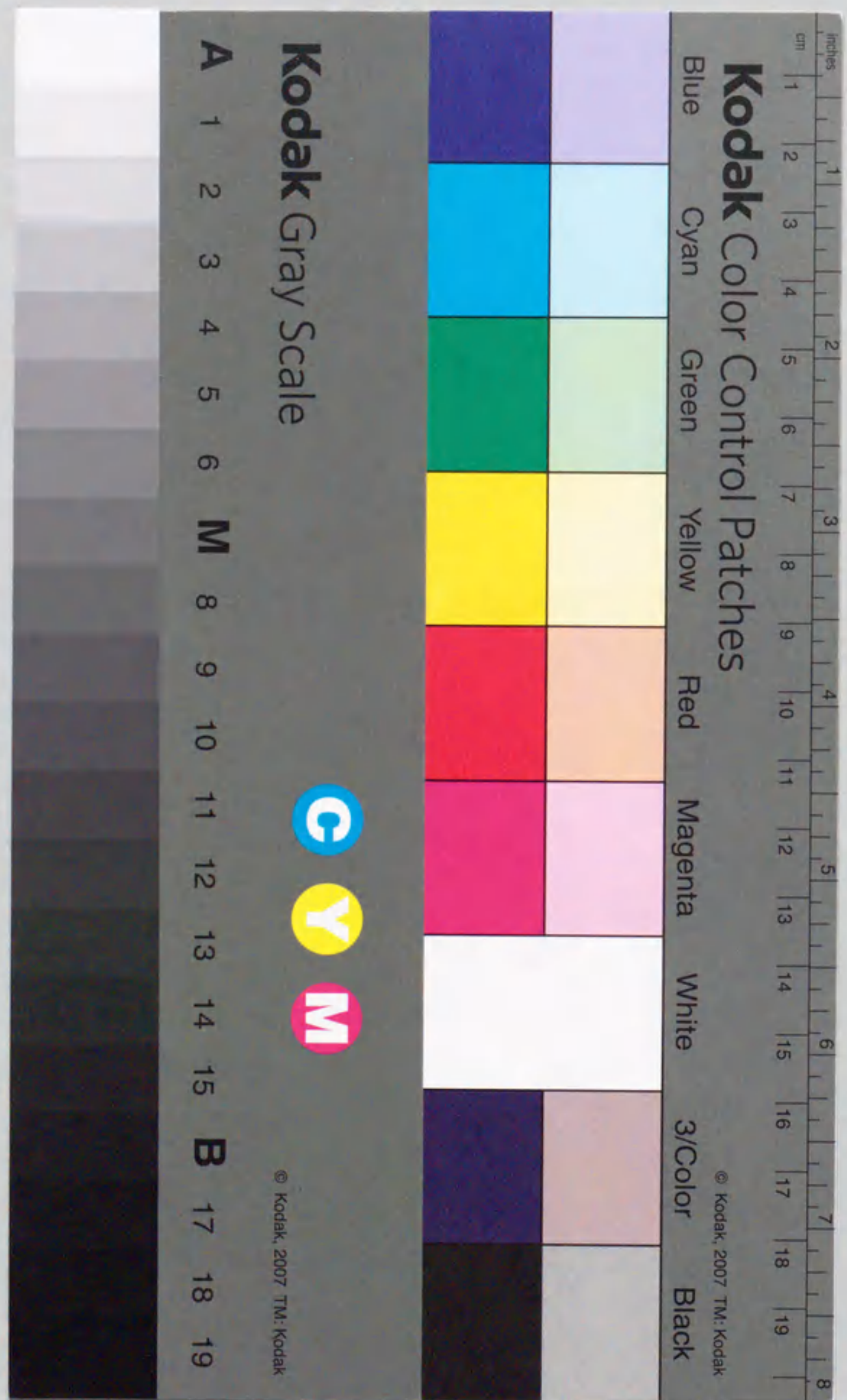


報告番号 乙第 5438 号

材料および幾何学的非線形性を伴う構造物の
定常解と動的非線形挙動に関する研究

萩原伸幸



材料および幾何学的非線形性を伴う構造物の
定常解と動的非線形挙動に関する研究

萩原伸幸

目次

1	序論	1
1.1	研究の背景	1
1.2	非線形振動問題の概要	3
1.3	既往の研究	6
1.3.1	弾性系の非線形振動に関する研究	6
1.3.2	履歴系の非線形振動に関する研究	9
1.3.3	構造物の動的崩壊挙動に関する研究	13
1.4	研究の目的と手法の概要	14
1.5	論文の構成	16
2	非線形1質点系モデルの定常解と安定性	17
2.1	はじめに	17
2.2	解析モデルの力学特性と運動方程式の導出	17
2.3	定常振動問題としての定式化	20
2.3.1	弾塑性ばねの等価線形化および基礎式の導出	20
2.3.2	数値解析の手順	22
2.4	定常解の安定性	23
2.4.1	微小攪乱応答の支配方程式	23
2.4.2	塑性化以後の解の安定判別の考え方	25
2.5	数値解析	27
2.5.1	定常振動解析	27
2.5.2	時刻歴応答解析	31
2.6	まとめ	42
3	屈服型の座屈性状を有する平面骨組構造物の振動性状	43
3.1	はじめに	43
3.2	有限要素法を用いた定常振動解析手法	43
3.2.1	応力-歪関係の等価線形化	44

3.2.2	平面梁要素の定式化	45
3.2.3	定常振動の移行過程と解曲線	49
3.3	数値解析	53
3.3.1	解析モデル	53
3.3.2	定常振動解析	54
3.3.3	時刻歴応答解析	60
3.4	まとめ	75
4	ドーム状の空間骨組構造物の振動性状	77
4.1	はじめに	77
4.2	定常振動解析における3次元梁要素の定式化	77
4.3	数値解析	81
4.3.1	解析モデル	81
4.3.2	固有値解析	82
4.3.3	定常振動解析	83
4.3.4	時刻歴応答解析	94
4.4	まとめ	105
5	結論	107
5.1	本研究で得られた成果のまとめ	107
5.2	今後の課題	109
	参考文献	111
	発表論文リスト	115
	謝辞	121
A	剛性比 k の値を変えた場合の非線形1質点系モデルの荷重-変位曲線	123
B	2.3.1の非線形代数方程式に対する修正方程式	125
C	Routh-Hurwitz の定理	127
D	等価粘性減衰係数の算出方法の妥当性について	129
E	時刻歴応答解析について	131
E.1	非線形1質点系モデルの時刻歴応答解析	131
E.2	有限要素法による骨組構造物の時刻歴応答解析	132

第1章 序論

第1章

序論

1.1 研究の背景

構造物の振る舞いを知り、その特性を体系的に理解することは、これを世に送り出す技術者に課せられた使命である。その第一ステップとして種々の近似的な取り扱いの下に導かれる線形理論は、現象の基本的性質を単純な法則の下に組織立てたものであり、工学はもとより、自然科学一般において重要な役割を演じている。

非線形問題は、そうした体系から外れるあらゆる事象を包括する問題であり、文字どおり「線形ではない」もの全てを意味するのであるから、その対象とする範囲は限りなく広い。そして一般に複雑であり、その多くは統一的な議論をほとんど寄せ付けない。

技術革新の歴史は、常により複雑な問題を解くことを我々に要求し、これはまた、あらゆる分野において、非線形問題との戦いでもあった。かつての研究者は、線形理論から逸脱する様々な現象を具に見つめ、そしてこれを表現すべく、より高度な理論の構築に努めた。しかしながら、線形問題に比べ、簡単なものとはかく、解を得ることが事実上難しいものがほとんどであり、ましてや実的な問題を検討するには程遠いものであった。

こうした困難を解決したのが、近年目覚ましい発達を遂げた計算機と、これを用いた数値解析技術であり、1970年代以降の研究の中で、計算機利用を前提とした非線形解析の位置付けは、確固たる地位を確立するに至った。そして現在では、数値解析理論の成熟とこれに伴う汎用コードの充実に加え、計算機の高性能化が個人使用レベルのパーソナルコンピュータにまで進んだことにより、工学において生ずる種々の問題を、一般の技術者が独自に検討できる環境が整いつつある。

建築や土木の分野においても、このことは例外ではない。これらの対象とする大規模な構造物の設計において、その妥当性の最終的な確認を行うための数値解析による実挙動の予測が、実用レベルで十分可能となったため、従来の設計手法の適用や単純なモデル化が難しい問題は比較的容易に克服されるようになり、多くの設計者が、自由で複雑な構造形態や、新しい技術の導入などを積極的に行えるようになった。

ところが、現象の忠実な再現を目指したこれらの数値解析は、実際には観察することが難しい

情報を我々に提示してくれることもあるが、問題の分析手法としての観点から見れば、そこから導き出される結果の多くは、実験から得られるそれと、性質の上で大きく変わるものではない。従って、静的な問題であればまだしも、動的な問題となると、与えられた条件と求められた結果との因果関係を大域的に考察するには相応の工夫が必要であり、パラメータスタディを数多くこなしながら、効果的な分析手法を以て対処することが要求される。特に固有振動数や振動モードに代表される線形振動系としての特性値のみでは、挙動の全体像を明確に論じ得ない非線形振動問題において、この欠点は顕著となる。

これに対し非線形振動論は、線形振動では見られないような非線形振動特有の様々な現象の理論的な解釈を示し、我々がその力学的概念を理解するための拠り所を与えてくれる。しかしながら、解析的なアプローチが望み得ないような大規模かつ複雑な問題に対しての適用には限界がある。

構造工学の分野で非線形振動問題が注目されるようになった契機の一つに、航空工学において、高速で飛行する航空機に生ずる翼やパネルの非線形応答が注目されるようになった事が挙げられる。このような問題の対象となる構造要素は、薄肉軽量の部材であることから、幾何学的非線形性への配慮が必要とされ、弾性振動における構造安定性が主な焦点となっている。

一方、建築や土木で取り扱われる構造物に関しては、弾塑性振動に代表されるような材料非線形性に起因する非線形振動が一般的であり、その性質は構造物の終局的な耐震設計に関わる重要な事項として広く認識されている。このような状況の中で、航空・機械工学に見られるような弾性非線形振動が直接論ぜられる機会は少ないが、大スパンの屋根架構や大規模な橋梁などの一部には、弾性範囲内においても幾何学的非線形性の影響が無視し得ないものも存在し、このような構造物の振動性状を把握する上で、しばしば検討されている。

いずれの問題も、それぞれ単独の非線形性を対象とした場合については、古くから解析的に議論されているため、基礎的な事項は比較的整理されている。しかしながら、両者を結びつけた問題に対して同様の議論を展開することは難しく、従来の数値解析も、これに代わる役割を十分に果たしていない。実際の構造物の設計においては応答の定量的な把握が重要視されるが、未知の非線形系は容易には計り知れない特有の現象を内在するものであり、そこに潜む危険因子を見出すこともまた、応答の大小を議論する以上に大切である。幾何学的非線形性が支配的となる構造物が、塑性化に至る可能性をも有しているならば、それらを考慮した検討を行うのが自然であるとともに、動的な外乱に対する抵抗機構を把握するためにも、その非線形振動の基本特性を十分に把握しておくことが望まれる。

そしてこれを解決するには、純粋な理論解析でもなく、また現象の直接的なシミュレーションでもない、別のアプローチが必要となる。

1.2 非線形振動問題の概要

振動系に何らかの非線形性が介在するとき、そこには線形振動論では予測できない種々の特異な現象が現れる。そこで、これらの現象の発生機構を探り、非線形振動特有の性質を理解することが重要となる。

構造物に生起する非線形振動の要因として、主なものを挙げると次のようになる。

1. 大変形
2. 材料特性
3. クーロン摩擦
4. がた・あそび

1は、構造物の形状変化が微小でなくなり、これに付随する内力の釣り合いや外力の条件に対する幾何学的な効果が無視し得ないほど大きくなることであり、いわゆる幾何学的非線形問題として論じられるものを指す。一般には柔軟で薄肉の構造部材、すなわち細長い梁、薄い平板、ケーブルなど、その初期の形状に比較して、たわみの傾斜角が大きくなるものを取り扱う際に問題となり、通常、歪の2次項までの有限変形を考慮した取り扱いにより、問題を支配する非線形運動方程式が定式化される。他の要因による非線形振動に比べ、解析的な取り扱いが容易であり、その研究成果も多岐にわたる。

2は、構造物を構成する材料の応力と歪の関係が線形でない場合であり、塑性の問題はその一例となる。非線形弾性、すなわち応力と歪が常に1対1で対応するが、それらが比例関係にない場合もこれに含まれる。前者は非可逆性を有するが、後者は数学的に陽に表現されるので、1の問題と同様に取り扱われることも多い。

3は、固体の接触面に働く摩擦力によるものである。解析上は接触圧に比例する力として取り扱われ、その比例定数となる摩擦係数は、一般には振動速度に無関係な定数とされる。滑りを伴う構造要素に発生し、振動系としては2と同様に、履歴特性が問題となる。後述する自励振動に関わる要因の一つでもある。

4は、接合部あるいは可動部のゆるみ、隙間などが原因となるもので、広義には物体の接触・非接触あるいは衝突などの現象を含む。

これらの要因によって生ずる非線形振動の特徴を、振動現象の一般的な分類に基づいて示すと、次のようになる。

自由振動

- 振動数の振幅依存性

強制振動

- 振幅の多価性
- 振幅の跳躍現象
- 振幅の履歴現象
- 高調波共振
- 分数調波共振
- カオス

係数励振振動

- 単純共振
- 結合共振

自励振動

- 弛張振動

非線形振動系においては、固有振動数は一定ではなく、振幅に依存して変化する。自由振動において観察されるこの現象は、背骨曲線 (backbone curve) と呼ばれる固有振動数と振幅の関係を示す曲線によって表現される。この背骨曲線は系の復元力特性と密接に関連しており、図 1.1 に示すように、変位の増大とともに剛性が増大するものをハードばね特性、逆に剛性が減少するものをソフトばね特性と呼んでいるが、前者の場合には背骨曲線は右に傾斜する曲線となり、後者の場合には左に傾斜する曲線となる (図 1.2, 一点鎖線)。背骨曲線は非線形振動の自由振動解を示すものであるが、非減衰自由振動を記述する非線形運動方程式は比較的容易に積分可能であり、幾つかの例においてはその厳密解を得ることができる [41],[42]。

振動数の振幅依存性は、強制振動の解の性質にも反映され、外力の振動数と振幅の関係を表す共振曲線 (resonance curve) は、上記の背骨曲線の変化に対応して左右に傾斜したものとなる。このことにより、強制振動においては1つの加振振動数に対して複数の応答が対応することになり、線形振動系で見られるような解の唯一性は成立しなくなる。しかしながら、全ての解が実現可能な解であるわけではなく、上記の共振曲線に対応する解には安定な解と不安定な解が存在し、実際に現れる応答は安定な解で示される応答のみということになる。この安定な解から別の安定な解に至る過程において振幅の跳躍現象が生じたり、加振振動数の上昇、下降によって、応答の経路が変わる履歴現象が生じたりする (図 1.2, 破線矢印)。

次式で示される Duffing の方程式は、以上のような特性を持つ非線形振動系の運動方程式の典型例である。

$$\ddot{x} + 2h\omega\dot{x} + \omega^2x + \gamma x^3 = \alpha \cos pt \quad (1.1)$$

上式において、 $\gamma > 0$ のときがハードばね特性、 $\gamma < 0$ のときがソフトばね特性の場合に対応する。

上記に述べたような事柄は、系の共振領域において観察されるものであるが、非線形系においては、外力の振動数が系の固有振動数に近い場合だけではなく、その有理数倍にほぼ等しくなるとときに大きな振動が発生することがある。線形振動系と同様の前者の共振を、特に主共振 (primary resonance) と呼ぶが、これに対して非線形振動系特有の後者の共振を、2次共振 (secondary resonance) と

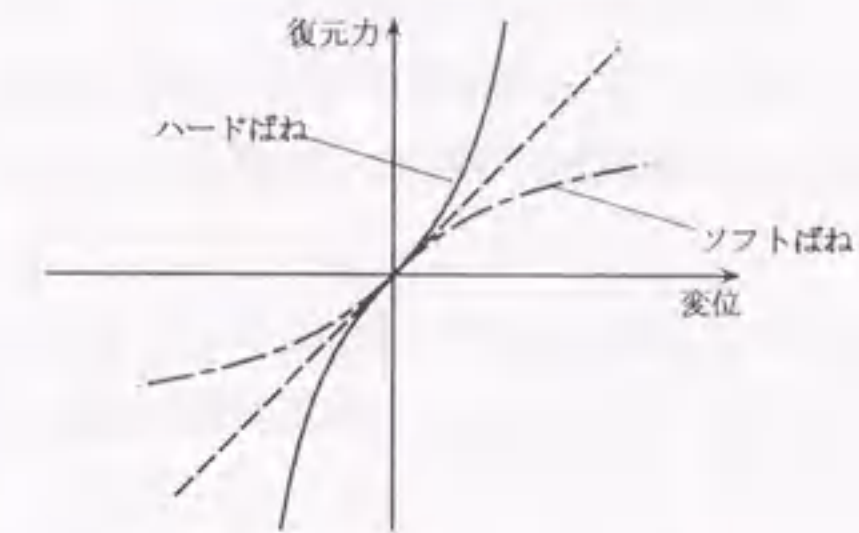


図 1.1: 非線形ばねの復元力特性

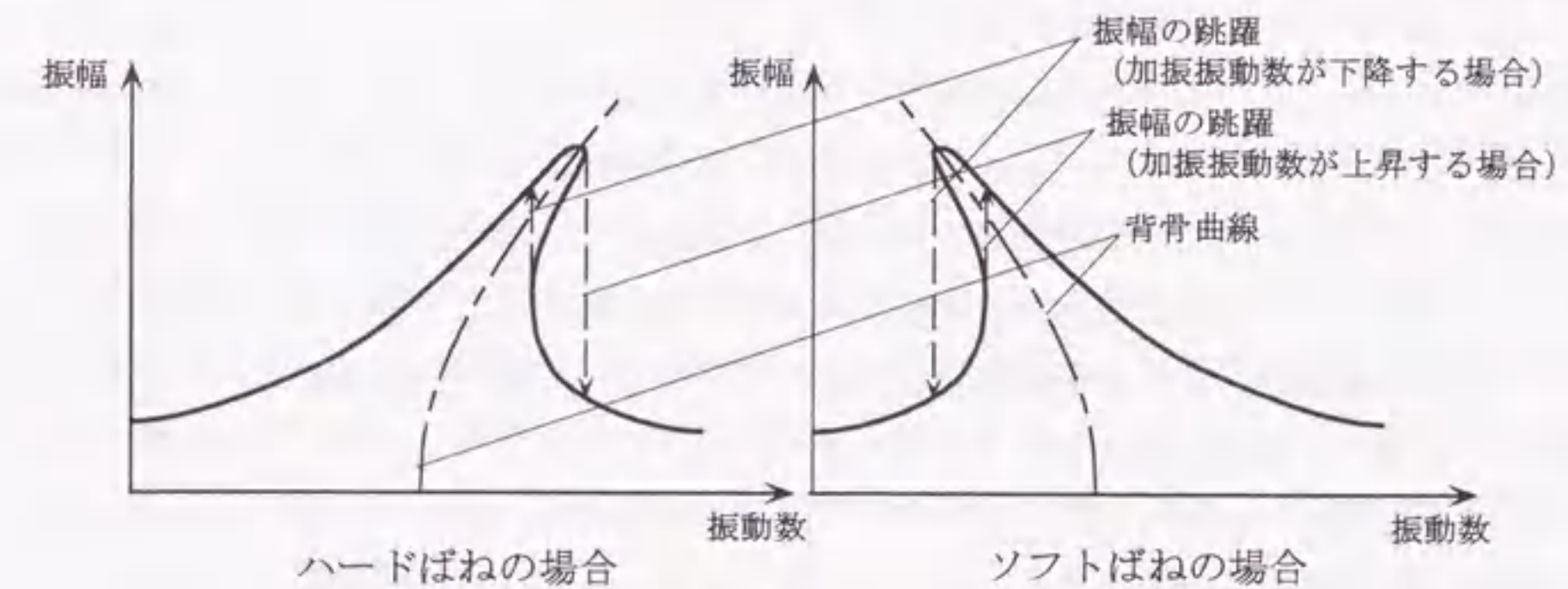


図 1.2: 共振曲線・背骨曲線

呼ぶ。このうち、外力の振動数が系の固有振動数の $1/n$ 倍となる場合に発生するものが高調波共振 (superharmonic resonance), n 倍となる場合に発生するものが分数調波共振 (subharmonic resonance) である。いずれも、非線形運動方程式の中の非線形項を介して、外力と等しい振動数を持つ基本調波の応答に対して付随もしくは分岐して現れる現象である。

係数励振振動は、強制振動とは異なり、振動系が変位を持つ向きには外力が作用せず、質量、減衰係数、剛性の大きさが時間とともに変わることによって生ずる振動である。これらの間接的な作用が、ある一定の条件を満たしたとき、振動系は共振する。この問題を論ずる際に扱われる運動方程式は、係数が時間の関数で表されるものとなるが、その中でも次に示す Mathieu-Hill の方程式がよく知られている。

Mathieu の方程式:

$$\ddot{x} + (\delta + \varepsilon \cos pt)x = 0 \quad (1.2)$$

Hill の方程式:

$$\ddot{x} + \Phi(t)x = 0 \quad (1.3)$$

ここに、 $\Phi(t)$ は周期 T の周期関数である。

Hill の方程式は、Mathieu の方程式をより一般化したものである。周期軸力を受ける柱のたわみ振動、電車の架線に対するペンタグラフの振動などが、上記の方程式で表される代表的な問題となる。また、非線形振動系の定常解の安定性を論ずる際に、このような問題に帰着させて取り扱うことも多い。

高調波共振、分数調波共振、係数励振振動は、構造物の不安定挙動や、思わぬ事故を引き起こす要因と成り得る問題であり、非線形振動問題の中でも、特に重大な関心をもって取り組まれてきた。

自励振動とは、外部からの励振力の作用が無くとも振動が発生する現象を指し、風による橋梁の振動、超音速における航空機のパネル、流体の流れる管、回転機械に用いられる電磁クラッチなどに現れる。多くは騒音の原因となるため、主に機械工学において精力的に取り組まれている。

以上述べたように、非線形振動系の応答は与えられた条件に対応して、様々な様相を呈するものであり、系のパラメータを変化させたときに、突然解が現れたり、消滅したり、あるいはその性質を変化させることもしばしば起きる。これらに関連して、近年では、カオスと呼ばれる外力波形とは全く異なる不規則な振動が生じる現象が注目されている。このような通常の定常振動とは大きく異なる振動が、様々な非線形振動系に存在することが報告されており、昨今の非線形振動問題の大きなテーマの一つにもなっている。

1.3 既往の研究

構造物の動的な非線形挙動を取り扱った研究は多岐に及び、その対象とするモデルも外乱の種類も様々である。

ここでは、これまでに行われた構造物の動的な非線形挙動に関連する研究の内容として、これらの中から、非線形振動の性質や解析手法について議論した研究と、動的崩壊挙動の数値シミュレーションを行った研究を取り上げ、さらに前者については、弾性系を対象としたものと、履歴系を対象としたものに分類して、その概要を述べる。

1.3.1 弾性系の非線形振動に関する研究

弾性系の非線形振動や動的安定問題に関する研究は、1940年前後の研究に負うところが大きく、先に述べたように、航空工学や機械工学の分野で培われた黎明期の成果が、動的安定問題の研究を中心として Bolotin の著書 [43] に結実するに至って、この種の研究の礎として後世に多大なる示唆を投げかけるとともに、以後多くの研究者の興味を惹き付けてきた。対象となる具体的な例題としては、細長い柱、梁のような基本的な構造要素の挙動を取り扱ったものが多い。

Burgreen and Brooklyn [1] は、両端がピン支持された柱の横たわみによる非線形振動の運動方程式を示し、実験による検証を交えて、その自由振動問題における性質を議論した。この運動方程式は、柱のたわみ形を半波長の正弦波で仮定して得られ、1自由度の Duffing の方程式として与えられる。楢岡関数で表された解析解に基づき、柱に導入された初期軸力の影響や、振幅が大

きくなった場合に現れる振動数の振幅依存性について述べている。

Duffing の方程式は3次の非線形項を有する微分方程式であるが、この式を支配方程式に持つ振動現象には、条件によっては、基本振動数の3倍の振動数を持つ高調波振動が、3次の非線形項による付随成分として強く引き起こされることが知られている。

Sethna [2] は2自由度および3自由度の非線形ばねから成る質点系モデルを仮定して、3次項で連成する多自由度の Duffing の方程式を導き、摂動法による解析を行った。その中で、1次と2次の固有振動数比を変えた検討を行っており、2次の固有振動数が1次の固有振動数の3倍となる場合に、低振動数側の共振域において3倍の高調波振動が生起する現象を示している。

Iwan [3] は、対象となる非線形運動方程式に対し、適当なパラメータを導入した非線形運動方程式を仮定し、最小2乗法によってこの非線形方程式を本来の非線形方程式に近似させる方法を提案し、減衰を有する Duffing の方程式の定常解を求めた。これにより、解を三角関数で仮定する従来の方法に比べ、第1近似において精度が改善されることを示している。この方法は、対象とする問題に対して等価な系を仮定するという点において、等価線形化法と類似するが、元の非線形運動方程式を、扱い易い他の非線形運動方程式で近似するという点が大きく異なる。

一方、Ho, Scott and Easley [4] は多自由度の Duffing の方程式を基礎式に持つ構造物の非線形振動の具体例として、動的な面内横荷重を受ける梁の振動を取り上げ、そこに観察される3次元的な挙動を取り扱った。これは、面内に周期的な荷重を受ける梁が面内での振動のみならず、面外へのたわみを伴う振動へ移行し、これにより材軸がその直交する面において回転運動を起こす現象である。この問題は、面内および面外の非線形運動方程式に現れる3次の非線形項で、両者の連成が生ずることによる。規準座標で示された非線形運動方程式において、面外の振動を表す規準座標が有意な解、すなわち恒等的に0でない解を有する条件を示すことができる。さらにこれらの安定性の議論は、微小な攪乱成分による Mathieu-Hill の方程式に帰着される。以上の理論展開に基づき Ho らは、面内および面外の振動の共振曲線とこれらの安定領域を示し、上記の現象の発生機構を考察している。

Mathieu-Hill や Duffing の方程式に帰着される問題は、非線形振動問題の中でも極めて大きな位置を占めている。これは、例えば Mathieu-Hill の方程式が電磁波の伝播問題、電気のパラメトリック励振理論、天体力学など、広範囲な分野で取り扱われていることが背景となっている。

ところが構造工学の問題においては、これら2つの方程式とは異なる、2次の非線形項を有する非線形運動方程式が導かれることも多い。この2次の非線形項を有する非線形運動方程式は、復元力特性が対称性を持たない系、すなわち、初期たわみを有する梁や平板、あるいはシェル、アーチの振動の他、オートパラメトリック系におけるパラメータ励振作用や内部共振を論ずる際などに取り扱われる。

Sethna [5] は、多自由度系の非線形項の連成によって引き起こされる内部共振や振幅変調の現象に着目し、2次の非線形項までを考慮した非線形運動方程式を取り扱った。彼は、この基礎式で支配される振動問題を2自由度系を例として解析し、2次の非線形項を介して内部共振を生ずる2つの規準座標の振動を、自律系と非自律系、および外部励振の有無によって分類し、定常解

の安定性を検討している。

Grossman, Koplik and Yu [6] は偏平球殻の軸対称振動を取り扱い、振幅の増大に伴って現れる非線形性が、ライズや支持条件によってどのような影響を受けるかを検討した。偏平球殻のライズが0となる時、すなわち平板となる時は、基礎式は2次の非線形項を持たず、Duffing の方程式で表されるものとなるが、彼らは主共振領域の共振曲線を示し、ライズを有することによって、その振動性状が平板に見られるハードニング型とは異なるソフトニング型の性質を有するようになることに着目した議論を行っている。

皆川は、非線形運動方程式の定常解問題に関する一連の論文[7]~[10]の中で、既往の成果を基礎式の分類に基づいてレビューし、2次、3次の非線形項を有する非線形運動方程式が、前述のMathieu-Hill の方程式やDuffing の方程式を包括し、この式から導かれる解の性質を議論することにより、全ての問題が統一的に扱えることを述べた。そして、線形項において直交化された規準座標で表される上記の非線形方程式を対象に、各規準座標の性質や、調和バランス法を適用して導かれる非線形代数方程式の未知数の性質を議論し、これを分類した。これにより、非線形振動における主共振、高調波共振、分数調波共振、パラメータ励振の各現象を支配する数理構造を、規準座標、振動成分、および特異点の分類によって統一的に整理している。加えて、sine 形の偏平アーチの問題において誘導された2次、3次の非線形項を含む非線形運動方程式を具体例として数値解析を行い、この系に生じる高調波共振、分数調波共振を、先の分類に従って系統立てて示すとともに、特に非線形項の連成によって恒等的に0であることのできる規準座標の振動が分岐して生じる問題に着目し、従来近似的にMathieu-Hill の方程式へ導かれて解析されていたこの種の振動を、非線形応答の厳密な考慮の下で取り扱い、両者から得られる結果の差異を述べている。

Takahashi and Konishi [11],[12] はサグを有するケーブルに生じる非線形振動を取り扱ったが、この場合も、アーチの問題と同様に、サグによるケーブルの湾曲した形状によって、非線形運動方程式に2次の非線形項が現れる。また、ケーブルは面内と面外の剛性がほぼ等しいという特徴を有するが、サグの存在により、両者の固有振動数の相対的な関係に変化が生ずる。彼らは、Galerkin 法によって導かれた規準座標に関する非線形運動方程式に調和バランス法を適用し、基本調波に加え、2次、3次の非線形項に付随して生じる定数項と2倍、3倍の高調波を仮定調波に含めた解析を行っている。これにより、ケーブルのサグ・スパン比、支点間の高低差をパラメータとして、面内振動と面外振動の連成挙動に着目した議論を行っている。面内振動によって生じる面外振動は分岐型に属するものであり、一般には3次の非線形項を省略して係数励振振動として取り扱われる例が多い。この解は、Bolotin によって示されたように、指数関数を乗じたフーリエ級数によって表現される。Takahashi らの研究もこれに準ずるものであるが、上記の手続きによって導かれる同次方程式を、非対称行列の固有値問題に変換し、計算機による数値解法を使用して、単純共振の主・副不安定領域、結合共振の主不安定領域に加え、結合共振の副不安定領域までを求めたことが特徴となる。面外振動の非線形運動方程式には、サグを有する面内振動の非線形運動方程式に現れる2次の非線形項が存在しないため、一般にその振動性状はハード

ニング型のものとなるが、Takahashi らは自由振動の解析により、面内振動の固有振動数が面外振動の固有振動数の2倍となる付近において、これがソフトニング型に転ずる領域が存在することを明らかにしている。また面内強制振動の解析により、単純共振と結合共振によって不安定な面外振動の生じる領域が示され、その領域は単純共振の方が結合共振のそれよりも大きく、さらに面内と面外の対応する振動モードが類似しているときにそれが最も大きくなること、結合共振においては加振振動数が2個の固有振動数の和の付近で生じる、和形の結合共振のみが現れることなどを明らかにしている。

Lau and Cheung [13] は、従来の調和バランス法を自由度の大きい問題に適用したり、仮定調波に採用する項を増やしたりする場合に、定式化が煩雑となる欠点を解消するため、増分調和バランス法 (incremental harmonic balance method) と呼ばれる方法を提案した。計算機利用を前提とした静的解析や動的解析において、非線形問題を増分形式で定式化することは、実際の数値計算手続きの容易さ以上に多くの利点を有することから、一般に採用されている方法であるが、彼らは非線形定常振動やその安定問題における解析の分野において、この種の方法がほとんど適用されていないことに着目し、計算過程における前ステップの状態を既知として、通常非線形解析の予測子計算に用いられるような、左辺に仮定調波の係数の増分を、右辺に残差修正項と基本振動数の増分を有する線形方程式を導出している。例題として平板および偏平シェル自由振動問題の数値解析を行い、楕円積分を用いて解析的な方法で計算された既往の結果と比較し、同手法の有用性を示している。

田村・松崎 [14] は、初期値問題の反復計算により、他端の条件を満たす2点境界値問題の解法としてのシューティング法 [5] に着目し、周期性の条件を満たす解としての定常解を高精度で求める直接積分法のアルゴリズムを提案した。これは、仮定された初期値に対する解の計算と、Newton-Raphson 法で初期値を修正するために必要な計算式の構築に、直接積分法を使用するもので、解に含まれる過渡応答を効率的に除去する手続きを組み込んだ数値シミュレーションと見なすこともできる手法である。田村らは、この手法を用いて、Duffing 系や2次曲線ばね系の強制振動や自励系に対する定常解を計算し、その有用性を示している。

1.3.2 履歴系の非線形振動に関する研究

材料自身が持つ非線形性や、クーロン摩擦などによって、荷重-変位曲線が履歴特性を呈する場合の非線形振動問題は、解析的な表現が容易な弾性系の問題と比べて取り扱いは難しいが、様々な工夫によって、その特性の分析が試みられてきた。

その初期の研究の中で Jacobsen [15] は、外乱を受ける弾塑性系の応答に対し、履歴減衰と同等の効果をもたらす等価粘性減衰の概念を取り入れた。履歴減衰と粘性減衰はその機構が異なるとはいえ、この物理的解釈は弾塑性系の応答を工学的な観点から見る上で都合がよく、構造物の履歴による減衰効果を線形振動系とのアナロジーから捉える指標として有効であった。この等価粘性減衰は後に、動的解析における実用的な近似手法への適用が図られるとともに、その妥当性に関して多くの議論を生んだ [47]。

これと時をほぼ同じくして Caughey [16] が調和外力の下での bilinear 型復元力特性を持つ1質点系の定常解を Krylov-Bogoljubov 法 (パラメータ徐変化法 (method of slowly varying parameters)) を用いて求め、その応答特性を共振曲線で示した。そしてこれが外力の振動数に対して一価関数となるため、非線形振動の特徴とされる振幅の跳躍現象が起きないこと、ならびに外力がある程度大きくなると、無減衰の線形系と同じように共振振幅に上限が無くなる (unbounded resonance) ことを明らかにした。その成果は、それまで弾性系に限られていた議論を履歴系の問題に拡張した先駆的かつ有益な内容であり、構造物の弾塑性応答の持つ性質を明確に示すとともに、その後の研究の展望を開いた。

Jennings [17] は、Caughey が採用した bilinear 型復元力特性よりも、実際の構造物に近い弾塑性挙動のモデル化を目的として、Ramberg-Osgood 型復元力特性による履歴挙動の表現を提案し、これを持つ1質点系の定常振動の性質を検討した。この復元力モデルは、パラメータの値により、線形に近いモデルから完全弾塑性型に近いモデルまでを自在に表現することができるが、彼はエネルギーの平衡に基づく方法によって、共振振幅や等価粘性減衰定数の性質に関する分析を行っている他、Krylov-Bogoljubov 法によって定常解を求め、幾つかの代表的なパラメータに対応する共振曲線を示している。これにより、復元力特性の違いによって生ずる差異を明らかにしている他、Caughey によって示された共振振幅の上限が無くなる現象は、Ramberg-Osgood 型によって滑らかな復元力特性を仮定した場合には現れないことを述べている。

その後 Iwan が、Caughey の方法を多質点系に応用し議論の拡張を試みた。彼はまず、bilinear 型復元力特性を持つ2質点系を対象に検討し、その共振曲線から、1次の固有振動数付近の応答については、概ね1質点系と共通の特徴を有するものの、2次の固有振動数付近の応答については、典型的なソフトニング型とは異なる特性を持つことを明らかにした [18]。また、復元力特性の表現に工夫を凝らし、降伏点の異なる無数の完全弾塑性型復元力特性で表されるばねを並列に分布させたモデルで、現実の材料の特性に近い滑らかな復元力特性を簡便に表現する方法を提案し、これを用いて3質点系の定常解を求めた [20]。この研究において、復元力特性の滑らかさを調節するパラメータを変えた解析を行い、この相違が応答に及ぼす影響を明らかにしている他、先の2自由度系を対象とした分析においても注目された高次側の応答に見られる特異性が、ここで検討された3質点系モデルにも同様に現れることを示している。

さらに Iwan は、それまで検討されてきた bilinear 型や Ramberg-Osgood 型などの復元力特性に示される履歴減衰が比較的大きいことを指摘し、スリップ型に類似の復元力特性 (載荷時や除荷時の第2折れ線に勾配を持つもので、論文では double bilinear hysteretic model と記されている) を持つ1質点系の定常解を求め、履歴減衰が小さい場合に、どのような違いがもたらされるのかを調べた [19]。その結果から、共振曲線に振幅が多価となる部分が現れ、そのうちの1つが不安定解となることや、これに対応して、弾性系の非線形振動と同じような振幅の跳躍現象が現れることなど、従来の履歴系では見られなかった性質が示されることを明らかにしている。

DebChaudhury [22] は、等価線形化法を用いて、完全弾塑性型を始めとする3種類の bilinear 型に Ramberg-Osgood 型を加えた、計4種類の復元力特性を持つ1質点系を対象に、共振曲線や

共振振動数の簡略な表現を解析的に導き、既往の研究や数値シミュレーションとの比較検討を行うとともに、復元力特性を既定する各種パラメータや外力の大きさの変化に伴う、共振振動数や等価粘性減衰定数の変化を考察した。彼はこれらの検討を通じて、Caughey によって示された履歴系の共振曲線における振幅の一価性は常に成立するわけではなく、bilinear 型復元力特性を持つ場合には、比較的振幅の小さい領域において解が多価となる部分が現れることを指摘している。

bilinear 型のように区分線形化された復元力特性を持つ場合には、各々の区間で定式化される運動方程式の解を、境界における連続性と周期性を考慮して解くことにより、厳密な定常解を求めることができる。Masri [21] は、粘性減衰を有する bilinear 型1質点系の厳密解をこのような方法で求め、履歴系の応答に及ぼされる付加的な粘性減衰の影響を論じた。この付加減衰に関する減衰定数を、弾性領域と塑性領域で異なるものとして定義し、これらの値を変えたパラメータスタディの結果から、弾性領域における減衰よりも、塑性領域における減衰のほうが応答のピークに与える影響が顕著であることを結論として述べている。

完全弾塑性型の復元力特性は、履歴系のあらゆる復元力特性のモデルの中でも最も単純なものに位置付けられる。特に、応答を弾性領域と塑性領域に分けて考えれば、塑性領域の復元力の大きさは変位によらず一定であり、弾性領域の復元力は相対変位のみ依存するので、それぞれの領域に対応する解の性質を議論する際に、絶対変位は本質的な意味を持たない。従って、外力が周期的である場合には、各領域の始点と終点における境界条件を考慮すれば、外力と変位の位相差のみが応答の性質に関与することとなり、変位などの直接的な情報に頼ることなく、解の性質を論ずることが可能となる。Miller and Butler [23] はこのことに着目し、調和外力を受ける完全弾塑性型1質点系の応答について、運動方程式の理論解に基づく厳密な分析を行った。彼らは、弾性領域の始点から塑性領域の終点に至るまでの応答の半周期分に相当する通過時間を、境界における速度の条件や連続性を考慮して算出することにより、外力と変位の位相差の半周期ごとの変化を表す写像関数を得て、その幾何学的表現から応答の性質を分類している。これによって、外力の振動数が系の固有振動数の奇数分の1となる時、応答が不規則な振動を示す場合があること、そしてこの結果、外力が比較的大きい場合において、低振動数領域の共振曲線に激しい凹凸が現れることを明らかにしている (これは先の DebChaudhury の数値シミュレーション結果においても示されていたが、彼はこのことについては何も言及していない)。

Badrakhan [24] は、復元力特性を与える履歴関数を非履歴部分と履歴部分に分離して表現したときの非履歴部分に対応する曲線を、多項式近似することによって定常解を得る方法を提案し、bilinear 型と Davidenkov 型の2種類の復元力特性を持つ1質点系にこれを適用した。この方法によれば、得られる運動方程式は、Duffing の方程式の形式となる。このように問題を Duffing の方程式に置き換えて議論することは、同方程式が非線形振動の研究対象として古くから数多く取り上げられ、その性質もよく知られていることや、高調波共振および分数調波共振の検討を容易にするなど利点が多い。Badrakhan は、このことに着目して、主共振領域の応答に加え、高調波共振および分数調波共振についても分析するとともに、それらの安定性を検討している。その結果から、主共振には不安定領域が存在するが、僅かな付加減衰の効果によってそれは消失してしま

うこと, bilinear 型復元力特性の場合には分数調波共振は存在せず, 高調波共振のみが存在することなどを明らかにしている。

Capecchi [25],[26] は, 履歴系の運動方程式を, 状態方程式による陽な形に記述し, これにFFTの計算技法を採り入れた調和バランス法を適用して, 高次の調波まで考慮した定常解を求めた。この状態方程式は, 変位, 速度に関する通常の正規型の微分方程式に, 履歴関数を制御する式と, 劣化性状などの履歴の変化を表すための内部変数を制御する式を加えたものである。完全弾塑性型の場合には, 履歴関数を制御する式の右辺には, ステップ関数による記述が用いられるが, Capecchi は, これを指数関数を用いた滑らかな関数で近似している。そして, この関数に含まれるパラメータなどの設定を変えて, 完全弾塑性型に近い復元力特性や劣化型の復元力特性を表し, これらを持つ振動系の解析を行っている。さらに, 定常解からの撓乱に関する微分方程式の直接積分の結果から, Floquet の特性指数を求め, その安定性を調べている。数値解析結果より, Miller らによって指摘された共振曲線の低振動数領域における凹凸現象が, 高調波成分の励起に関係して起こることを分析している他, 上方に分離した共振曲線を持つ劣化型の共振曲線の特徴を明らかにしている。また, これらの定常解が, 不安定解を除いて, 運動方程式の直接積分による結果と良く一致することを示している。

吉武・末岡・田村・羽衣 [27] は, 弾性系の非線形振動に関する研究でも述べた, シューティング法の一つとしての直接積分法による定常解の解析手法を, 変分方程式の積分に現れるデルタ関数の処理を工夫して, ステップ関数のような不連続関数を含む場合にも適用できるような方法に改良し, クーロン摩擦力を伴う2自由度系や, 1自由度双線形ばね・不連続減衰系, 1自由度予圧縮ばね系の定常解の解析に応用した。特に, 1自由度双線形ばね・不連続減衰系の解析においては, $1/128$ という非常に高い次数の分数調波振動の解を求め, 他の方法を寄せ付けず, 極めて高精度の解が得られることを示している。

Pratap and Mukherjee [28] は, bilinear 型復元力特性を持つ回転ばねで2つの剛棒を繋いだ単純梁モデルに, 周期的なインパルス外力が正負交互に作用するときの応答を検討した。インパルス外力については, その大きさが常に一定となる場合と, 変位に比例して変化する場合の2通りが考慮されている。1つのインパルス外力が作用してから次のインパルス外力が作用するまでの系の応答は, 運動方程式により容易に求められるので, 応答の代表的な点における状態変数の変化を, 解析的に表現することができる。彼らは, このことを利用して, Poincaré 写像を導出し, さらに, これを線形化して得られる係数マトリクスの固有値から, 周期解の安定性を検討している。これに基づき, 外力の大きさとその周期の2つのパラメータで示される平面が, 塑性領域の応答がちょうど消失する条件に基づいて得られる曲線により, 安定領域と不安定領域の2つに区分されることを示している。さらに彼らは, このような解析的な手法に加えて, 運動方程式の直接積分によるシミュレーションを行い, 具体的な挙動を分析している。これより, 外力の大きさが一定の場合には, 安定領域において, "plastic shakedown" と称される, 正負対称の交番塑性を生ずる周期的な応答を示すが, 不安定領域においては, 塑性変形を経験した後, "elastic shakedown" と称される準弾性的な振動に至ること, そして, 外力の大きさが変位に比例する場合には, 安定

領域の応答は先の場合と同様であるが, 不安定領域の応答は, 外力パラメータの変化に伴って複雑に変化し, 数々の分岐を経てカオス的な応答に至ることなどを明らかにしている。

1.3.3 建造物の動的崩壊挙動に関する研究

動的荷重による崩壊挙動のシミュレーションは, 数値解析手法や計算機の発達を背景として, 様々な建造物を対象に行われている。ここでは, 特に, 軸力が作用する柱やトラスのような, 座屈などの不安定挙動を伴う建造物の動的崩壊挙動を, 応答解析を通じて分析した研究について述べる。

Morisako, Ishida, Nakamura and Ishizaki [29] は, 移動要素座標系を用いた骨組の大たわみ解析法により, 増幅された実測風圧外乱を受ける6層鋼骨組の動的挙動を解析して, 骨組のたわみ形状, 歪硬化領域の進展状況, 頂部節点の位相平面軌道を示し, その動的挙動の性質を考察した。特に, 位相平面軌道に観察される性状から, その位相平面軌道が, 非自律系でありながら, 自律系に見られるような鞍点の近傍を通過する位相平面軌道に類似した様相を呈することを指摘し, これより, 崩壊挙動と非崩壊挙動を分ける限界軌道の存在を示唆している。

中村・小坂・来田 [30] は, 降伏棚や歪硬化領域を含む鋼材の詳細な履歴挙動をモデル化した非定常履歴単軸構成法則を適用して, 正弦波で加振される単純な骨組モデルの応答解析を行い, そこに観察される定常振動と発散挙動の特性を調べた。彼らは, 骨組の細部にわたる分析を通して, モデルの定常振動には, 静止時の材軸線を振動の中心とする定常振動の他に, 静止時の材軸線から少し傾いた直線を振動の中心とする非対称な定常振動があることを示している。さらに, 発散挙動が層せん断力-相対変位曲線が負勾配を示していない範囲においても生じることや, 歪硬化領域の勾配がその発生に対して顕著な影響を及ぼすことを明らかにしている。

Kuranishi and Nakajima [31] は, 有限要素法によって材軸方向と断面を細かく分割した詳細なモデルを用い, 一定軸力の作用の下で, 周期的な横方向の加速度入力がかかるときの柱の応答解析を行い, その動的耐力の検討を行った。その結果から, 柱は, 最初の塑性化を生じた後, 振幅の減少とともに振動の中心を一方向に移動させていき, ある一定の変位に達したところで, 急速に変位を増大させて倒壊に至ることを示している。さらに, この機構を単純化した1質点系の応答の分析から, 動的倒壊現象の考察を行い, これより, 柱が急速な変位の増大を起こし始める限界の変位は, 作用している軸力に対する静的な釣り合い点に他ならないことを明らかにしている。

石田・森迫 [32] は, 骨組の動的弾塑性挙動に関する基礎的検討として, 重力効果を考慮した bilinear 1質点系を用いて, 正弦波外力の下でのパラメトリックな応答解析を行った。そして, その結果を, ばねの降伏後の剛性と重力効果によって定まる系の復元力特性の第2勾配が, 正勾配, 零勾配, 負勾配となる場合のそれぞれについて, 弾性定常振動, 非対称弾性定常振動, 弾塑性定常振動, 塑性変形累積振動, 倒壊挙動に分類し, 振動数比と外乱の大きさから成る平面上にこれらを示した。これより, 弾塑性定常振動は既往の定常解とよく対応することや, 倒壊挙動は第2勾配が負勾配となる場合のみに現れ, その一方で, 第2勾配が負勾配の場合でも, 弾塑性定常振動が見られる場合があることを指摘している。

加藤・石川・横尾 [33] は、断面を細かく分割した弾塑性要素を部材モデルの一部に適用して、上下地震動を受ける平行弦トラス梁の応答解析を行い、その耐震性の検討を行った。彼らは、地震応答解析の結果から、動的に座屈した後のトラス梁の変位が、耐力低下に伴って、静的に自重を支えきれなくなる変位に達すると、動的崩壊することを指摘し、これを擬静的崩壊変位と呼んで、トラス梁の崩壊あるいは安定性を特徴付ける指標として取り扱っている。そして、この擬静的崩壊変位を与える地震動の崩壊最大加速度を略算的に推定する方法を提案している。さらに、これと同様の手法に基づき、上下地震動を受けるトラス平板の耐震性の検討も行っている [34]。

和田・向 [35] は、個材の座屈後挙動を、繰り返し軸力の下での軸力-軸伸縮関係を示す関数によって表現し、スパンが 200m の複層円筒トラス構造物の地震応答解析を行った。この解析モデルは、桁行方向の脚部のみで支持された構造物であるため、上下動に加えて、水平動の影響に着目しており、ライズや桁行方向の長さをパラメータとした応答解析の結果から、特に、桁行方向の長さが短い場合には、水平動によって崩壊する恐れがあることを指摘している。また、座屈により、部材の耐力が初期の自重による軸力以下となっても応力が再配分されるため、直ちに全体の崩壊につながるわけではなく、座屈した部材が増加して自重を支えきれなくなることによって、崩壊が引き起こされると述べている。

多田・米山 [36] は、一般化硬化塑性ヒンジモデルと増分摂動法を組み合わせた数値解析手法により、支持構造物との連成を考慮した 2 層立体トラスの鉛直地震応答解析を行い、トラスの動的崩壊条件を、エネルギーの尺度に基づいて分析した。これより、地震時にトラスが吸収し得る最大エネルギーは、静的解析結果に示される荷重-変位曲線がトラスの自重のレベルを超える部分の面積で推定され、入力エネルギースペクトルから求められる地震動の入力エネルギーがこれを超えると、トラスが崩壊することを明らかにしている。

