blok and M. Shifman, Nucl. Phys. **B389** (1993) 534; *ibid.* **B399** (1993) 441, 459.

[26] G. Altarelli, G. Martinelli, S. Petrarca, and F. Rapuano, Phys. Lett.**B382** (1996) 409;
G. Martinelli, Nucl. Instrum. Meth. **A384** (1996) 241.

[27] T. Ito and Y. Matsui, Prog. Theor. Phys. **96** (1996) 659.