1.4 研究の目的と手法の概要

本研究の目的は、材料非線形と幾何学的非線形が組み合わされた複合非線形の下での力学系の動的挙動を問題の対象とし、個々の非線形問題の領域で検討され、既に明らかにされている事柄との接点を見出しながら、2つの非線形性がどのような作用を相互に及ぼすのか、そして、それは単独の非線形問題として取り扱った場合とどのように異なる特徴を有するのかを、問題に内在する根幹的な事象として明らかにすることである。

支配方程式の性質を直接的に論ずることが困難な上記の問題において、これを達成するためには、何らかの数値計算の力を借り、その形を変えながらも、解析的な方法によって得られるものに代わる情報を如何に引き出すことができるかが重要となる。先に述べた既往の研究でも明らかのように、線形振動だけではなく、非線形振動においても、そこに生ずる様々な現象の発生機構を探るのに、周期外力に対する応答を考えることは、それなりに大きな役割を果たしてきたといえる。このことは一方で、現実的な側面において様々な批判を生むが、その特殊性を認めながらも、現象に対する洞察を支える行為としての利点を評価すべきであろう。

これは、動的問題に対する静的問題、あるいは厳密な座屈理論に対する古典座屈理論の役割に似ている。動的問題は慣性力や減衰力などを取り扱うが、静的問題はこれらを見逃した議論である。ところが、現実のあらゆる力学現象は、厳密には全て動的問題であるといえる。従って、ある力学系の持つ性質や、そこに生ずる現象を検討しようとしたとき、静的な釣合曲線は完全に考察の対象から除外されるのであろうか。否である。

対象とする問題が、非線形で、かつ、動的な問題であった場合でも、その静的な釣合曲線は当然、基礎的な力学特性として考慮されるであろうし、また線形振動を仮定して得られる固有振動数、振動モードも同じく重要な特性として取り扱われるであろう。明確な規範を持たない複合非線形下における動的問題を論ずるにあたって、定常状態を仮定して、非線形領域における動的特性の変化や履歴減衰性能を明らかにすることは、それ自体、議論の一段階として位置付けられるであろうし、実現象をより多くの既知の情報から多面的に分析する上で必要なことと考えられる。

このことから、本論文においても一貫して、定常解の性質を基礎とした議論を行う。ただしこれは、それ以外の検討方法を拒むものではなく、むしろ、それらとの関連があつて、初めて重要な意味を持つ。

次章以降に示される様々な問題においては、定常応答の下での履歴要素の復元力特性、あるいは構造物内部の応力-歪関係を、等価線形化法の概念に基づく線形モデルで近似し、系を構成する要素もしくは材料のレベルにおいて線形置換された運動方程式を構築する。

そして、このようにして導かれた線形化パラメータを含む非線形運動方程式の定常解を、調和バランス法の適用によって求める。かくして、先の非線形運動方程式は仮定調波の係数に関する非線形代数方程式に帰着されることになり、弾性系の非線形振動問題と同様に、系の動力学特性を時間軸を縮退させた振動数領域における理論展開の下で論ずることが可能となる。

ただし、前述の復元力特性や応力-歪関係を近似する線形化パラメータは、構造物の定常状態に整合するように、その推移に伴って変化させる必要があるため、形式的には運動方程式は陽な表現に改められるものの、依然それは定常状態を記述する変数に依存するものであるという点に留意する必要がある。このことについては、次章以降、個々の問題に対する定式化の中で具体的な取り扱いを述べる。

1.5 論文の構成

本論文は、全5章で構成されており、その内容は以下に示す通りである。

第1章では、材料および幾何学的非線形性を伴う構造物の動的非線形挙動に関する本研究の背景を示し、基礎となる非線形振動問題の要点や、関連する既往の研究成果の内容を概説するとともに、この研究の目的や、手法の概要、論文の構成について述べる。

第2章では、解析が容易となるように、材料および幾何学的非線形性を伴う構造物の力学特性を簡略な機構で表現した非線形1質点系モデルの定常振動解析を行い、その定常解の性質を安定性も含めて議論するとともに、併せて行われる時刻歴応答解析の結果を、これらとの関連を中心に分析することによって、この種の力学系に生起する動的非線形挙動の性質を明らかにする。ここでは、特に、単純なモデルを用いた解析の利点を活かして、基礎的事項の整理に重点を置く。

第3章では、有限要素法に、第2章で行った定常振動解析の考え方を採り入れ、平面骨組構造物を対象とした定式化と、その数値解析の具体的手続きを示す。これを用いて、屈服型の座屈性状を有する偏平三角ラーメンの鉛直振動の定常解を求め、その振動性状を、塑性化の進展に伴う動的特性の変化や、不安定挙動との対応を中心に議論する。

第4章では、円形断面を有する3次元梁要素を採用することにより、第3章で述べられた定常振動解析手法を立体骨組構造物の解析に適用できるように拡張し、これを用いて、ドーム状の骨組構造物の鉛直振動の解析を行う。これにより、幾何学的非線形性の影響が3次元的に及ぼされる構造物の塑性化後の振動性状について、主に、励起される振動モードとの関係に焦点を置いて議論する。

第5章では、本研究で得られた成果を、全般を通じて総括的に述べるとともに、今後の課題について言及する。

第2章 非線形1質点系モデルの定常解と安定性

第2章

非線形1質点系モデルの定常解と安定性

2.1 はじめに

ここでは、材料および幾何学的非線形性を伴う構造物に現れる様々な動的挙動と、本論文で述べられる手法によって得られる定常解の関連を明確にするとともに、その基本特性とこの問題に特有の現象を整理することを目的として、構造物の外力抵抗機構を単純化した1質点系モデルの検討を行う。

この解析モデルは、弾性ばねを持つリンク機構と、これに並列に接続される弾塑性ばねで構成されるものであり、前者によって、運動方程式の復元力項の弾性挙動に関与する部分に、変位に関する2次と3次の非線形項がもたらされ、後者によって、弾塑性復元力特性が付与される。そして、この両者の影響力の違い、換言すれば、ばねの剛性比が、系の持つ力学特性を性格付けるものとなる。

このモデルに対して、まず、定常振動問題としての定式化を示し、さらにこれに基づいて得られる定常解の安定性を判別する方法を述べる。上記の方法によって求められた定常解の数値解析結果を示し、その性質から、材料非線形性と幾何学的非線形性の両者の組み合わせによって及ぼされる影響とその特徴を明らかにする。

続いて、同一のモデルに対する時刻歴応答解析を行って、そこから求められる時系列データの周波数成分や位相平面軌道を分析し、これらと定常解の比較から、相互の関連を考察する。

2.2 解析モデルの力学特性と運動方程式の導出

図2.1に示されるような、剛棒と弾性および弾塑性ばねから構成されるモデルを考える。2つの剛棒はヒンジを介して結ばれており、支点は左はピン支持、右はローラー支持となっている。ローラー支점에接続された水平方向の弾性ばねにより、剛棒で構成されるリンク機構への剛性が付与される。また頂点には集中質量 m を有し、これと下部支持基盤の間は弾塑性ばねで接続されている。さらに頂点は慣性力の作用とともに、下向きに作用する静的荷重 F を受けるものとする。

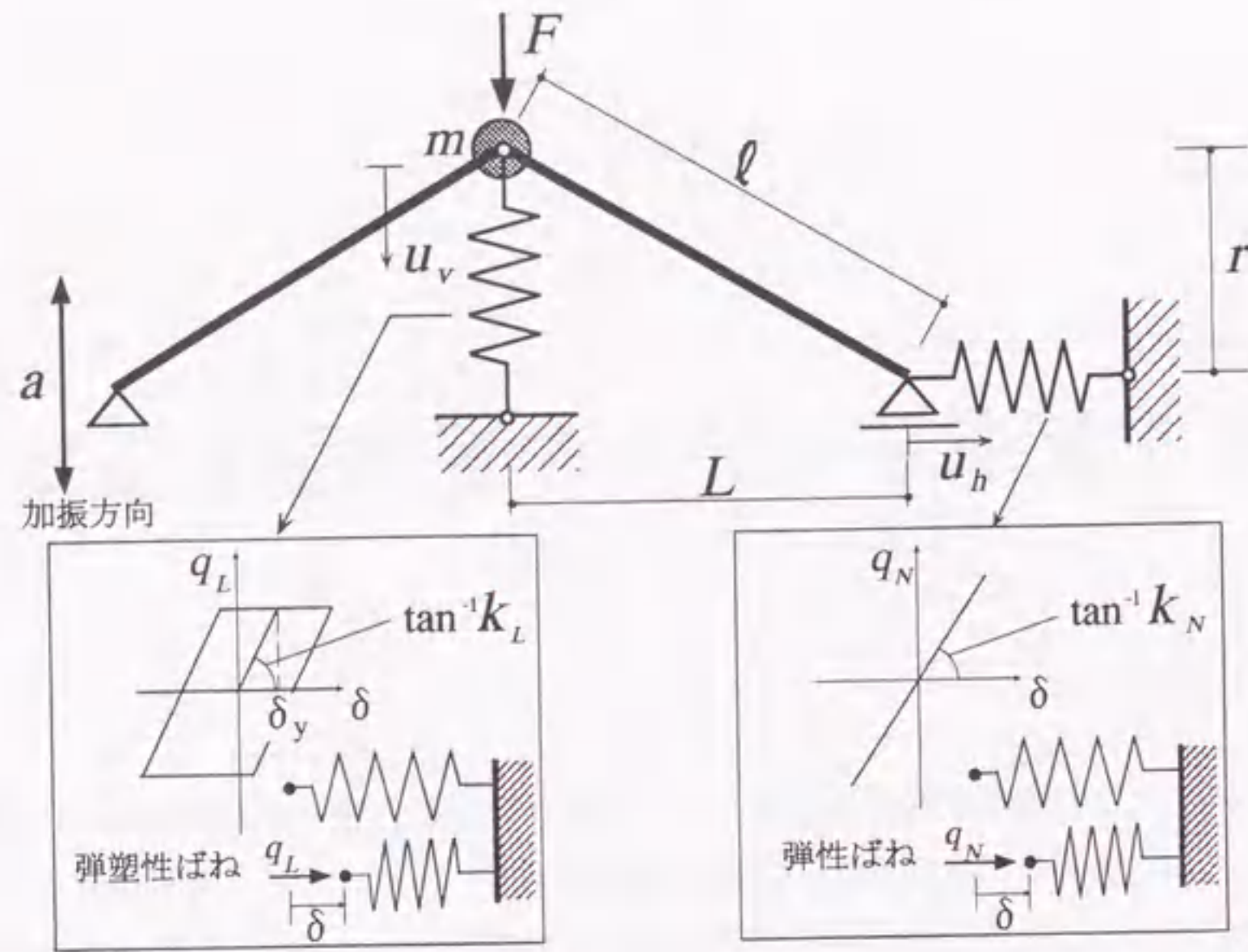


図 2.1: 非線形1質点系モデル

上記のモデルの運動方程式を導く。仮想仕事の原理より、

$$q_L \delta u_v + q_N \delta u_h + \{m(\ddot{u}_v + \ddot{a}) - F\} \delta u_v = 0 \quad (2.1)$$

ここに、 u_h はローラー支点の水平変位、 u_v は質点の鉛直変位、 \ddot{a} は基盤の鉛直加速度、 q_L 、 q_N はそれぞれ弾塑性ばねおよび弾性ばねの復元力を表す。 u_h が、 u_v を用いて、

$$u_h = 2 \left\{ \sqrt{l^2 - (r - u_v)^2} - L \right\} \quad (2.2)$$

と表されることより、これを(2.1)式に用いて、 u_v に関する非線形項をテーラー展開し、3次の項まで採用すれば次のような運動方程式を得る。

$$m\ddot{u}_v + q_L + 4k_N \left\{ \frac{r^2}{l^2 - r^2} u_v - \frac{3l^2 r}{2(l^2 - r^2)^2} u_v^2 + \frac{l^2(l^2 + 4r^2)}{2(l^2 - r^2)^3} u_v^3 \right\} = -m\ddot{a} + F \quad (2.3)$$

さらに系の固有円振動数を ω として、 $\tau = \omega t$, $x = \frac{u_v}{r}$, $y = \frac{a}{r}$, $f = \frac{F}{mr\omega^2}$, $\bar{q}_L = \frac{q_L}{mr\omega^2}$, $\mu = \frac{l}{r}$, $\kappa = \frac{k_N}{k_L}$ とおくことにより、次式を得る。

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} + \bar{q}_L + \nu_N^2 x + \beta x^2 + \gamma x^3 = -\frac{d^2 y}{d\tau^2} + f \quad (2.4)$$

ここに、 \bar{q}_L は図2.2のような無次元化された弾塑性ばねの復元力を表し、 ω およびその他の係数は、

$$\omega = \sqrt{\frac{k_L(\mu^2 - 1 + 4\kappa)}{m(\mu^2 - 1)}}, \quad \nu_L = \sqrt{\frac{\mu^2 - 1}{\mu^2 - 1 + 4\kappa}}, \quad \nu_N = \sqrt{\frac{4\kappa}{\mu^2 - 1 + 4\kappa}},$$

$$\beta = -\frac{6\kappa\mu^2}{(\mu^2 - 1)(\mu^2 - 1 + 4\kappa)}, \quad \gamma = \frac{2\kappa\mu^2(\mu^2 + 4)}{(\mu^2 - 1)^2(\mu^2 - 1 + 4\kappa)}$$

となる。

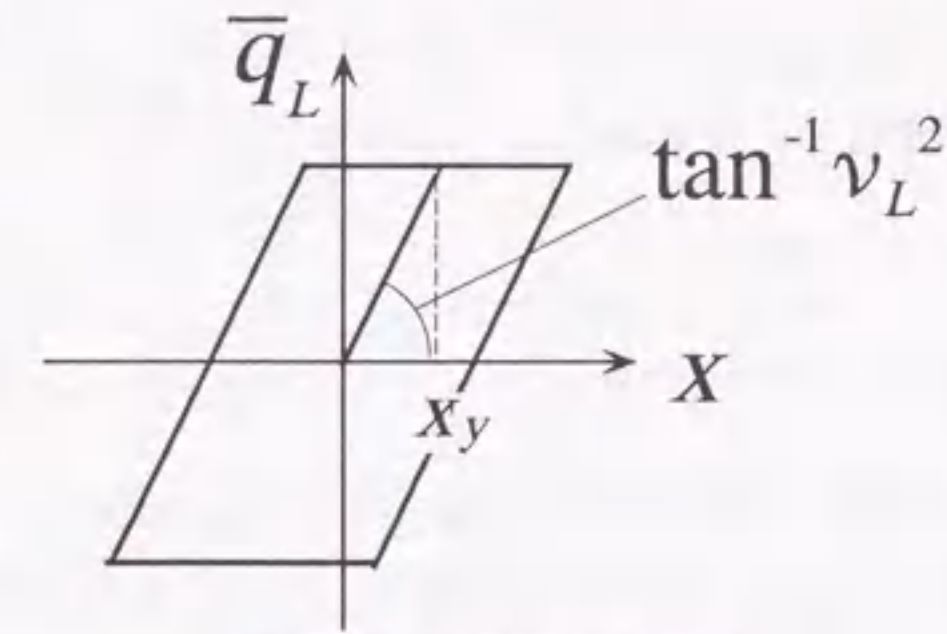


図 2.2: \bar{q}_L の復元力特性

このモデルの力学特性は、弾塑性ばねと弾性ばねの剛性比 κ に密接に関連している。弾塑性ばねの復元力は弾性時において、頂点の鉛直変位と線形の関係を持ち、一方で弾性ばねはモデルの持つリンク機構を介しているため、頂点の鉛直変位と非線形の関係を持つ。このことは幾何学的非線形性がローラー支点に位置する弾性ばねによって付与されるということの意味する。「リンク機構-弾性ばね」で構成される抵抗系はモデルの形態がライズを有するようになって初めて機能する抵抗要素であり、シェルやアーチに見られるような「形態による抵抗系」を表現する。これに対して、弾塑性ばねで構成される抵抗系は形態や変形の大きさに左右されない抵抗要素であり、梁や平板などに見られる「曲げ剛性を主体とする抵抗系」に相当するものと考えられる。現実の構造物においては、このような完全な分離は厳密には成し得ないが、以降に示すようにその典型的な力学挙動をこのような機構をもって擬似的に表現することは概ね可能であろう。 κ はこれら2つの抵抗系のバランスを決め、系の力学挙動に対する幾何学的非線形性の影響を支配するパラメータであり、形態を決めるパラメータ μ が同じであれば、これが大きいほど幾何学的非線形効果は増す。

ここでは静的な荷重-変位曲線が、幾何学的非線形効果によってアーチなどに見られる明確な極限点を有するように解析モデルの κ の値を $\kappa = 50$ に設定した。表 2.1 に上記を含む解析モデルのパラメータを示す。

図 2.3 は、解析モデルの静的な荷重-変位曲線を示している。図中 f_y は降伏荷重を表す。実線が弾性系（弾塑性ばねを弾性と仮定）の荷重-変位曲線であり、破線が弾塑性系の荷重-変位曲線である。塑性化以後は2つのばねの剛性配分が変化するため、弾性時よりも幾何学的非線形性の影響が若干大きくなる。なお、参考までに、 κ の値が異なる場合の荷重-変位曲線を付録 A に示す。

表 2.1: 解析モデルのパラメータ

m	k_L	x_y	κ	μ
1.0	1.0	0.4	50.0	5.0

静的荷重の存在が系の動的挙動に及ぼす影響を検討するために、 f については、降伏荷重を f_y として $f/f_y = 0.0$ (静的荷重なし) の場合と、 $f/f_y = 0.5$ (静的荷重あり) の場合の両方の解析を行う。

2.3 定常振動問題としての定式化

上記モデルの非線形振動に関する基本特性を把握することを目的として、周期解を仮定した定常振動問題としての取り扱いを行う。弾塑性系を対象としてこのような議論を展開するために、等価線形化法による履歴特性の近似を行う。

2.3.1 弾塑性ばねの等価線形化および基礎式の導出

一般的な弾塑性履歴特性の等価線形化は、等価剛性と等価粘性減衰係数という2つのパラメータを導入することによって行われる。

ところが、(2.4)式は、変位に関する2次の項を含み、この項に関し $\beta < 0$ であることから、右辺の $\frac{d^2y}{d\tau^2}$ に周期的な正負対称の入力を与えても、頂点の振動中心は、振幅の増大とともに静止した位置から次第に x が正の方向に移動し、正負非対称の応答を示す。一方、弾塑性ばねの変位は頂点の鉛直変位に等しいため、その履歴は必然的に片側への移動を伴うものとなる。

以上のような性状を表現するために、弾塑性ばねの復元力を次のような形で線形化する。

$$\bar{q}_L = \nu_e^2(x - x_r) + 2\eta_e\nu_e \frac{dx}{d\tau} \quad (2.5)$$

ここに、 $\nu_e = \sqrt{\frac{k_e}{m\omega^2}}$ 、 $\eta_e = \frac{c_e}{2\nu_e}$ であり、 k_e 、 c_e 、 x_r はそれぞれ弾塑性ばねの等価剛性、等価粘性減衰係数及び残留変位を表す。

(2.5)式を、(2.4)式に代入すれば、次式のような運動方程式を得る。

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + \nu_e^2(x - x_r) + 2\eta_e\nu_e \frac{dx}{d\tau} + \nu_N^2x + \beta x^2 + \gamma x^3 = -\frac{d^2y}{d\tau^2} + f \quad (2.6)$$

支点に入力される鉛直加速度が、

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} = \alpha \sin \Omega\tau \quad (2.7)$$

で与えられるものとして、周期解を、定数項ならびに sine, cosine の基本調波を各1波ずつ用いて、次のように仮定する。

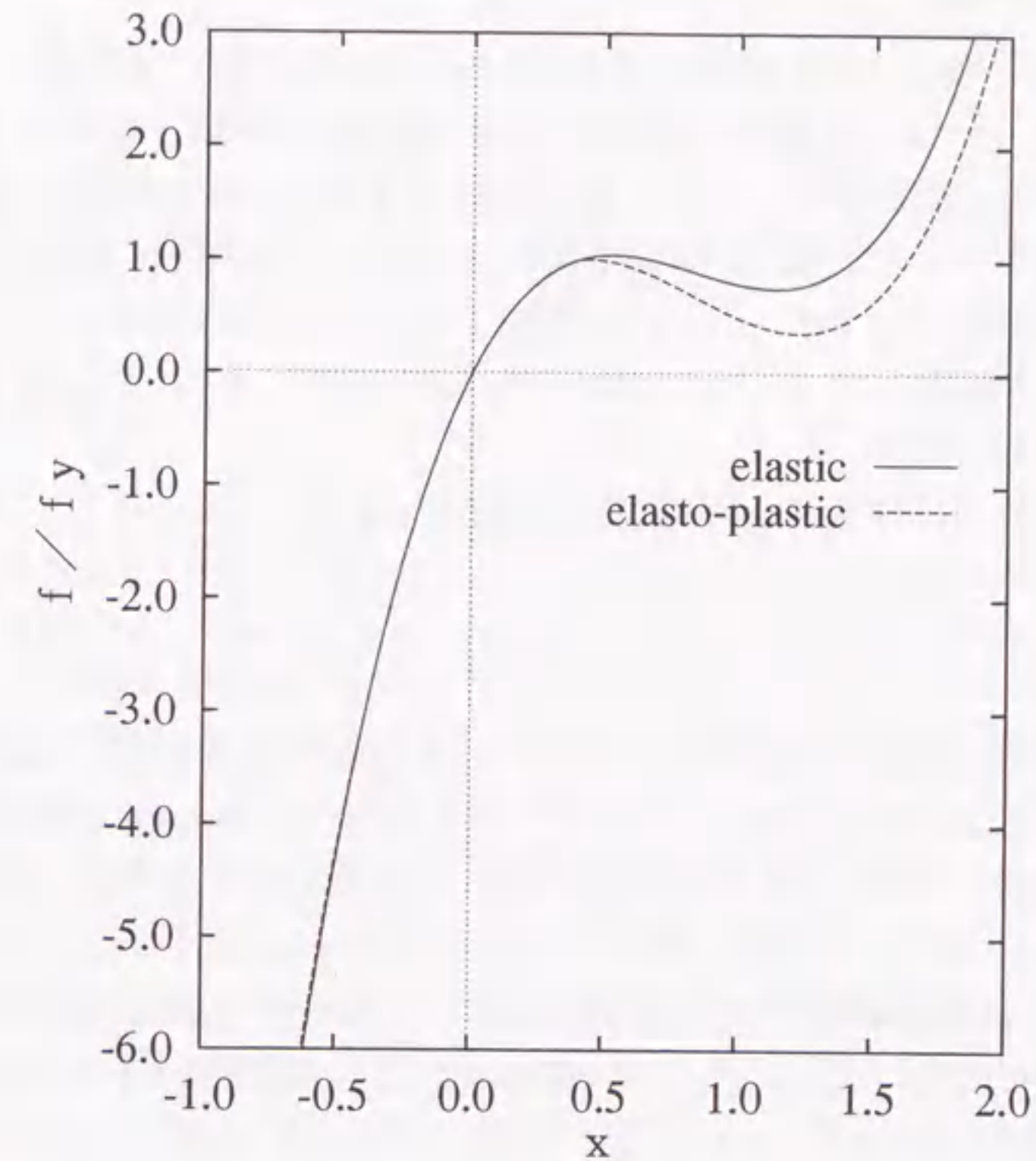


図 2.3: 荷重-変位曲線

$$x = A_1 + A_2 \sin \Omega\tau + A_3 \cos \Omega\tau \quad (2.8)$$

これを(2.6)式に代入し、調波ごとに整理すれば、次式のような係数 $A_1 \sim A_3$ に関する非線形代数方程式を得る。

$$(\nu_e^2 + \nu_N^2)A_1 + \beta \left(A_1^2 + \frac{1}{2}A_2^2 + \frac{1}{2}A_3^2 \right) + \gamma A_1 \left(A_1^2 + \frac{3}{2}A_2^2 + \frac{3}{2}A_3^2 \right) - \nu_e^2 x_r - f = 0 \quad (2.9)$$

$$(\nu_e^2 + \nu_N^2 - \Omega^2)A_2 - 2\eta_e\nu_e\Omega A_3 + 2\beta A_1 A_2 + \gamma A_2 \left(3A_1^2 + \frac{3}{4}A_2^2 + \frac{3}{4}A_3^2 \right) + \alpha = 0 \quad (2.10)$$

$$2\eta_e\nu_e\Omega A_2 + (\nu_e^2 + \nu_N^2 - \Omega^2)A_3 + 2\beta A_1 A_3 + \gamma A_3 \left(3A_1^2 + \frac{3}{4}A_2^2 + \frac{3}{4}A_3^2 \right) = 0 \quad (2.11)$$

(2.9)~(2.11)式に含まれる等価線形化に関するパラメータ ν_e 、 η_e 、 x_r は本来係数 $A_1 \sim A_3$ に関する値であるが、その表現も設定方法も未だ与えられていない。これらは定常状態の移行に伴い変化するものであり、弾塑性ばねの状態変化に対応してその形が定められる。以下に具体的な数値解析の手順として、これらを含め詳述する。

2.3.2 数値解析の手順

一般に弾塑性問題の解は、その負荷過程に依存するため一意ではない。これに対し、本論文で考えている定常解は、あくまで基本特性の抽出に焦点を絞り、動力学的な平衡を満足する周期的な履歴挙動を示す状態に議論を限定している。しかしながら弾塑性ばねの履歴特性の線形化に際して導入された残留変位 x_r により、定常状態を既定しながらも、解の表現の範囲はより広げられ、そこに至る過程を問わなければ、一つの外乱に対して無数の解が想定されることとなった。

このことは、ここで議論しようとしている解を、どのような基準でもって一元化するか、という明確な定義を必要としている。

そこで、ここでは系の応答が変位0の状態から徐々に増加していく過程を考え、このような経路において定常的な応答を仮定して得られる解を、ここで取り扱う定常解と定義する。このことにより、弾塑性ばねの状態変化が図2.4のように既定されるため、 x_r の値もこれに応じて定めることができる。

一方、等価剛性と等価粘性減衰係数については geometrical stiffness method の考え方 [45] に基づいて算出する。すなわち、等価剛性を履歴ループの最大点における割線係数で与え、等価粘性減衰係数を粘性減衰系の1サイクル当たりの損失エネルギーが、履歴系のそれに等しくなるように定める。

以上のような取り扱いを数値解析において実現するため、応答の最大変位を増分パラメータ λ にとり、これを単調に増加させることによって解を順次求めていく方法を適用する。そこで次式を基礎式に付加する。

$$A_1 + \sqrt{A_2^2 + A_3^2} - \lambda = 0 \quad (2.12)$$

与えられた α の値に対し、未知量を $A_1 \sim A_3, \Omega$ とすれば、(2.9) ~ (2.11) 式および (2.12) 式が解くべき基礎式となる。

弾塑性ばねの塑性化の進行に応じ、各線形化パラメータは次のように与えられる。

i) 弾性範囲で振動しているとき

$$\nu_e = \nu_L, \quad \eta_e = 0, \quad x_r = 0 \quad (2.13)$$

ii) 弾塑性ばねが正の降伏点を越えているとき

$$\nu_e = \nu_L, \quad \eta_e = 0, \quad x_r = A_1 + \sqrt{A_2^2 + A_3^2} - x_y \quad (2.14)$$

iii) 弾塑性ばねが交番塑性に至り、履歴ループを描くとき

$$\nu_e = \frac{\nu_L \sqrt{x_y}}{(A_2^2 + A_3^2)^{1/4}}, \quad \eta_e = \frac{2\nu_L^2 x_y (\sqrt{A_2^2 + A_3^2} - x_y)}{\nu_e \pi \Omega (A_2^2 + A_3^2)}, \quad x_r = A_1 \quad (2.15)$$

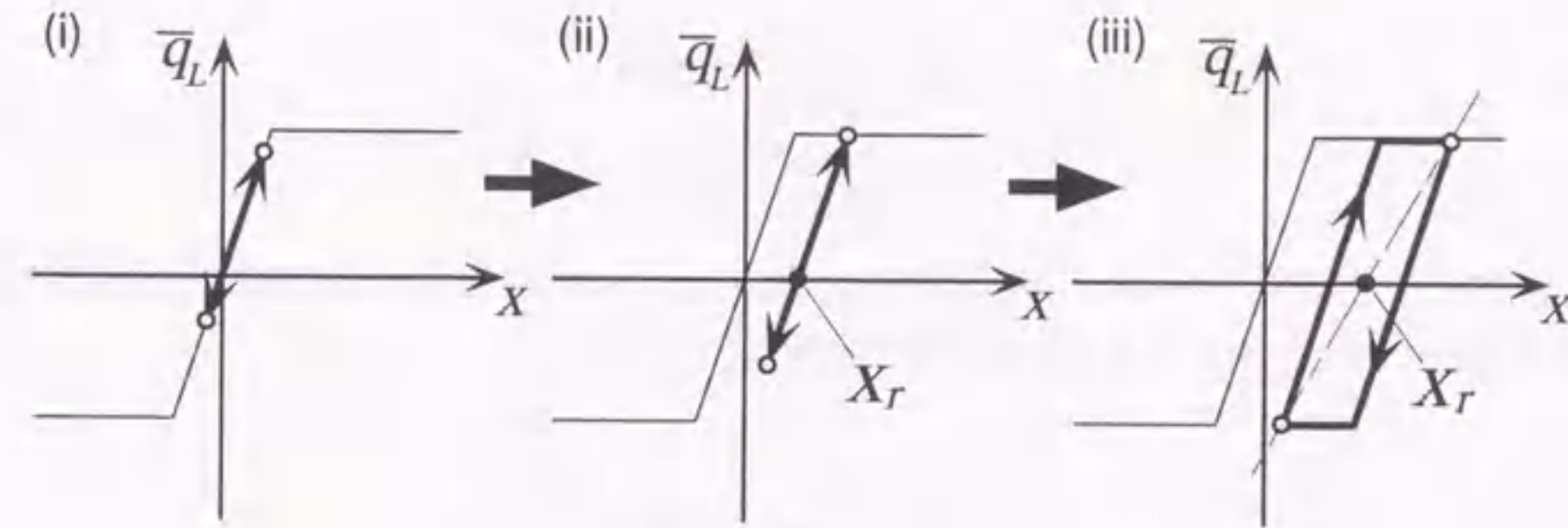


図 2.4: 弾塑性ばねの状態変化

$A_1 \sim A_3, \Omega$ に関する非線形方程式である (2.9) ~ (2.11) 式および (2.12) 式の解を、増分パラメータである λ を単調に増加させながら Newton-Raphson 法を用いて順次求めていく。

この過程においては、既に述べたように、弾塑性ばねの状態は常に一意に定められるので、以下の手順により α を既知、 Ω を未知量として直接共振曲線を求める解析を行う。

最初の増分ステップにおいて、外乱と同位相となる解と逆位相になる解 (いずれも弾性時の解) をそれぞれ求め、これらを起点として位相の異なる左右の共振曲線に対応する定常解の解析を進める。弾塑性ばねの等価線形化パラメータについては、最初 i) の値を与えるが、通常の弾塑性解析における手続きと同様に、解析の進行過程で各増分ステップにおける弾塑性ばねの状態を評価し、これに基づいて ii) ~ iii) の値を適用する。

2.4 定常解の安定性

本解析で求められる定常解が現実の応答に対応する安定な解であるかどうかを検討するため、定常解に対する微小な攪乱の支配方程式に基づく安定判別法を弾塑性系に適用する。

2.4.1 微小攪乱応答の支配方程式

ある状態の安定性を調べるには、その状態に僅かな攪乱を与えたときの時間の経過に伴う変化を論ずることになる。これが一定の範囲内であれば Liapunov の定義による安定であり、さらに元の状態に戻ろうとするならば漸近安定となる [48],[44]。

(2.8) 式で表される x に攪乱が与えられたとして、これが、

$$x = A_1(\tau) + A_2(\tau) \sin \Omega \tau + A_3(\tau) \cos \Omega \tau \quad (2.16)$$

と表されるものとする。さらに攪乱後の $A_1 \sim A_3$ を、元の係数 $A_1^0 \sim A_3^0$ と攪乱成分 $\xi_1 \sim \xi_3$ の和

によって

$$\begin{aligned} A_1(\tau) &= A_1^0 + \xi_1 \\ A_2(\tau) &= A_2^0 + \xi_2 \\ A_3(\tau) &= A_3^0 + \xi_3 \end{aligned} \quad (2.17)$$

と表す。(2.16), (2.17)式を(2.6)式に代入し, ξ_1, ξ_2, ξ_3 に関する線形項のみ採用すれば, これらの攪乱成分に関する次のような微分方程式を得る。

ii) の場合

$$\begin{aligned} \frac{d^2\xi_1}{d\tau^2} + \left[\nu_L^2 + \nu_N^2 + 2\beta A_1^0 + \gamma\{3(A_1^0)^2 + \frac{3}{2}(A_2^0)^2 + \frac{3}{2}(A_3^0)^2\} \right] \xi_1 \\ + (\beta A_2^0 + 3\gamma A_1^0 A_2^0) \xi_2 + (\beta A_3^0 + 3\gamma A_1^0 A_3^0) \xi_3 - \nu_L^2 (\xi_1 + \Phi_1 \xi_2 + \Phi_2 \xi_3)_{\max} = 0 \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2\xi_2}{d\tau^2} - 2\Omega \frac{d\xi_3}{d\tau} + 2(\beta A_2^0 + 3\gamma A_1^0 A_2^0) \xi_1 \\ + \left[\nu_L^2 + \nu_N^2 - \Omega^2 + 2\beta A_1^0 + \gamma\{3(A_1^0)^2 + \frac{9}{4}(A_2^0)^2 + \frac{3}{4}(A_3^0)^2\} \right] \xi_2 + \frac{3}{2}\gamma A_2^0 A_3^0 \xi_3 = 0 \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2\xi_3}{d\tau^2} + 2\Omega \frac{d\xi_2}{d\tau} + 2(\beta A_3^0 + 3\gamma A_1^0 A_3^0) \xi_1 + \frac{3}{2}\gamma A_2^0 A_3^0 \xi_2 \\ + \left[\nu_L^2 + \nu_N^2 - \Omega^2 + 2\beta A_1^0 + \gamma\{3(A_1^0)^2 + \frac{9}{4}(A_2^0)^2 + \frac{9}{4}(A_3^0)^2\} \right] \xi_3 = 0 \end{aligned} \quad (2.20)$$

iii) の場合

$$\begin{aligned} \frac{d^2\xi_1}{d\tau^2} + \Lambda_1 \frac{d\xi_1}{d\tau} + \left[\nu_N^2 + 2\beta A_1^0 + \gamma\{3(A_1^0)^2 + \frac{3}{2}(A_2^0)^2 + \frac{3}{2}(A_3^0)^2\} \right] \xi_1 \\ + (\beta A_2^0 + 3\gamma A_1^0 A_2^0) \xi_2 + (\beta A_3^0 + 3\gamma A_1^0 A_3^0) \xi_3 - f = 0 \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2\xi_2}{d\tau^2} + \Lambda_1 \frac{d\xi_2}{d\tau} - 2\Omega \frac{d\xi_3}{d\tau} + 2(\beta A_2^0 + 3\gamma A_1^0 A_2^0) \xi_1 \\ + \left[\nu_N^2 - \Omega^2 + 2\beta A_1^0 + \gamma\{3(A_1^0)^2 + \frac{9}{4}(A_2^0)^2 + \frac{3}{4}(A_3^0)^2\} - \Lambda_2 \Omega A_3^0 + \Gamma_1 + \Gamma_2 A_2^0 \right] \xi_2 \\ + \left(\frac{3}{2}\gamma A_2^0 A_3^0 - \Lambda_1 \Omega - \Lambda_3 \Omega A_3^0 + \Gamma_3 A_2^0 \right) \xi_3 = 0 \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2\xi_3}{d\tau^2} + 2\Omega \frac{d\xi_2}{d\tau} + \Lambda_1 \frac{d\xi_3}{d\tau} + 2(\beta A_3^0 + 3\gamma A_1^0 A_3^0) \xi_1 + \left(\frac{3}{2}\gamma A_2^0 A_3^0 + \Lambda_1 \Omega + \Lambda_2 \Omega A_2^0 + \Gamma_2 A_3^0 \right) \xi_2 \\ + \left[\nu_N^2 - \Omega^2 + 2\beta A_1^0 + \gamma\{3(A_1^0)^2 + \frac{9}{4}(A_2^0)^2 + \frac{9}{4}(A_3^0)^2\} + \Lambda_3 \Omega A_2^0 + \Gamma_1 + \Gamma_3 A_3^0 \right] \xi_3 = 0 \end{aligned} \quad (2.23)$$

ここに,

$$\begin{aligned} x_r^0 &= A_1^0 + \sqrt{(A_2^0)^2 + (A_3^0)^2} - x_y \\ \Phi_1 &= \frac{A_2^0}{\sqrt{(A_2^0)^2 + (A_3^0)^2}} \\ \Phi_2 &= \frac{A_3^0}{\sqrt{(A_2^0)^2 + (A_3^0)^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \frac{\nu_L^2 x_y}{\sqrt{(A_2^0)^2 + (A_3^0)^2}} \\ \Gamma_2 &= -\frac{\nu_L^2 x_y}{\{(A_2^0)^2 + (A_3^0)^2\}^{3/2}} A_2^0 \\ \Gamma_3 &= -\frac{\nu_L^2 x_y}{\{(A_2^0)^2 + (A_3^0)^2\}^{3/2}} A_3^0 \\ \Lambda_1 &= \frac{4\nu_L^2 x_y (\sqrt{(A_2^0)^2 + (A_3^0)^2} - x_y)}{\pi \Omega \{(A_2^0)^2 + (A_3^0)^2\}} \\ \Lambda_2 &= \frac{4\nu_L^2 x_y (2x_y - \sqrt{(A_2^0)^2 + (A_3^0)^2})}{\pi \Omega \{(A_2^0)^2 + (A_3^0)^2\}^2} A_2^0 \\ \Lambda_3 &= \frac{4\nu_L^2 x_y (2x_y - \sqrt{(A_2^0)^2 + (A_3^0)^2})}{\pi \Omega \{(A_2^0)^2 + (A_3^0)^2\}^2} A_3^0 \end{aligned}$$

i) の弾性振動に対応する微分方程式は, ii) の場合の第1式にある $-\nu_L^2 (\xi_1 + \Phi_1 \xi_2 + \Phi_2 \xi_3)_{\max}$ の項を除いた式となるため省略した。ここに示された記号 $(*)_{\max}$ は*の時刻 τ での最大値を表すものと定義する。これは ii) の場合においては, 図 2.5 に示すように, 攪乱による x_r の変化が, 塑性変形の進行とともに正の方向に増大することはあっても, 減少したり振動したりすることのない非可逆的な変化であることに対応するものである。Caughey[16], Iwan[18][19] は, 対称な復元力特性を持つ履歴系に対し, その振動も対称になるものとして上記 iii) に相当するような微分方程式を導いている。この場合は, 一般的な線形の連立微分方程式となり, 弾性振動の i) の場合と同様, その安定性は特性方程式の根の実部の符号を調べることにより判別することができるが, ii) の場合は, ξ_i に関する解析的に扱うことのできない項 $(\xi_1 + \Phi_1 \xi_2 + \Phi_2 \xi_3)_{\max}$ を有するために, $\xi_1 \sim \xi_3$ の挙動を論ずるのは容易ではなく, 従って対象となる定常解が安定なものであるかどうかを判別するのは難しい。

2.4.2 塑性化以後の解の安定判別の考え方

そこで, ii) の場合の問題を考察する際において, 次のような考え方を適用する。

(2.18) 式の $(\xi_1 + \Phi_1 \xi_2 + \Phi_2 \xi_3)_{\max}$ は, 攪乱を与えた後の残留変位 x_r の増加量を表している。今, この増加量が δ であると仮定する。このとき, $-\nu_L^2 \delta$ の項を右辺に移項すれば, (2.18)~(2.20)

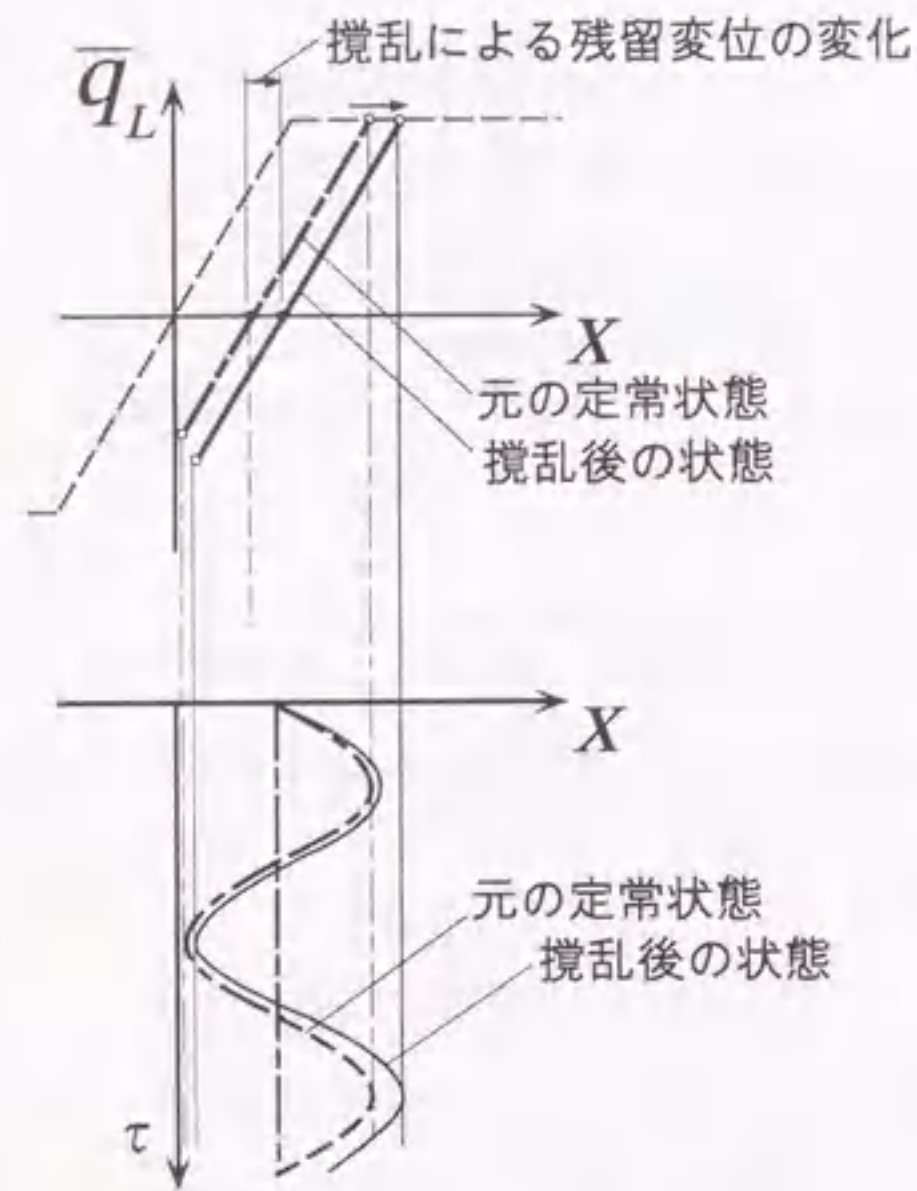


図 2.5: 攪乱による弾塑性ばねの履歴の変化 ((ii) の状態を想定したとき)

式は次式で表される。

$$\begin{bmatrix} D^2+a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & D^2+a_{22} & -2\Omega D+a_{23} \\ a_{31} & 2\Omega D+a_{23} & D^2+a_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \nu_L^2 \delta \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.24)$$

ここに、 $D = \frac{d}{d\tau}$

すなわち、 δ を既知のものとして扱えば、(2.18)~(2.20) 式は (2.24) 式のような線形の連立微分方程式となる。従ってその一般解は次のように表される。

$$\xi_i = C_{i0} + C_{i1}e^{\lambda_1\tau} + C_{i2}e^{\lambda_2\tau} + C_{i3}e^{\lambda_3\tau} + C_{i4}e^{\lambda_4\tau} + C_{i5}e^{\lambda_5\tau} + C_{i6}e^{\lambda_6\tau} \quad (2.25)$$

最初に仮定された残留変位の増分 δ に対応する応答の攪乱成分は、(2.25) 式で与えられる。このとき (2.24) 式の非斉次解である定数項 C_{10}, C_{20}, C_{30} を用いて表される $(C_{10} + \Phi_1 C_{20} + \Phi_2 C_{30})$ は、攪乱によって生起する残留変位の増分量の下限値を示す。故に、

$$C_{10} + \Phi_1 C_{20} + \Phi_2 C_{30} \geq \delta \quad (2.26)$$

という条件が成立すれば、 C_{11}, \dots, C_{i6} がいかなる値をとろうとも弾塑性ばねの塑性変形は、もはや仮定した残留変位増分の範囲内に収まることはない。従ってこの場合の系の応答は、少なく

とも元の状態より塑性変形が進めばこれが漸増的に増大し続けるという意味において不安定であると考えることができる。

一方、 λ_j の実部のいずれかが正の値をとれば、上記の議論の如何に関わらず時刻 t の増大とともに系の応答は増大しようとする。このため i) および iii) の場合と同様、Routh-Hurwitz の定理 (付録 C) を適用することによって攪乱の変動成分 (斉次解) の時刻の増大に伴う挙動を調べる。

2.5 数値解析

2.5.1 定常振動解析

数値解析により求められた定常解を、系の共振曲線として図 2.6~図 2.9 に示す。比較のために、弾性系の共振曲線も求め、これら両者について、モデルの頂点に静的荷重が作用する場合と作用しない場合の結果を併せて示している。図には横軸の振動数軸を境に、上下 2 つの共振曲線が対となって描かれているが、それぞれ、定常解によって示される頂点の下側変位、上側変位に対応するものである。また、共振曲線上に描かれた解の安定-不安定の境界線については、上部の共振曲線にのみ示し、下部の共振曲線については表示を省略している。これらの境界線によって区分された unstable(1) と示された領域に属する解は Routh-Hurwitz の定理により不安定解と判別されたものであり、unstable(2) と示された領域に属する解は 2.4.2 で述べた方法により不安定解と判別されたものである。

図 2.6 に示される静的荷重が作用しない弾性系の共振曲線は、小振幅領域において左側へ、大振幅領域において右側へ傾斜し、復元力項に 2 次と 3 次の非線形項をともに有する振動系の典型的な形を示している。これに対応する図 2.8 の弾塑性系の共振曲線も、概ね同様の傾向を持つが、共振曲線の傾斜は弾性系のそれよりも大きく、さらに、下部の共振曲線の下方への伸長はより抑えられ、僅かではあるが、これが上方に反転する部分が現れている。

静的荷重の有無による相違については、弾性系の場合には、静的荷重の影響を考慮した図 2.7 の共振曲線と前述の図 2.6 の対比から、共振点の移動や若干の応答の増大を除き、上記の振動性状に及ぼされる影響は少ないと判断されるが、弾塑性系の場合には、図 2.9 において明らかなように、静的荷重の存在は、系の振動性状に極めて大きな影響を与える結果となっている。すなわち、静的荷重が作用する弾塑性系の共振曲線においては、塑性化以後、下部の共振曲線は上方に向かって伸びるようになり、これが進行すると、やがて定常解は得られなくなる。そして、そこから少し離れたところで、再び定常解が得られるようになる。上下の共振曲線がいずれも同一方向へ向かって伸びるということは、モデルに大きな残留変形が生じることを意味し、加えて、全振幅を表すこれらの共振曲線の間隔が次第に狭まっていることを勘案すれば、この定常解が振幅を減少させながらも変位が増大するという特異な挙動を示すものであることが理解されよう。これは個々の非線形問題を単独に扱った場合には見られない性状である。

構造物の弾塑性振動において、履歴減衰が応答を抑制する効果は重要であるが、微小変形理論の下で取り扱われる履歴系では、左右の共振曲線は連続し、共振点に応答の上限が存在すること

が知られている。ここで扱っているモデルにおいては、応答の全振幅が降伏変位の2倍（すなわち0.8）を越えれば、弾塑性ばねによる履歴を伴うようになるが、図2.8や図2.9に示される弾塑性系の共振曲線は、いずれも左右に分離したものとなり、上記のような共振点における応答の上限は認められない。

一方、安定判別によって示される解の不安定領域の分布に着目すると、静的荷重の有無に関わらず、弾塑性系では、左側の共振曲線の一部に、Routh-Hurwitzの定理で判別される不安定領域に加えて、2.4.2で述べた方法で判別された不安定領域が現れる他、右側の共振曲線にも、弾塑性系とは異なる位置に不安定領域が現れる。なお、前述の弾塑性系の共振曲線に示される下部の共振曲線の反転部分は、後者の不安定領域の存在に関連しているように見えるが、両者の境界は完全な一致を示してはいない。

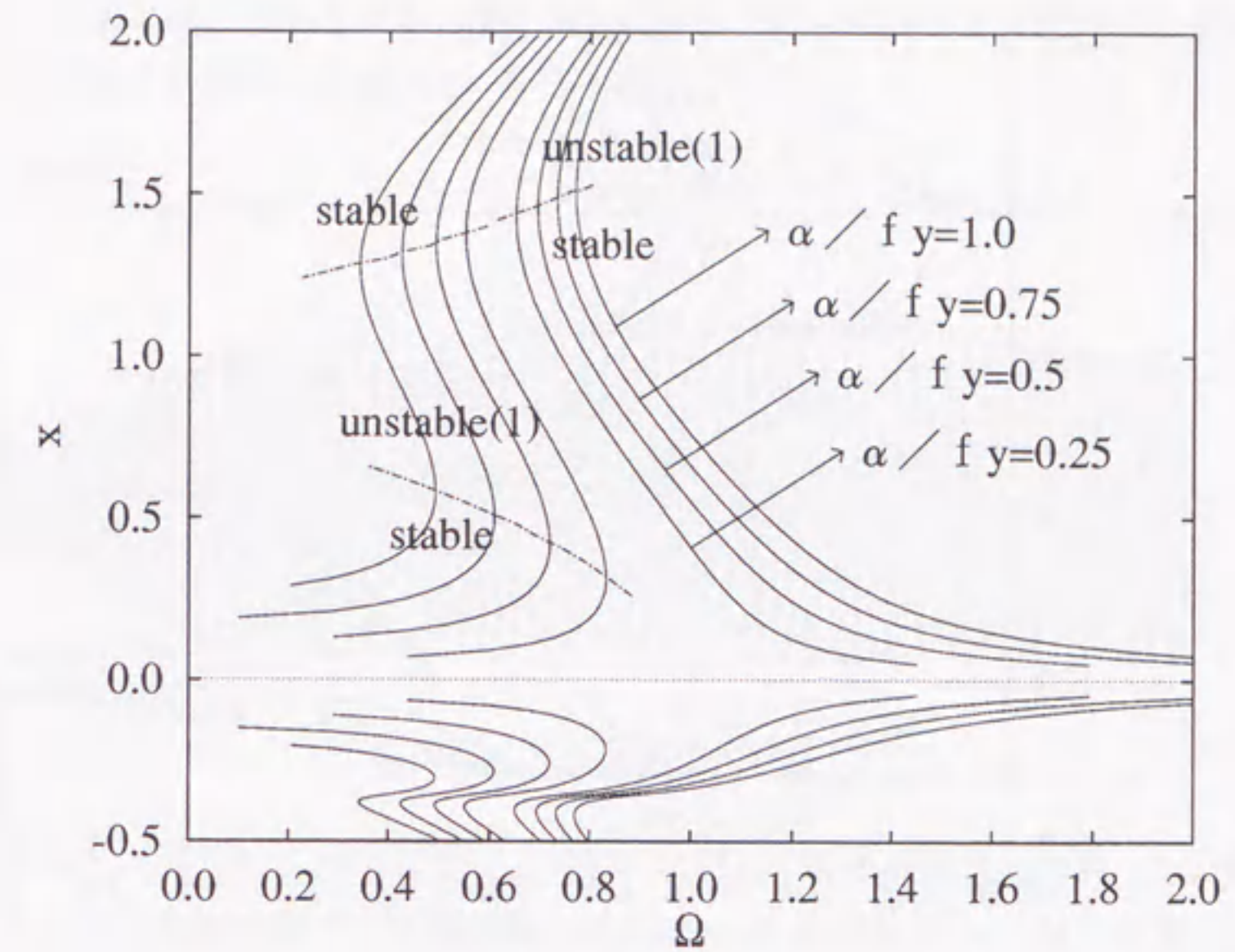


図 2.6: 共振曲線 (弾性系・静的荷重なし: $f/f_y = 0$)

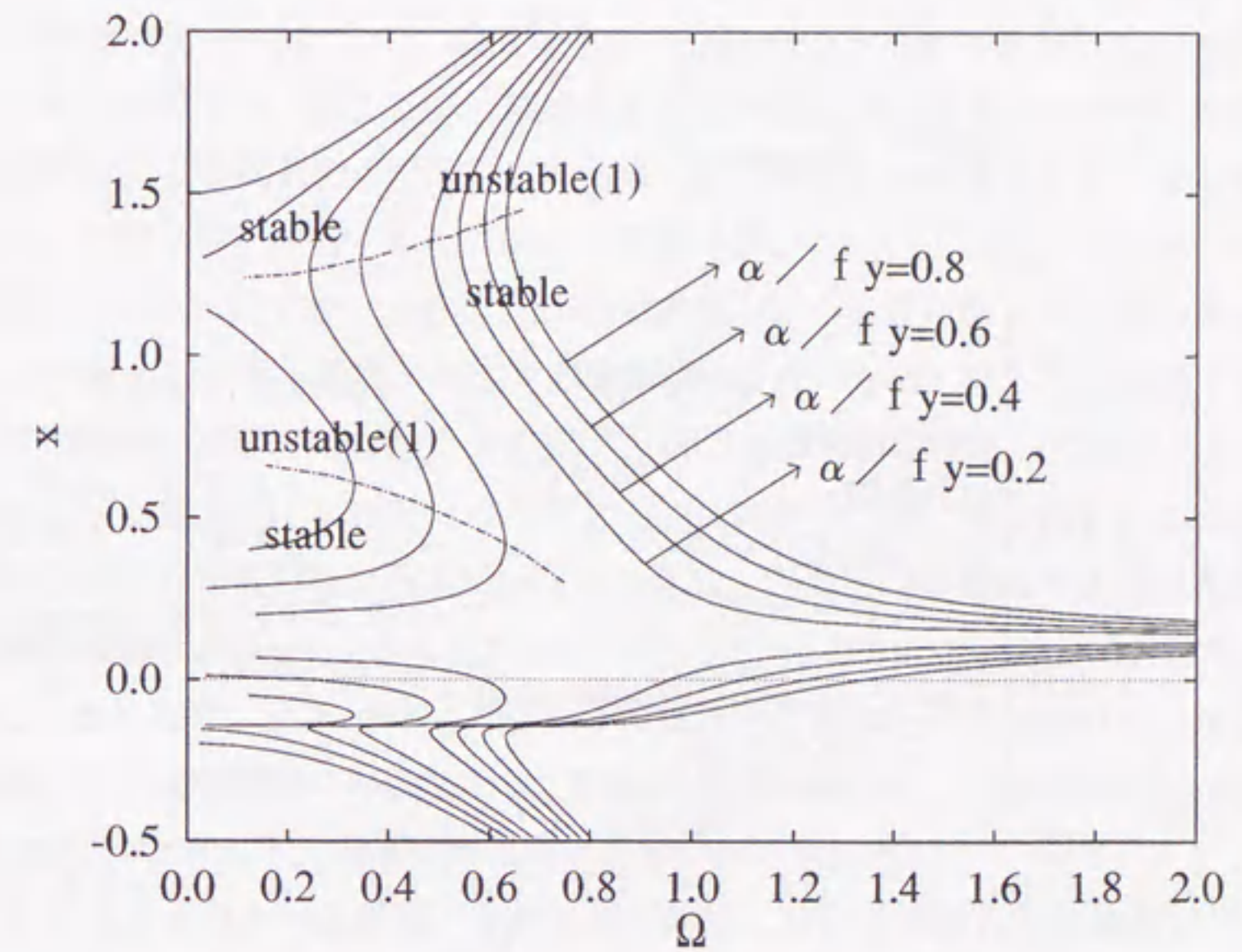
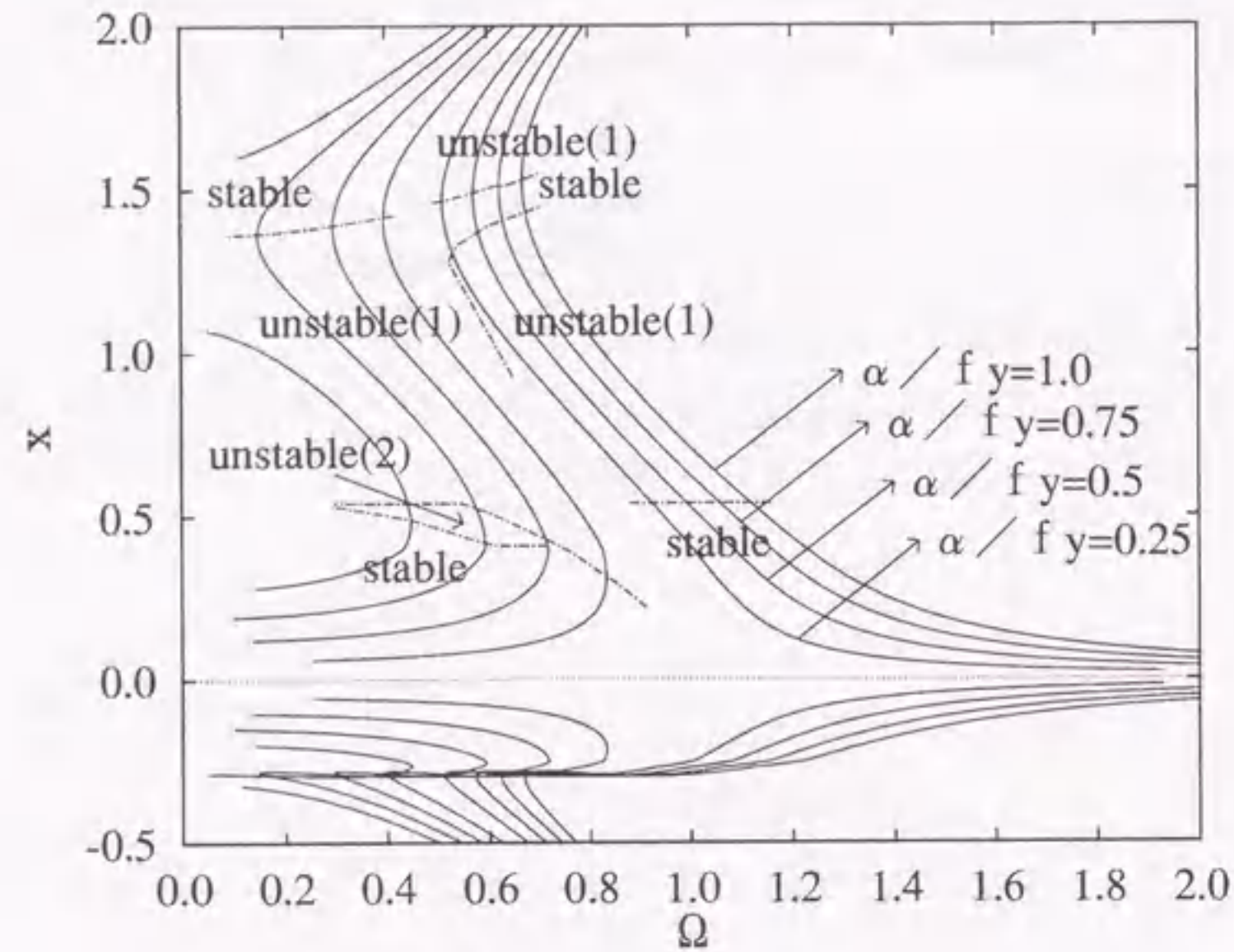
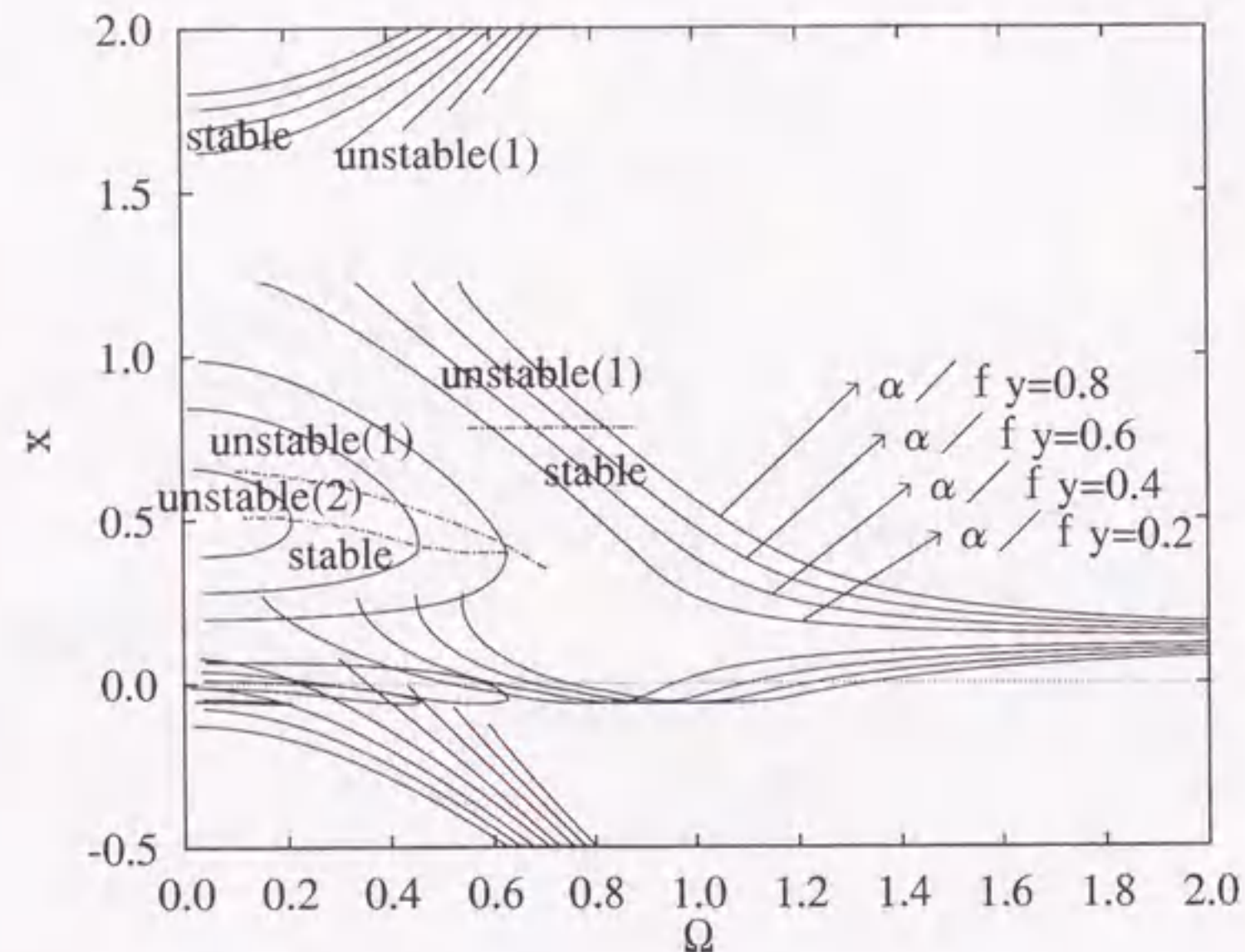


図 2.7: 共振曲線 (弾性系・静的荷重あり: $f/f_y = 0.5$)

図 2.8: 共振曲線 (弾塑性系・静的荷重なし: $f/f_y = 0$)図 2.9: 共振曲線 (弾塑性系・静的荷重あり: $f/f_y = 0.5$)

2.5.2 時刻歴応答解析

前節で得られた定常解と実際に現れる動的挙動の関連を詳細に分析するために、弾塑性系のモデルに対し、時刻歴応答解析 (付録 E.1) を行った。

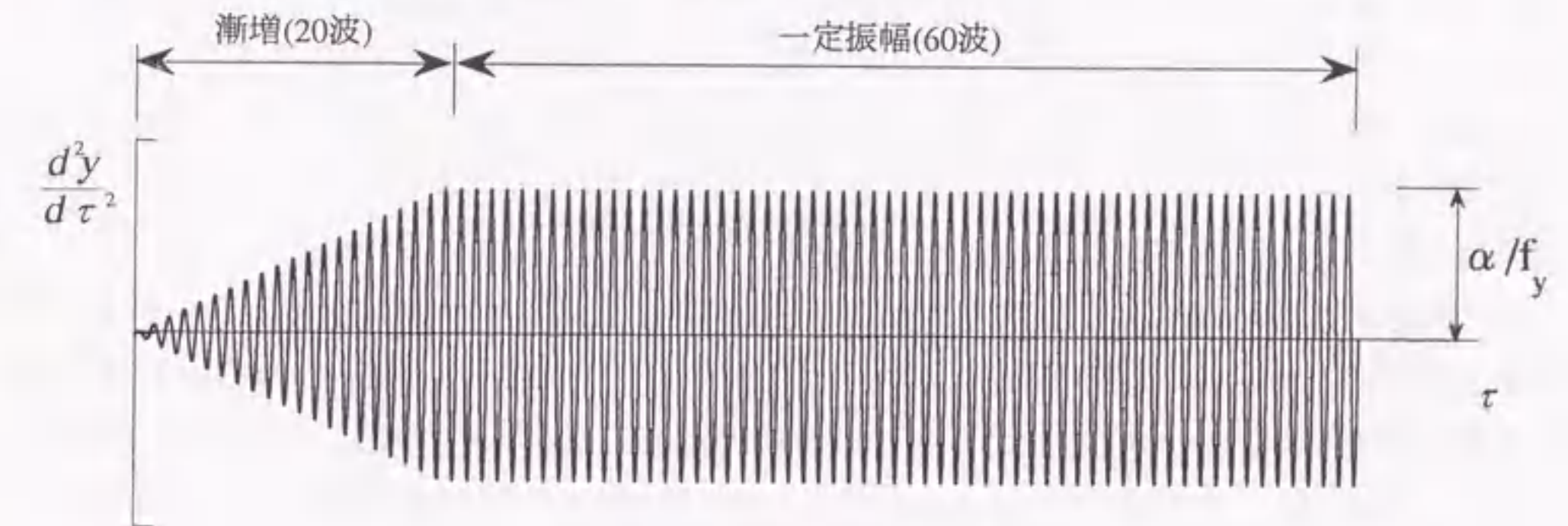


図 2.10: 入力加速度の波形

入力加速度として、図 2.10 に示すように、時間に比例して振幅が漸増した後、一定振幅となる正弦波を与えた。また運動方程式の直接積分には Newmark の β 法 ($\beta = 1/4$) を用い、時間刻みを入力波の周期の $1/100$ で与えた。

図 2.11 および図 2.12 は、弾塑性系の共振曲線に、時刻歴応答解析結果に基づく正負の最大応答値を記載したものである。これらの図に示された結果に対応する時刻歴応答波形を、図 2.13、図 2.14、図 2.17、図 2.18 に示す[†]。また、過渡的な部分を除く応答の後半部分について求められたフーリエスペクトルを図 2.15 と図 2.19 に、位相平面軌道を図 2.16 と図 2.20 に示す。位相平面においては、時刻歴応答による軌道を点で示している他、定常解による軌道として、安定解に相当するものを実線で、不安定解に相当するものを一点鎖線で示している。なお、図 2.20 の一部に破線で描かれた軌道が示されているが、これは、2.3.2 で定義している定常解とは性質の異なるものであって、図 2.11 や図 2.12 の共振曲線に対応する定常解ではないため、詳しくは後述する。

静的荷重が作用しない場合の時刻歴応答波形である図 2.13 および図 2.14 においては、 $\Omega = 0.9$ 、 1.0 の場合を除いて、規則正しい波形となっている。この中で、 $\Omega = 0.5$ のときの応答は、入力波の振動数が系の固有振動数のちょうど $1/2$ となるため、入力波の振動数の 2 倍の高調波が生起している。これは図 2.15 の a) に示されるフーリエスペクトルにおいて、 $\Omega = 0.5$ 以外に $\Omega = 1.0$ の成分が現れていることや、図 2.16 の a) の位相平面軌道が 2 重のループを描いていることから確認できる。従って、基本調波のみを採用して得られた定常解とは、この場合にはあまり対応していない。 $\Omega = 0.6$ のときにも、同様の高調波の影響が認められる。

一方、 $\Omega = 0.7$ 、 0.8 のときの応答は、その初期の段階において突然大きな振幅に変化した後、定常的な状態に至っている。これらは、共振曲線と最大応答の比較 (図 2.11 の c), d) や位相平

[†]時刻歴応答波形については、応答の大小や継続時間に関わらず、詳細な波形が把握できるように配慮したため、縦軸の変位と横軸の時間の目盛は統一されたものにはなっていない。なお、第 3 章、第 4 章において示される時刻歴応答波形についても同様である。

面軌道(図2.16のc), d))における対応から, いずれも図2.11の左側の共振曲線で表される定常解に相当する応答であると判断される。

不規則な波形を示す $\Omega = 0.9, 1.0$ の場合においては, 応答波形以外にも他の応答とは異なる特徴が明確に表れ, 図2.15のe), f)のフーリエスペクトルに多くの周波数成分を含んでいる他, 図2.16のe), f)の位相平面軌道においても, 時刻歴応答による軌道が, 幅広い領域に分布している。この場合, 特に注目されることは, この条件において存在する3つの定常解のうち, 2つは, 先の安定判別において不安定とされたものであり, この2つの定常解によって示される軌道の間, 時刻歴応答による軌道が散在していることである。

静的荷重が作用している場合にも同様のことが確認できるが, 静的荷重が作用しない場合と異なる点は, 時刻歴応答波形が不規則となるときに, 位相平面上において, 前節で求められた定常解とは異なる別の定常解の存在を示唆するような挙動が観察されることである。すなわち, 図2.20のc), e)のように, 時刻歴応答による軌道があたかも2つの定常解の間を往復しているように見えたり, 図2.20のd)のように, 別の定常解と推定される状態に落ちついたりすることである。

このことをさらに深く調べるために, 上記の $\Omega = 0.7, 0.8, 0.9$ の場合について, 時刻歴応答解析で得られた最大応答値を過去の最大の塑性変形として経験した後, 準弾性的に振動しているモデルの状態を想定し, これに対応する定常解を求めた。表2.2に求められた定常解の各調波の係数を示す。準弾性的な振動を仮定しているために, 履歴減衰を伴う場合に値を有するcosineの項の係数 A_3 は全て0となるため, 表には示していない。これらを見ると $\Omega = 0.7$ の場合の解は, 変動成分の大きさを示すsineの項の係数 A_2 が降伏変位 x_y を越えており, 準弾性的な振動を想定していることに矛盾するので, 実際には有り得ない解である。他の解は, いずれも変動成分が降伏変位の大きさの範囲内に収まっている。図2.20のd), e)に示される $\Omega = 0.8, 0.9$ の場合の位相平面上に破線で描かれた軌道は, これらの解に基づく軌道である。 $\Omega = 0.8$ の場合, これは時刻歴応答による軌道とほぼ一致しており, $\Omega = 0.9$ の場合も, 2つの軌道の間を往復するという前述の解釈を裏付ける結果を示しているといえる。なお, 安定判別によれば, これら2つの解はいずれも安定解と判別された。

以上のように, 時刻歴応答解析によって得られた不規則な応答が, 定常解の不安定領域もしくはその近傍で生起し, さらに位相平面上でこれらと関連した動きを示していることは, 限られた解析結果から述べている限り, 未だ議論の余地が残されるであろうが, 実際の動的挙動の全体像を, 本論文で主張しているような視点で捉える意義を明確にしているといえよう。

表 2.2: 塑性化後の準弾性的振動を仮定した定常解 (弾塑性系・静的荷重あり: $f/f_y = 0.5$)

$x = A_1 + A_2 \sin \Omega \tau$			
Ω	A_1	A_2	
0.7	1.295	0.4773	$> x_y$
0.8	1.371	0.3504	$< x_y$
0.9	1.433	0.2712	$< x_y$

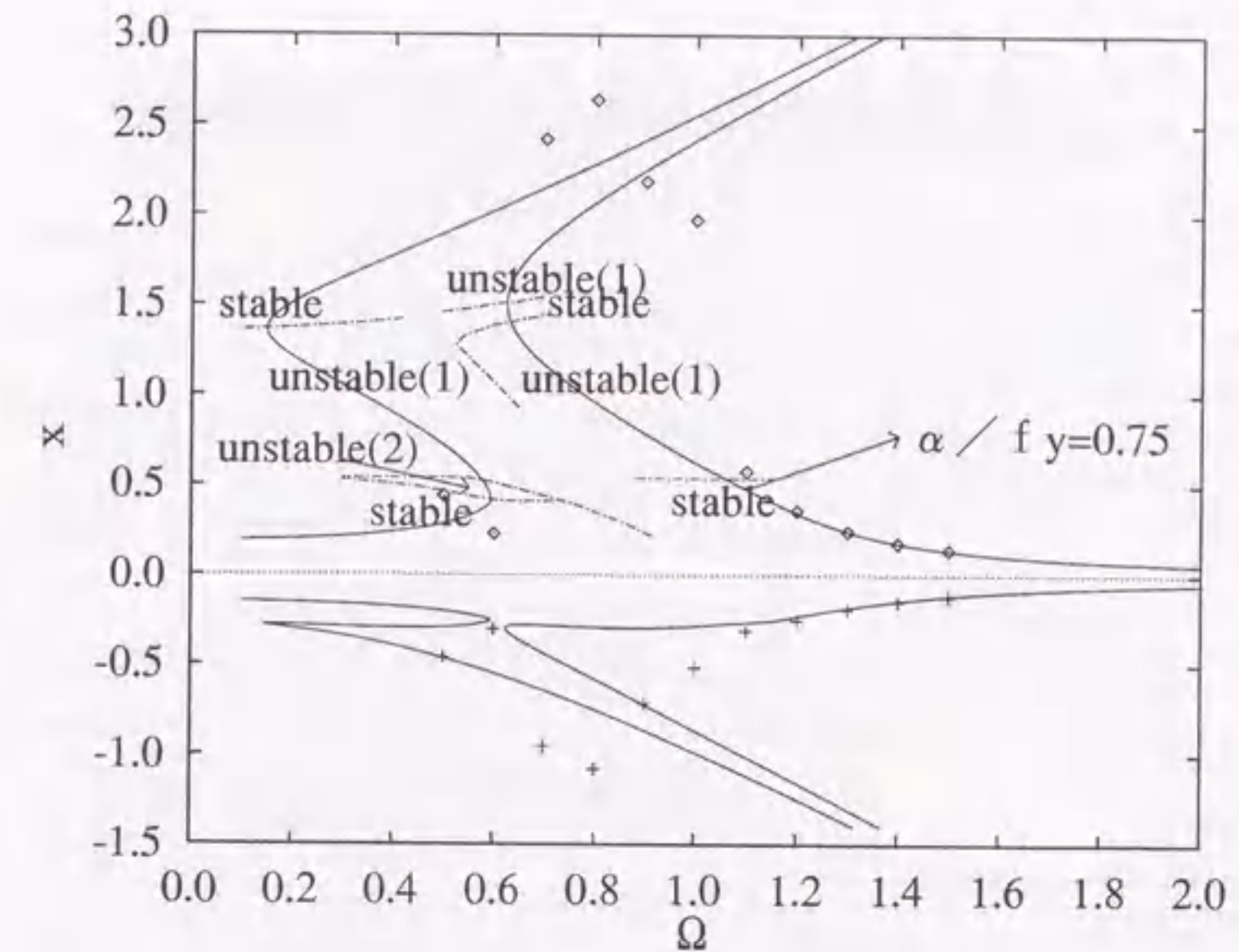


図 2.11: 時刻歴応答解析結果の応答値との比較 (弾塑性系・静的荷重なし: $f/f_y = 0$)

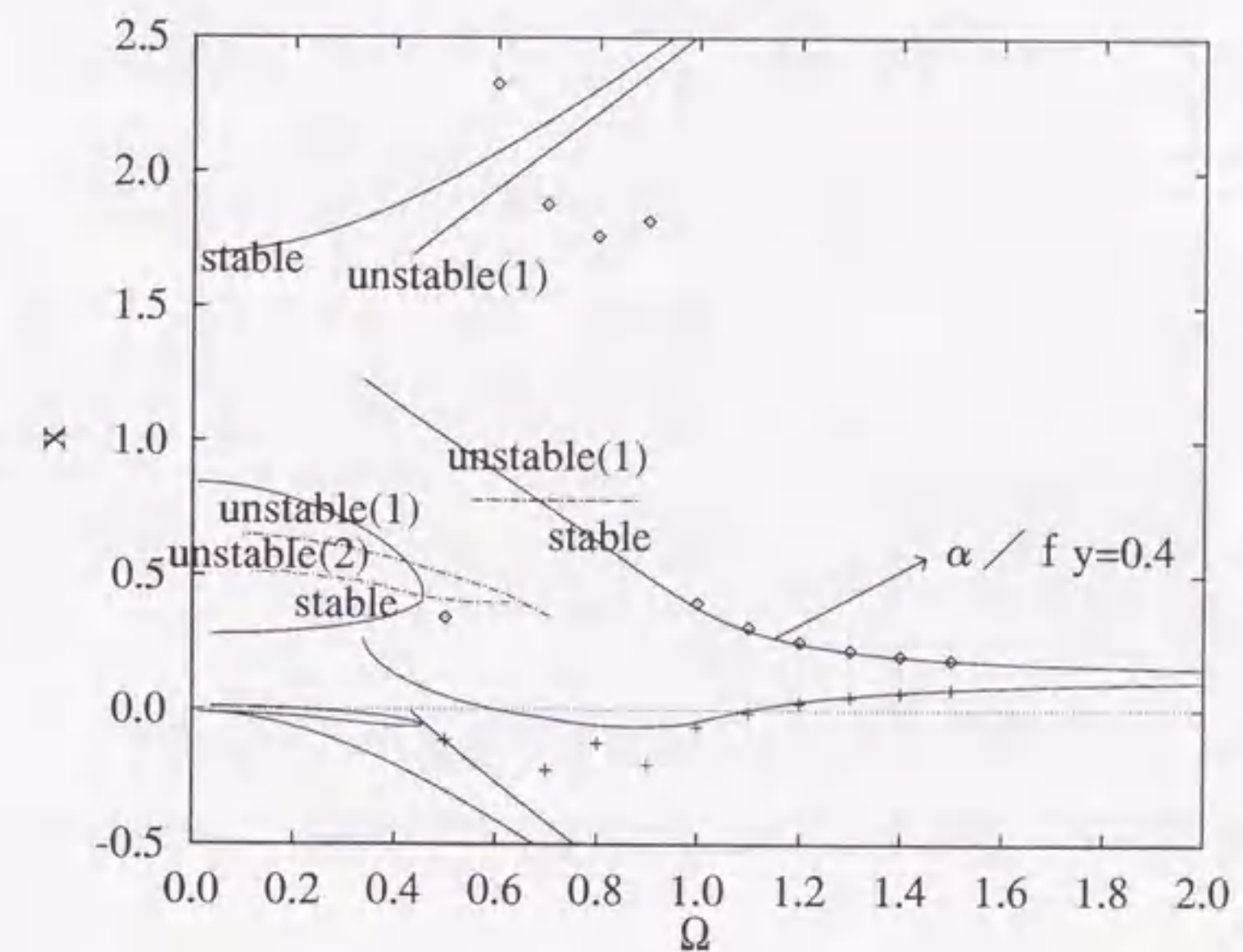
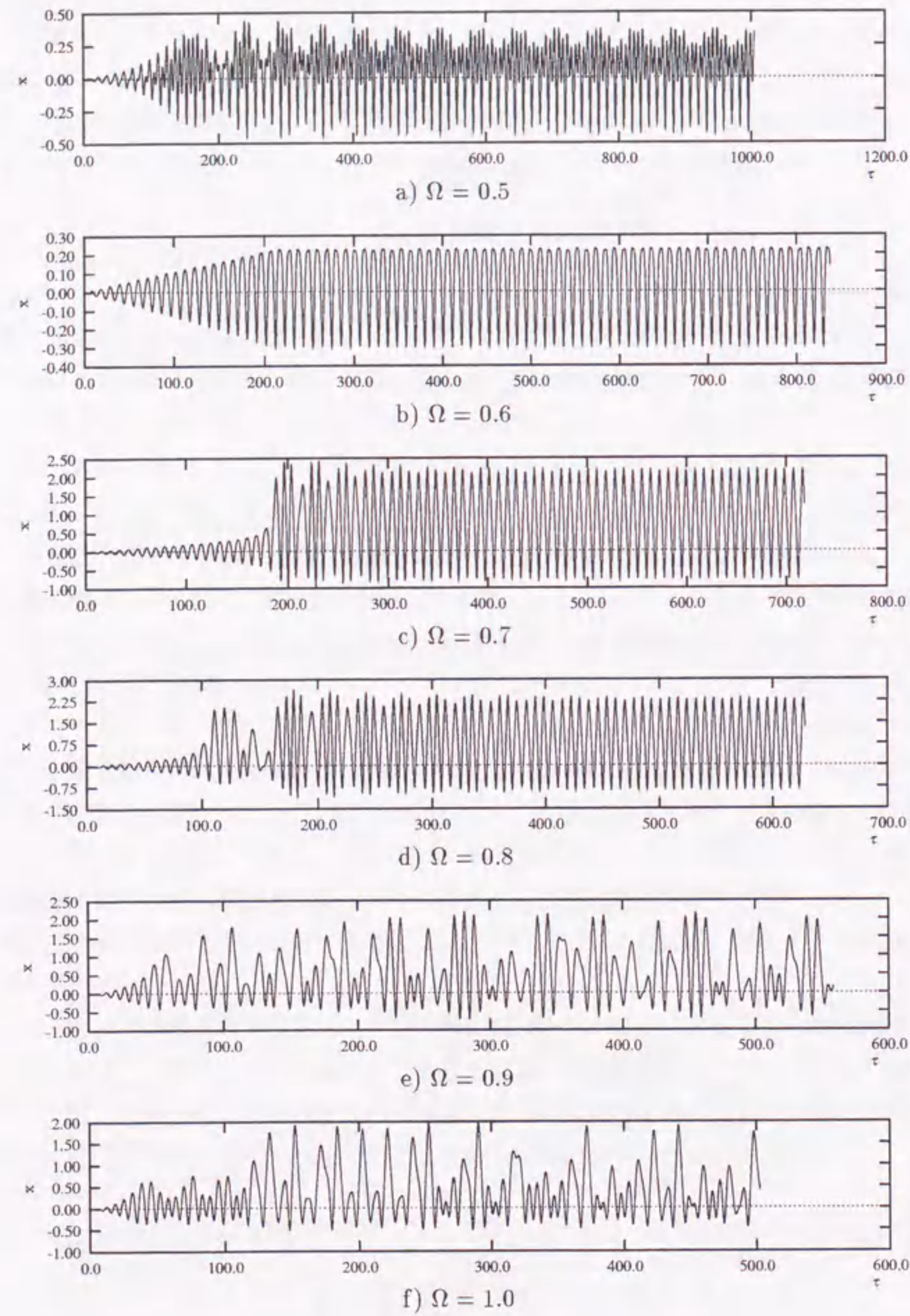
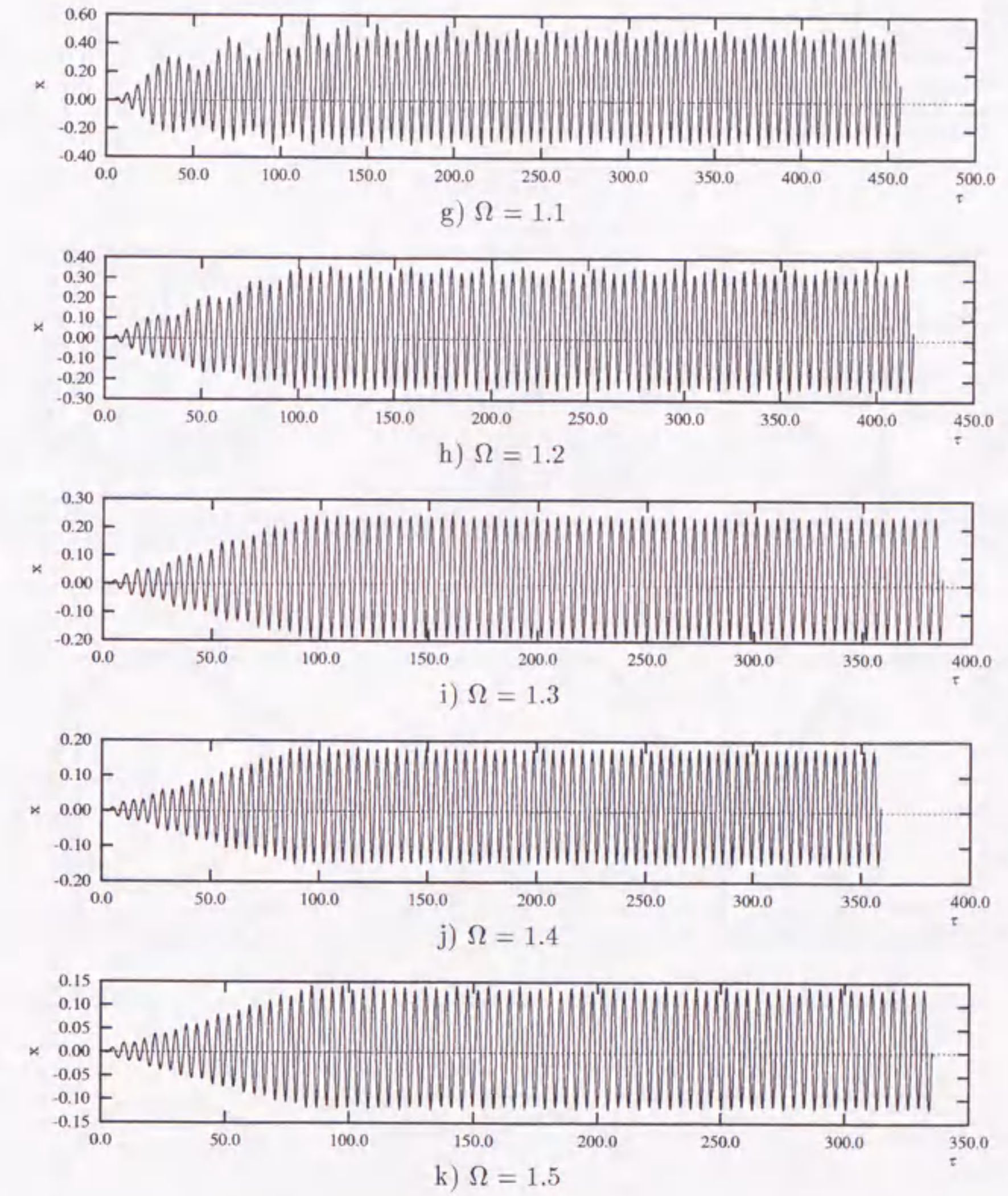
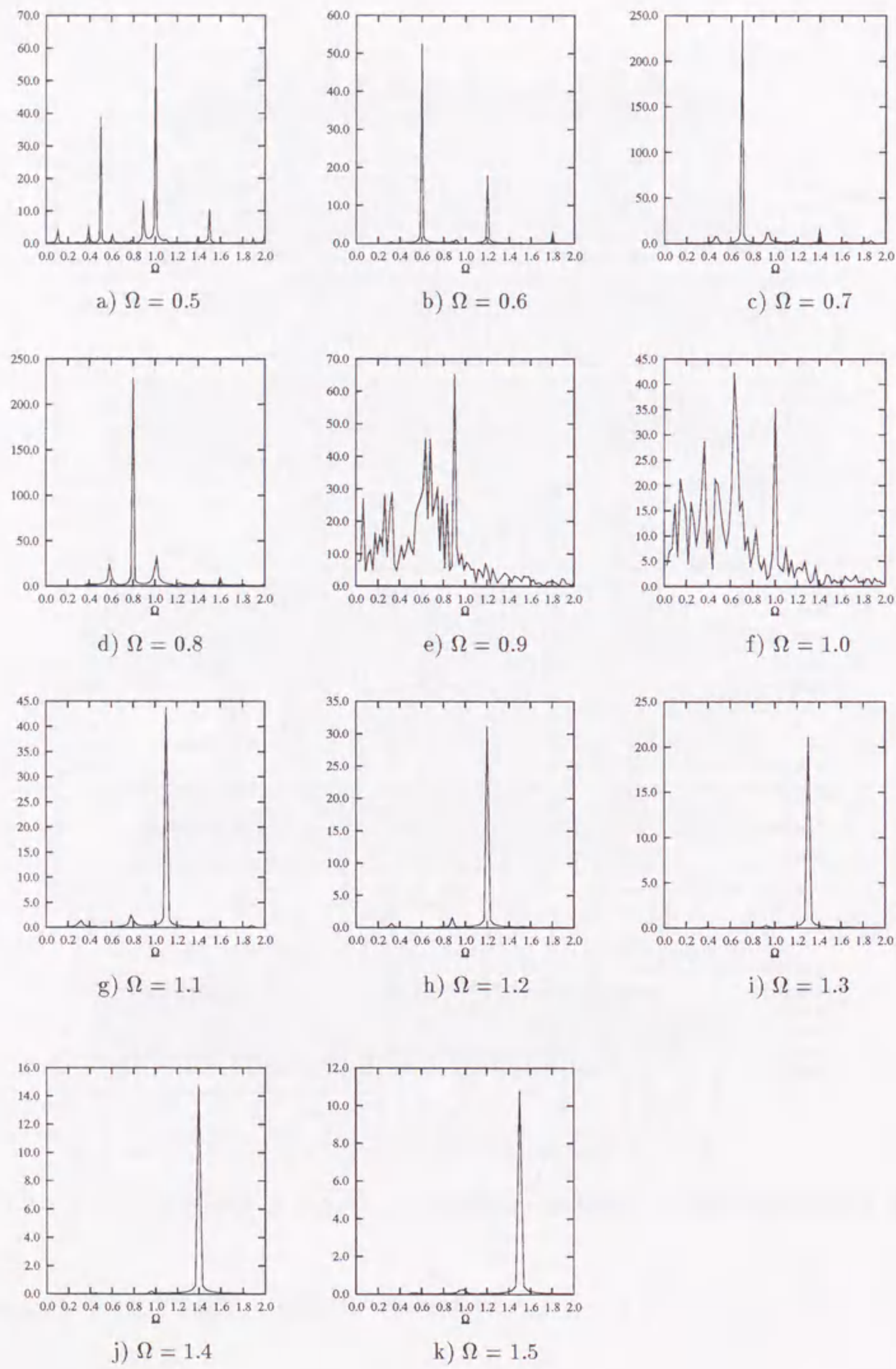
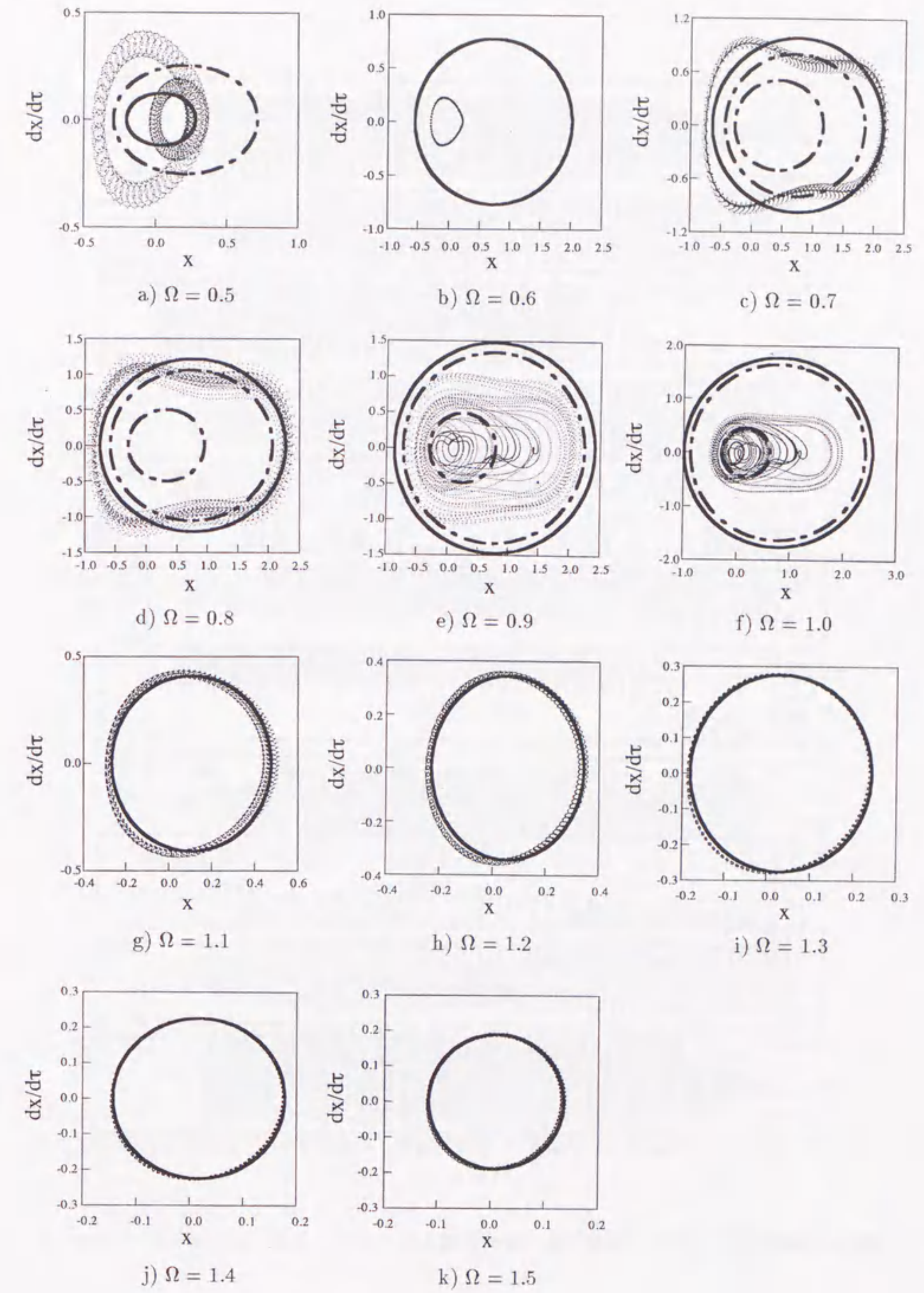


図 2.12: 時刻歴応答解析結果の応答値との比較 (弾塑性系・静的荷重あり: $f/f_y = 0.5$)

図 2.13: 時刻歴応答波形 (弾塑性系・静的荷重なし: $f/f_y = 0$, $\alpha/f_y = 0.75$ - その1)図 2.14: 時刻歴応答波形 (弾塑性系・静的荷重なし: $f/f_y = 0$, $\alpha/f_y = 0.75$ - その2)

図 2.15: フーリエスペクトル (弾塑性系・静的荷重なし: $f/f_y = 0$, $\alpha/f_y = 0.75$)図 2.16: 位相平面軌道 (弾塑性系・静的荷重なし: $f/f_y = 0$, $\alpha/f_y = 0.75$)

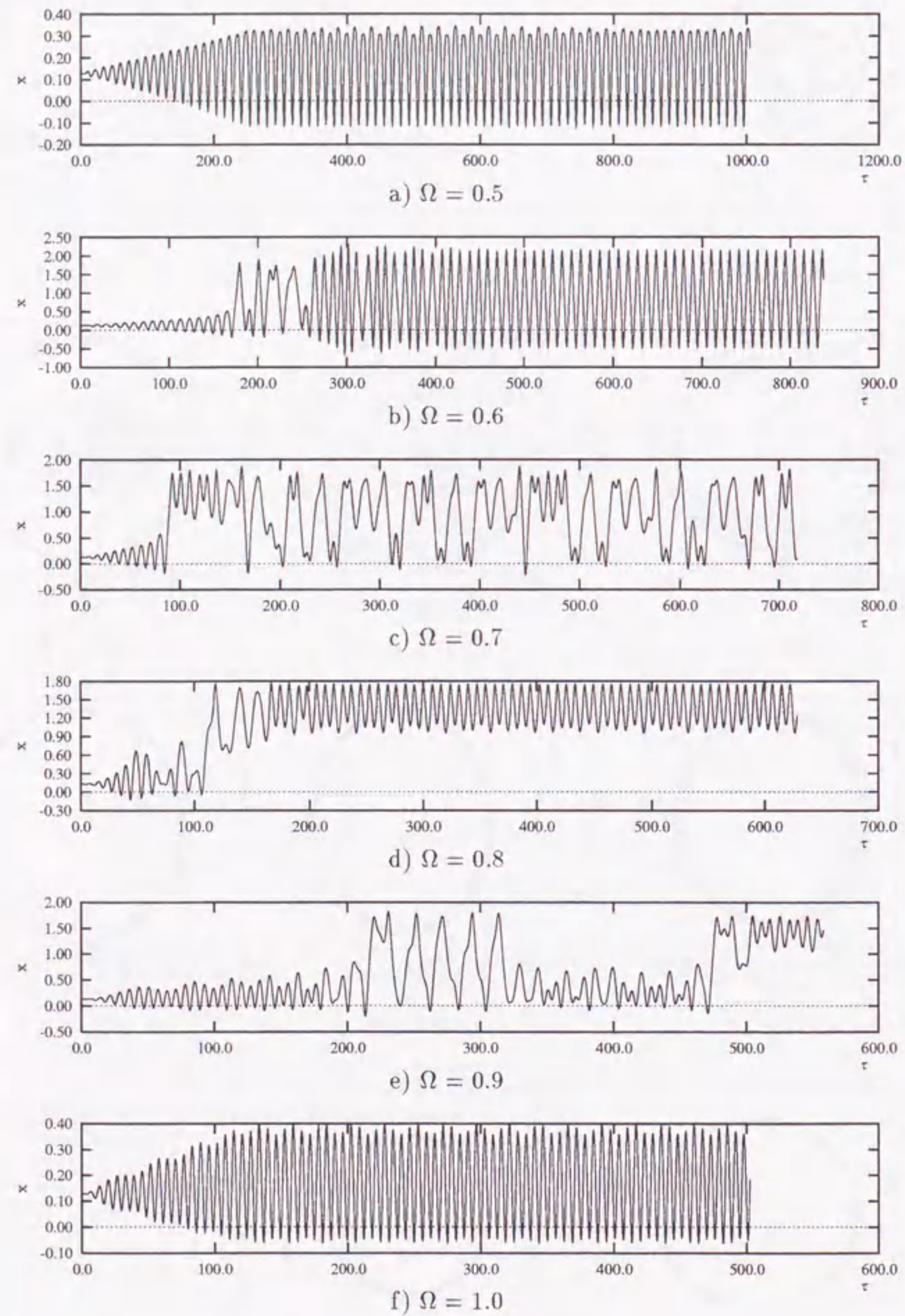


図 2.17: 時刻歴応答波形 (弾塑性系・静的荷重あり : $f/f_y = 0.5$, $\alpha/f_y = 0.4$ - その 1)

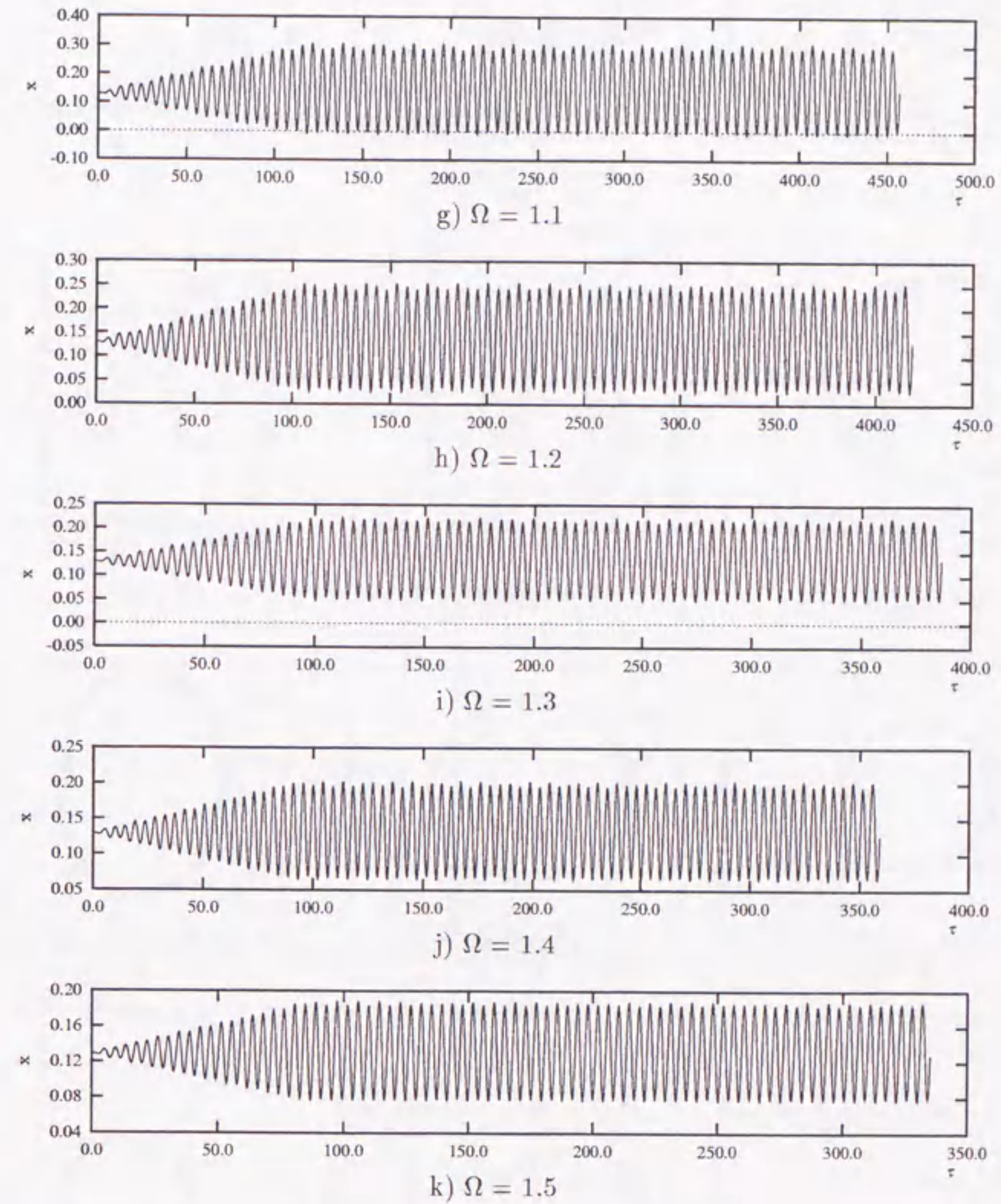


図 2.18: 時刻歴応答波形 (弾塑性系・静的荷重あり : $f/f_y = 0.5$, $\alpha/f_y = 0.4$ - その 2)

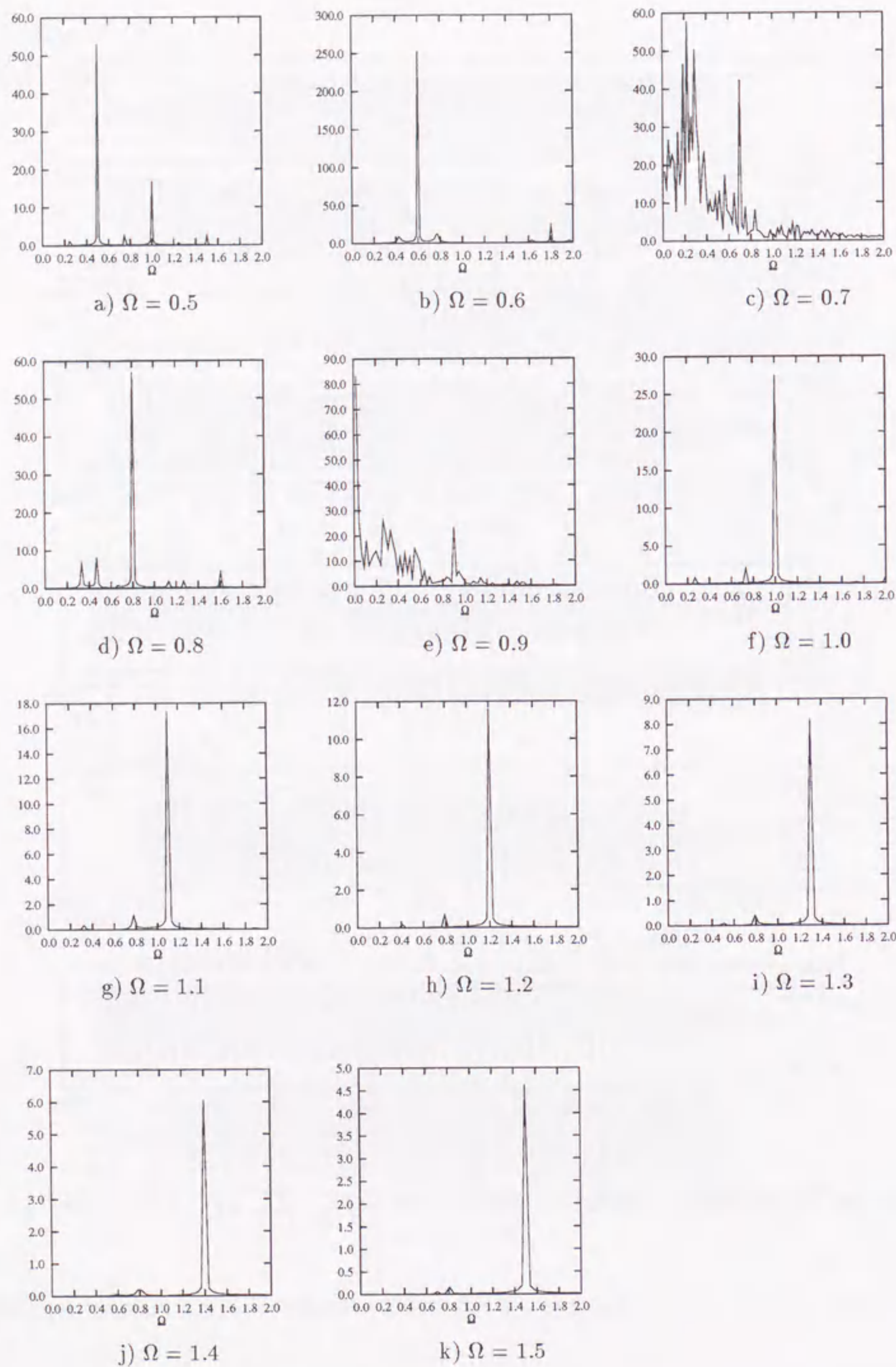


図 2.19: フーリエスペクトル (弾塑性系・静的荷重あり: $f/f_y = 0.5$, $\alpha/f_y = 0.4$)

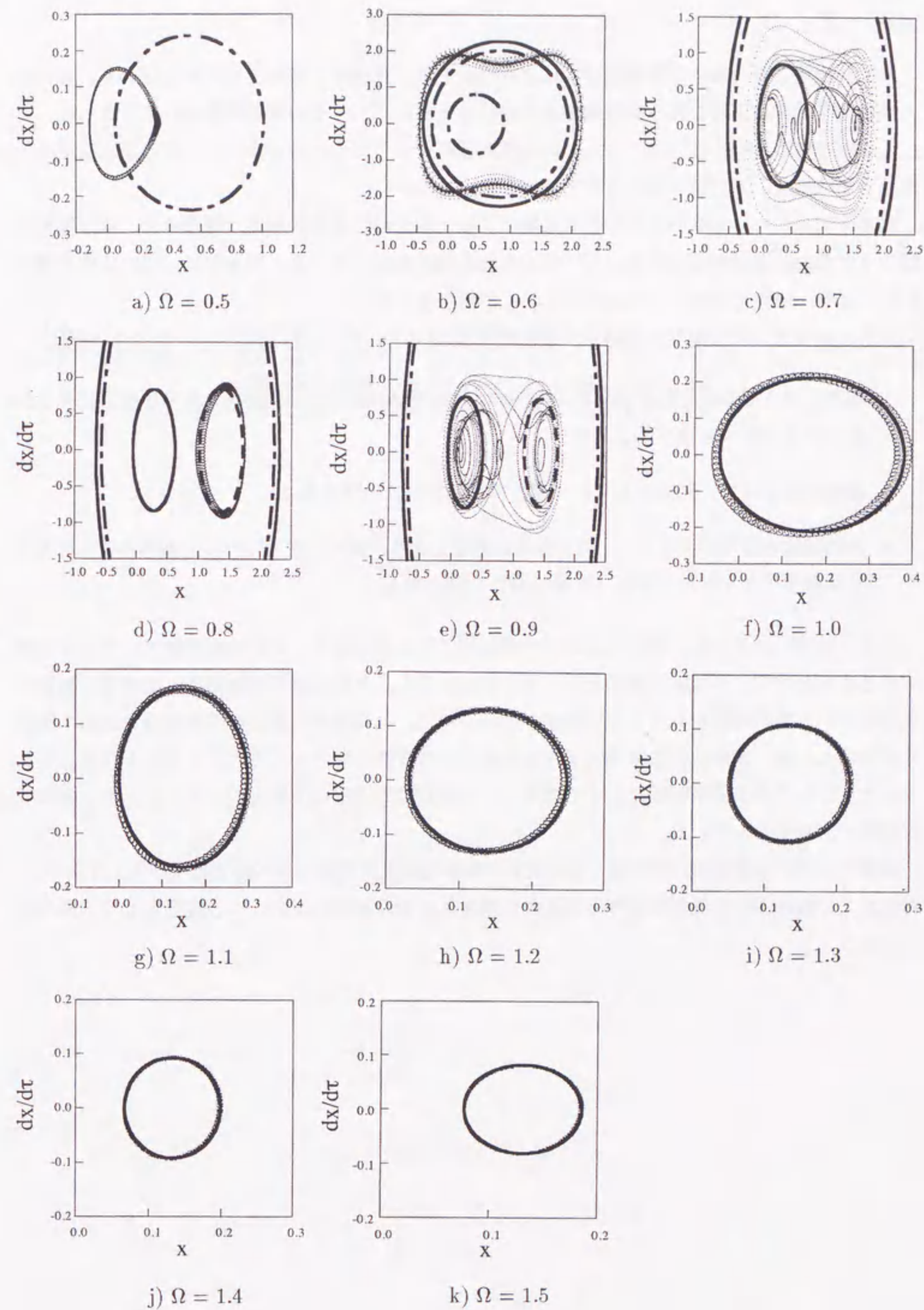


図 2.20: 位相平面軌道 (弾塑性系・静的荷重あり: $f/f_y = 0.5$, $\alpha/f_y = 0.4$)

2.6 まとめ

リンク機構と弾性および弾塑性ばねにより構成される非線形1自由度モデルを用いて、材料および幾何学的非線形性を伴う構造物の力学特性をモデル化し、その定常解を求めるとともに、これらの安定性の判別を行った。また、時刻歴応答解析から得られた時系列データの周波数成分と位相平面軌道を、定常解と対比させて分析した。

前者の結果から、本解析モデルの定常解によって示された共振曲線は、弾性系や、微小変形理論の下で扱われる履歴系を対象として求められる共振曲線と異なる性質を有し、特に静的荷重の影響により、極めて特徴ある性状を示すことが明らかとなった。

これらを簡単にまとめると、以下のようになる。

1. 履歴を伴う振動系でありながら、共振点に微小変形理論の下で取り扱われる履歴系に見られるような応答の上限が示されない。
2. 塑性化によって、元来有していた応答の非対称性は強められる。
3. 静的荷重の作用によって、上記の傾向は顕著となり、変形の増大に伴って振動の中心が大きく移動するとともに、振幅（変動成分）が減少する。

また、後者の結果から、時刻歴応答が定常応答に至る場合には、それは定常解のいずれかに対応するものとなり、不規則な波形を示す場合においても、その位相平面軌道は、定常解の軌道や安定性と何らかの関連を有することが示された。特に、定常解が不安定解である場合には、塑性化が進行した後、準弾性的な状態で示される安定な定常解に落ちつく場合があることが明らかとなった。これらの不安定領域で生ずる結果は、実際の動的挙動の支配要因を考える上で、極めて興味深い示唆を含んでいる。

本章で示された定常解の特性は、解析モデルの特有の性質や幾つかの仮定を含むものであるが、材料および幾何学的非線形性を伴う構造物の塑性化以後の振動性状の一つの典型として位置付けられよう。

第3章 屈服型の座屈性状を有する平面骨組構造物の振動性状

第3章

屈服型の座屈性状を有する平面骨組構造物の振動性状

3.1 はじめに

材料および幾何学的非線形性を伴う構造物の非線形振動に関して、簡単な1質点系モデルの解析の結果から明らかにされた様々な特徴を踏まえ、本章では、より具体的な平面骨組構造物の振動性状の分析を行う。

そこで、第2章で適用した定常振動解析の考え方を、より一般的な問題に応用する場合に問題となる留意事項を整理し、これを有限要素法を用いた数値解析手法に採り入れる。この中で、既存の力学問題との対応から、本手法の取り扱う定常解の意味付けが為される。

例題として、典型的な屈服型の座屈性状を有する偏平三角ラーメンの鉛直振動問題を取り上げる。本章で提案される定常振動解析手法を用いて、このモデルの定常解を求め、振動性状に関する概略の性質を把握するとともに、それらが実際の動的挙動にどのように反映されるのかを調べるために、定常解と同様の条件の下で時刻歴応答解析を行う。前章の結果に見られたように、時刻歴応答は、概ね定常解に一致するような応答を示す場合もあれば、何らかの関連を持ちながらも、これとは異なる複雑な応答を示す場合もある。特に、現実の構造物を対象とした場合、後者の多くは、安全性の観点から許容されない応答であると考えられ、ここでは、非線形領域における動的特性とこのような不安定挙動の関係を、具体的な構造物の検討を通して明らかにすることが目的となる。

3.2 有限要素法を用いた定常振動解析手法

前章で行った非線形1質点系モデルの定常振動解析では、履歴挙動の等価線形化を弾塑性ばねに対して適用したが、本章で述べる有限要素法による解析においては、塑性化に伴う内部の変化を構造物全体の動的特性に反映させるため、これを要素内の応力-歪関係に適用する。このような方法で、構造物の各部の状態を適切に表現するためには、解析方法に、さらに幾つかの配慮が

必要となる。

そこで本節では、平面梁要素の定式化とともに、このような点を中心とした解析手法の具体的手続きを述べる。

3.2.1 応力-歪関係の等価線形化

梁の材軸方向における応力-歪関係を、履歴中心の移動を考慮して、次のような形式で線形化する。

$$\sigma = E_e(\varepsilon - \varepsilon_r) + C_e \dot{\varepsilon} \quad (3.1)$$

ここに、 E_e 、 C_e 、 ε_r はそれぞれ等価弾性係数、等価粘性減衰係数、残留歪を表す。

(3.1)式の各々のパラメータの評価に際しては、要素内の歪応答が参照される。このうち、等価弾性係数および等価粘性減衰係数の算出については、前章の解析と同様に、履歴ループの形状に基づいた方法を適用する。

ところが、非線形振動においては、入力正弦波のような単純な波形であっても、非線形項の影響により、基本調波以外の高調波成分を無視できない歪応答となることがある[†](図3.1)。

この場合、実際のエネルギー損失を、単純な履歴ループの内部面積で評価することができないので、通常の等価粘性減衰係数の算出法は適切でない。

そこで、本解析においては、応力-歪間の履歴によるエネルギー損失を、次のような考えに基づいて求める。

「線形系(粘性減衰系)の1サイクルあたりのエネルギー損失は、その応答の速度(振動数)と振幅の両方に関係している。一方、一般に履歴系のそれは速度には無関係で、主として振幅に依存するものと考えられる。すなわち、速度および振幅の特性値が等しい応答に関しては、それぞれの系におけるエネルギー損失の評価は概ね同じであると考えられる。そこで、歪応答の2乗平均値、ならびに歪速度応答の2乗平均値が、高調波を含む歪応答のそれらとそれぞれ等しい単一波を定義する(図3.2)。この単一波による1サイクルあたりの履歴系のエネルギー損失は、履歴ループの内部面積より求めることができる。前述の考え方を適用すれば、ここで算出されるエネルギー損失は、単位時間あたりにおいて、高調波を含む歪応答による履歴系のエネルギー損失と近似的に等しいとみなすことができる。一方、これら2つの波形による粘性減衰系のエネルギー損失は理論的に一致する。従って、この履歴系のエネルギー損失の近似値より等価粘性減衰係数を定めることができる。」

以上の考え方をいれれば、高調波の影響を考慮した等価粘性減衰係数を概算的に求めることができる(付録D)。また、等価弾性係数である割線係数の算出に必要な振幅には、歪応答を構成す

[†]特に高調波応答を取り扱う場合を除き、工学上考えられる殆どのケースについては、このような歪応答の性質は問題にならないと考えられるが、ここでは一般性を考えて、これを定式化の中に取り入れた。この点に関し、第2章で扱ったモデルは、系の応答を代表する頂点の鉛直変位が弾塑性ばねの変位に一致するものであったため、仮定調波の変動成分を sine, cosine の基本調波の各1波で仮定する限りにおいては、弾塑性ばねの応答も1波の単純な波形で表されることから、このような配慮を必要としなかった。

る調波成分の係数の2乗和平方を採用する。これは先に定義した単一波の振幅に等しい。

残留歪は、歪応答に対する応力の変動を補正する役割を果たすが、これは材料の構成則に照らして妥当なものでなければならない。その扱いに関しては、等価弾性係数、等価粘性減衰係数を含めた計算過程の具体的な説明とともに、3.2.3で述べる。

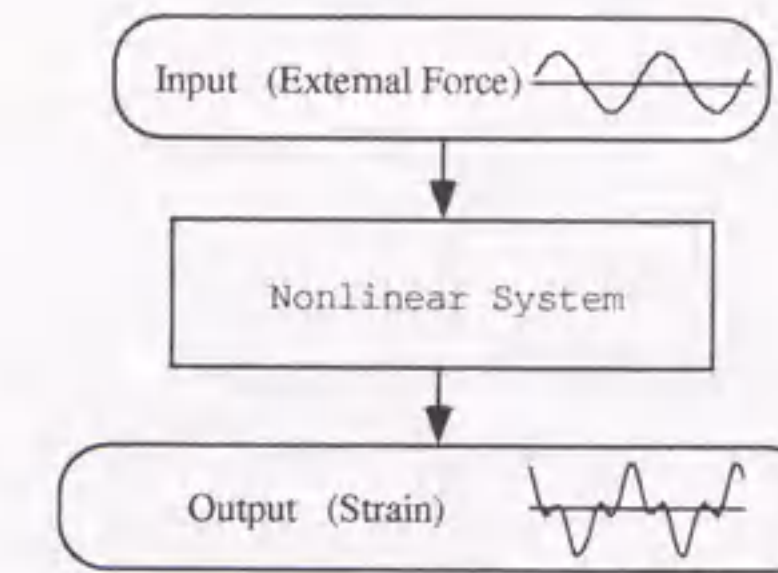


図 3.1: 入力(正弦波)と歪応答

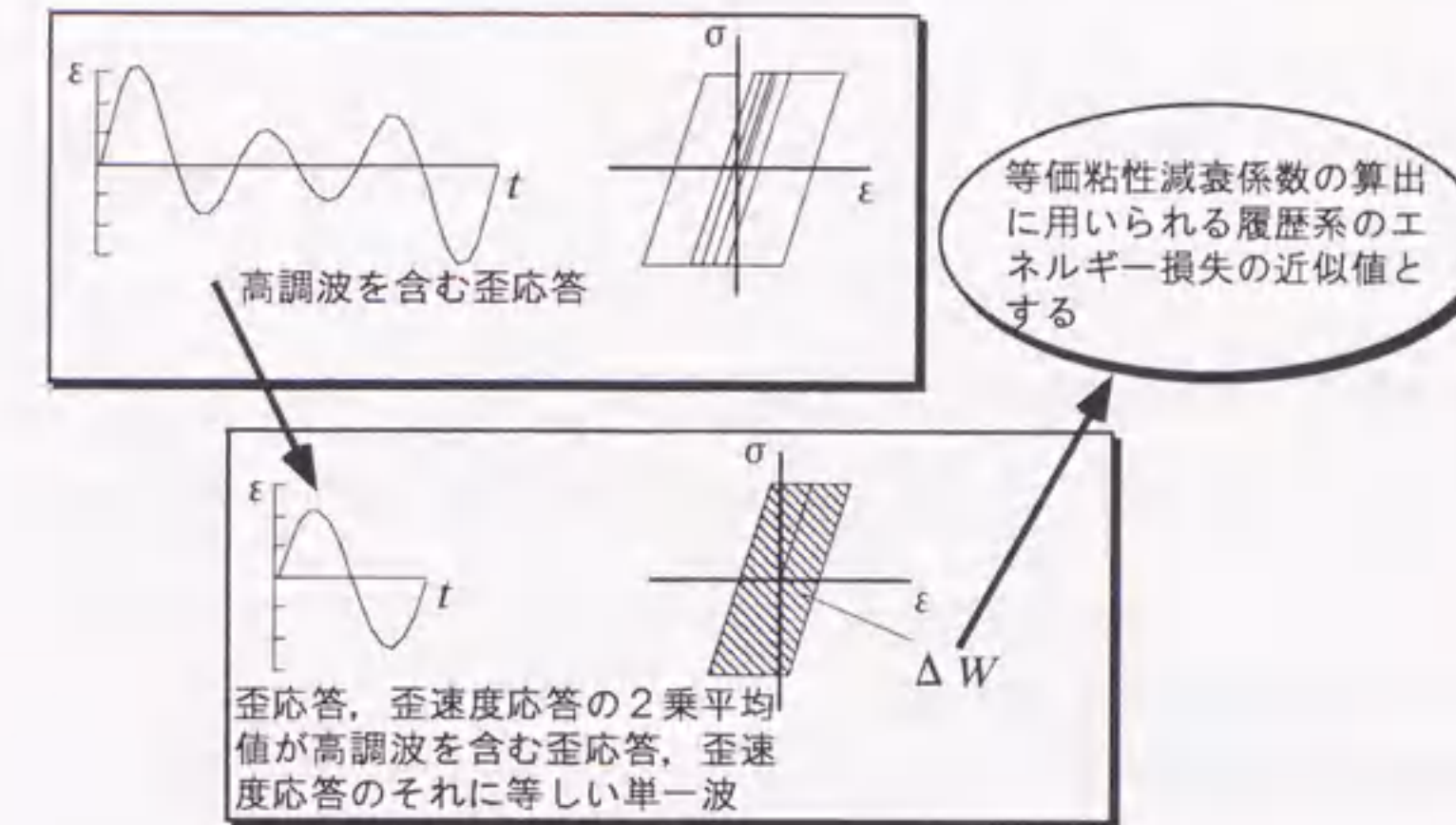


図 3.2: 履歴系のエネルギー損失の概算的評価

3.2.2 平面梁要素の定式化

図3.3に示すような平面梁要素を用いて、3.2.1で述べた手法を平面骨組を対象とした有限要素法に適用する。梁要素の変位関数として、軸方向変位に関して1次、たわみ方向変位に関して3次の多項式を採用すれば、これらは次式で表される。

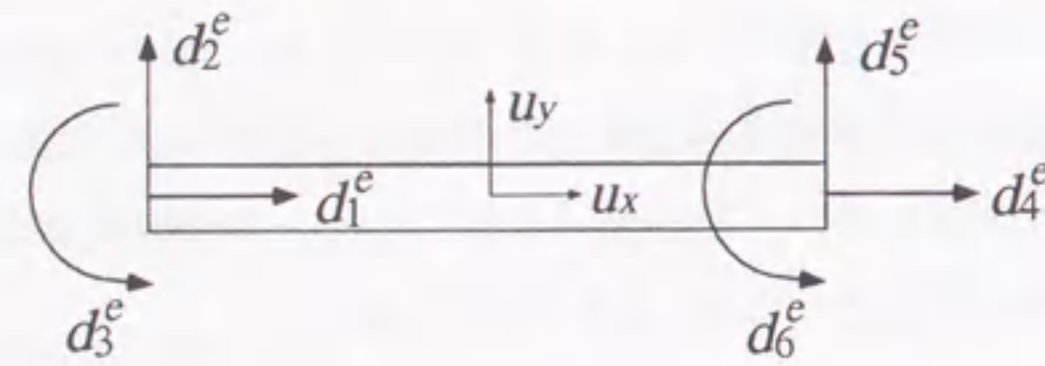


図 3.3: 平面梁要素

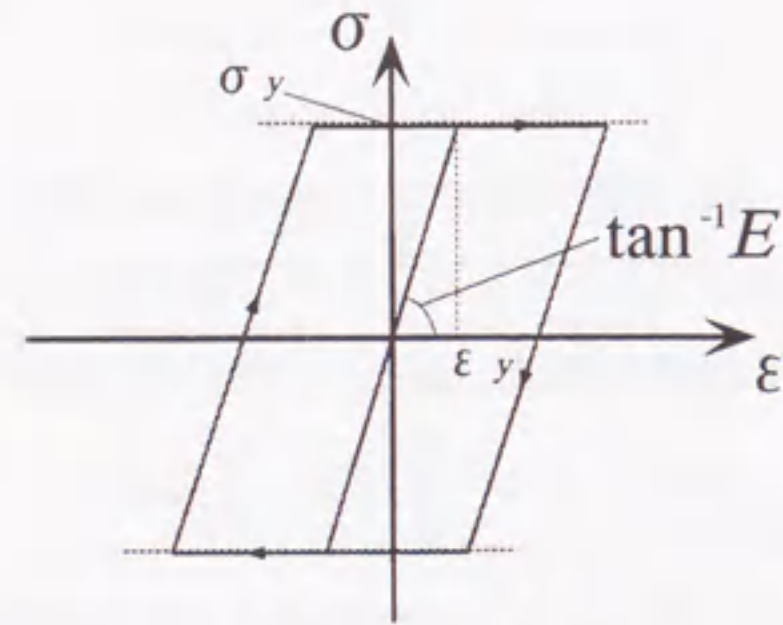


図 3.4: 応力-歪関係

$$\begin{aligned} u_x &= N_{1i} d_i^e \\ u_y &= N_{2i} d_i^e \end{aligned} \quad (3.2)$$

ここに,

$$[N] = \begin{bmatrix} 1-\xi & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 \\ 0 & 1-3\xi^2+2\xi^3 & (\xi-2\xi^2+\xi^3)l & 0 & 3\xi^2-2\xi^3 & (-\xi^2+\xi^3)l \\ \xi & 0 & 0 & 1-\xi & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xi = \frac{x}{l}$$

なお、添字については総和規約を適用する。

要素内の軸方向歪を次式で表す。

$$\varepsilon = \frac{du_x}{dx} - y \frac{d^2 u_y}{dx^2} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{du_y}{dx} \right)^2 + \left(\frac{du_x}{dx} - y \frac{d^2 u_y}{dx^2} \right)^2 \right\} \quad (3.3)$$

上式に (3.2) 式を用いて、次式を得る。

$$\varepsilon = B_i d_i^e + B_{ij}^N d_j^e \quad (3.4)$$

ここに,

$$[B] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{l} & \frac{6}{l^2}(1-2\xi)y & \frac{2}{l}(2-3\xi)y & \frac{1}{l} & -\frac{6}{l^2}(1-2\xi)y & \frac{2}{l}(1-3\xi)y \end{bmatrix}$$

$$[B^N] = \frac{1}{2} ([B]^t [B] + [B^y]^t [B^y])$$

$$[B^y] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{6}{l}(-\xi + \xi^2) & 1 - 4\xi + 3\xi^2 & 0 & \frac{6}{l}(\xi - \xi^2) & -2\xi + 3\xi^2 \end{bmatrix}$$

仮想仕事の原理より,

$$\iiint_V \{ \sigma \delta \varepsilon + \rho (\ddot{u}_x + \ddot{\eta}_x) \delta u_x + \rho (\ddot{u}_y + \ddot{\eta}_y) \delta u_y \} dV + \sum_{i=1}^6 \{ m_i^e (\ddot{d}_i^e + \ddot{\zeta}_i^e) - f_i^e \} \delta d_i^e = 0 \quad (3.5)$$

ここに、 ρ は要素の密度を、 m_i^e 、 f_i^e は、それぞれ、節点における集中質量および静的な外力を表す。また、 ζ_i^e は支点の動きに伴う構造物の剛体的な運動を仮定したときに節点に生ずる加速度であり、 $\ddot{\eta}_x$ 、 $\ddot{\eta}_y$ は、これによって生ずる要素内部の加速度を表す。これらはそれぞれ要素内の軸方向、たわみ方向のそれに対応し、次式で表される。

$$\begin{aligned} \ddot{\eta}_x &= N_{1i} \ddot{\zeta}_i^e \\ \ddot{\eta}_y &= N_{2i} \ddot{\zeta}_i^e \end{aligned} \quad (3.6)$$

(3.1) 式、(3.4) 式を用いれば、(3.5) 式の積分記号内の各項は以下のように整理される。

$$\begin{aligned} & \int \int \int_V \sigma \delta \varepsilon dV \\ &= \int \int \int_V \{ E_e (\varepsilon - \varepsilon_r) + C_e \varepsilon \} \delta \varepsilon dV \\ &= \int \int \int_V \{ E_e (B_i d_i^e + B_{ij}^N d_j^e - \varepsilon_r) + C_e (B_i d_i^e + 2B_{ij}^N d_j^e) \} (B_k \delta d_k^e + 2B_{kl}^N d_k^e \delta d_l^e) dV \\ &= \int \int \int_V [E_e \{ (A_{ij}^{(0)} - 2\varepsilon_r A_{ij}^{(2)}) d_j^e + (A_{ijk}^{(12)} + 2A_{kij}^{(12)}) d_j^e d_k^e + 2A_{ijkl}^{(4)} d_j^e d_k^e d_l^e - \varepsilon_r B_i \} \\ & \quad + C_e \{ A_{ij}^{(0)} d_j^e + (2A_{ijk}^{(12)} + 2A_{kij}^{(12)}) d_j^e d_k^e + 4A_{ijkl}^{(4)} d_j^e d_k^e d_l^e \}] \delta d_i^e dV \end{aligned} \quad (3.7)$$

ここに、 $A_{ij}^{(0)} = B_i B_j$ 、 $A_{ij}^{(2)} = B_{ij}^N$ 、 $A_{ijk}^{(12)} = B_i B_{jk}^N$ 、 $A_{ijkl}^{(4)} = B_{ij}^N B_{kl}^N$

$$\begin{aligned} & \int \int \int_V \{ \rho (\ddot{u}_x + \ddot{\eta}_x) \delta u_x + \rho (\ddot{u}_y + \ddot{\eta}_y) \delta u_y \} dV \\ &= \int \int \int_V \rho \{ (N_{1j} \ddot{d}_j^e + N_{1j} \ddot{\zeta}_j^e) N_{1i} \delta d_i^e + (N_{2j} \ddot{d}_j^e + N_{2j} \ddot{\zeta}_j^e) N_{2i} \delta d_i^e \} dV \\ &= \int \int \int_V \rho \{ N_{ki} N_{kj} \ddot{d}_j^e + N_{ki} N_{kj} \ddot{\zeta}_j^e \} \delta d_i^e dV \end{aligned} \quad (3.8)$$

従って、次のような運動方程式を得る。

$$M_{ij}^e \ddot{d}_j^e + C_{ij}^{(0)e} \dot{d}_j^e + C_{ijk}^{(1)e} d_j^e \dot{d}_k^e + C_{ijkl}^{(2)e} d_j^e d_k^e \dot{d}_l^e + K_{ij}^{(0)e} d_j^e + K_{ijk}^{(1)e} d_j^e d_k^e + K_{ijkl}^{(2)e} d_j^e d_k^e d_l^e + R_i^e = -M_{ij}^e \ddot{\zeta}_j^e + f_i^e \quad (3.9)$$

ここに, M_{ij}^e は質量マトリクス, $K_{ij}^{(0)e} \sim K_{ijkl}^{(2)e}$, $C_{ij}^{(0)e} \sim C_{ijkl}^{(2)e}$ は等価剛性マトリクスおよび等価粘性減衰マトリクス, R_i^e は残留歪による節点力ベクトルであり, その内容は以下の通りである。

$$\begin{aligned} M_{ij}^e &= \int \int \int_V \rho N_{ki} N_{kj} dV + \delta_{ij} m_i^e \\ C_{ij}^{(0)e} &= \int \int \int_V C_e A_{ij}^{(0)} dV \\ C_{ijk}^{(1)e} &= \int \int \int_V 2C_e (A_{ijk}^{(12)} + A_{kij}^{(12)}) dV \\ C_{ijkl}^{(2)e} &= \int \int \int_V 4C_e A_{ijkl}^{(4)} dV \\ K_{ij}^{(0)e} &= \int \int \int_V E_e (A_{ij}^{(0)} - 2\varepsilon_r A_{ij}^{(2)}) dV \\ K_{ijk}^{(1)e} &= \int \int \int_V E_e (A_{ijk}^{(12)} + 2A_{kij}^{(12)}) dV \\ K_{ijkl}^{(2)e} &= \int \int \int_V 2E_e A_{ijkl}^{(4)} dV \\ R_i &= - \int \int \int_V E_e \varepsilon_r B_i dV \\ \delta_{ij} &= \begin{cases} 1 & (i=j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \end{aligned}$$

支点に入力される加速度が, 次式のような正弦波で与えられるものとする。

$$\ddot{y} = \alpha \sin pt \quad (3.10)$$

(3.9) 式の解を次式で仮定する。

$$d_i^e = \sum_{j=0}^N c_{ij}^e \cos jpt + \sum_{j=1}^N s_{ij}^e \sin jpt \quad (3.11)$$

(3.11) 式を (3.9) 式に用いて, 調波ごとに整理し, 座標変換を施した上で全要素について重ね合わせれば次式のような仮定調波の係数に関する連立非線形代数方程式を得る。

$$L_{ij}^{(0)} x_j + L_{ijk}^{(1)} x_j x_k + L_{ijkl}^{(2)} x_j x_k x_l + \alpha G_i + H_i = 0 \quad (3.12)$$

ここに,

$$\{x_i\}^T = \{c_{10}, c_{11}, s_{11}, \dots, c_{nN}, s_{nN}\}$$

ここで, (3.9) 式の等価剛性マトリクスおよび等価粘性減衰マトリクスに含まれる要素内の等価弾性係数および等価粘性減衰係数の具体的な評価式について述べる。(3.11) 式の定常解に対応して, 歪応答は次のような形で表される。

$$\varepsilon = \sum_{j=0}^{2N} a_j \cos jpt + \sum_{j=1}^{2N} b_j \sin jpt \quad (3.13)$$

応力-歪関係を図 3.4 に示すような完全弾塑性型とすれば, 3.2.1 で述べた方法に基づき, 等価弾性係数および等価粘性減衰係数は次式により与えられる。

$$E_e = \begin{cases} \frac{E\varepsilon_y}{\sqrt{\sum_{j=1}^{2N} a_j^2 + \sum_{j=1}^{2N} b_j^2}} & \left(\sqrt{\sum_{j=1}^{2N} a_j^2 + \sum_{j=1}^{2N} b_j^2} > \varepsilon_y \right) \\ E & \left(\sqrt{\sum_{j=1}^{2N} a_j^2 + \sum_{j=1}^{2N} b_j^2} \leq \varepsilon_y \right) \end{cases} \quad (3.14)$$

$$C_e = \begin{cases} \frac{\Delta W}{\pi \left(\sum_{j=1}^{2N} a_j^2 + \sum_{j=1}^{2N} b_j^2 \right) np} & \left(\sqrt{\sum_{j=1}^{2N} a_j^2 + \sum_{j=1}^{2N} b_j^2} > \varepsilon_y \right) \\ 0 & \left(\sqrt{\sum_{j=1}^{2N} a_j^2 + \sum_{j=1}^{2N} b_j^2} \leq \varepsilon_y \right) \end{cases} \quad (3.15)$$

ここに,

$$\Delta W = 4E\varepsilon_y \left(\sqrt{\sum_{j=1}^{2N} a_j^2 + \sum_{j=1}^{2N} b_j^2} - \varepsilon_y \right)$$

であり, n は次式を満たす振動数比である。

$$\frac{1}{n} \int_0^{2\pi/p} \varepsilon^2 dt = \int_0^{2\pi/np} \varepsilon_s^2 dt \quad (3.16)$$

上式の ε は, 次式で与えられる。

$$\varepsilon_s = a_0 + \left(\sqrt{\sum_{j=1}^{2N} a_j^2 + \sum_{j=1}^{2N} b_j^2} \right) \cos npt \quad (3.17)$$

3.2.3 定常振動の移行過程と解曲線

一般の構造物の振動を取り扱う場合には, 1 質点系の問題と異なり, 外乱の振動数によって変形性状に違いが生じ, これらに対する塑性化の状況も異なったものとなる。すなわち, 応答の単調な増大を既定することによって, 対象とする定常振動の状態変化を定めようとしても, 外乱の振動数に何ら制約がなければ, 得られる定常解は, この振動数の初期値や変化に依存したものとなる。そこで本解析では, これを一意に定め, 解の持つ意味付けを明確にするために, 解析を進める過程において, 外乱の振動数を一定とする。

図 3.5 に示すように, 系の静止状態を起点として, 最大変位を増加させていくと, 与えられた振動数に対応して, 現在の定常状態から次の定常状態への移行過程で示される準静的な解曲線が定義される。この解曲線を順次求めていくことにより, 入力波の加速度の大きさと応答との関係が, 系の定常振動の移行過程として得られる。また, 入力波の振動数を 0 として, 定数成分のみに着

目すれば、この解析は通常の静的な弾塑性解析と同じものとなる。従って、図3.5の $p=0$ の鉛直平面内に描かれる解曲線は、この静的な釣合曲線に相当する。

すなわち本解析は、静的な釣合曲線の解析を、動的特性とその変化を考慮した釣合曲線の解析に汎化したものと考えることができる。従って個々の解曲線は入力波の振動数に依存した、動的な繰り返し荷重下における一種の弾塑性特性を表すことになる。そして、これらの解曲線を複数の外力の振動数に対して求めれば、振動数と系の応答の関係を示す共振曲線を得ることができる。

図3.6に具体的な解析の手順を示す。解析は、構造物の特定の箇所の変位応答の変動量（定数項を除く、調波の係数の2乗和平方）と非変動量（定数項）の和を、解析を制御する増分パラメータとして選択し、これを適当な刻み幅で増加させることによって進められる。図3.6は、この解析過程の1つの増分ステップ中で行われる手順を示している。

等価弾性係数 E_e 、等価粘性減衰係数 C_e 、残留歪 ε_r は、前ステップで得られたもの（最初のステップにおいては $E_e = E$ 、 $C_e = \varepsilon_r = 0$ ）で仮定する。(3.9)式で表される運動方程式に基づいて、(3.12)式のような非線形代数方程式を作成し、Newton-Raphson法により、仮定調波の係数を求める。

等価弾性係数、等価粘性減衰係数、残留歪は、定常解から得られる要素内の歪応答と整合させる必要があるため、(3.13)式を参照の上、等価弾性係数、等価粘性減衰係数については、(3.14)、(3.15)式で再度算定し、残留歪については、最大もしくは最小歪に対応する応力が、収束解の求められた前ステップの状態から許容される応力-歪関係を保つように値を更新する（この残留歪の更新手続きは静的な弾塑性解析でしばしば用いられる初期応力法の概念に類似する）。図3.7に、この問題で想定される応力-歪履歴の変化の一例を示すが、実際の履歴の変化は複雑であり、通常の弾塑性解析と同様、これらを完全に矛盾無く取り扱うのは難しい。残留歪の更新に関して、本解析では、履歴の正負いずれかの折り返し点（歪の最大もしくは最小応答）を、現時点における履歴の移動方向を考慮の上、塑性化の進行に関係する点として選択し、前ステップの状態に対するこの点の変化に応じて上記の操作を行う。すなわち、これによれば、前々ステップから前ステップに至る変化に応じて、当該ステップの状態を既定する残留歪の更新方向（上述の事項に対応して正負いずれかにしか許容され得ない）が定まる。

以上の手順を解が収束するまで、繰り返す。この収束過程は、問題の性質により増減はあるが、通常3~10回程度の繰り返しで終了する。

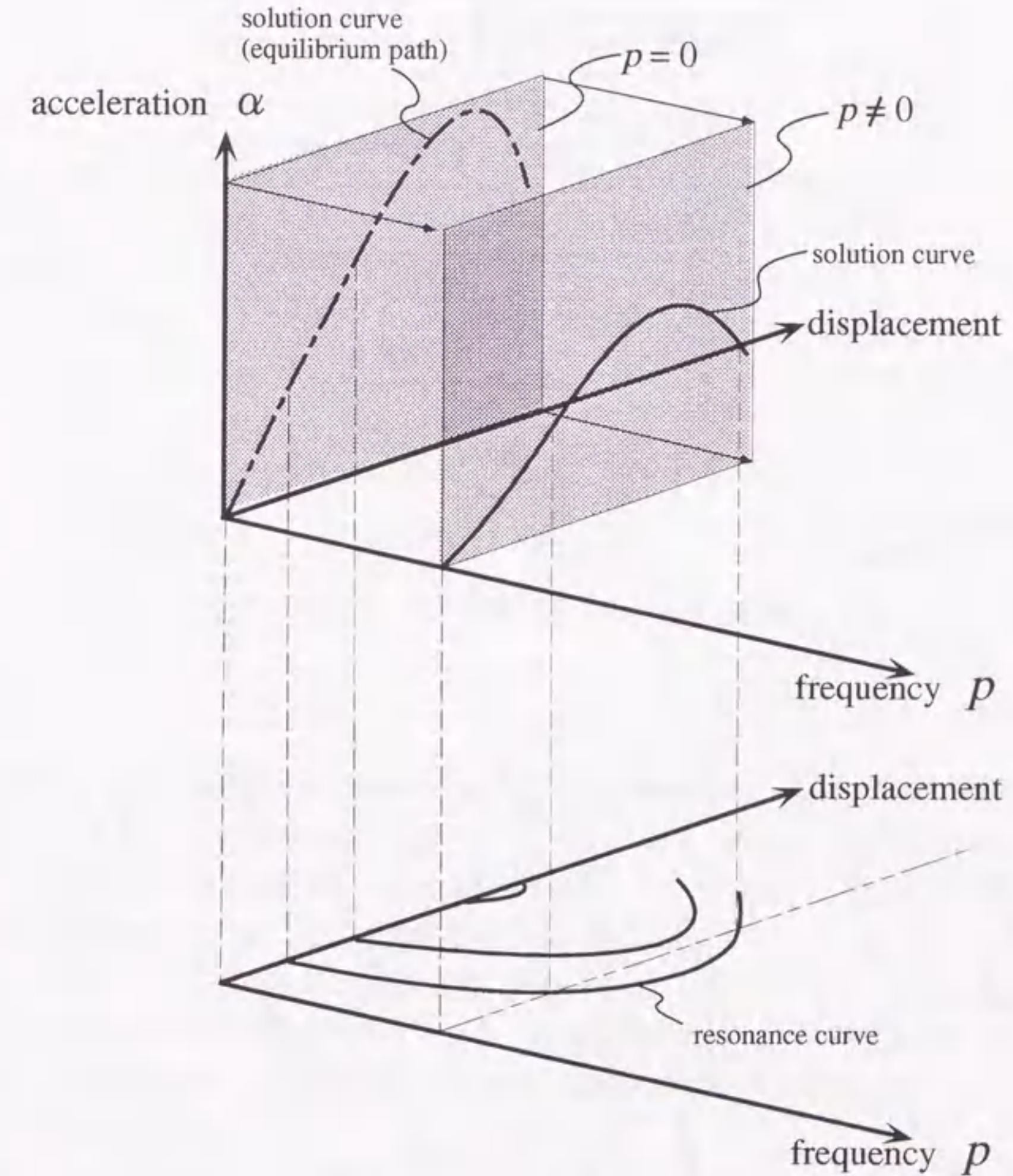


図3.5: 解曲線および共振曲線

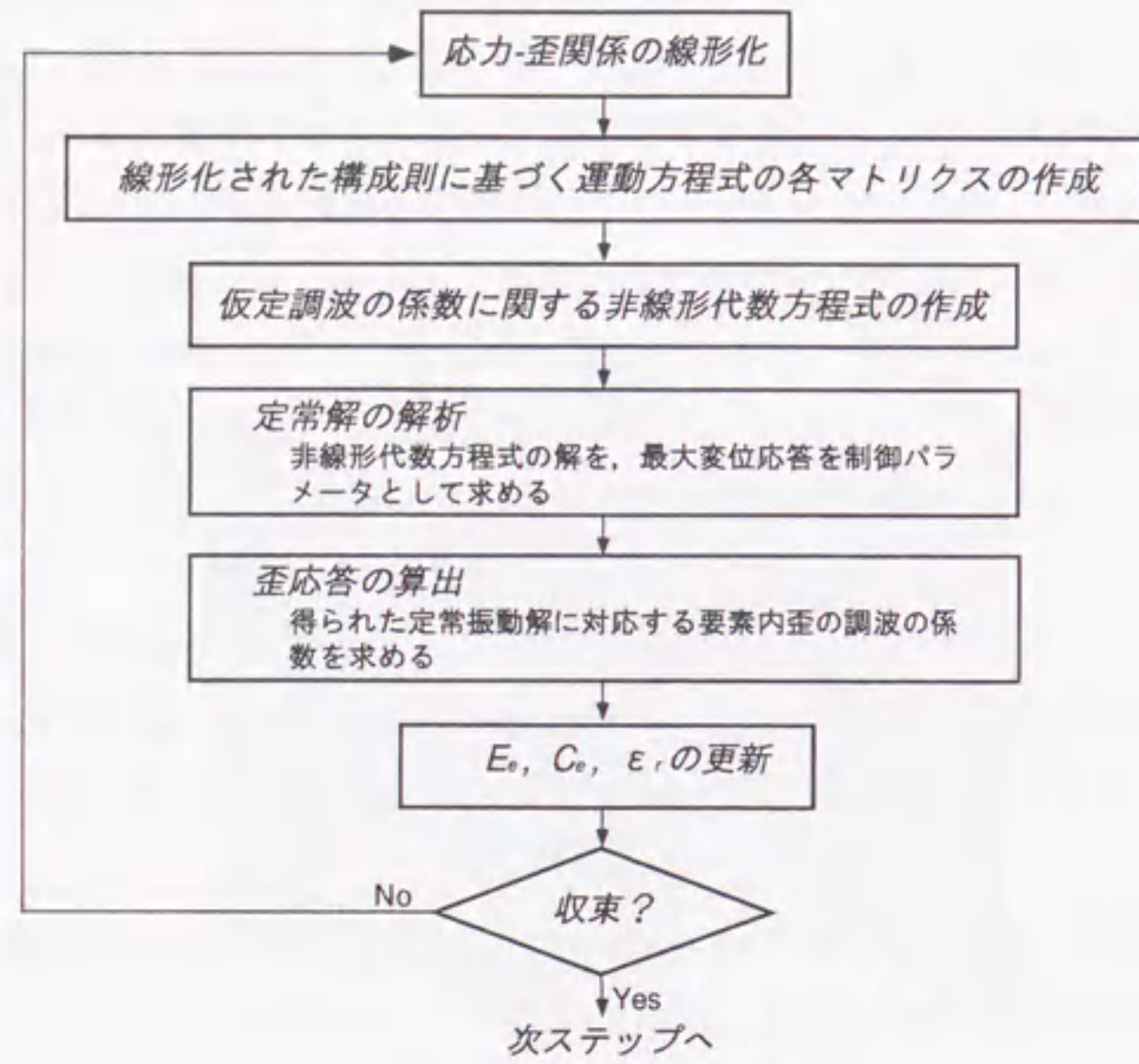


図 3.6: 解析手順

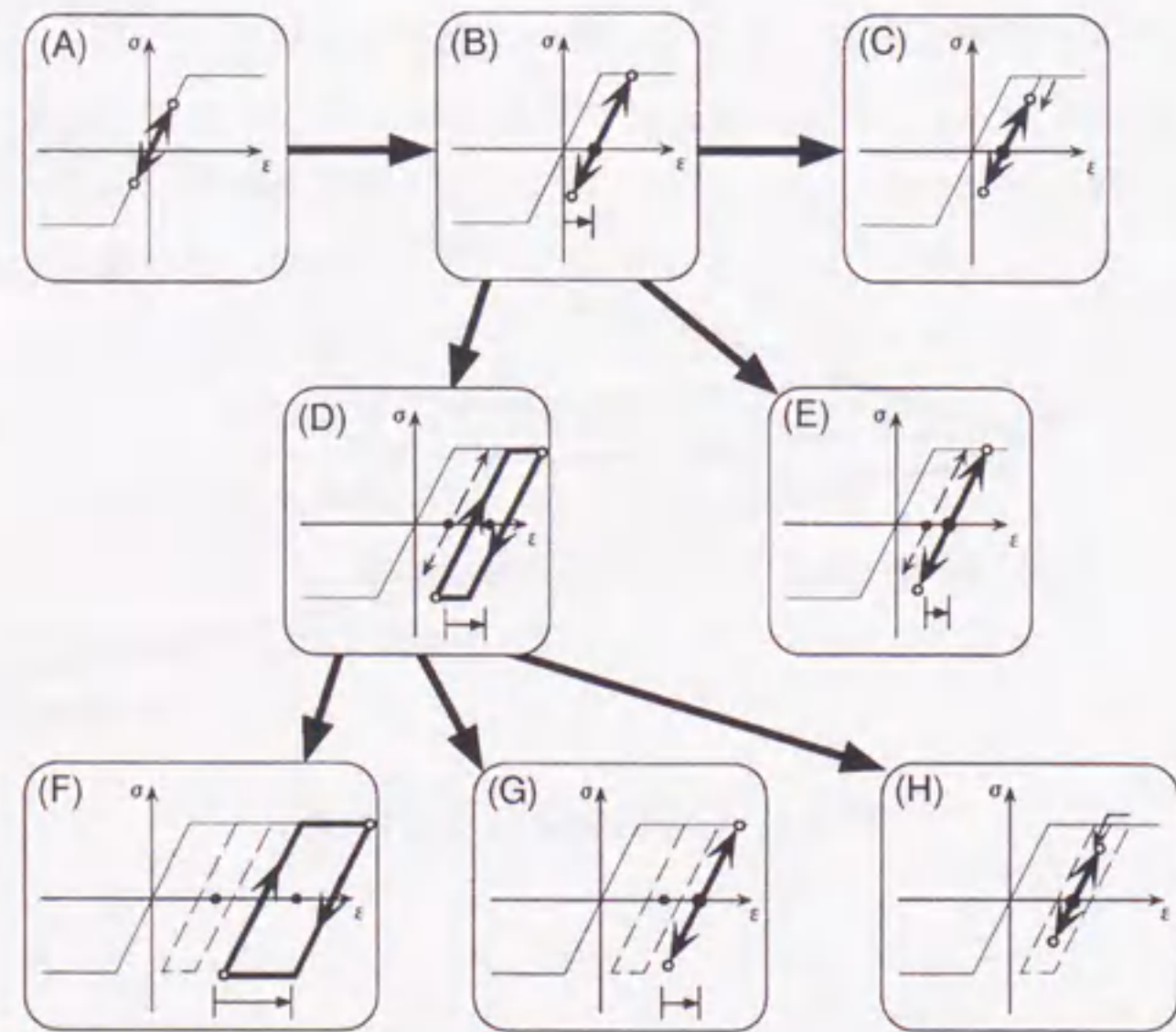


図 3.7: 応力-歪履歴の変化

3.3 数値解析

3.3.1 解析モデル

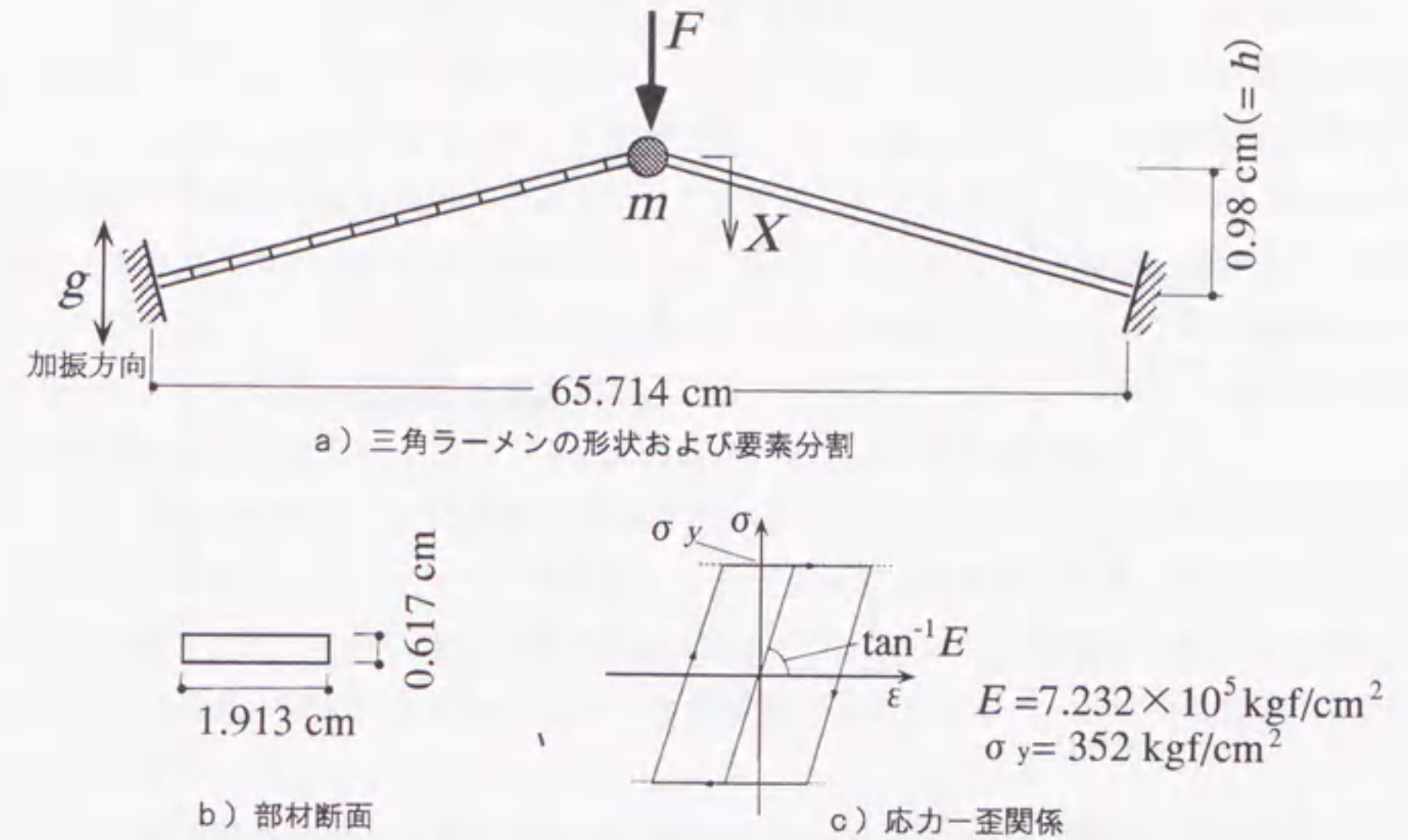


図 3.8: 解析モデル

図 3.8に示す偏平な三角ラーメンは Williams' toggle と呼ばれ [37], 非線形数値解析の代表的な例題として, 多くの文献において取り上げられている。本来は, 弾性系の幾何学的非線形問題に関する静的解析モデルとして扱われているものであるが, ここでは図に示すように, 材料の応力-歪関係に完全弾塑性型を用い, 頂点に集中質量を与えたモデルとしている。集中質量の大きさとして, $m = 5\text{kg}$ と, $m = 10\text{kg}$ の 2種類を設定した。さらに, これらの各々について, 質量に相当する大きさの下向き静的荷重が作用する場合と作用しない場合の 2つの条件を考慮した。このとき $m = 10\text{kg}$ の場合は, 静的な鉛直荷重に換算すれば弾性限界近くの荷重に相当し, $m = 5\text{kg}$ はその半分の荷重となる。

解析は対称性を考慮して, 左半分について行う。要素分割については, この部分を等間隔に 12 分割している。また, 要素の数値積分は, 軸方向 5 点, 高さ方向 7 点の Gauss の求積法による。

静的解析に基づくモデルの荷重-変位曲線を図 3.9に示す。比較のため, 材料が常に弾性であるものと仮定した場合の荷重-変位曲線も併せて示している。荷重-変位曲線は, いずれも典型的な屈服型の座屈性状を示すが, 弾塑性系においては, 弾性座屈を生ずる前に塑性化が起こるため, 弾性系に比べて, 座屈荷重は低減するとともに, 座屈後の荷重の低下も大きい。総じて, その静的な力学特性は, 前章で扱った非線形 1 質点系との類似性を示している。

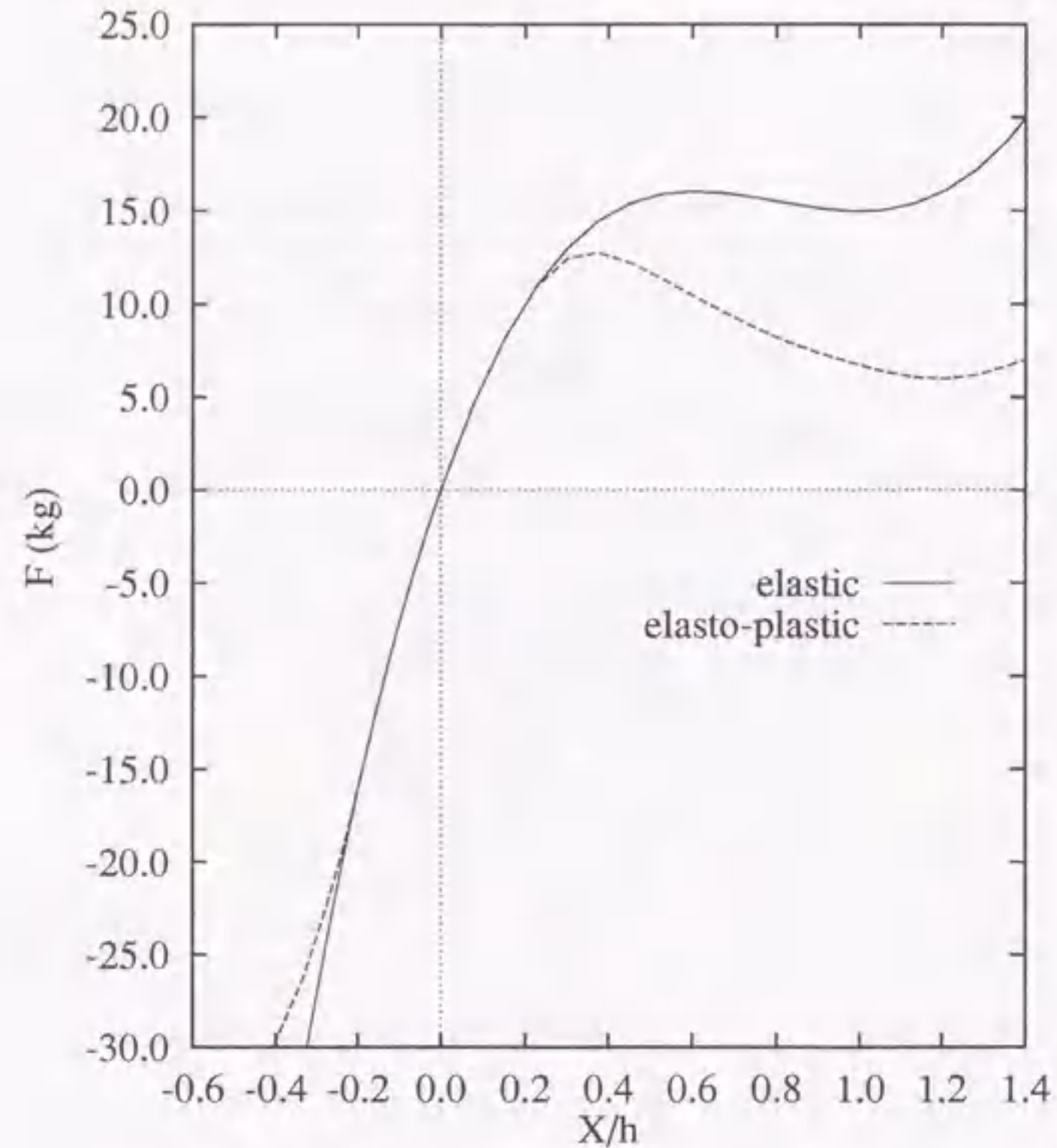


図 3.9: 静的解析による荷重-変位曲線

3.3.2 定常振動解析

(3.11) 式の仮定調波として $N = 1$, すなわち定数項と sine, cosine の基本調波を各 1 波ずつ与え、振動数ごとに解曲線を求めた。これらをもとに描かれた共振曲線を、図 3.10~図 3.17 に示す。比較のため、材料が常に弾性であるものと仮定した場合の結果も併せて示している。図中、 ω_{05}, ω_{10} は、各モデルの固有円振動数を表す。なお、弾塑性系においては、振動数の大きさに関わらず、いずれも頂点の下側変位が静的な荷重-変位曲線に示された弾性限度である $X/h = 0.22$ を越えたところで塑性化を生じている。

非線形 1 質点系モデルの場合と同様に、いずれの共振曲線も左側への傾斜を示し、弾塑性系でこの傾斜が一層大きくなるが、図 3.15 や図 3.17 に見られるように、静的荷重が作用しない場合でも、弾塑性系の下部の共振曲線が途中で反転し、上方に向かって伸びている点異なる。また、これらの図においては、比較的小さな加速度に対応する共振曲線は左右連続し、共振点に応答の上限を有している。この解析モデルでは、応力-歪関係は完全弾塑性型であるものの、内部においては塑性化したところと弾性にとどまっているところが混在するため、応答が小さく、幾何学的

非線形性の影響がさほど大きくない範囲では、微小変形理論の下で取り扱われる履歴系と同様の減衰効果が示されるものと考えられる。

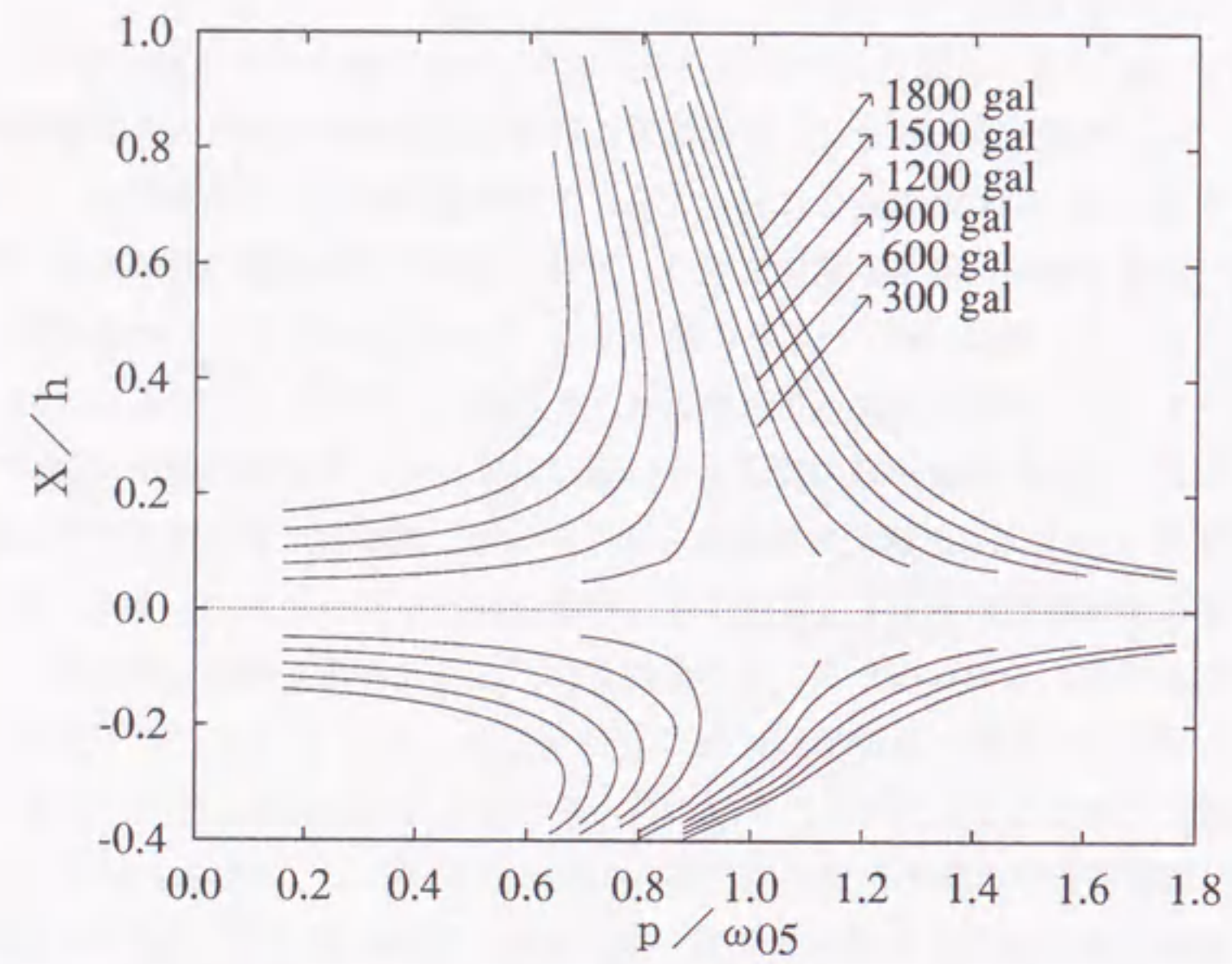
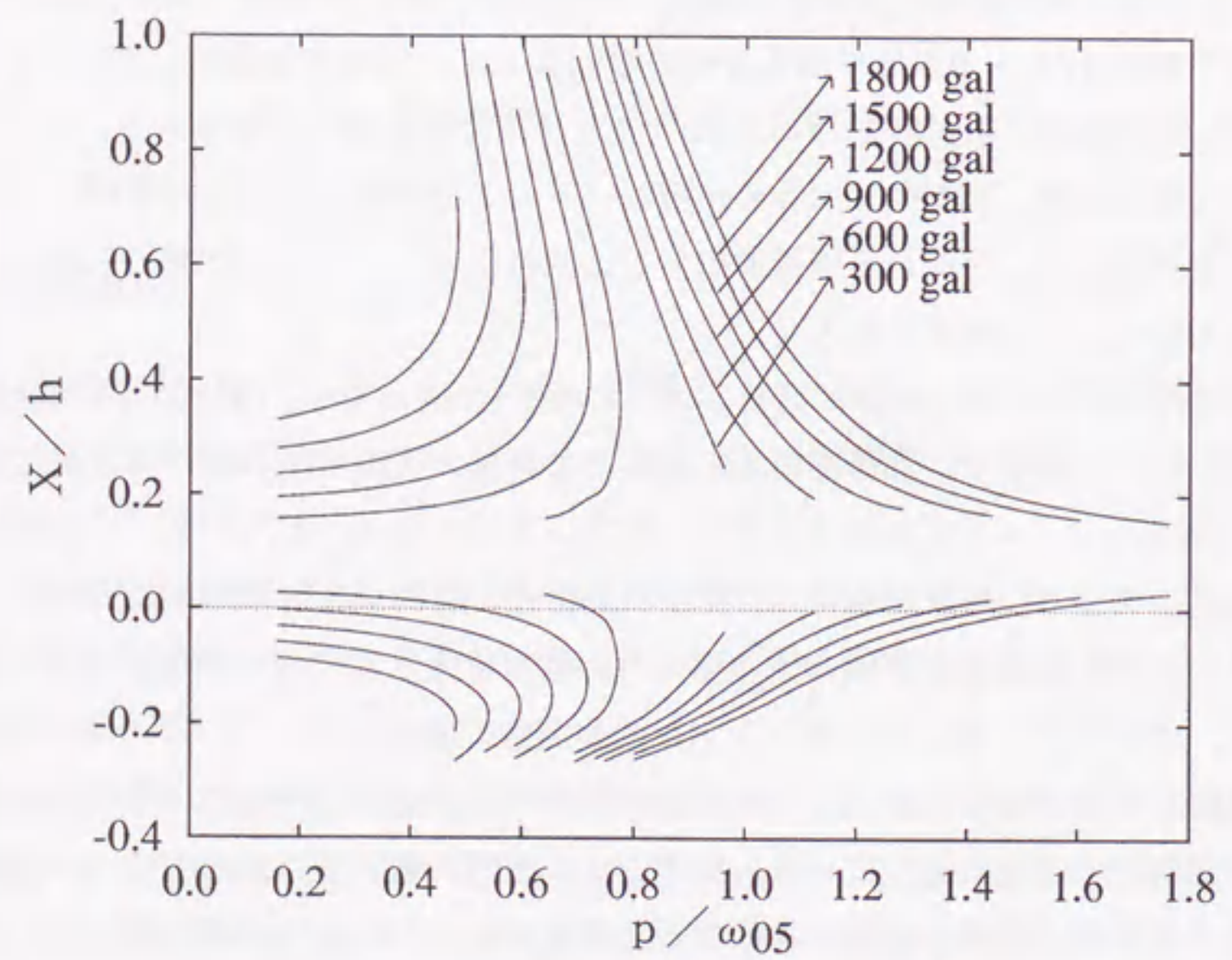
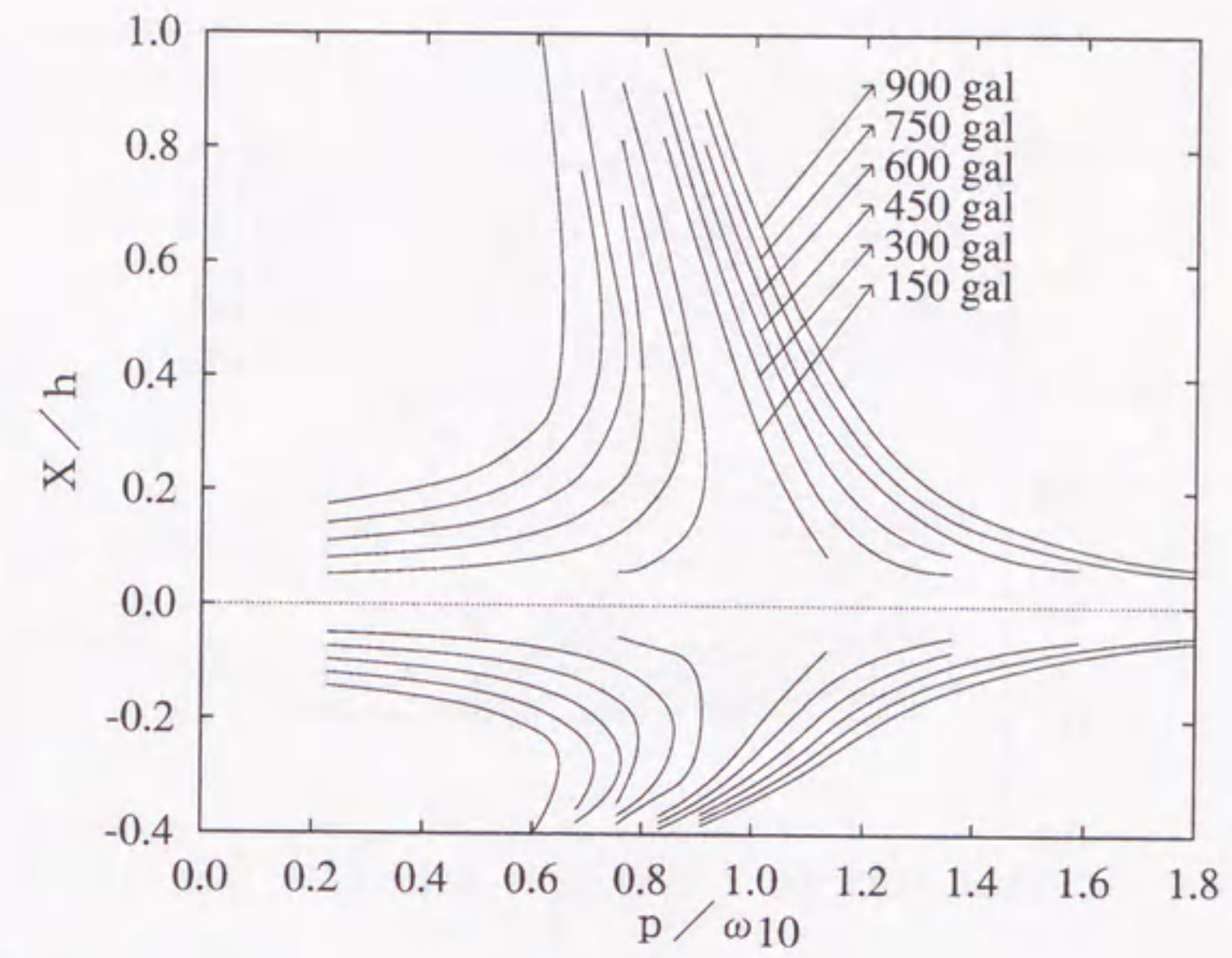
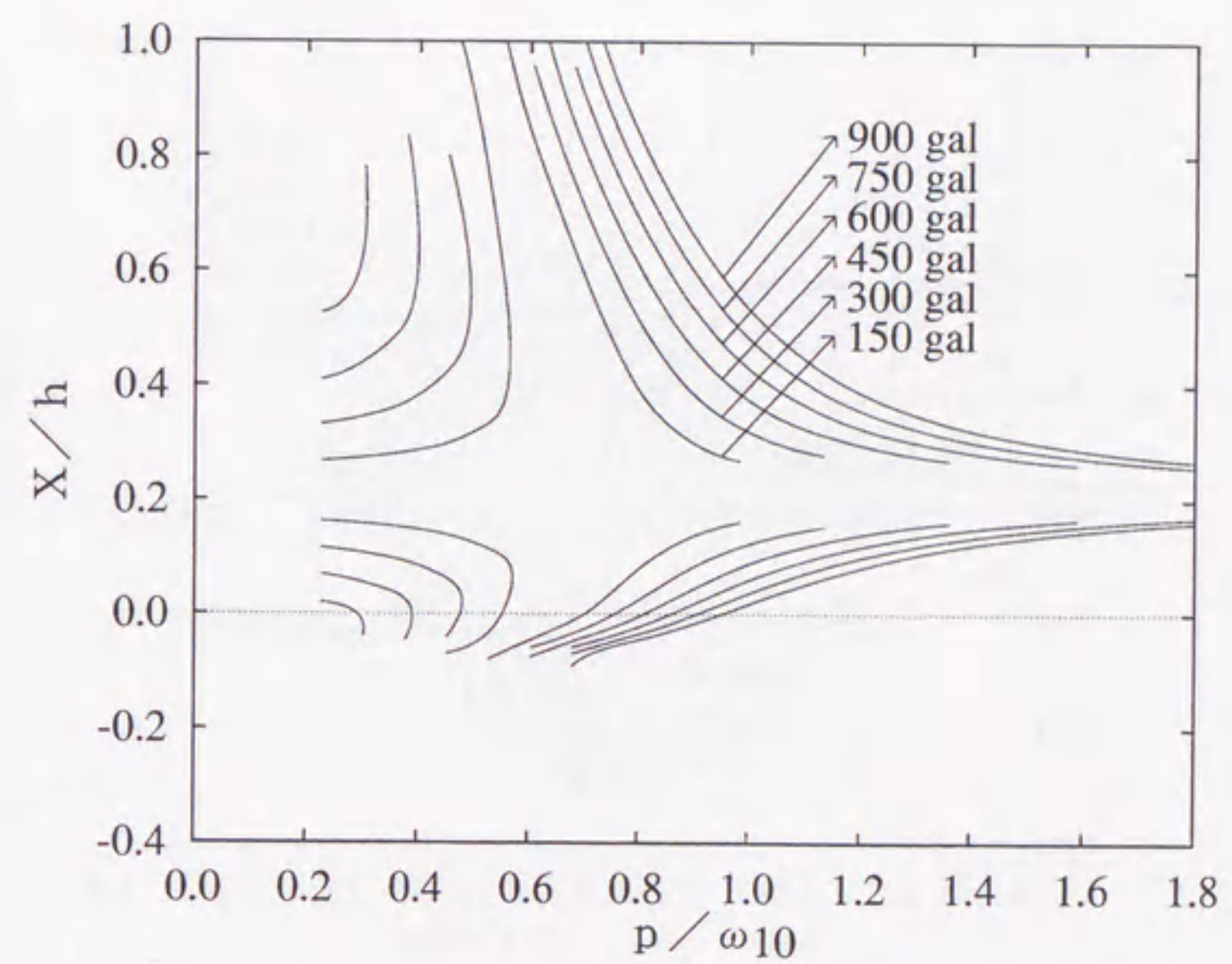
一方、 $m = 5\text{kg}$ の場合の図 3.14 と図 3.15 や、 $m = 10\text{kg}$ の場合の図 3.16 と図 3.17 の比較から、このモデルでも、弾塑性系の場合に、静的荷重の有無が系の振動性状に大きな影響を及ぼすことがわかる。すなわち、いずれの場合においても、静的荷重が作用する場合には、応答の増大とともに、左右の共振曲線の間隔が次第に広がり、上部と下部の共振曲線の間隔が逆に狭まる傾向が見られるようになる。特に、 $m = 10\text{kg}$ の場合では、これがはっきりとした形で現れ、右側の共振曲線は途中で急激に高振動数側へ折れ曲がり、その後、一定の変位 ($X/h = 0.6$) に漸近する。この場合、上部と下部の共振曲線の間隔も 0 に近づいていく。定常解の解析においては、この限界を与える変位 $X/h = 0.6$ を超えた解は得られなかった。非線形 1 質点系モデルの解析においても、弾塑性系に静的荷重が作用する場合には、同様の経過を辿った後で、ある一定の変位に達すると、定常解が得られなくなったが、上記の性状は、これと非常に類似している。

ところで、図 3.9 の荷重-変位曲線に再び着目すると、 $X/h = 0.6$ という変位に対する荷重は、ほぼ 10kgf であることに気付く。すなわち、系の復元力は塑性化した後、 $X/h = 0.6$ 付近で、 $m = 10\text{kg}$ の場合における静的荷重の値である 10kgf を下回るようになる。一方、 $m = 5\text{kg}$ の場合における静的荷重の値である 5kgf と荷重-変位曲線の間隔を見ると、塑性化した後に復元力がこの荷重を下回ることはないことがわかる。

そこで、前章で取り扱った非線形 1 質点系モデルについて、同様に定常解が得られなくなった領域の変位と荷重-変位曲線の間隔を再検討してみると、図 2.3 の荷重-変位曲線が、作用している静的荷重である $f/f_y = 0.5$ を下回る変位の範囲は $1.0 \sim 1.42$ であるのに対して、図 2.9 の共振曲線が存在しない変位の範囲は $1.23 \sim 1.62$ であり、両者には若干の差がある。しかし、この場合には対象となる変位が、相対的に大きく、調和バランス法で仮定調波を定数項と sine, cosine の各 1 波ずつで近似したことによる誤差が幾分見込まれるので、これを考慮に入れば、両者は概ね対応するものと考えられるであろう。

以上のことから、 $m = 5\text{kg}$ (静的荷重 5kgf) の場合と $m = 10\text{kg}$ (静的荷重 10kg) の場合の共振曲線の違いは、作用している静的荷重の大きさと荷重-変位曲線の間隔を反映したものであるといえる。

Kuranishi ら [31] は、一定の軸力の作用下にある柱の動的崩壊挙動の研究の中で、柱が発散的挙動によって崩壊し始める変位は、柱の復元力が軸力を支えきれなくなる変位と一致することを述べており、加藤ら [33] は、平行弦トラス梁の耐震性の研究において、静的解析の結果に示される、トラス梁が自重を支えきれなくなる変位を擬静的崩壊変位と呼んで、崩壊あるいは安定性を特徴付ける指標として取り扱っている。対象とするモデルの相違はあるものの、本解析結果において、同様の意味付けを持つ変位と共振曲線の間隔が示されたことは興味深い。

図 3.10: 共振曲線 (弾性系・静的荷重なし: $m = 5 \text{ kg}$, $F = 0 \text{ kgf}$)図 3.11: 共振曲線 (弾性系・静的荷重あり: $m = 5 \text{ kg}$, $F = 5 \text{ kgf}$)図 3.12: 共振曲線 (弾性系・静的荷重なし: $m = 10 \text{ kg}$, $F = 0 \text{ kgf}$)図 3.13: 共振曲線 (弾性系・静的荷重あり: $m = 10 \text{ kg}$, $F = 10 \text{ kgf}$)

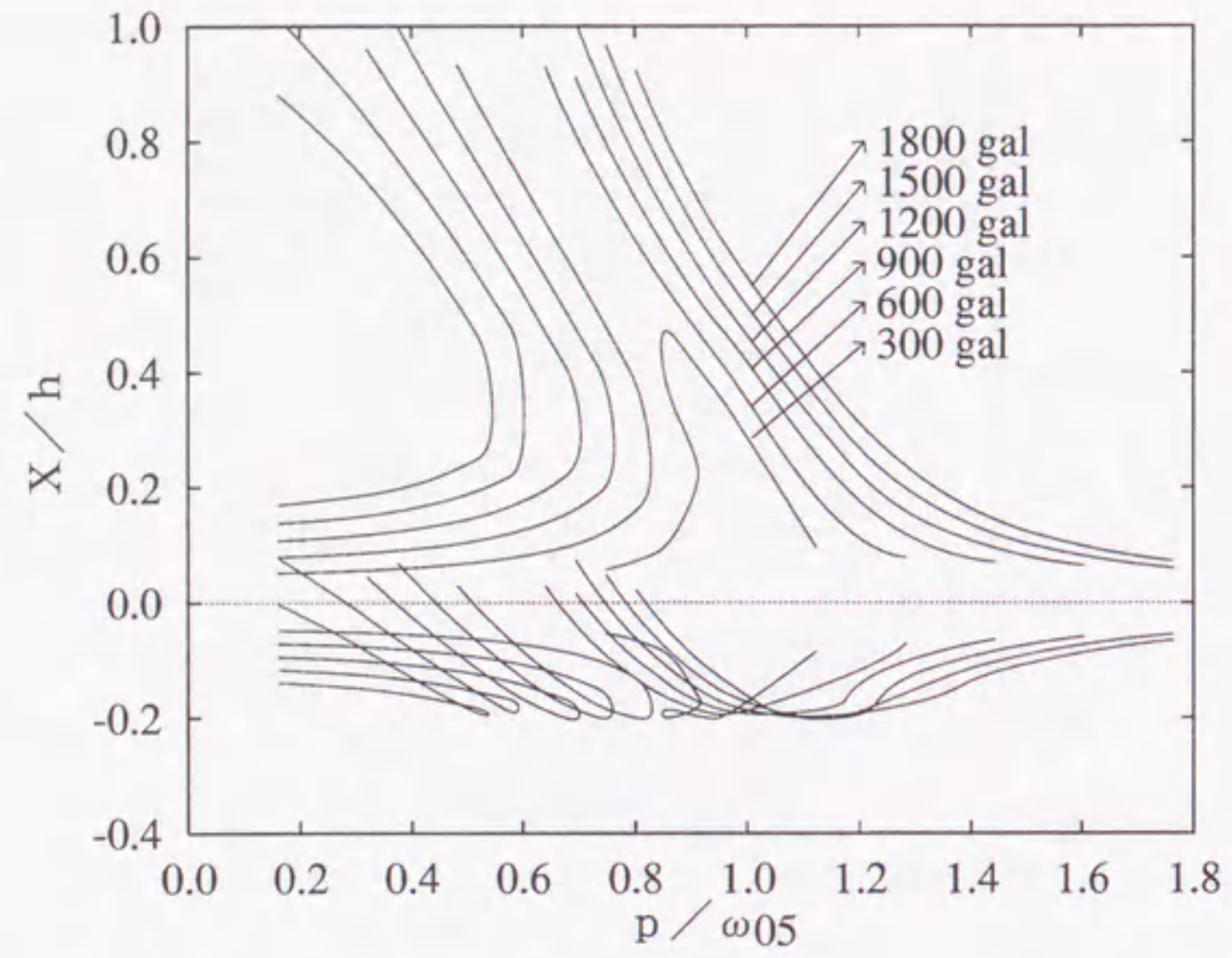


図 3.14: 共振曲線 (弾塑性系・静的荷重なし: $m = 5 \text{ kg}$, $F = 0 \text{ kgf}$)

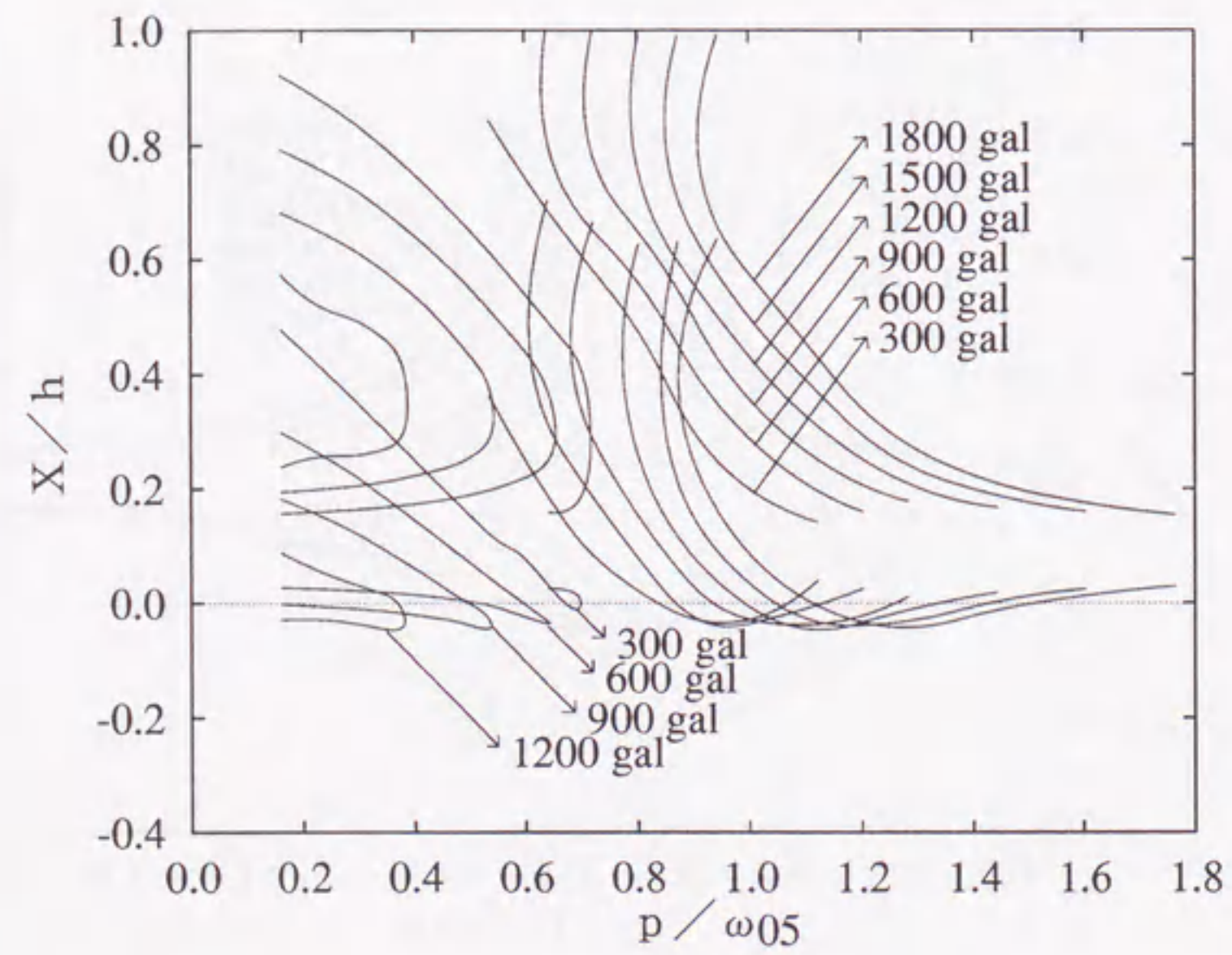


図 3.15: 共振曲線 (弾塑性系・静的荷重あり: $m = 5 \text{ kg}$, $F = 5 \text{ kgf}$)

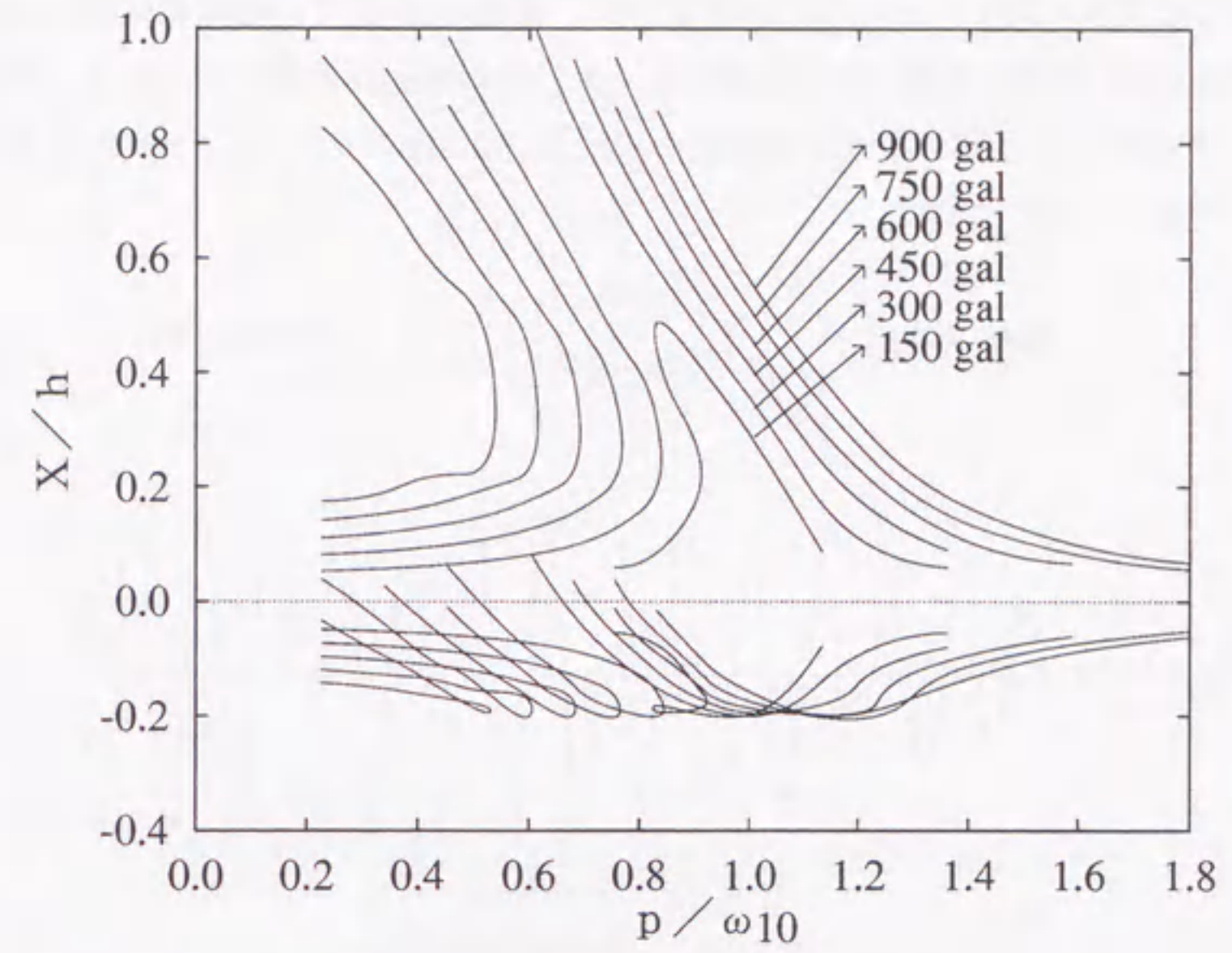


図 3.16: 共振曲線 (弾塑性系・静的荷重なし: $m = 10 \text{ kg}$, $F = 0 \text{ kgf}$)

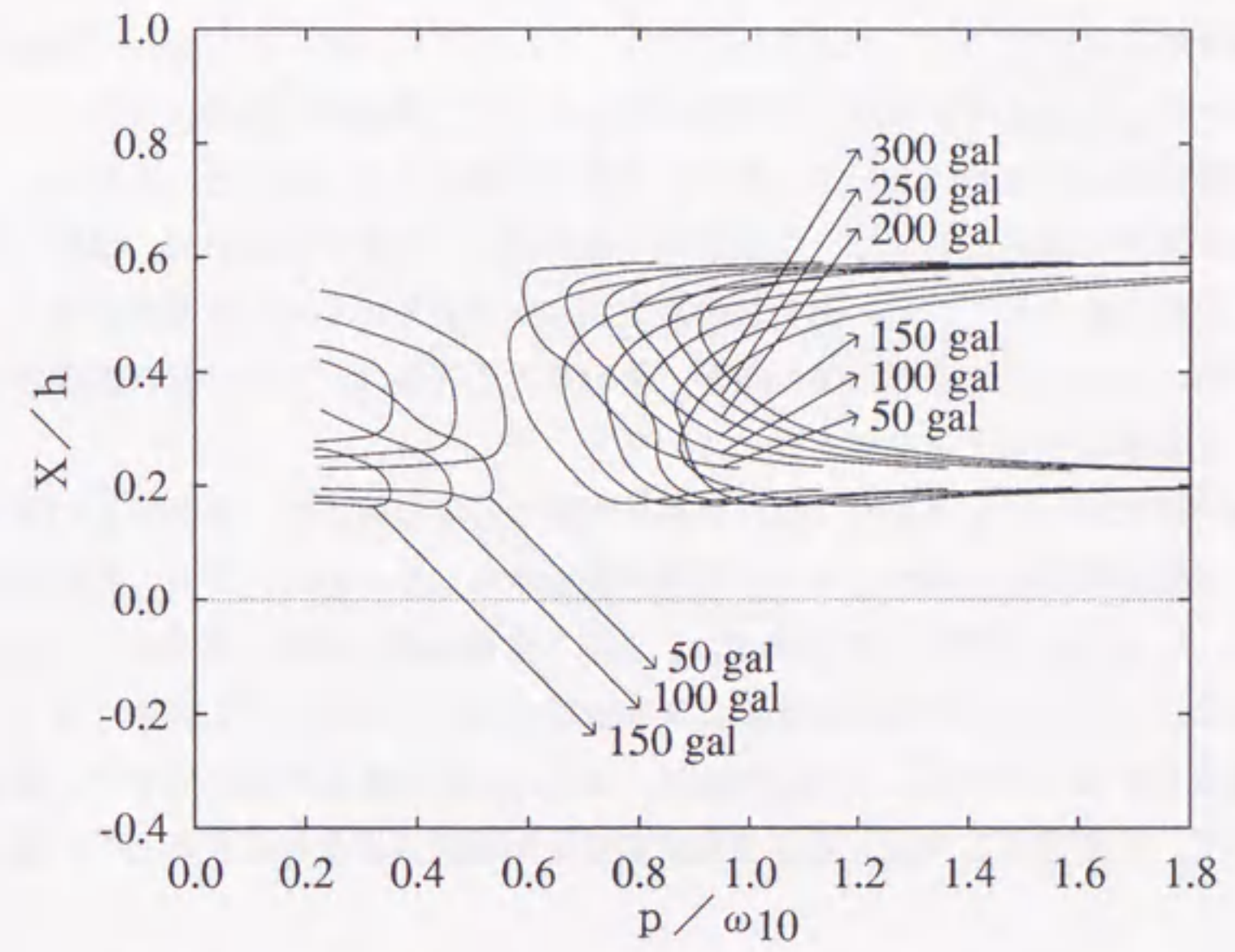


図 3.17: 共振曲線 (弾塑性系・静的荷重あり $m = 10 \text{ kg}$, $F = 10 \text{ kgf}$)

3.3.3 時刻歴応答解析

弾塑性系のモデルに対し、図3.18に示すように、最初の10波で、振幅が時間に比例して漸増した後、後半の10波で一定振幅となる正弦波を、入力波の加速度波形として与え、時刻歴応答解析(付録E.2)を行った。運動方程式の直接積分にはNewmarkの β 法($\beta = 1/4$)を用い、時間刻みを入力波の周期の1/40とした。

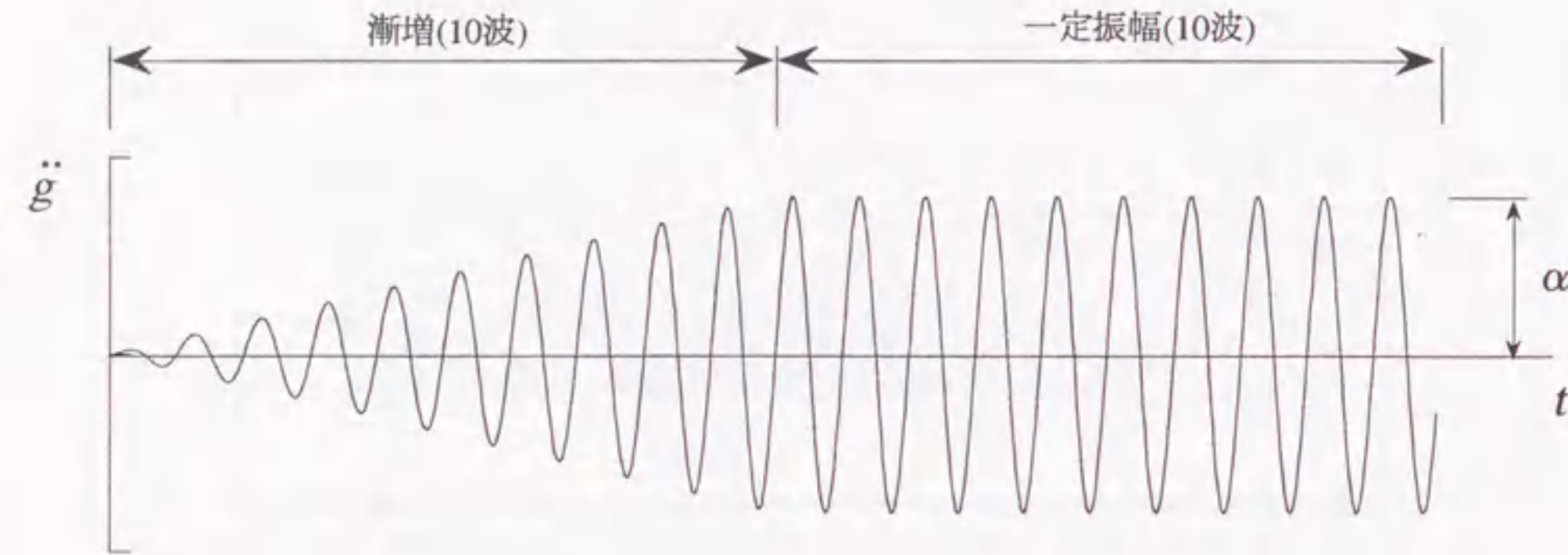
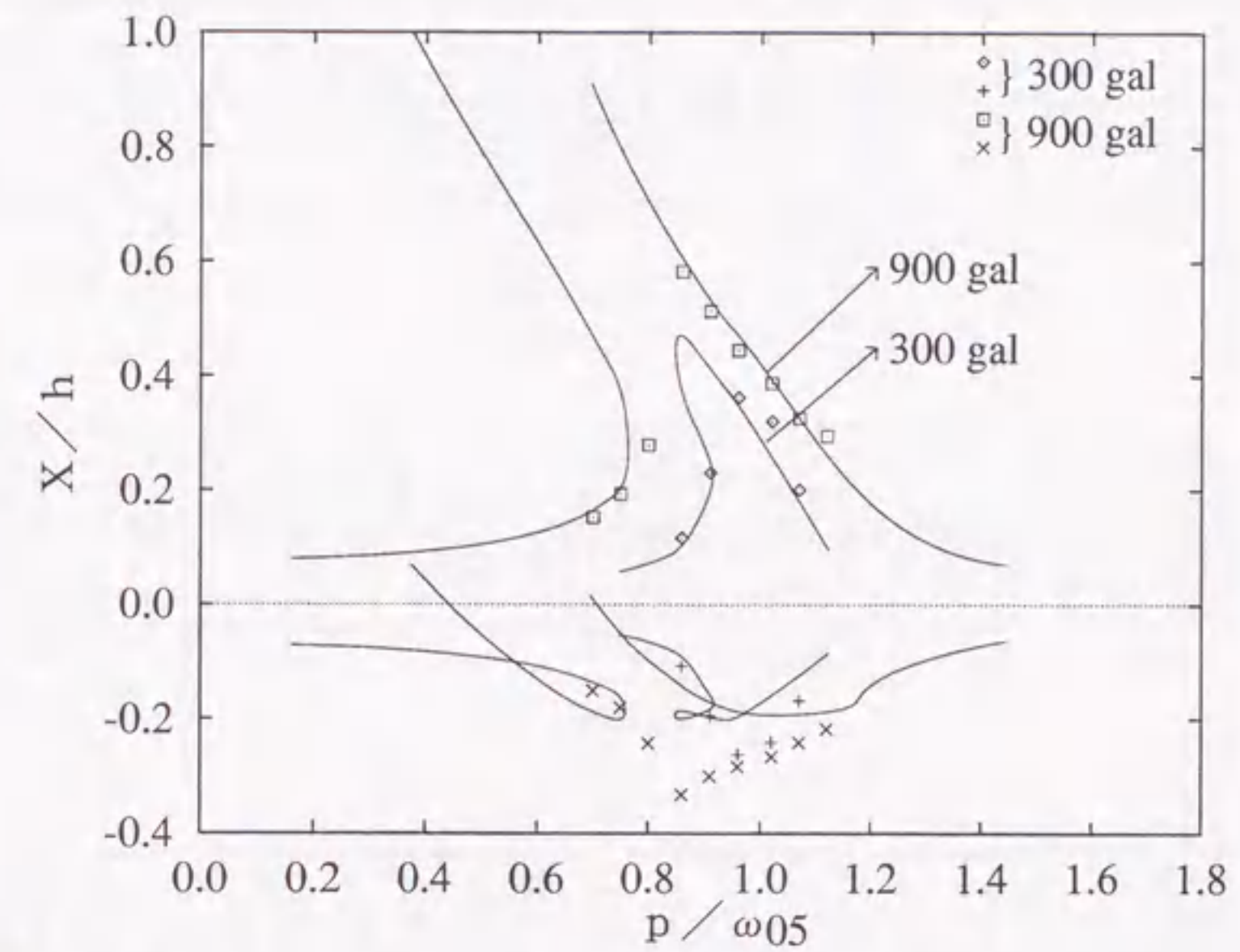
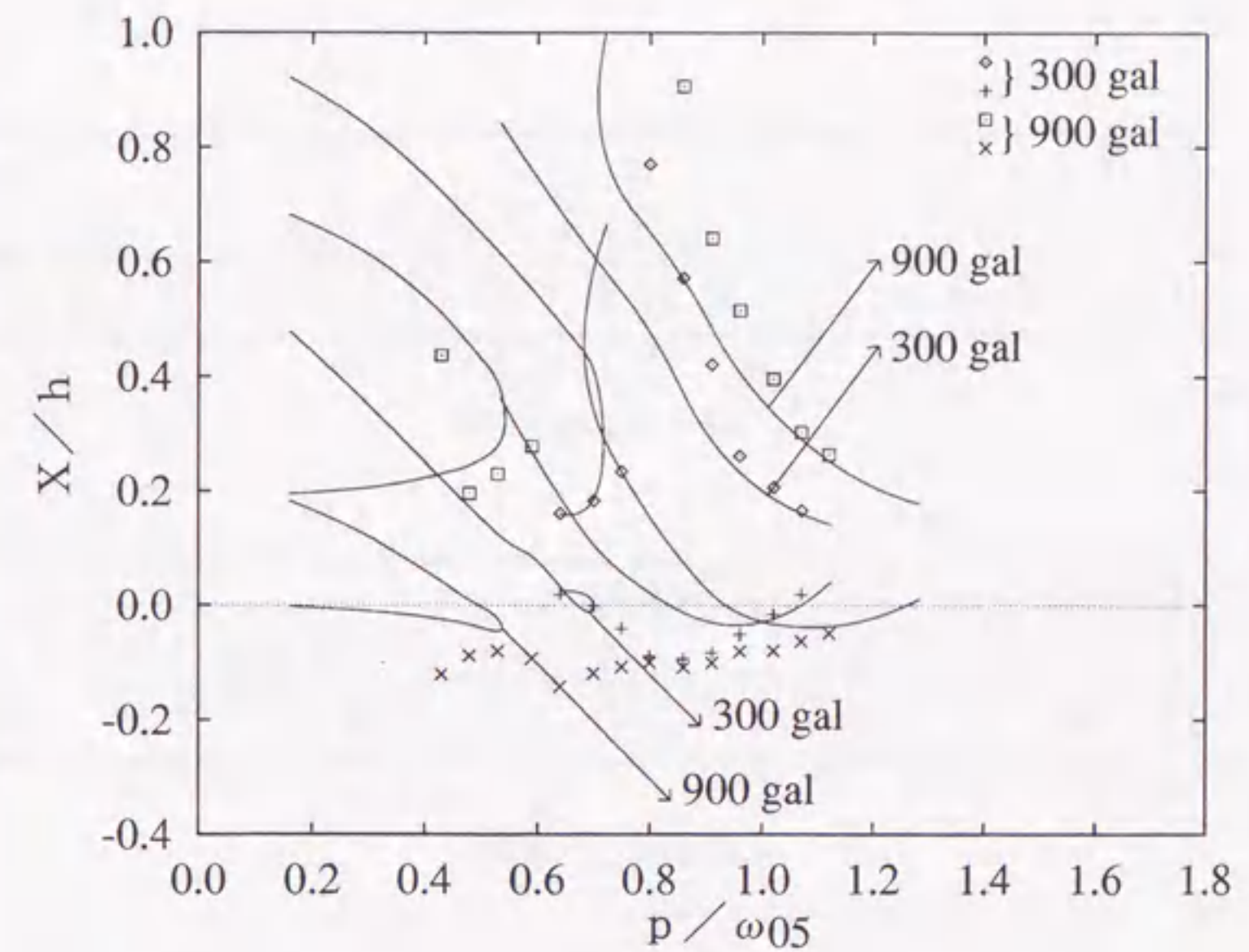


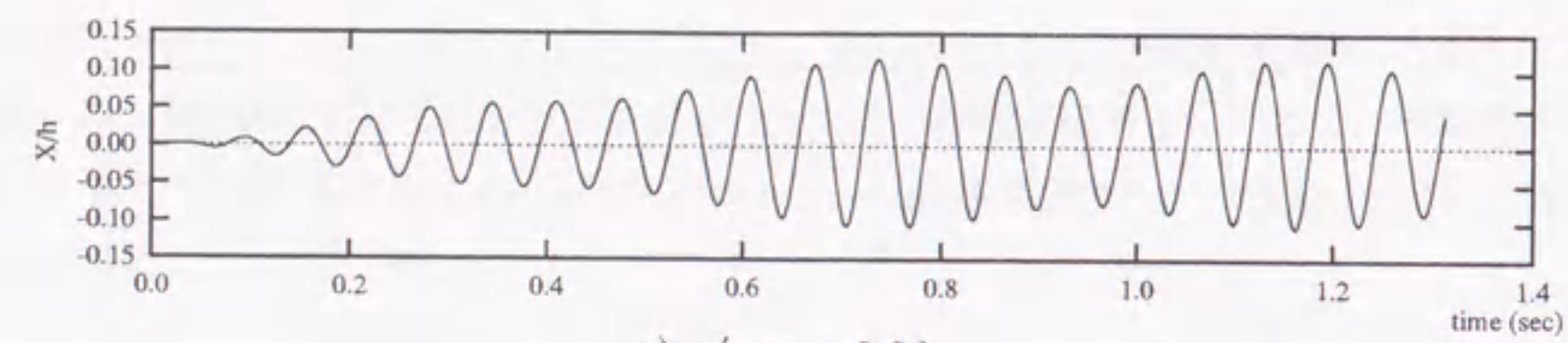
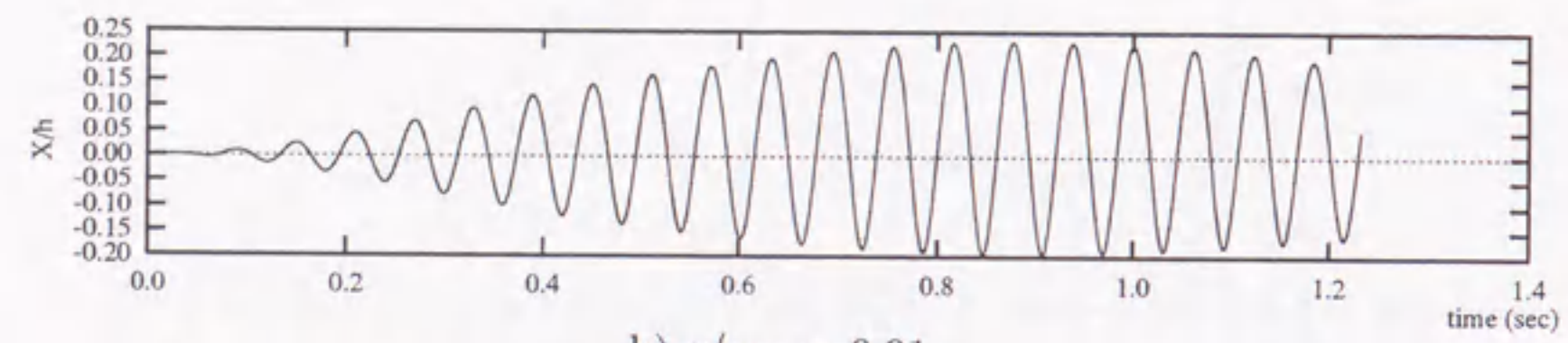
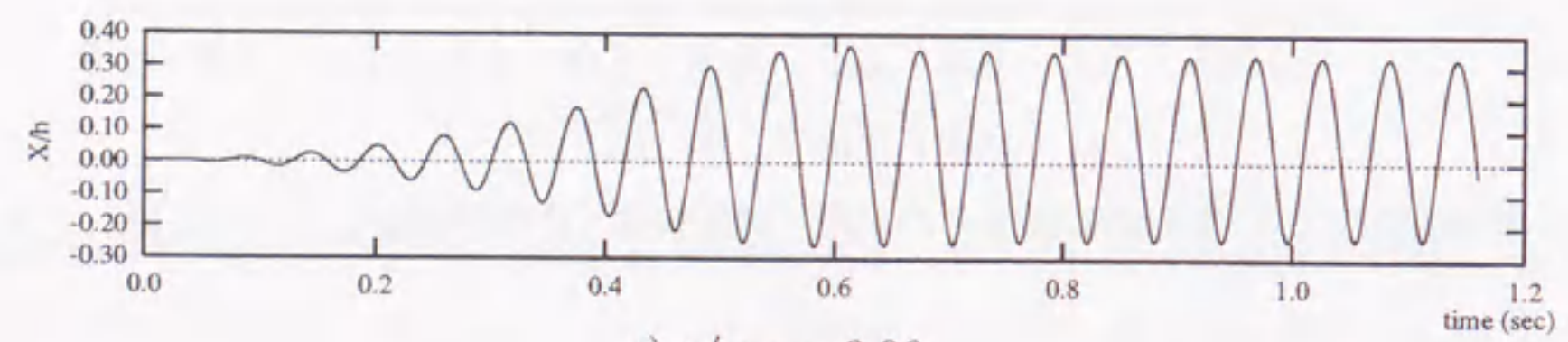
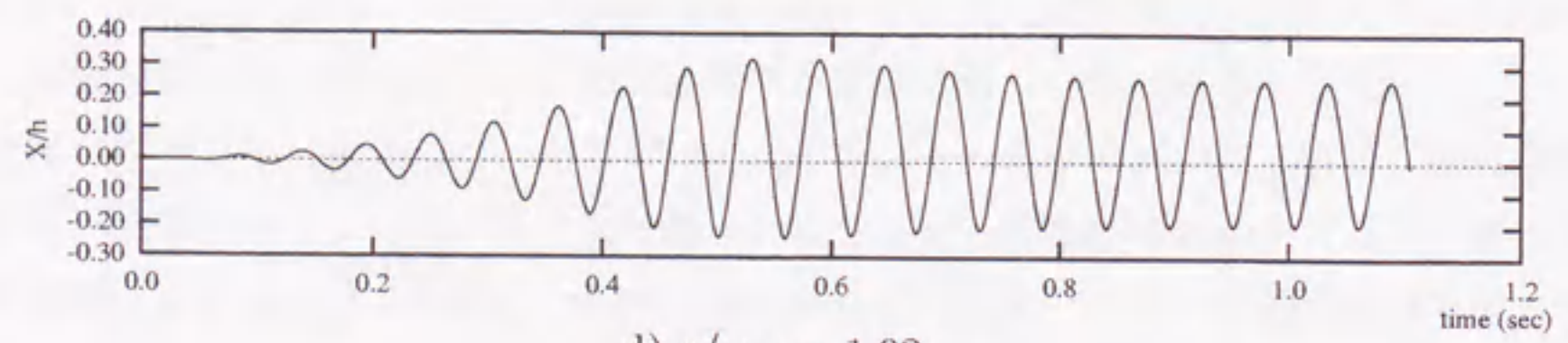
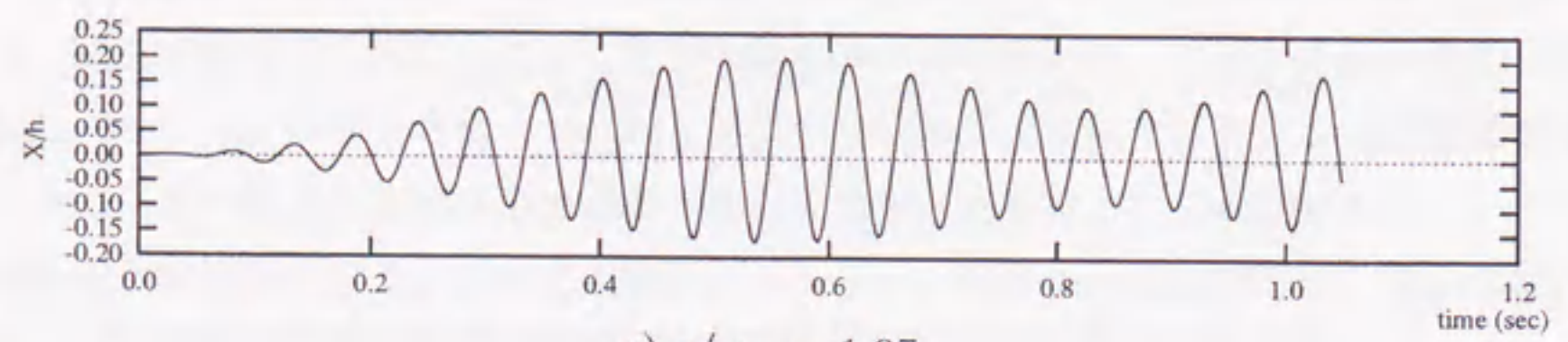
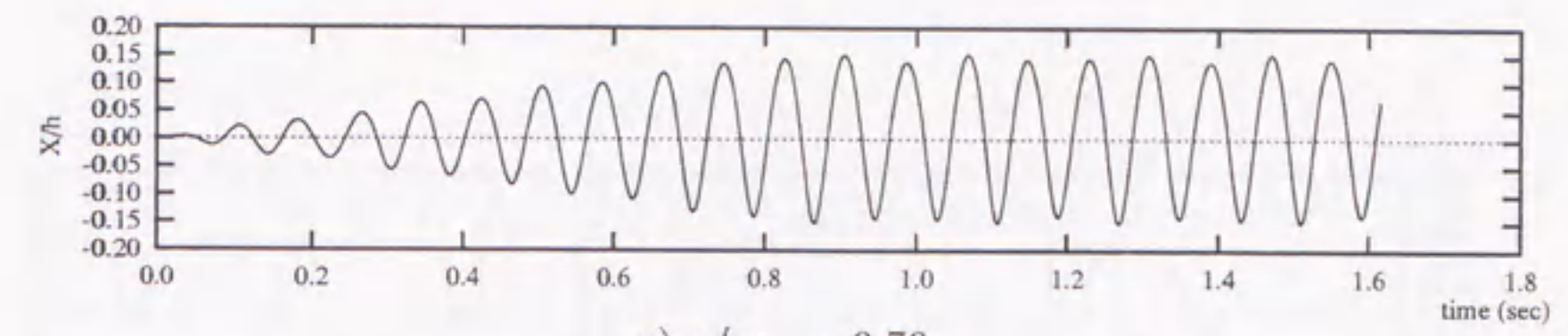
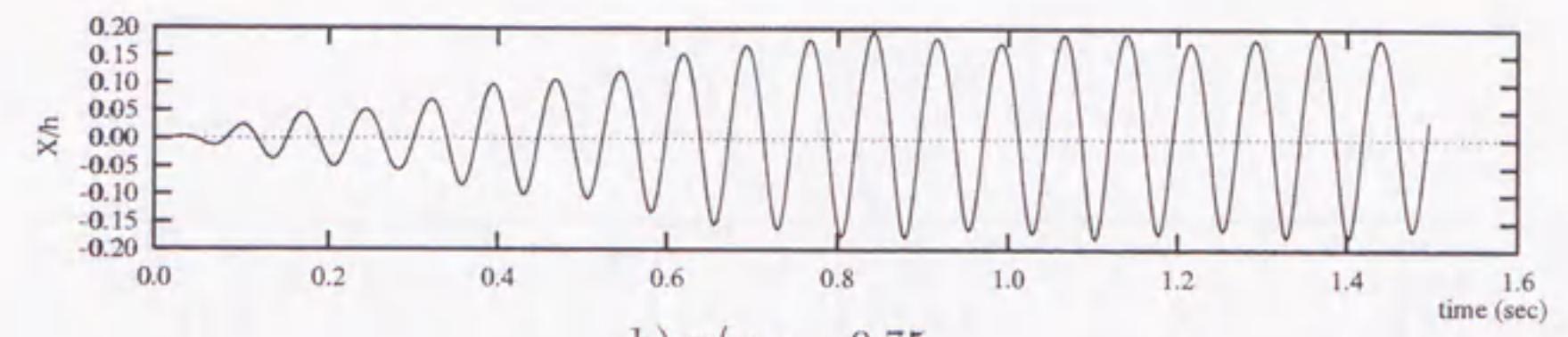
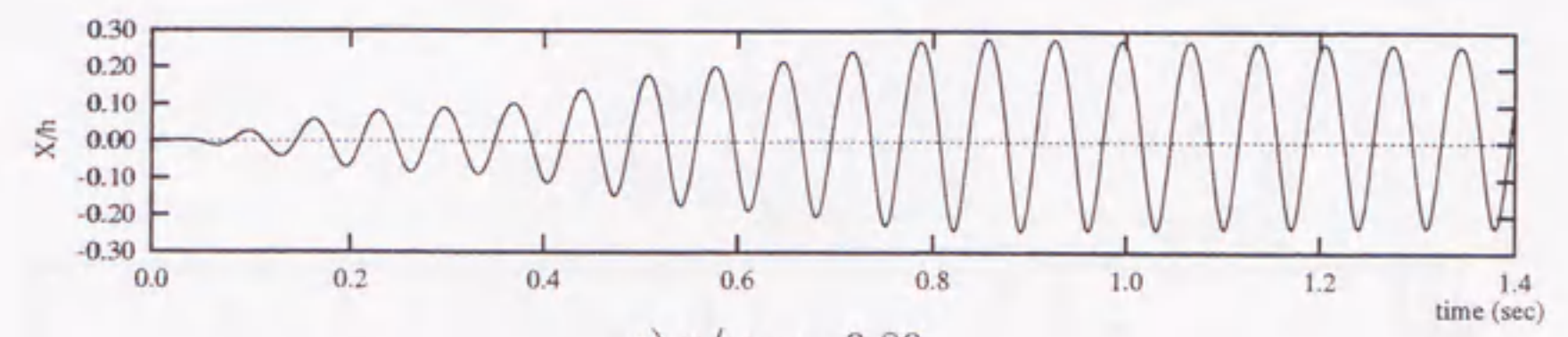
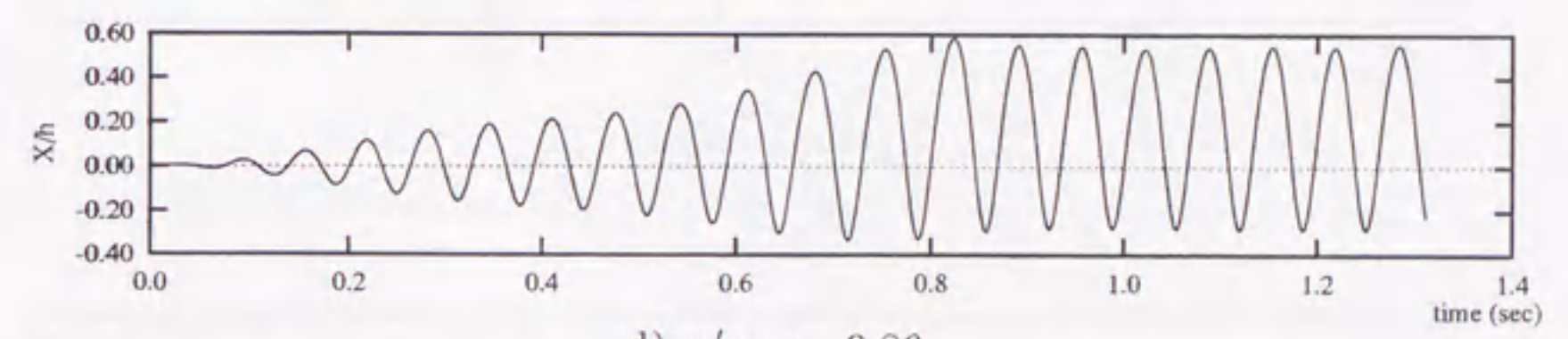
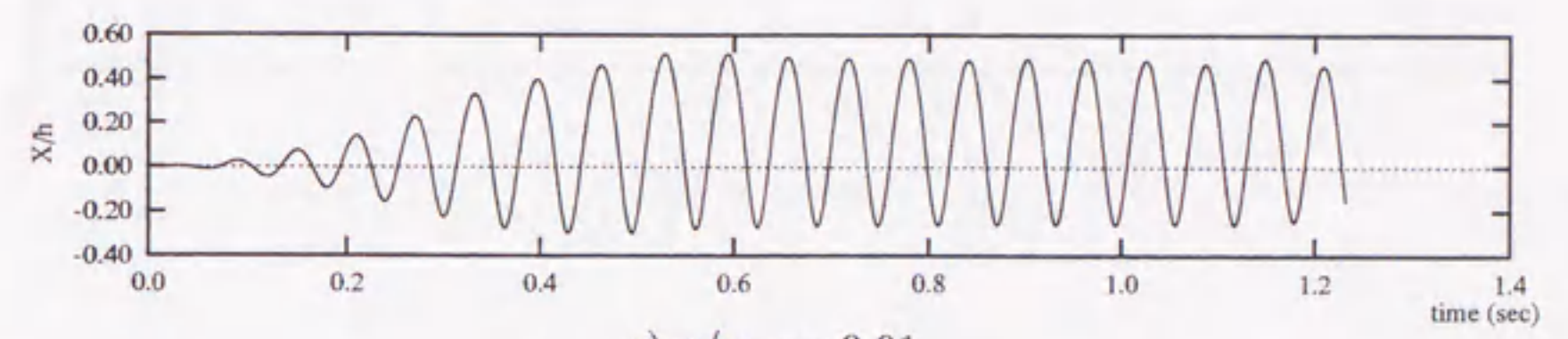
図3.18: 入力加速度の波形

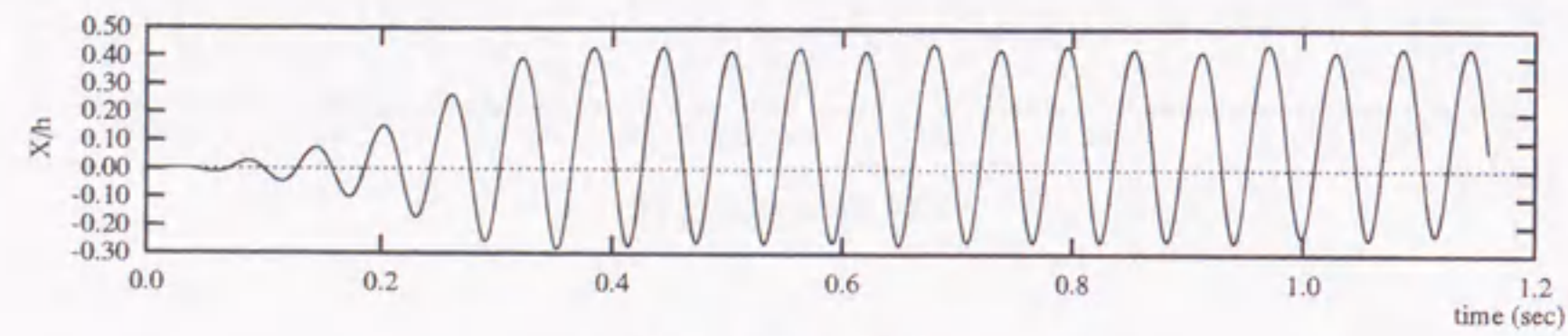
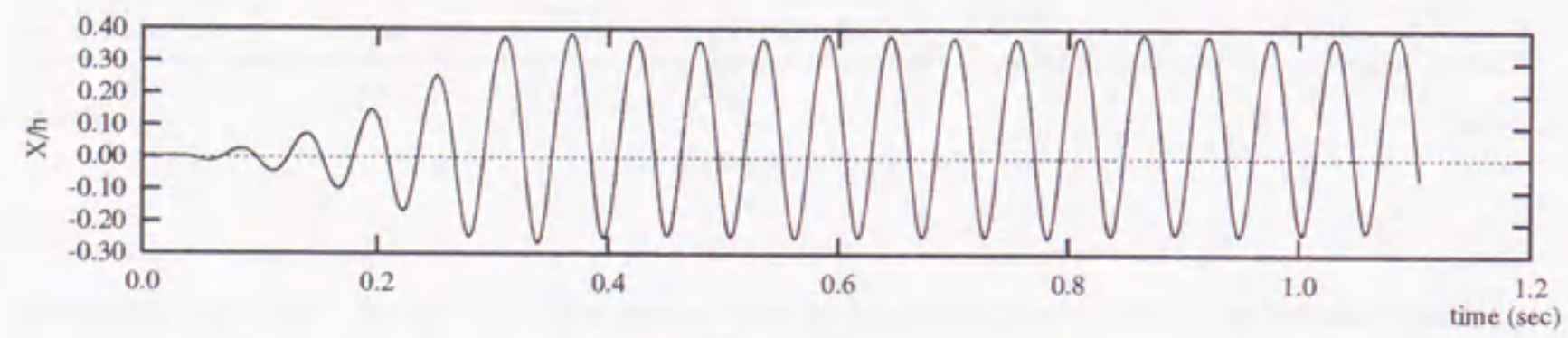
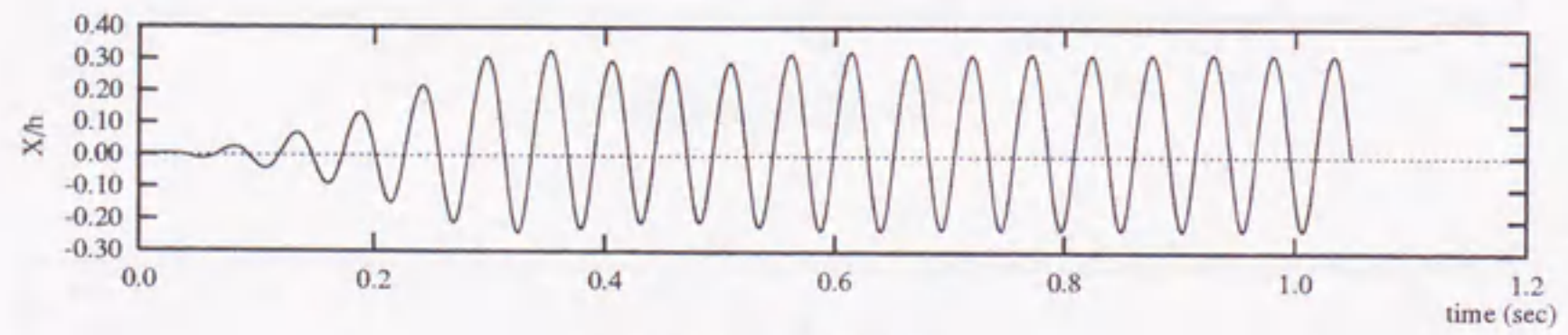
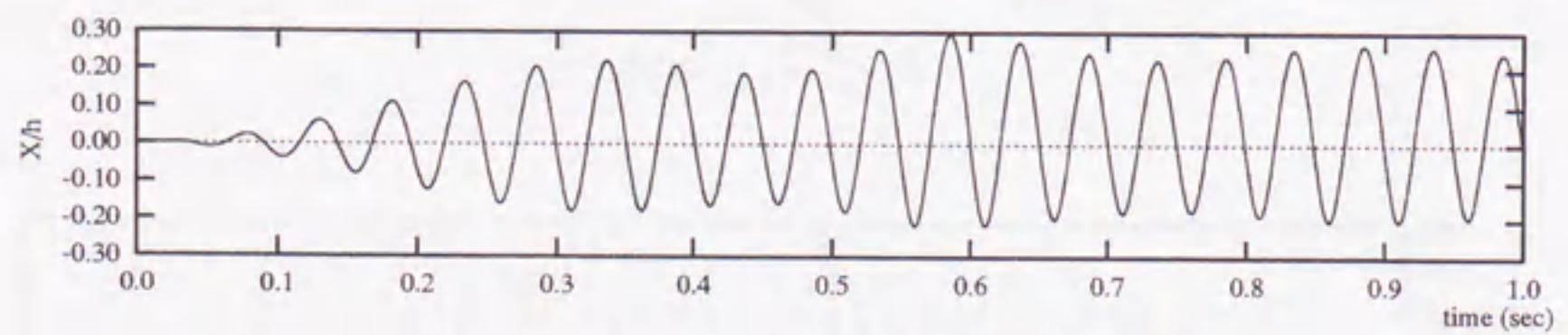
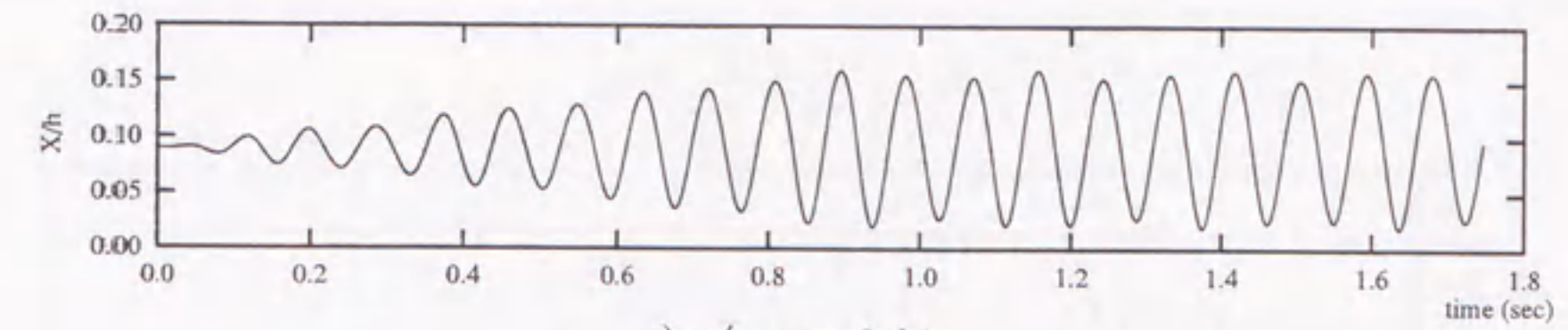
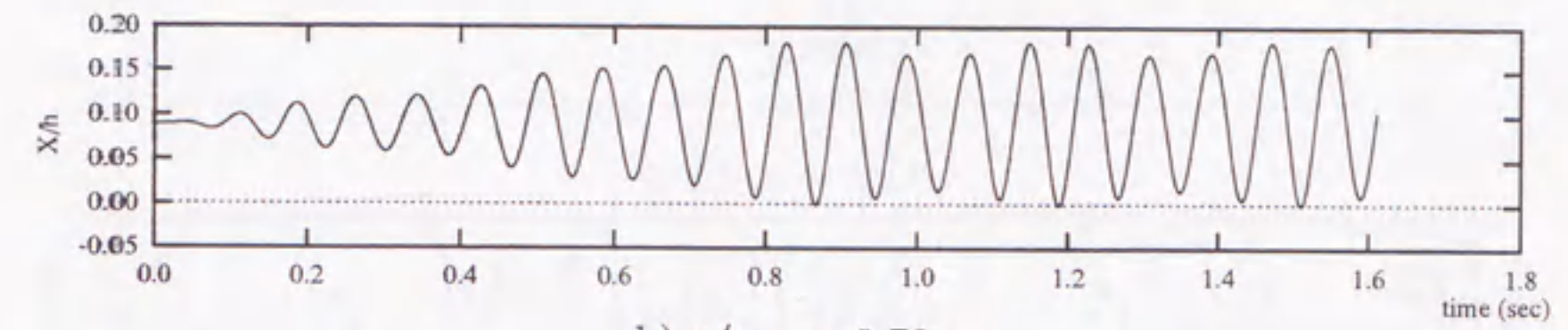
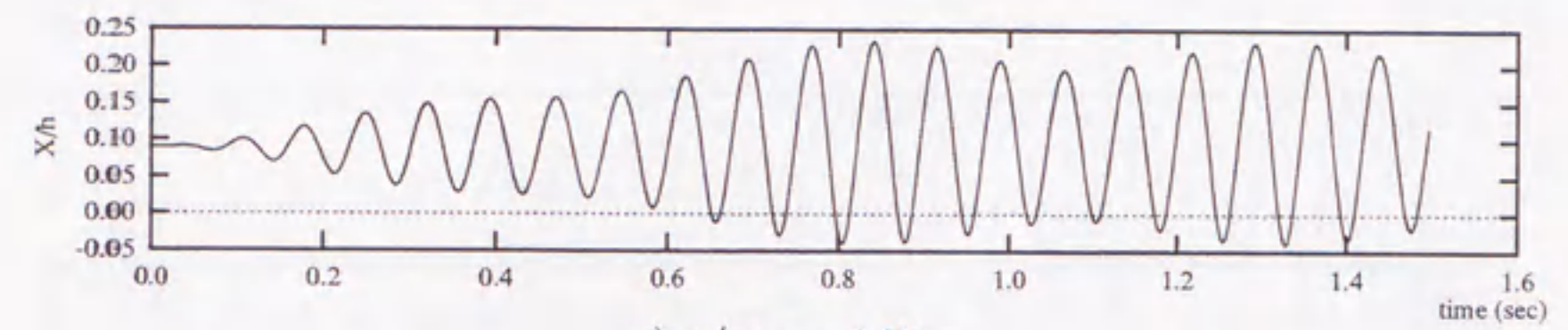
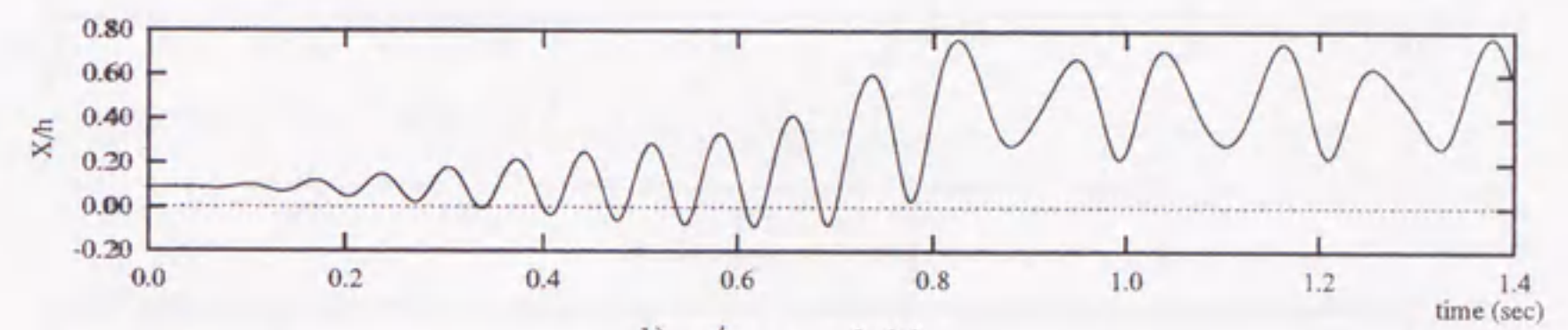
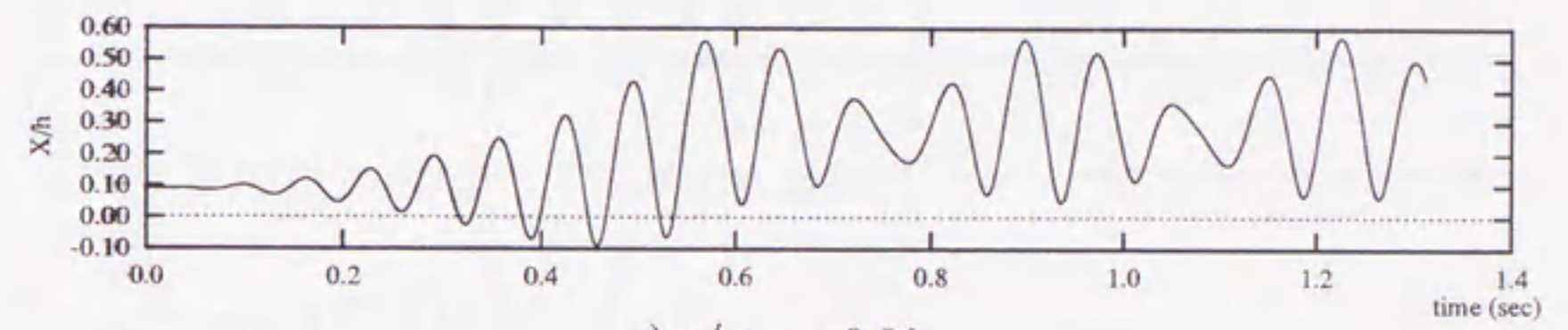
この結果から得られる正負の最大応答値と定常解によって示される共振曲線の比較を、 $m = 5\text{kg}$ の場合について、図3.19、図3.20に、 $m = 10\text{kg}$ の場合について、図3.28、図3.29に示す。また、個々の時刻歴応答波形を、 $m = 5\text{kg}$ の場合について、図3.21~図3.27に $m = 10\text{kg}$ の場合について、図3.30~図3.34に示す。なお、時刻歴応答において、変位が発散的に大きくなったものについては、共振曲線との比較において、最大応答値が記載されていないものもある。

静的荷重が作用しない場合には、応答のほとんどが、その後半において、ほぼ一定の振幅を持つ規則正しい波形を示している。図3.19や図3.28に示される応答値の比較を見ると、正の最大応答値は定常解と良好な対応を示しているが、負の最大応答値は、下部の共振曲線が上方へ反転する部分で、定常解よりも大きな値となっている。

一方、静的荷重が作用する場合には、共振点近傍の応答の多くに、振動中心の著しい偏りやうなりの他、変位が際限なく増大していく発散挙動を示すものがある。これらを応答値の比較を通して見ると、 $m = 5\text{kg}$ の場合の図3.20では、下部の共振曲線が反転する付近から低振動数側に向かうに従って、正の最大応答値が、次第に共振曲線で示される値よりも大きくなっていき、やがて発散挙動を示すようになる。これに対して、 $m = 10\text{kg}$ の場合の図3.29では、発散挙動に至る場合を除いて、時刻歴応答の最大応答値は定常解と比較的良好な対応を示している。

図3.19: 時刻歴応答解析結果の応答値との比較(弾塑性系・静的荷重なし: $m = 5\text{kg}$, $F = 0\text{kgf}$)図3.20: 時刻歴応答解析結果の応答値との比較(弾塑性系・静的荷重あり: $m = 5\text{kg}$, $F = 5\text{kgf}$)

a) $p/\omega_{05} = 0.86$ b) $p/\omega_{05} = 0.91$ c) $p/\omega_{05} = 0.96$ d) $p/\omega_{05} = 1.02$ e) $p/\omega_{05} = 1.07$ 図 3.21: 時刻歴応答波形 (弾塑性系・静的荷重なし: $m = 5\text{kg}$, $F = 0\text{kgf}$, 300 gal)a) $p/\omega_{05} = 0.70$ b) $p/\omega_{05} = 0.75$ c) $p/\omega_{05} = 0.80$ d) $p/\omega_{05} = 0.86$ e) $p/\omega_{05} = 0.91$ 図 3.22: 時刻歴応答波形 (弾塑性系・静的荷重なし: $m = 5\text{kg}$, $F = 0\text{kgf}$, 900 gal - その1)

f) $p/\omega_{05} = 0.96$ g) $p/\omega_{05} = 1.02$ h) $p/\omega_{05} = 1.07$ i) $p/\omega_{05} = 1.12$ 図 3.23: 時刻歴応答波形 (弾塑性系・静的荷重なし: $m = 5\text{kg}$, $F = 0\text{kgf}$, 900 gal - その2)a) $p/\omega_{05} = 0.64$ b) $p/\omega_{05} = 0.70$ c) $p/\omega_{05} = 0.75$ d) $p/\omega_{05} = 0.80$ e) $p/\omega_{05} = 0.86$ 図 3.24: 時刻歴応答波形 (弾塑性系・静的荷重あり: $m = 5\text{kg}$, $F = 5\text{kgf}$, 300 gal - その1)

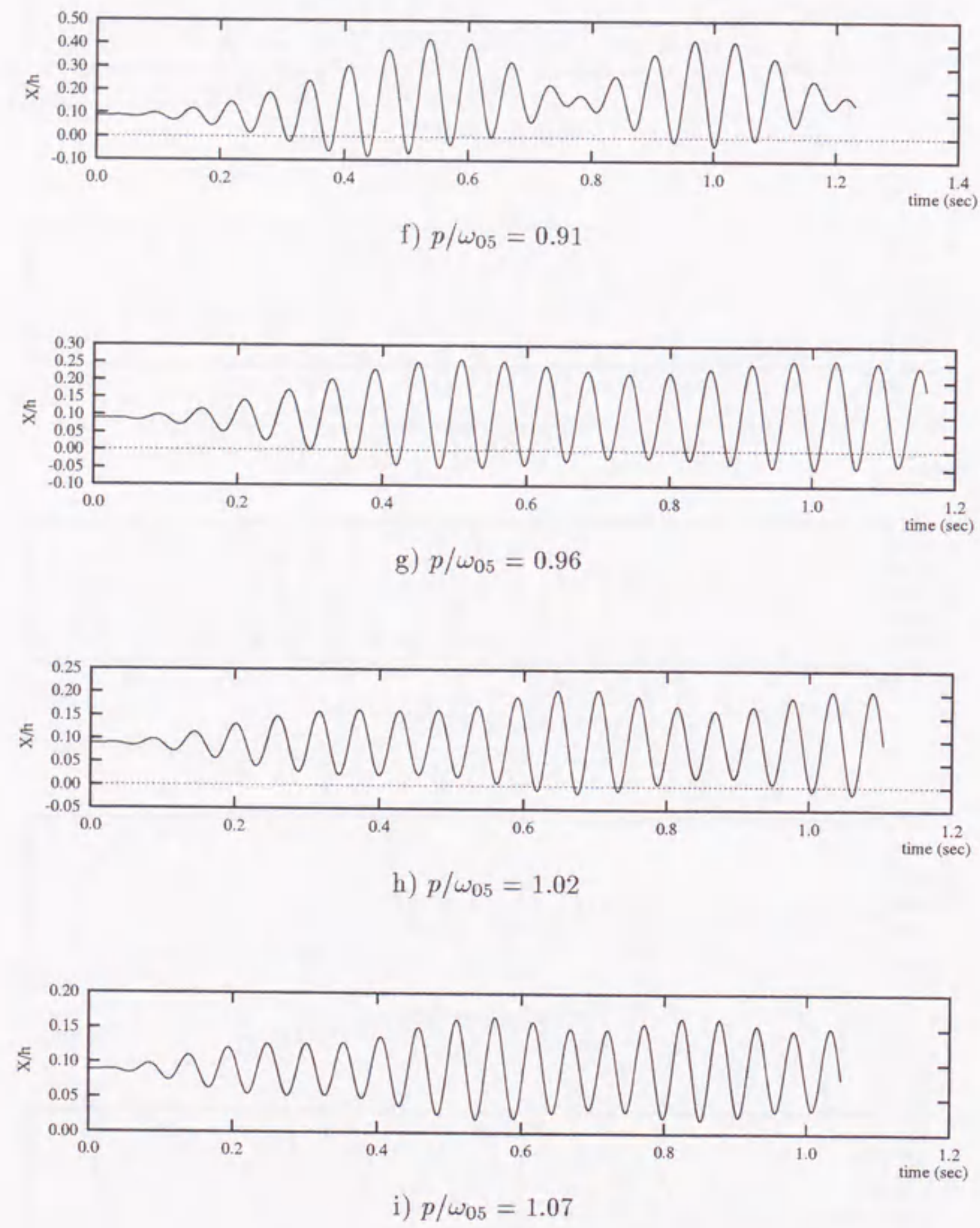


図 3.25: 時刻歴応答波形 (弾塑性系・静的荷重あり: $m = 5\text{kg}$, $F = 5\text{kgf}$, 300 gal - その2)

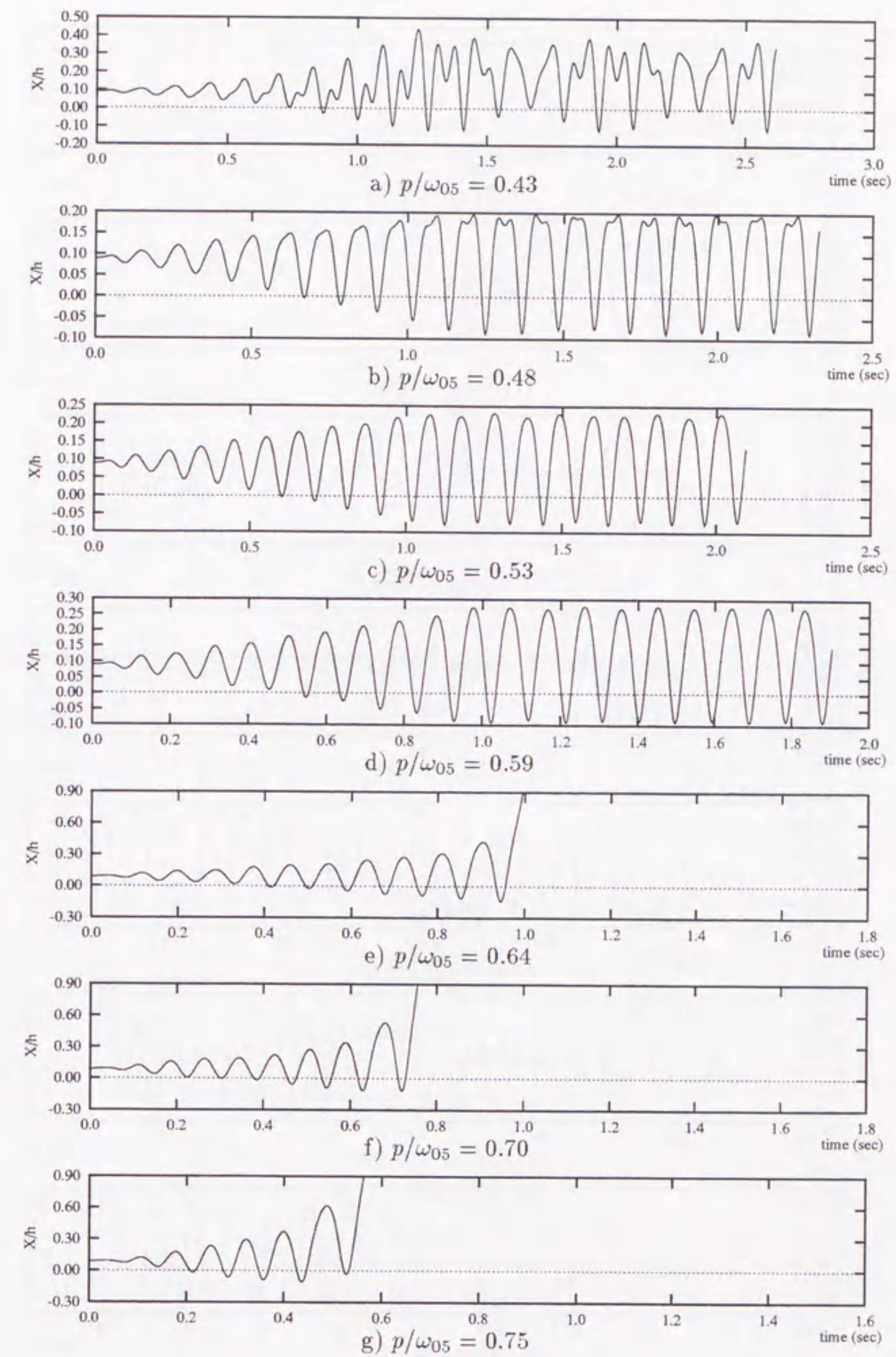


図 3.26: 時刻歴応答波形 (弾塑性系・静的荷重あり: $m = 5\text{kg}$, $F = 5\text{kgf}$, 900 gal - その1)

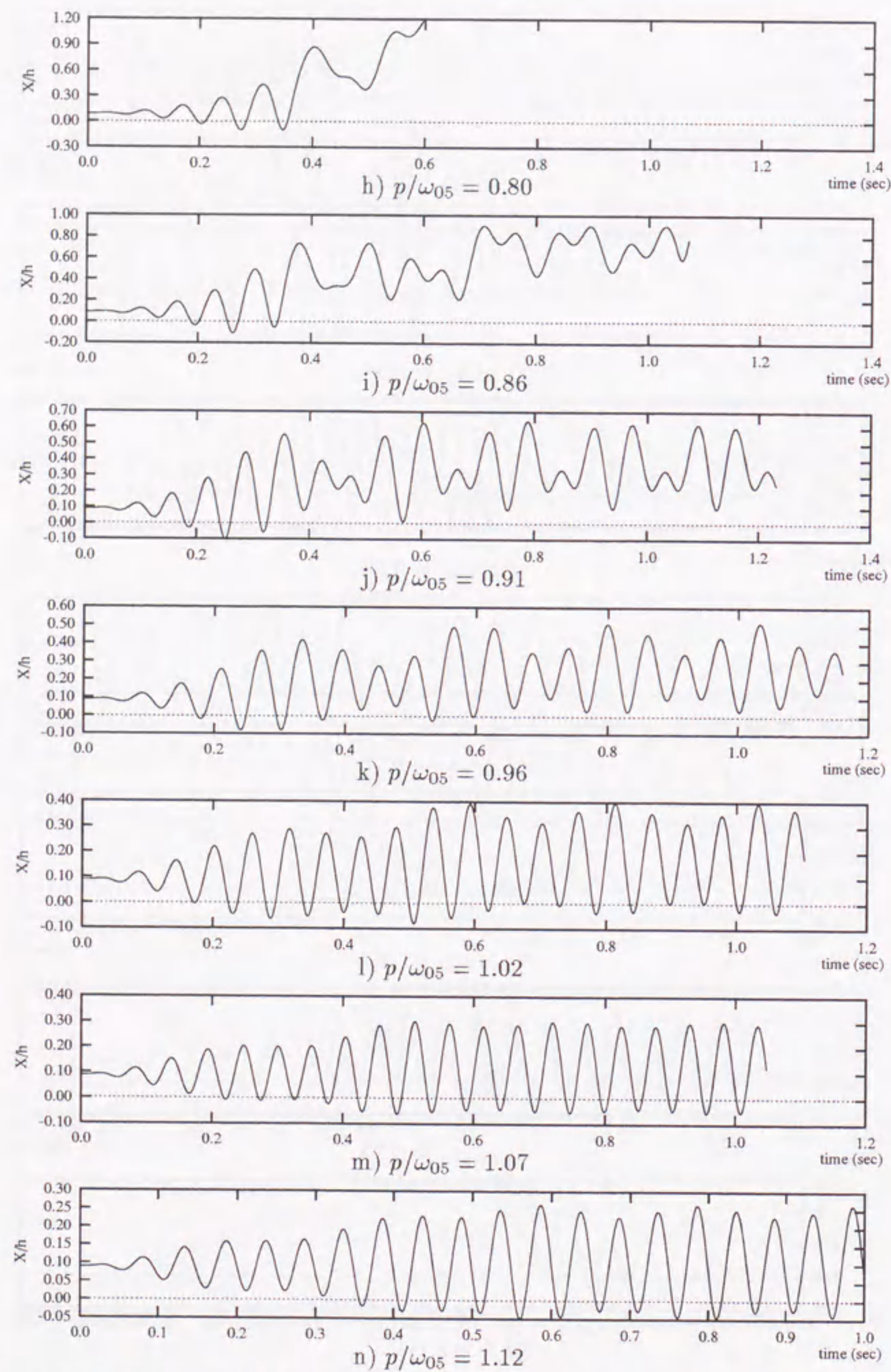


図 3.27: 時刻歴応答波形 (弾塑性系・静的荷重あり: $m = 5\text{kg}$, $F = 5\text{kgf}$, 900 gal - その2)

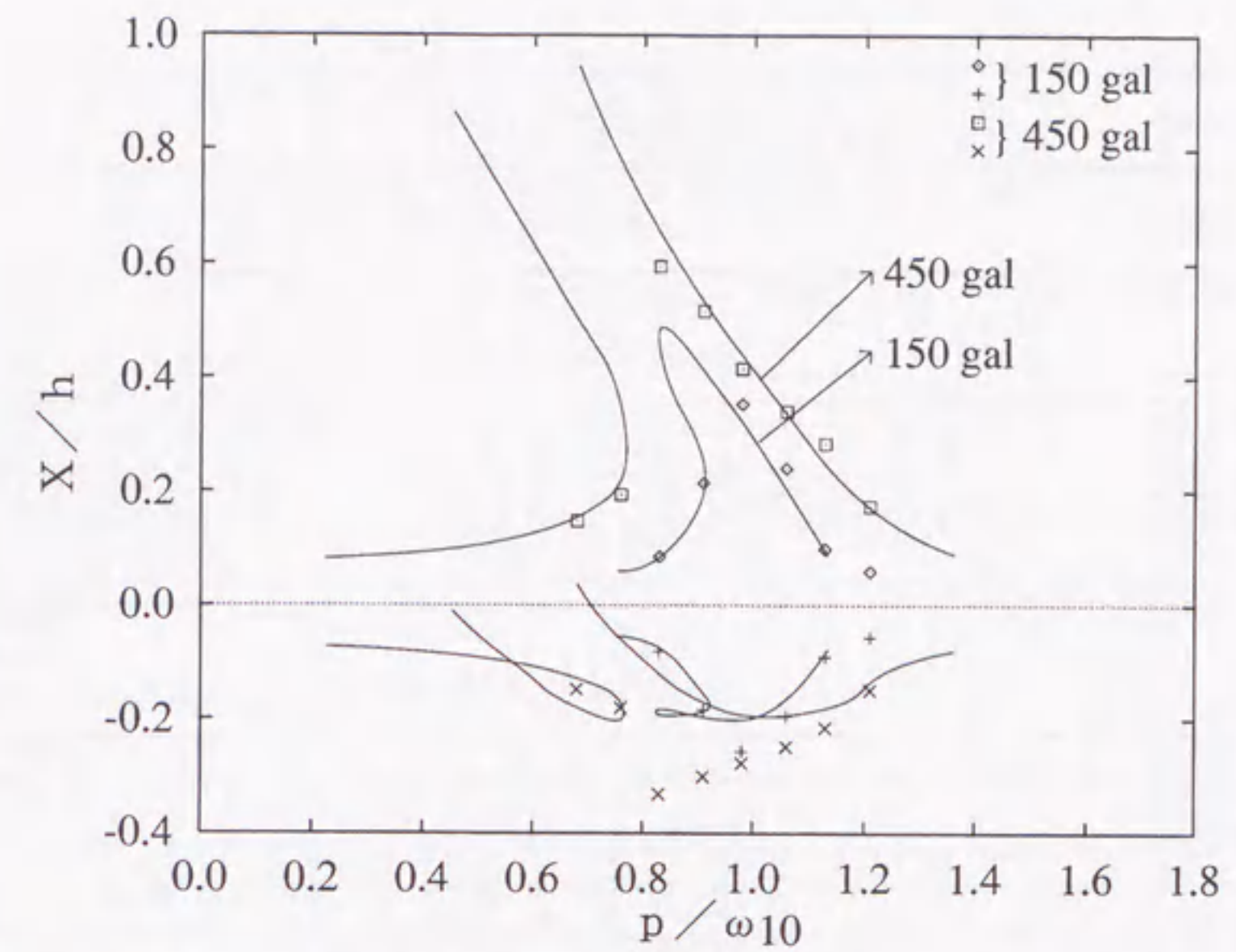


図 3.28: 時刻歴応答解析結果の応答値との比較 (弾塑性系・静的荷重なし: $m = 10\text{kg}$, $F = 0\text{kgf}$)

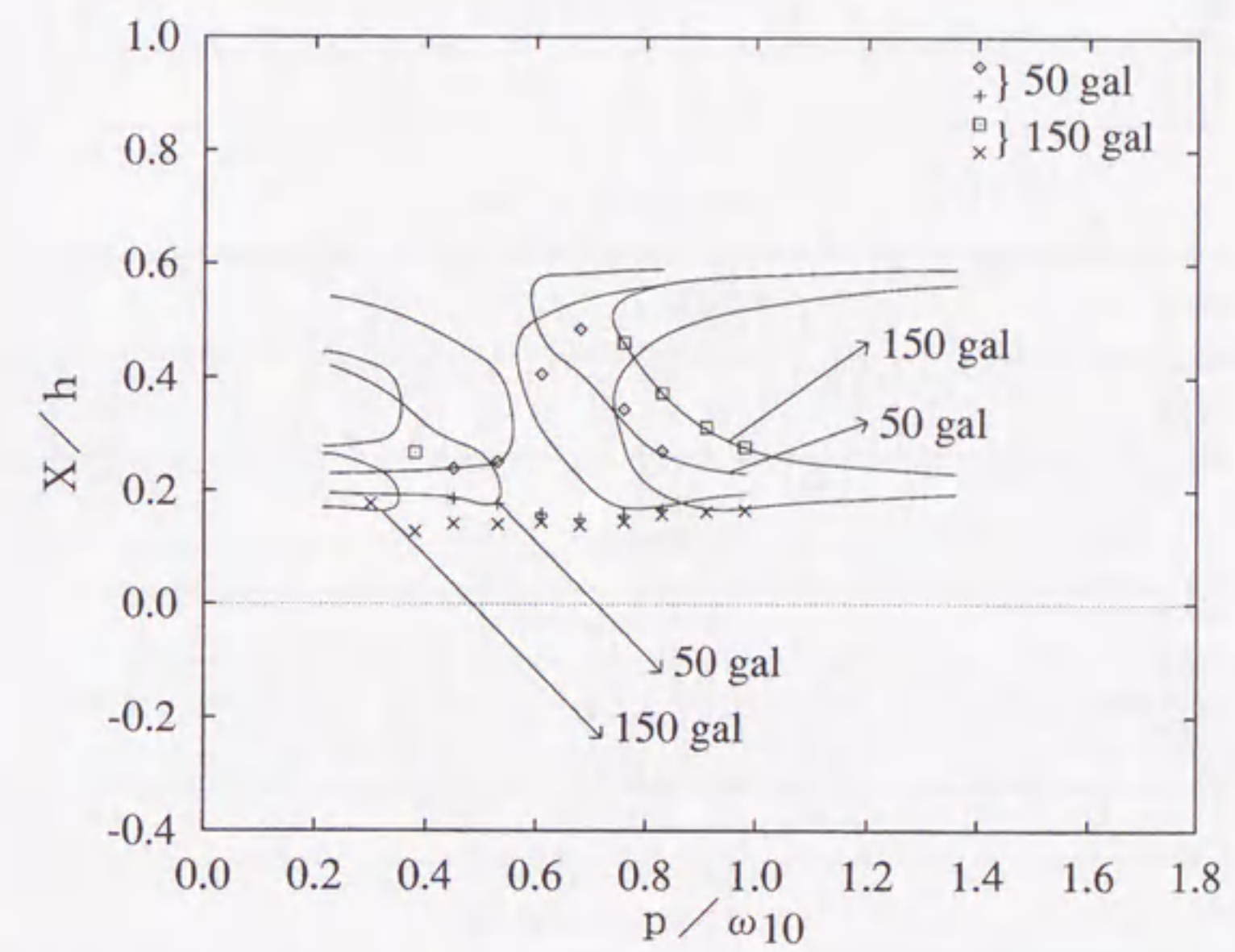


図 3.29: 時刻歴応答解析結果の応答値との比較 (弾塑性系・静的荷重あり: $m = 10\text{kg}$, $F = 10\text{kgf}$)

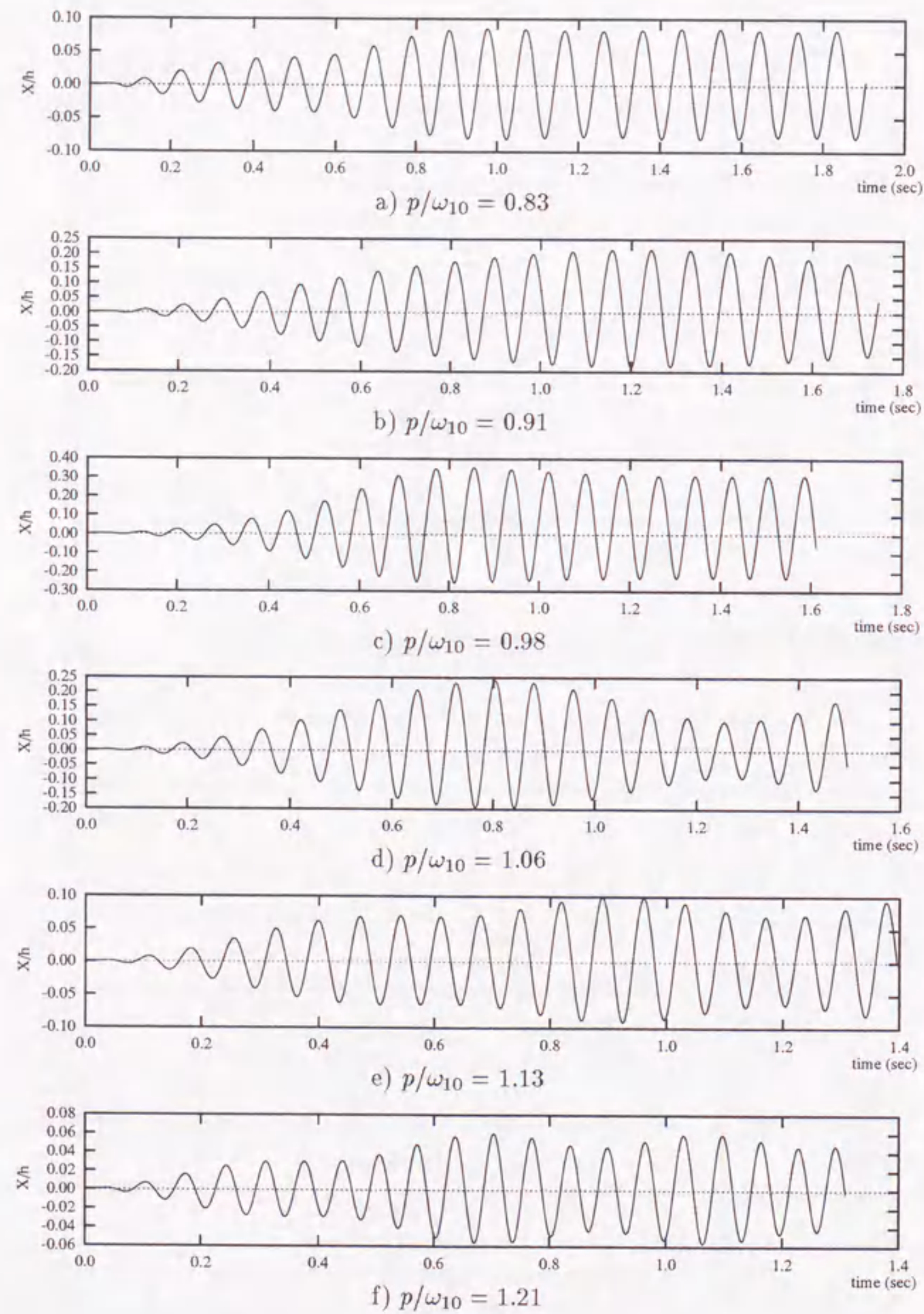


図 3.30: 時刻歴応答波形 (弾塑性系・静的荷重なし: $m = 10\text{kg}$, $F = 0\text{kgf}$, 150 gal)

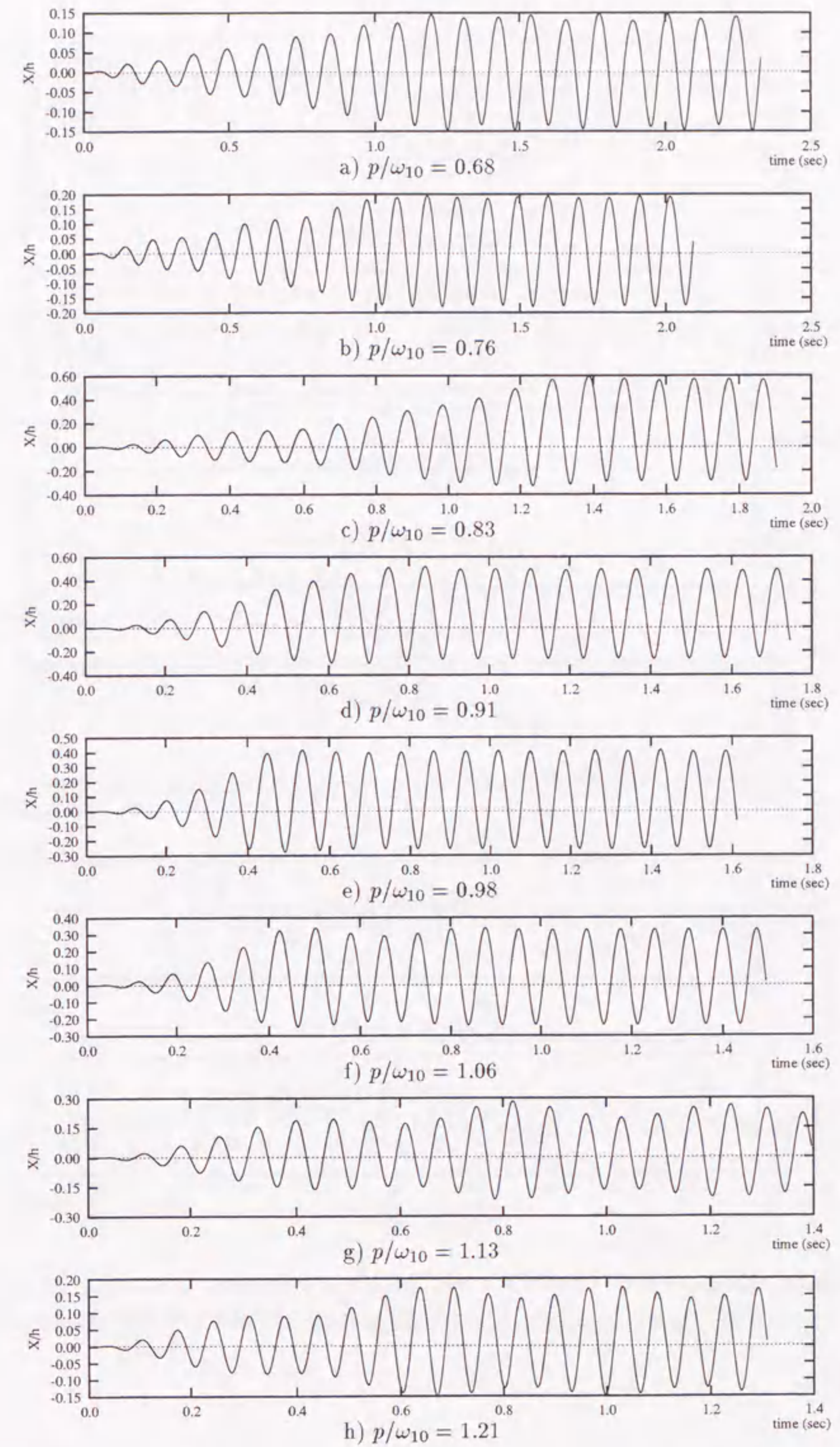


図 3.31: 時刻歴応答波形 (弾塑性系・静的荷重なし: $m = 10\text{kg}$, $F = 0\text{kgf}$, 450 gal)

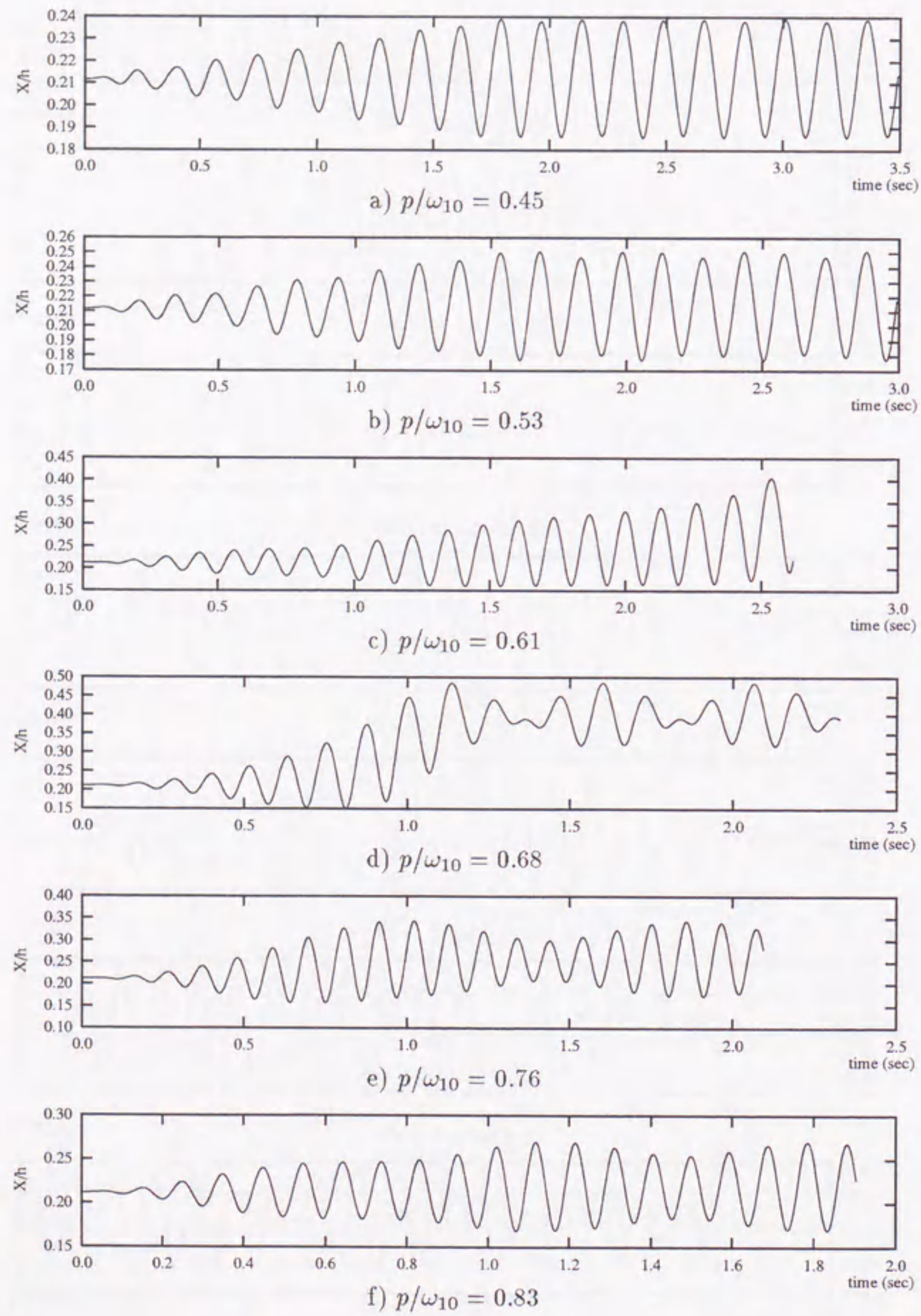


図 3.32: 時刻歴応答波形 (弾塑性系・静的荷重あり: $m = 10\text{kg}$, $F = 10\text{kgf}$, 50 gal)

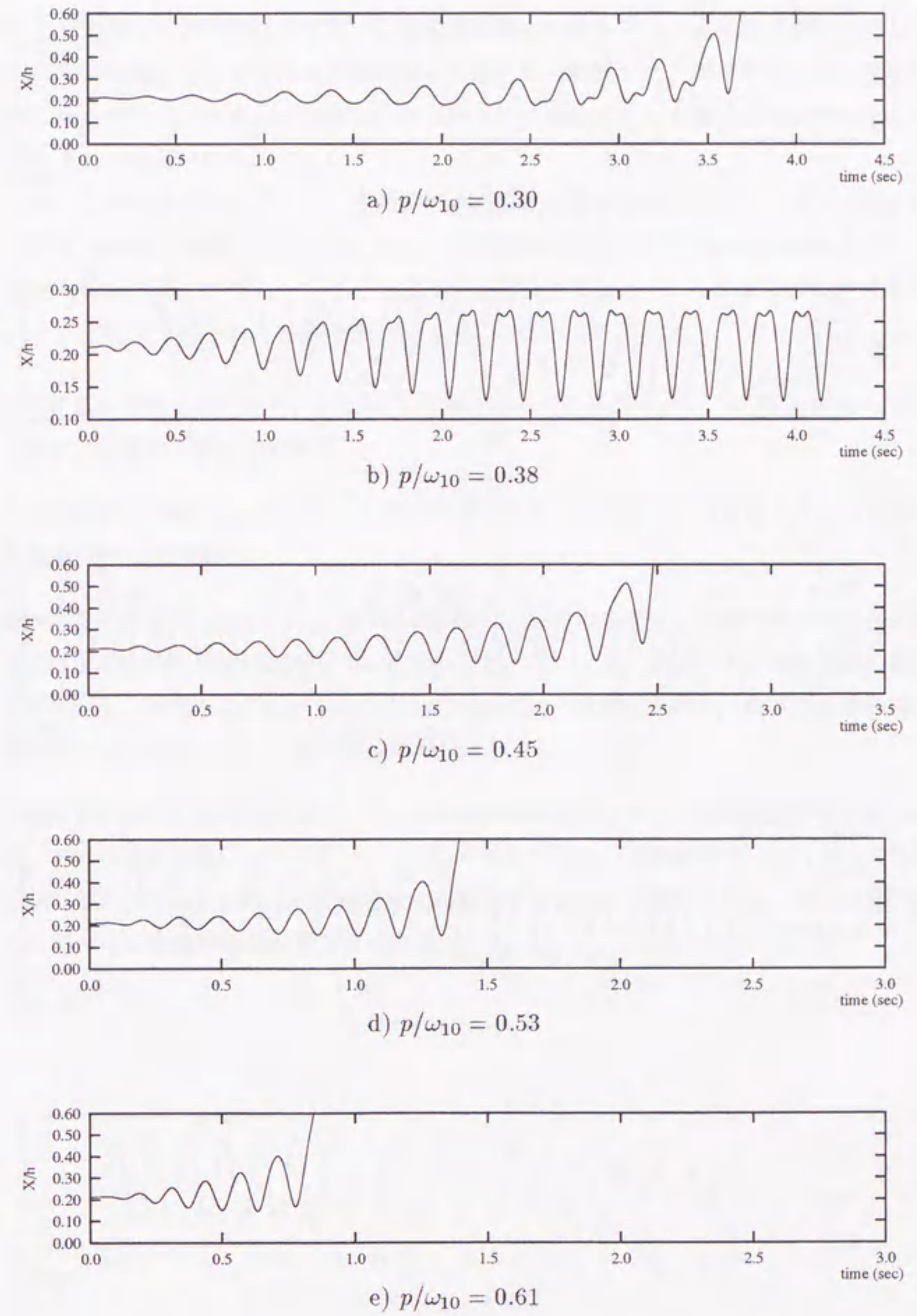


図 3.33: 時刻歴応答波形 (弾塑性系・静的荷重あり: $m = 10\text{kg}$, $F = 10\text{kgf}$, 150 gal - その1)

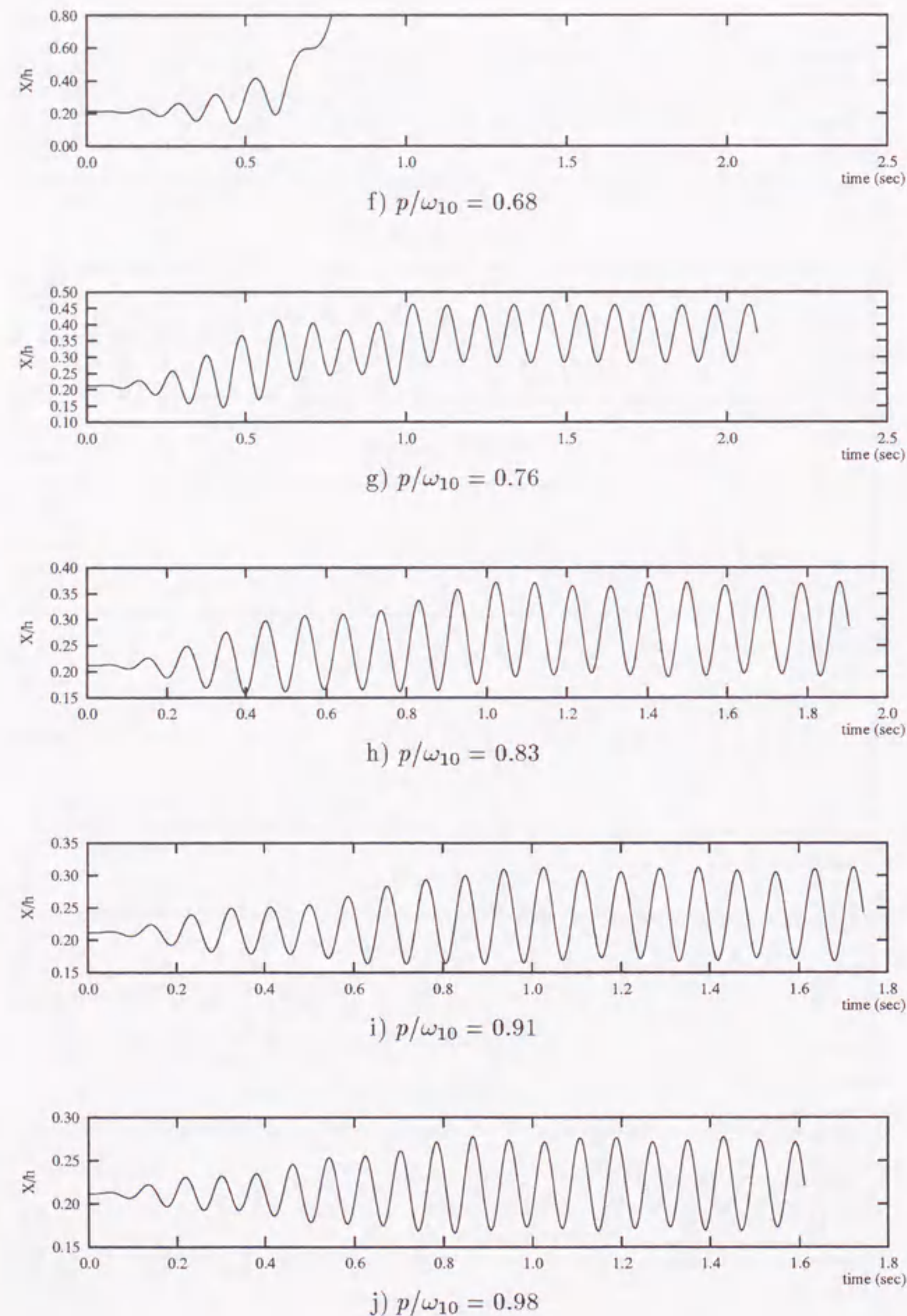


図 3.34: 時刻歴応答波形 (弾塑性系・静的荷重あり: $m = 10\text{kg}$, $F = 10\text{kgf}$, 150 gal - その2)

3.4 まとめ

材料および幾何学的非線形性を考慮した定常振動解析の考え方を、有限要素法に応用し、骨組構造物の非線形振動を分析するための数値解析手法として提案した。本解析手法は、構造物の塑性化以後の動的特性を、外乱の振動数というパラメータを加味した一種の弾塑性特性として具現化する手法として位置付けられる。

本章では、この解析手法を用いて、屈服型の座屈性状を有する偏平三角ラーメンの鉛直振動問題における定常解の数値解析を行うとともに、同様の条件の下での時刻歴応答解析を行い、前章での基礎的な検討を通じて明らかとなった幾つかの特徴を踏まえて、その振動性状を検討した。

これによって明らかにされた事柄をまとめると、以下ようになる。

1. 静的荷重が作用しない場合、比較の入力加速度の大きさが小さい(応答が小さい)範囲で、共振点に応答の上限が存在する。
2. 入力加速度が大きくなるに従い、上記の性質は消失し、非線形1質点系モデルと同様に、共振曲線が左右に分離する。
3. 静的荷重が作用する場合には、共振点に応答の上限は存在せず、変位の増大とともに共振点を挟む左右の共振曲線が離反していく形となる。このとき、逆に上下の共振曲線の間隔は狭まっていく。静的荷重が大きくなると、この傾向は一層顕著となり、右側の共振曲線は高振動数側に折れ曲がって、一定の変位に漸近するようになる。
4. 静的荷重が作用する場合においては、右側の共振曲線と対比される時刻歴応答の最大応答値は、下部の共振曲線が上方に向かって反転する辺りから、共振曲線で示される値よりも大きくなる傾向がある。これは、低振動数側に移行するに従って顕著となり、やがて変位が際限なく増大する発散挙動を示すようになる。

この章では、平面骨組構造物の振動性状を、座屈性状を有する屈服型構造物の振動性状として取り扱う。まず、座屈性状を有する構造物の振動性状を、座屈性状を有する構造物の振動性状として取り扱う。次に、座屈性状を有する構造物の振動性状を、座屈性状を有する構造物の振動性状として取り扱う。最後に、座屈性状を有する構造物の振動性状を、座屈性状を有する構造物の振動性状として取り扱う。

第 4 章 ドーム状の空間骨組構造物の振動性状

この章では、ドーム状の空間骨組構造物の振動性状を取り扱う。まず、ドーム状の空間骨組構造物の振動性状を、ドーム状の空間骨組構造物の振動性状として取り扱う。次に、ドーム状の空間骨組構造物の振動性状を、ドーム状の空間骨組構造物の振動性状として取り扱う。最後に、ドーム状の空間骨組構造物の振動性状を、ドーム状の空間骨組構造物の振動性状として取り扱う。

第4章

ドーム状の空間骨組構造物の振動性状

4.1 はじめに

第3章で snap-through 型の座屈性状を有する構造物の一例として検討された偏平三角ラーメンは、塑性化や座屈に至っても変形状に大きな変化を伴うことはなく、その耐力低下も比較的緩やかなものであった。

一般に、力学的に有利な形態を持つ構造物の中でも、アーチのような2次元で構成される構造物に比べ、シェルのような3次元的な効果によって外力に抵抗する構造物は、変形による形状変化の力学特性に及ぼす影響が一段と大きくなるため、より複雑な非線形性を呈することが知られている。特に塑性化や座屈によって急激な耐力の低下を起こしたり、初期の変形状とは異なる状態に移行するようなこともあるため、その動的挙動においても、振動モードの大きな変化や、これに伴う急激な不安定挙動の発生が予想される。

そこで本章では、円形断面を有する3次元梁要素を採用することにより、第3章で述べた有限要素法による定常振動解析手法を空間骨組構造物の解析に適用できるように拡張し、これを用いて、上記に述べたような力学特性を有するドーム状の空間構造物の定常解を求める。併せて、これまでと同様に、時刻歴応答解析による検討を行い、両者の対応や、既に行った2つのモデルの解析を通じて得られた知見をもとに、その振動性状を分析する。

4.2 定常振動解析における3次元梁要素の定式化

本章で扱う空間骨組構造物の定常振動解析は、第3章で述べた平面梁要素を3次元梁要素に変更して行うものであり、定常振動問題としての取り扱いに関わる基本的な手続きは、これまでと全く同じ方法を適用する。そのため以下においては、新たに導入される3次元梁要素の定式化に関連した事項に限定して、理論展開を述べる。

図4.1に示すような円形断面を有する3次元梁要素を考える。

梁要素の変位関数として、軸方向変位 u_x 、回転変位 ϕ に関して1次、たわみ方向変位 u_y, u_z

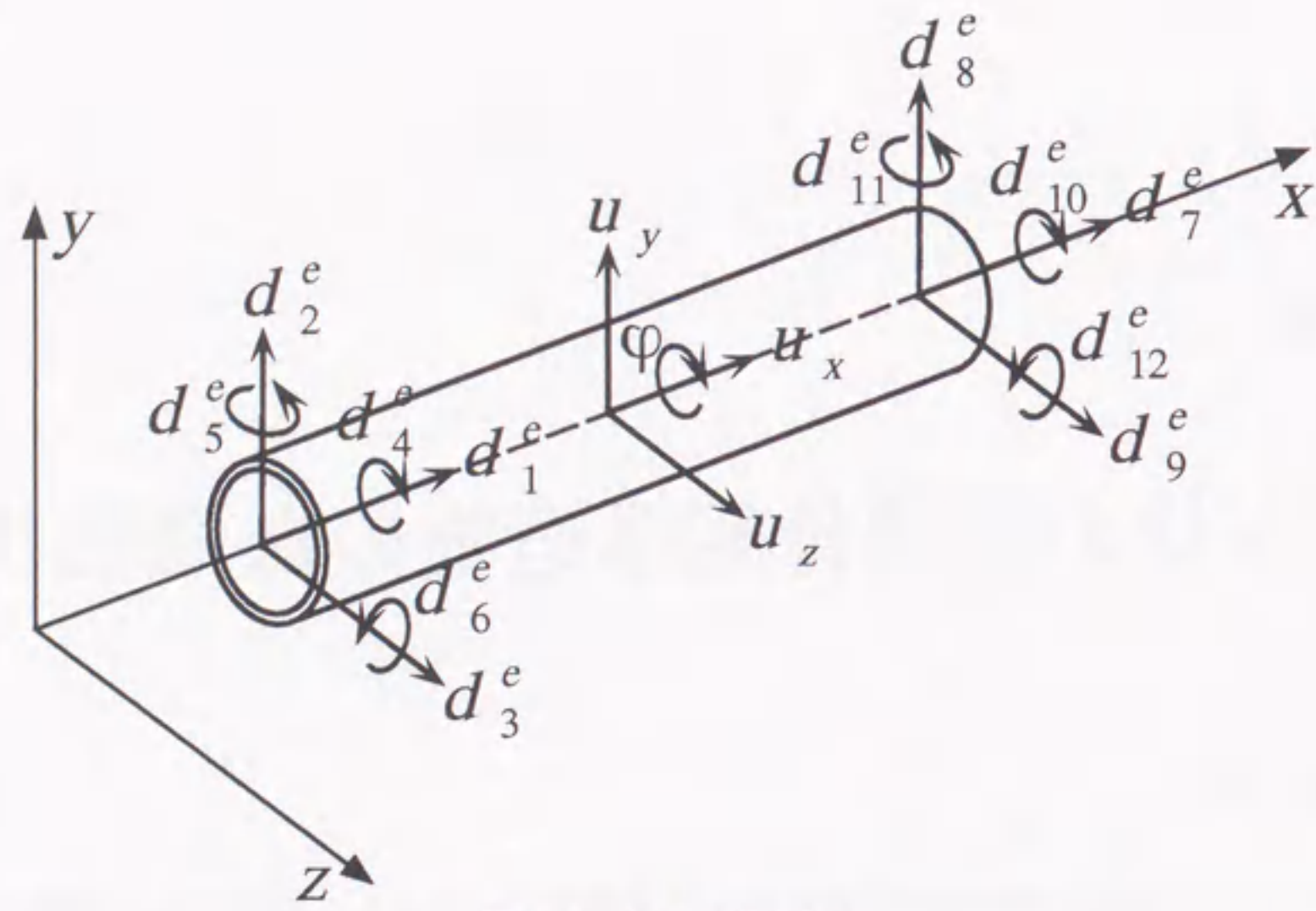


図 4.1: 3次元梁要素

に関して3次の多項式を採用すれば、これらは次式で表される。

$$\begin{aligned} u_x &= N_{1i}d_i^e \\ u_y &= N_{2i}d_i^e \\ u_z &= N_{3i}d_i^e \\ \phi &= N_{4i}d_i^e \end{aligned} \quad (4.1)$$

ここに、

$$[N] = \begin{bmatrix} 1-\xi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-3\xi^2+2\xi^3 & 0 & 0 & 0 & (\xi-2\xi^2+\xi^3)l \\ 0 & 0 & 1-3\xi^2+2\xi^3 & 0 & (-\xi+2\xi^2-\xi^3)l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\xi & 0 & 0 \\ & & & \xi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 3\xi^2-2\xi^3 & 0 & 0 & (-\xi^2+\xi^3)l \\ & & & 0 & 0 & 3\xi^2-2\xi^3 & 0 & (\xi^2-\xi^3)l \\ & & & 0 & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xi = \frac{x}{l}$$

なお、添字については総和規約を適用する。

梁の断面において、材軸位置を原点とする極座標 (r, θ) を導入すれば、 $y = r \sin \theta$, $z = r \cos \theta$ と表される。

これらを用いて、要素内の軸方向歪およびねじり歪を次式で表す。

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{du_x}{dx} - \frac{du_y^2}{dx^2} r \sin \theta - \frac{du_z^2}{dx^2} r \cos \theta \\ &+ \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{du_y}{dx} \right)^2 + \left(\frac{du_z}{dx} \right)^2 + \left(\frac{du_x}{dx} - \frac{du_y^2}{dx^2} r \sin \theta - \frac{du_z^2}{dx^2} r \cos \theta \right)^2 \right\} \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\gamma = r \frac{d\phi}{dx}$$

上式に(4.1)式を用いて、次式を得る。

$$\begin{aligned} \varepsilon &= B_i d_i^e + B_{ij}^N d_i^e d_j^e \\ \gamma &= B_i^T d_i^e \end{aligned} \quad (4.3)$$

ここに、

$$[B] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{l} & \frac{6}{l^2}(1-2\xi)r \sin \theta & \frac{6}{l^2}(1-2\xi)r \cos \theta & 0 & \frac{2}{l}(-2+3\xi)r \cos \theta & \frac{2}{l}(2-3\xi)r \sin \theta \\ \frac{1}{l} & -\frac{6}{l^2}(1-2\xi)r \sin \theta & -\frac{6}{l^2}(1-2\xi)r \cos \theta & 0 & \frac{2}{l}(-1+3\xi)r \cos \theta & \frac{2}{l}(1-3\xi)r \sin \theta \end{bmatrix}$$

$$[B^N] = \frac{1}{2} ([B]^t [B] + [B^y]^t [B^y] + [B^z]^t [B^z])$$

$$[B^y] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{6}{l}(-\xi+\xi^2) & 0 & 0 & 0 & 1-4\xi+3\xi^2 & 0 & \frac{6}{l}(\xi-\xi^2) & 0 & 0 & 0 & -2\xi+3\xi^2 \end{bmatrix}$$

$$[B^z] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{6}{l}(-\xi+\xi^2) & 0 & -1+4\xi-3\xi^2 & 0 & 0 & 0 & \frac{6}{l}(\xi-\xi^2) & 0 & 2\xi-3\xi^2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[B^T] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{r}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{r}{l} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

仮想仕事の原理より、

$$\int_0^l \int_0^{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} \{ \sigma \delta \varepsilon + \tau \delta \gamma + \rho (\ddot{u}_x + \ddot{\eta}_x) \delta u_x + \rho (\ddot{u}_y + \ddot{\eta}_y) \delta u_y + \rho (\ddot{u}_z + \ddot{\eta}_z) \delta u_z \} r dx d\theta dr + \sum_{i=1}^{12} m_i^e \{ (\ddot{d}_i^e + \ddot{\zeta}_i^e) - f_i^e \} \delta d_i^e = 0 \quad (4.4)$$

ここに、 ρ は要素の密度を、 m_i^e , f_i^e は、それぞれ、節点における集中質量および静的な外力を表す。また、 $\ddot{\zeta}_i^e$ は支点の動きに伴う構造物の剛体的な運動を仮定したときに節点に生ずる加速度であり、 $\ddot{\eta}_x$, $\ddot{\eta}_y$, $\ddot{\eta}_z$ は、これによって生ずる要素内部の加速度を表す。これらはそれぞれ要素内の軸方向、たわみの y 方向、 z 方向のそれに対応し、次式で表される。

$$\begin{aligned} \ddot{\eta}_x &= N_{1i} \ddot{\zeta}_i \\ \ddot{\eta}_y &= N_{2i} \ddot{\zeta}_i \\ \ddot{\eta}_z &= N_{3i} \ddot{\zeta}_i \end{aligned} \quad (4.5)$$

応力 σ について、第3章と同様に、3.2.1の(3.1)式で示される線形化を施し、(4.4)式を整理する。

積分記号内の第2項は、

$$\int_0^l \int_0^{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} \tau \delta \gamma r dx d\theta dr = \int_0^l \int_0^{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} G B_i^T B_j^T d_j^e \delta d_i^e r dx d\theta dr$$

$$= \int_0^l \int_0^{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} G A_{ij}^{(5)} d_j^e \delta d_i^e r dx d\theta dr \quad (4.6)$$

となり、他の項については、平面梁要素の定式化において示されたものと同様の形式で表される。従って、最終的に次式で示されるような運動方程式を得る。

$$M_{ij}^e \ddot{d}_j^e + C_{ij}^{(0)e} \dot{d}_j^e + C_{ijk}^{(1)e} d_j^e \dot{d}_k^e + C_{ijkl}^{(2)e} d_j^e d_k^e \dot{d}_l^e + K_{ij}^{(0)e} d_j^e + K_{ijk}^{(1)e} d_j^e d_k^e + K_{ijkl}^{(2)e} d_j^e d_k^e d_l^e + R_i^e = -M_{ij}^e \ddot{z}_j^e + f_i^e \quad (4.7)$$

ここに、

$$M_{ij}^e = \int_0^l \int_0^{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} \rho N_{ki} N_{kj} r dx d\theta dr + \delta_{ij} m_i^e$$

$$C_{ij}^{(0)e} = \int_0^l \int_0^{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} C_e A_{ij}^{(0)} r dx d\theta dr$$

$$C_{ijk}^{(1)e} = \int_0^l \int_0^{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} 2C_e (A_{ijk}^{(12)} + A_{kij}^{(12)}) r dx d\theta dr$$

$$C_{ijkl}^{(2)e} = \int_0^l \int_0^{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} 4C_e A_{ijkl}^{(4)} r dx d\theta dr$$

$$K_{ij}^{(0)e} = \int_0^l \int_0^{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} \{E_e (A_{ij}^{(0)} - 2\varepsilon_r A_{ij}^{(2)}) + G A_{ij}^{(5)}\} r dx d\theta dr$$

$$K_{ijk}^{(1)e} = \int_0^l \int_0^{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} E_e (A_{ijk}^{(12)} + 2A_{kij}^{(12)}) r dx d\theta dr$$

$$K_{ijkl}^{(2)e} = \int_0^l \int_0^{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} 2E_e A_{ijkl}^{(4)} r dx d\theta dr$$

$$R_i^e = - \int_0^l \int_0^{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} E_e \varepsilon_r B_i r dx d\theta dr$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i=j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

$$A_{ij}^{(0)} = B_i B_j, \quad A_{ij}^{(2)} = B_{ij}^N, \quad A_{ijk}^{(12)} = B_i B_{jk}^N, \quad A_{ijkl}^{(4)} = B_{ij}^N B_{kl}^N, \quad A_{ij}^{(5)} = B_i^T B_j^T$$

(4.7)式に、3.2.2の平面梁要素の定式化において述べたような操作を施すことによって、仮定調波の係数に関する連立非線形代数方程式が得られる。

なお、支点に入力される加速度は前章と同様に、

$$\ddot{y} = \alpha \sin pt \quad (4.8)$$

で与えられるものとする。

4.3 数値解析

4.3.1 解析モデル

図4.2に示すような、鉛直加振されるラチスドームの弾塑性振動を検討する。このモデルは静的な非線形挙動の数値解析の例題として取り扱われたトラスドーム [39] に修正を加えたものである。スパン、ライズ、部材断面などの寸法が変更されている他、節点における部材の接合を剛接合とし、動的解析モデルとして扱うために各節点に集中質量を配している。部材は材軸方向に5等分し、両端及び中央に位置する要素を弾塑性要素、残りの部分を弾性要素としてモデル化した。解析は周方向の対称性を考慮して、1/6の領域について行う[†]。数値積分に関しては、弾性要素については軸方向5点、周方向8点の Gauss の求積法を使用し、弾塑性要素については、軸方向は弾性要素と同様であるが、周方向においては、断面を均等に8分割したセグメントを用いて算定する。応力-歪関係は、第3章と同様に完全弾塑性型を用いる。材料定数などについては図4に記載の通りである。

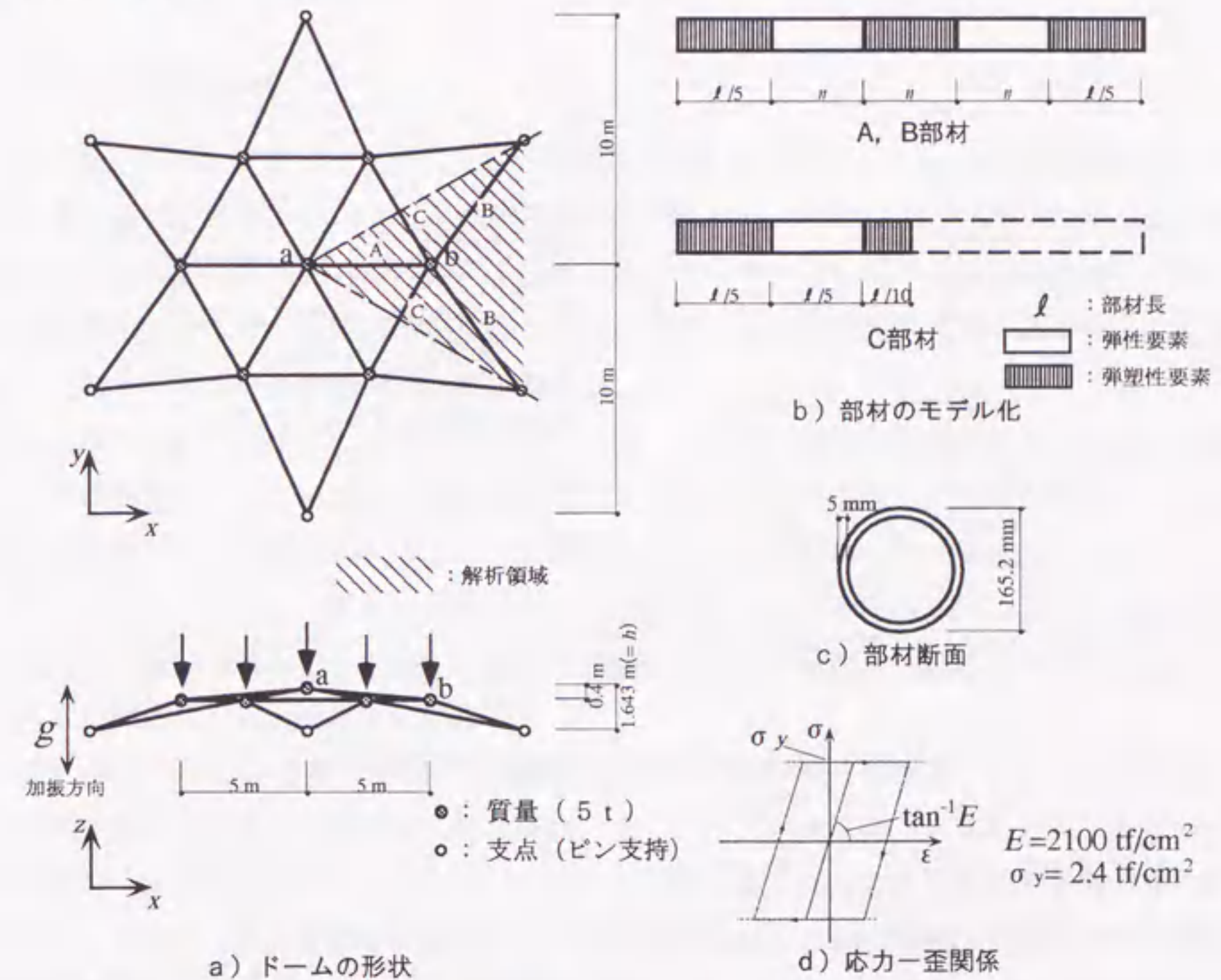


図4.2: 剛接合単層ラチスドーム

図4.3に、静的解析に基づく上記モデルの荷重-変位曲線を示す。比較のため、材料が常に弾性であるものと仮定した場合の荷重-変位曲線を併せて示している。荷重は各節点に設定された質

[†]ここでは、軸対称変形のみを検討するものとして、多大な解析時間を要する定常振動解析および時刻歴応答解析については、このような解析モデルの取り扱いを行なった。

量に比例する下向きの鉛直荷重を与えた。すなわち、ドーム上の頂点およびその周辺の7箇所の節点には、全て同じ大きさの荷重が作用する。縦軸の荷重係数 λ は、この鉛直荷重の大きさの、質量に相当する荷重の大きさ（各節点あたり 5 tf）に対する倍率であり、横軸は、中央節点の鉛直変位（下向きを正とする） X_a をライズ h で除した無次元化変位を示している。

弾性、弾塑性いずれの場合においても、座屈に至るまでは、ほぼ線形に近い荷重-変位関係を示すが、座屈点近傍で、中央節点が snap-back によって変位の戻りを生じるなど、途中、その変形状に大きな変化を伴うものとなっている。座屈荷重については弾性系に比べ、弾塑性系では 2 割程度低減される。また、弾塑性系においては、座屈後、急激な耐力低下を起こすことが特徴として挙げられる。

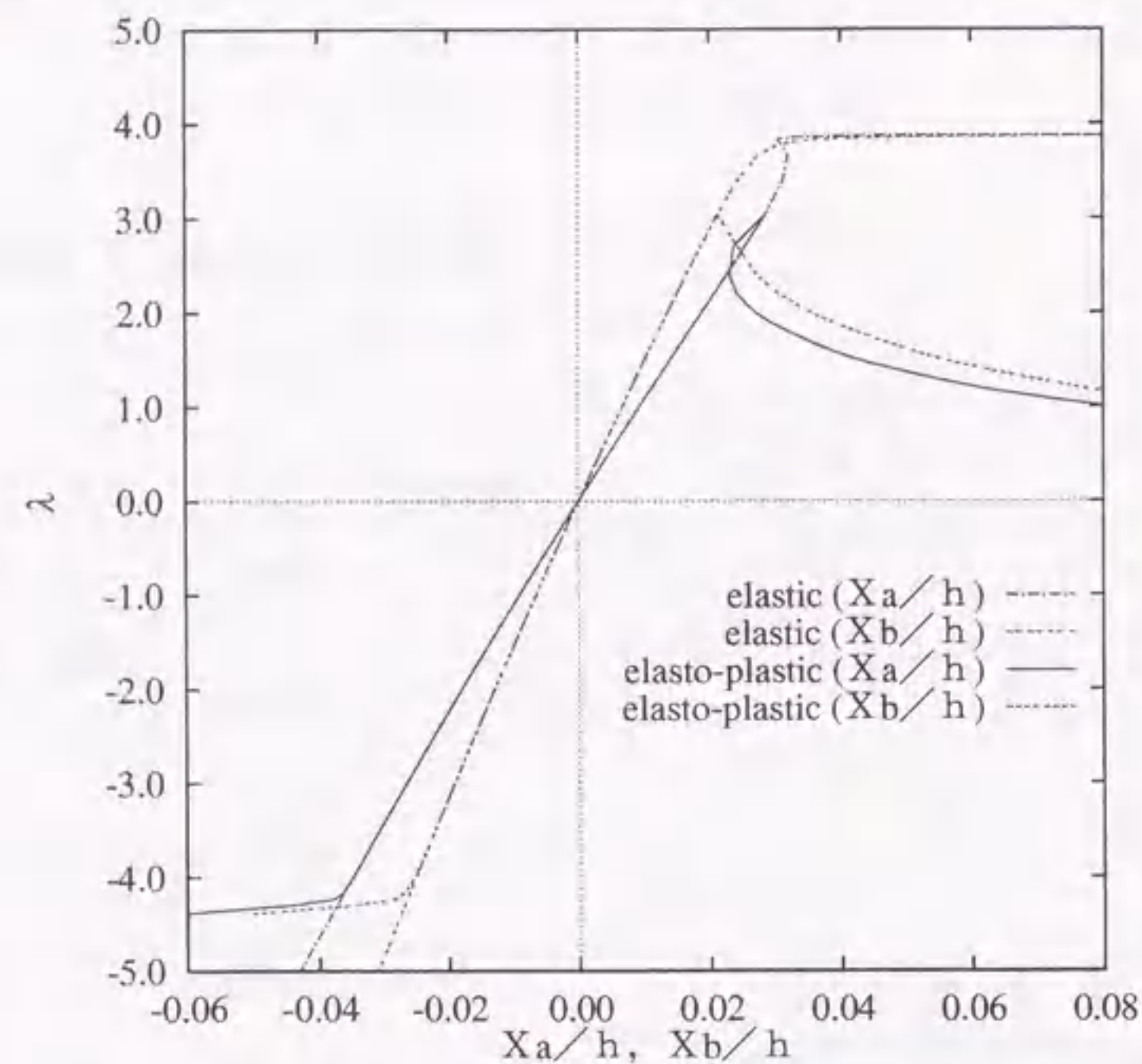


図 4.3: 静的解析による荷重-変位曲線

4.3.2 固有値解析

図 4.2 のモデルの固有値解析を行い、線形振動系としての振動特性を調べた。なお、この固有値解析に限り、ドーム全体を解析領域として取り扱っている。1 次から 10 次までの固有周期および刺激係数を表 4.1 に、振動モードを図 4.4 に示す。これらの結果より、本解析モデルは多くの固有周期が特定の範囲に集中し、このうち鉛直方向の加振により 4 次および 7 次の振動モードが励起されることがわかる。図 4.4 より明らかなように、4 次の振動モードはドームの中央節点が大きな振幅を持つモードであり、7 次の振動モードはこれとは逆に、中央節点の振幅は小さく、周辺節点に大きな振幅を持つモードである。

表 4.1: 固有周期および刺激係数

次数	固有周期 (固有円振動数)		刺激係数		
	(sec)	(rad/sec)	x	y	z
1 次	0.2644	(23.77)	0.206	0.327	0.000
2 次	0.2644	(23.77)	0.327	-0.206	0.000
3 次	0.2600	(24.16)	0.000	0.000	0.000
4 次	0.2595	(24.21)	0.000	0.000	0.494
5 次	0.2593	(24.23)	0.000	0.000	0.000
6 次	0.2593	(24.23)	0.000	0.000	0.000
7 次	0.2121	(29.63)	0.000	0.000	-1.820
8 次	0.0567	(110.8)	1.791	0.053	0.000
9 次	0.0567	(110.8)	0.053	-1.791	0.000
10 次	0.0439	(143.3)	0.000	0.000	0.000

4.3.3 定常振動解析

仮定調波として、定数項と sine, cosine の基本調波を各 1 波ずつ与え、定常振動解析を行った。この結果に基づいて描かれたドームの共振曲線を、図 4.5~4.12 に示す。比較のため、材料が常に弾性であるものと仮定した場合の結果も併せて示している。さらに、それぞれについて静的荷重の影響を検討するため、質量に相当する大きさの下向きの静的荷重が作用する場合と、これが作用しない場合の 2 通りの結果を示している。

図中 h はドームのライズを、 ω はここで取り扱っている鉛直振動に関する 2 つの固有円振動数のうちの低次側、すなわち前述の固有値解析で示された 4 次の固有円振動数を表す。従って、全ての共振曲線に共通に認められる 2 つの共振領域のうち、左側が 4 次の応答に、右側が 7 次の応答に対応するものである。また、弾塑性系の共振曲線上に描かれた破線は、上部の共振曲線において塑性化の生じる位置を示している。なお、この共振曲線を含め、応答については特に断りのない限り、節点の下向き鉛直変位を正とする。

図 4.9~4.12 に示される弾塑性系の共振曲線を見ると、低次側と高次側の共振曲線は明らかに異なる性状を示している。低次側の共振曲線は、上下の非対称性が弱く、また入力加速度が大きくない範囲で、共振点に応答の上限を持つ。これに対し、高次側の共振曲線は上下の非対称性が強く、ソフトニングに伴う左側への傾斜も大きい。特に周辺節点の応答において、この傾向が強められる。さらに静的荷重が作用する場合には、図 4.11~4.12 に見られるように、いずれも共通して、下部の共振曲線の反転が示されるが、高次側では、これが上部の共振曲線との間隔をほぼ同じに保つか、狭めるようにして上方に伸びていく。

これらをまとめれば、低次側の共振曲線は、どちらかといえば、微小変形理論の下で取り扱われる通常の履歴系の共振曲線に近い性質を持ち、高次側の共振曲線は、前章までに求められた非線形 1 質点系モデルや偏平三角ラーメンの共振曲線と同じ特徴を持っているといえる。このこと

は、2つの共振領域、すなわち固有振動数の低次側と高次側の応答の間に、極めて明確な振動性状の違いが存在することを意味している。

一方、図4.5~4.8に示される弾性系の共振曲線に着目すれば、低次側、高次側のいずれの共振領域においても、弾性の偏平アーチなどに見られる典型的な共振曲線の形を有しており、相互の間に大きな差は認められない。また、静的荷重の存在の有無による影響も少ない。このことは、非線形1質点系モデルや偏平三角ラーメンで示された結果と同じである。

図4.13~4.16に、弾塑性系の場合の低次側、高次側のそれぞれの固有振動数付近における変形性状の変化を示した。これらは、ドームを横から見て、中央節点と周辺節点、および周辺節点と支点を繋ぐ部材上の鉛直変位 u をライズ h で除して無次元化した値を、座標軸の左から右にかけて描いたもので、この図に限り、鉛直変位の正負の符号について上向きを正とした表現を採用している。図中、マーカーと実線によって中央に描かれた曲線は振動中心を表し、一点鎖線で示された曲線は、上下それぞれの最大変形を示す。ただし、これらは低次側の応答においては中央節点、高次側の応答においては周辺節点で変位が最大となる時の状態を描いたものである。

いずれの図においても、a) の図はドーム全体がほぼ弾性領域にある状態を示したものであり、このときの変形性状は、固有値解析で示された4次および7次の振動モードに対応するものとなっている。図4.13, 図4.15は、それぞれ、静的荷重が作用する場合と作用しない場合における低次側の変形性状の変化を示している。これらは、中央節点が最も大きな振幅を持つ振動を示しており、静的荷重の有無に関わらず、初期の小振幅の状態から塑性化後の大振幅に至るまで、その形に大きな変化は見られない。

しかしながら、図4.14, 図4.16に示される高次側の変形性状を見ると、初期の振動モードは固有値解析で示された7次の振動モードに類似したものとなっているが、入力加速度の大きさの増大に従って、その形は次第に変化し、周辺節点付近が大きく下にたわむなど、局所的な変形を伴うものとなっている。これは静的荷重の存在を考慮した図4.16に、より明瞭に現れている。

以上を総括すると、低次側の振動モードが励起されるときには、ドームはその変形性状を大きく変化させることはなく、共振曲線の外形上の特徴から推察されるように、幾何学的非線形性の影響は比較的少ないが、高次側の振動モードが励起されるときには、塑性化の進展に伴って、振幅の増大よりも、ドームの周辺部を中心に、静的なたわみが進行するといえる。

これまでの非線形1質点系モデルや偏平三角ラーメンの検討では、定常解に後者のような特性が観察される場合には、時刻歴応答においても、変位が大きく増大して、振動中心に著しい移動を生じるような応答が示された。この急激な挙動の変化は、場合によっては不規則な応答や、発散挙動に結び付くこともあるため、共振曲線に示される性質としては、注意を要するものである。従って、次節で検討されるドームの時刻歴応答においても、特に高次側に対応する応答にどのような性状が示されるのかが焦点となろう。

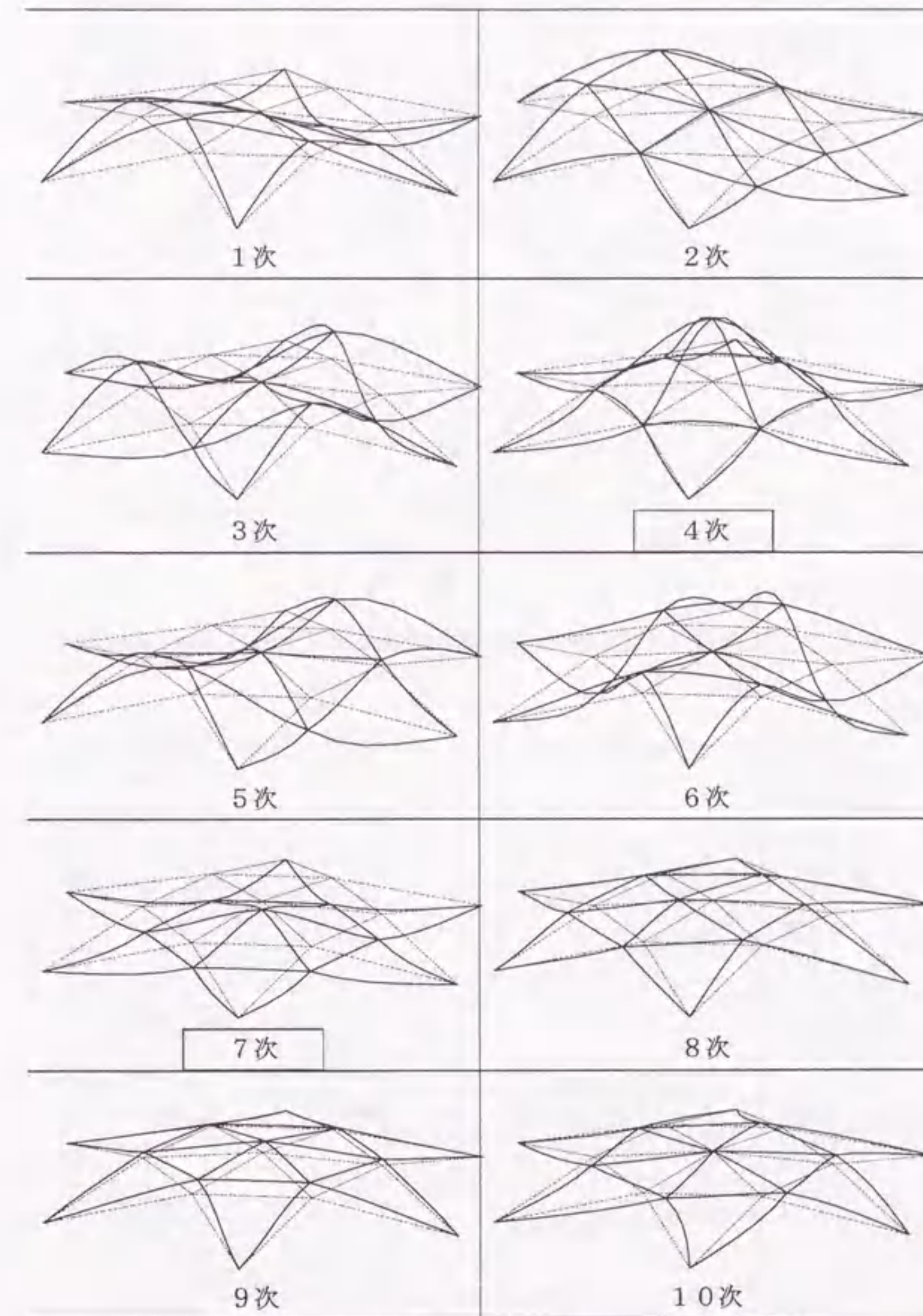


図4.4: 振動モード

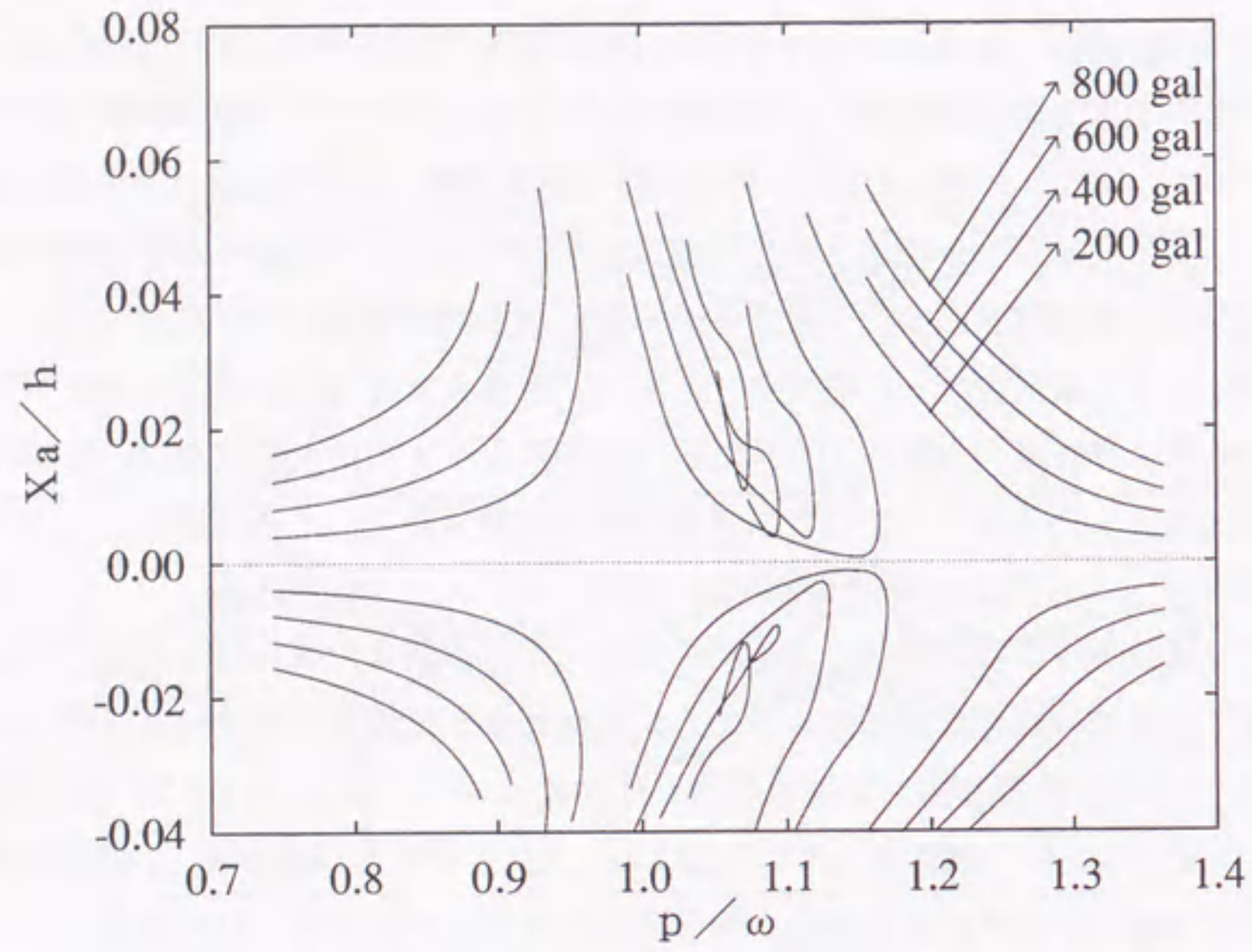


図 4.5: 共振曲線 (弾性系・中央節点の応答・静的荷重なし: $\lambda = 0$)

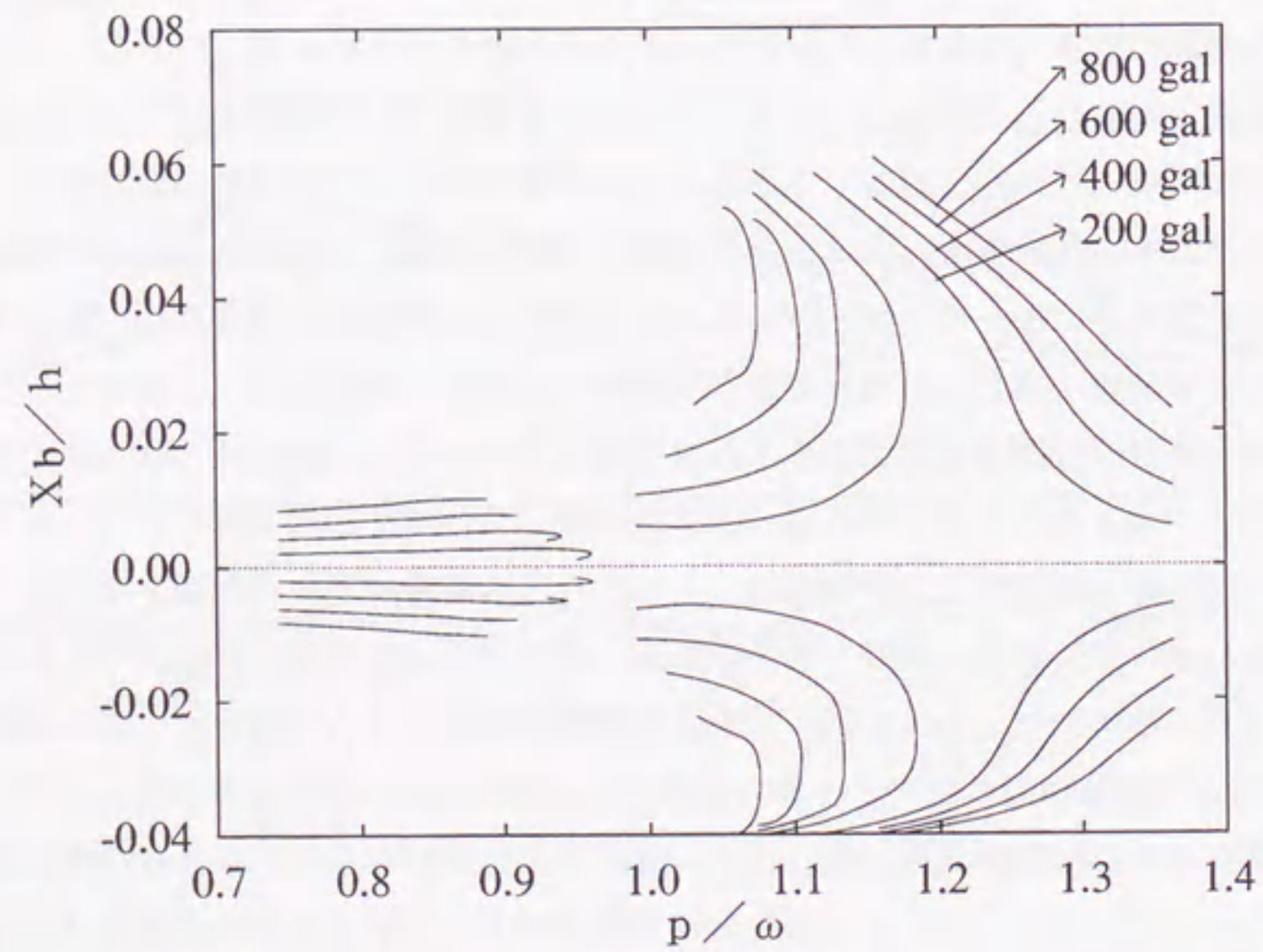


図 4.6: 共振曲線 (弾性系・周辺節点の応答・静的荷重なし: $\lambda = 0$)

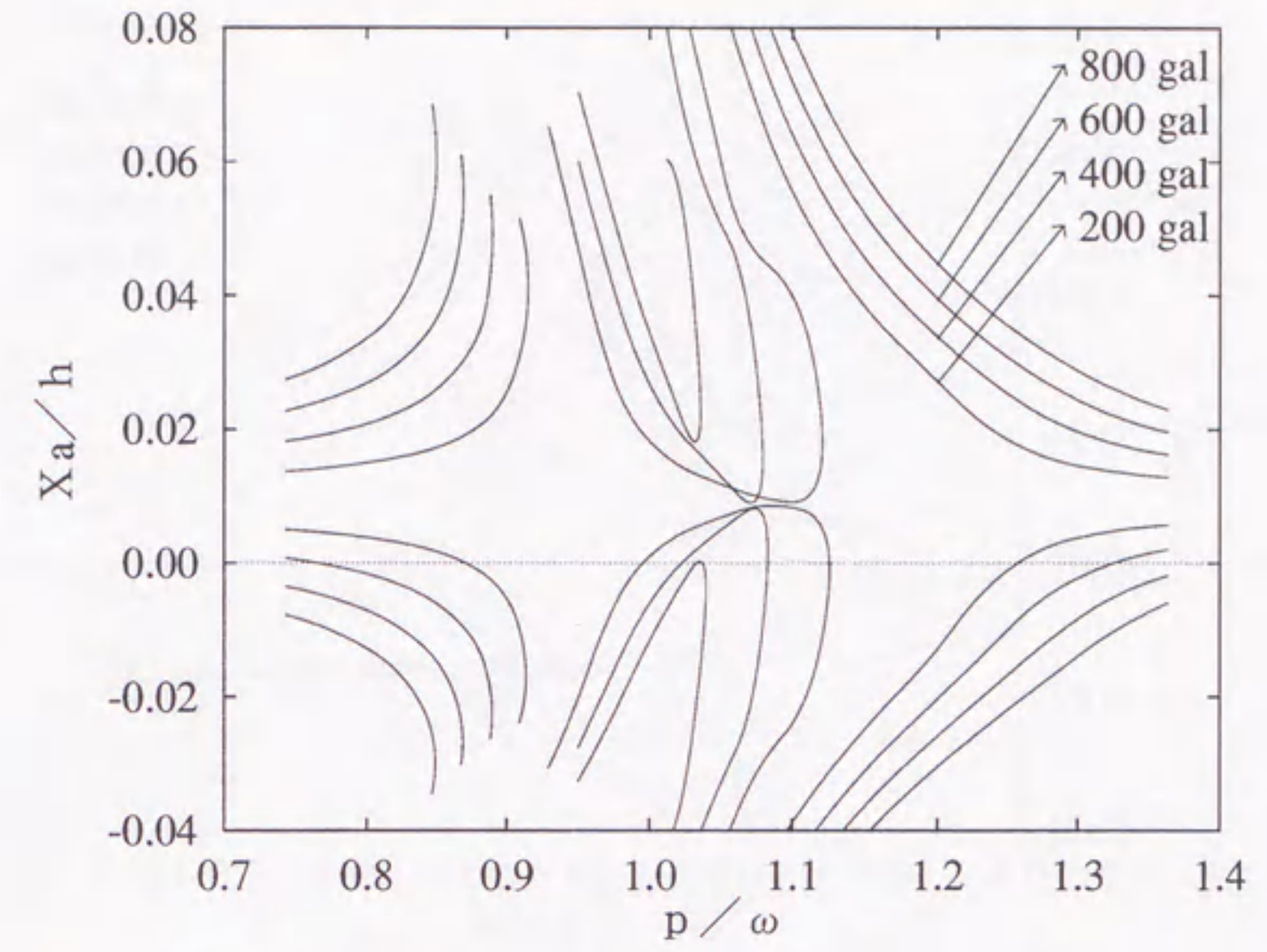


図 4.7: 共振曲線 (弾性系・中央節点の応答・静的荷重あり: $\lambda = 1$)

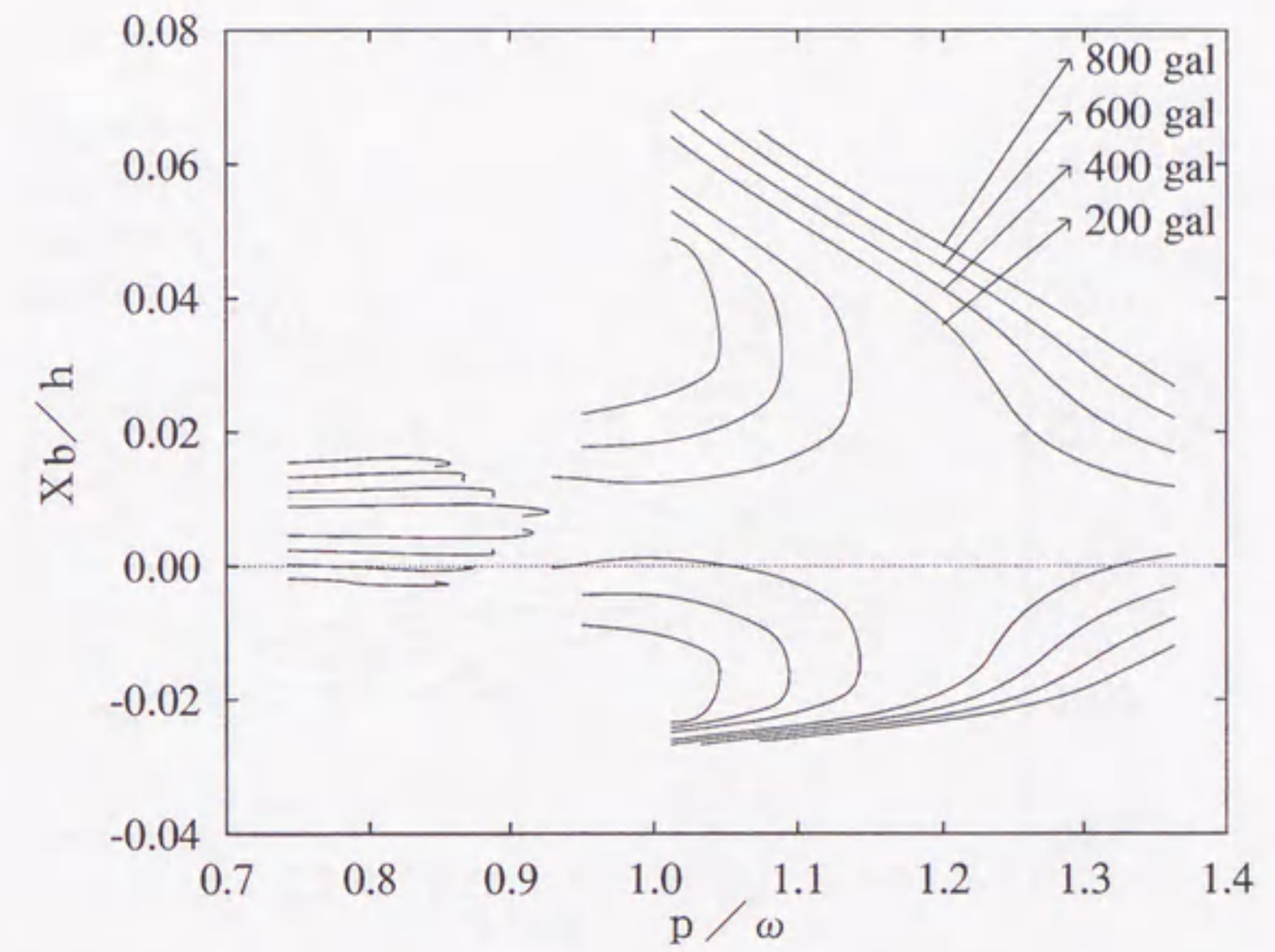


図 4.8: 共振曲線 (弾性系・周辺節点の応答・静的荷重あり: $\lambda = 1$)

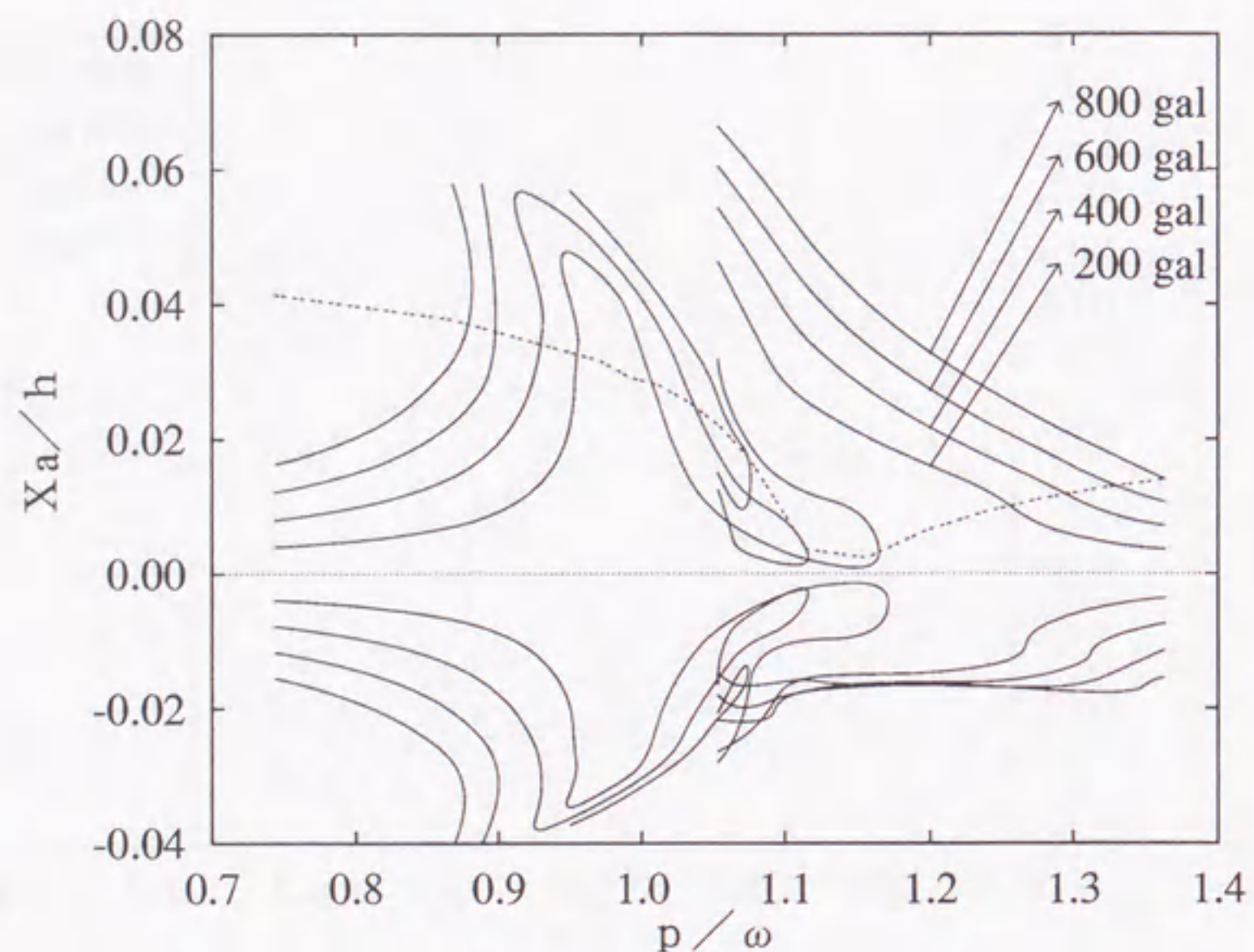


図 4.9: 共振曲線 (弾塑性系・中央節点の応答・静的荷重なし: $\lambda = 0$)

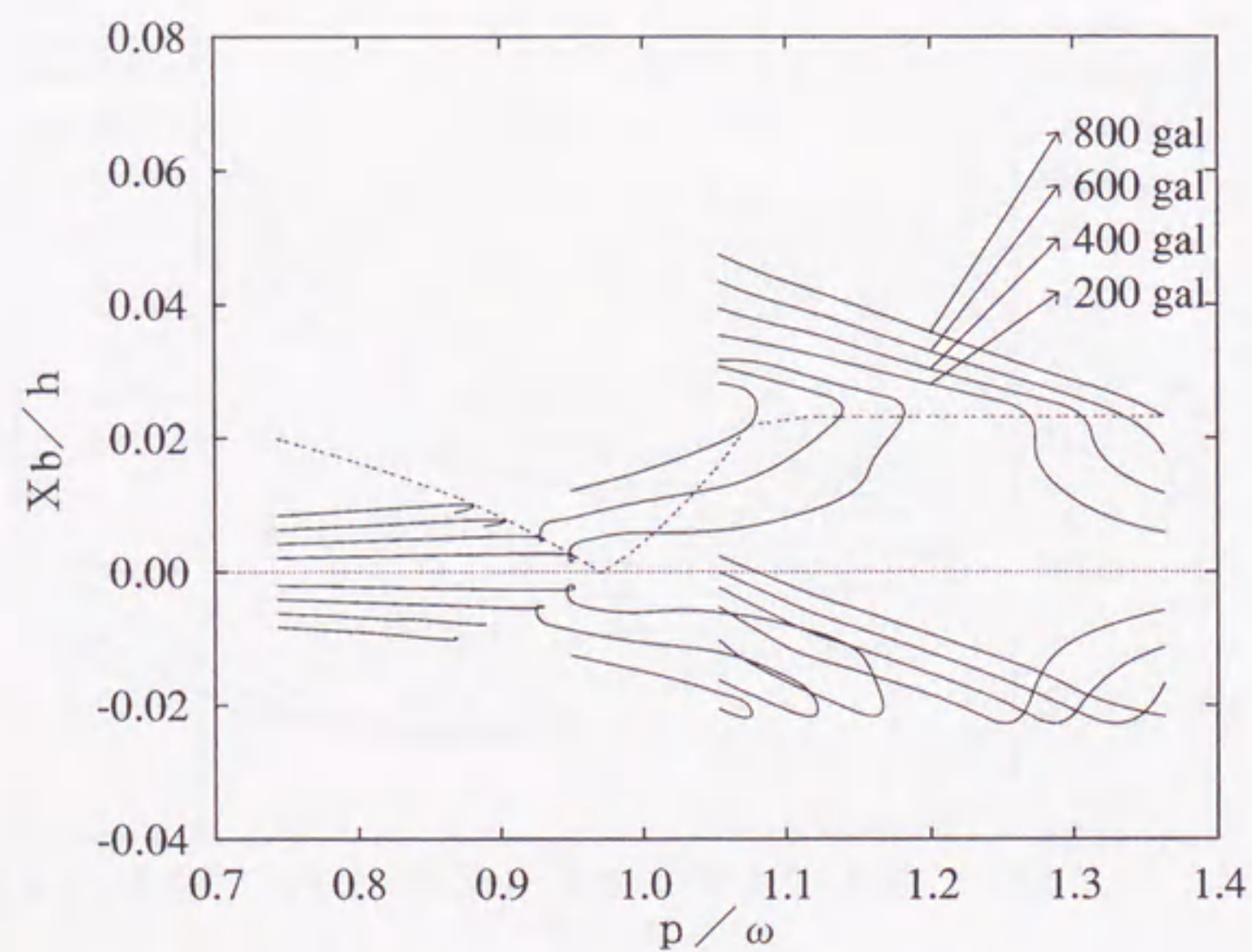


図 4.10: 共振曲線 (弾塑性系・周辺節点の応答・静的荷重なし: $\lambda = 0$)

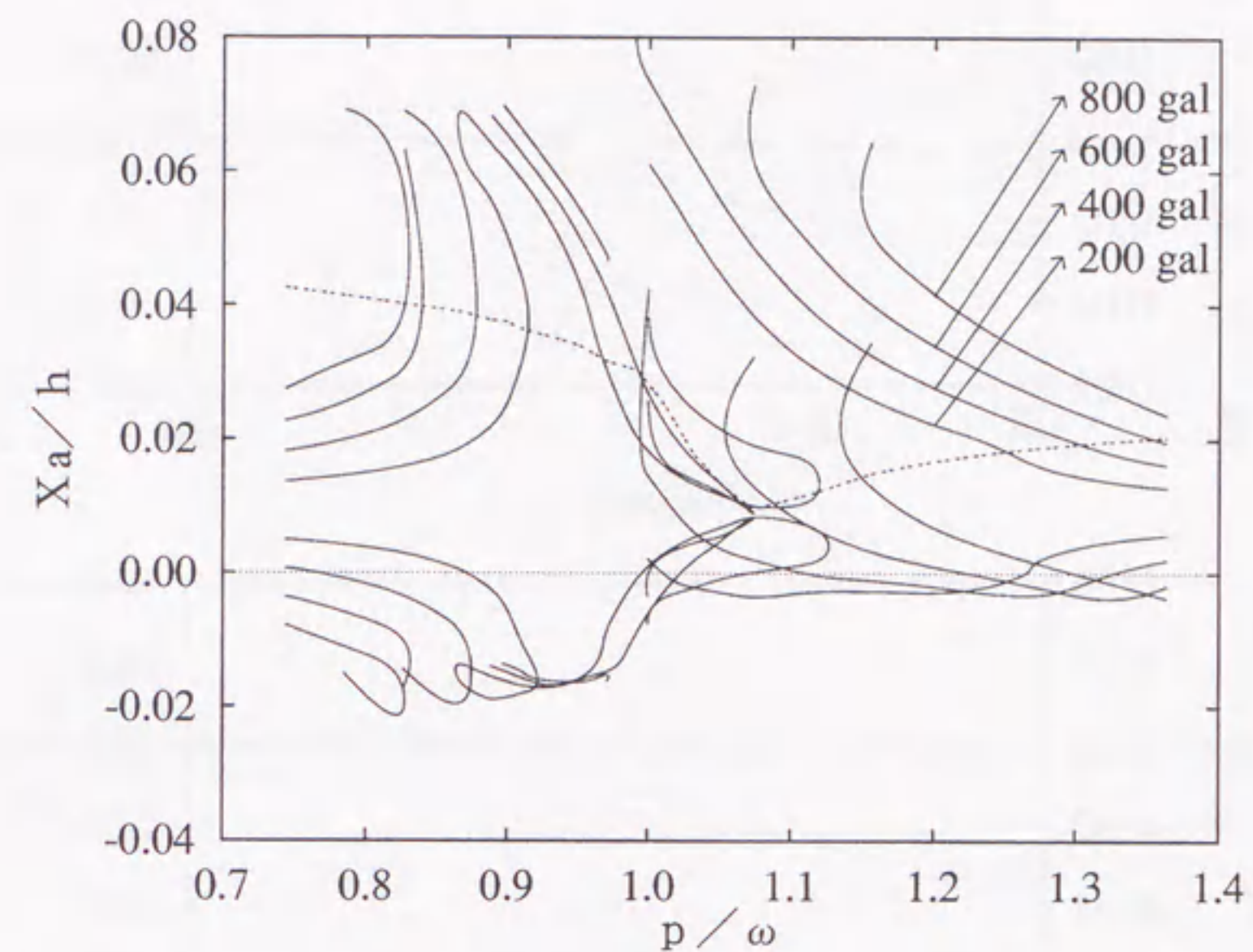


図 4.11: 共振曲線 (弾塑性系・中央節点の応答・静的荷重あり: $\lambda = 1$)

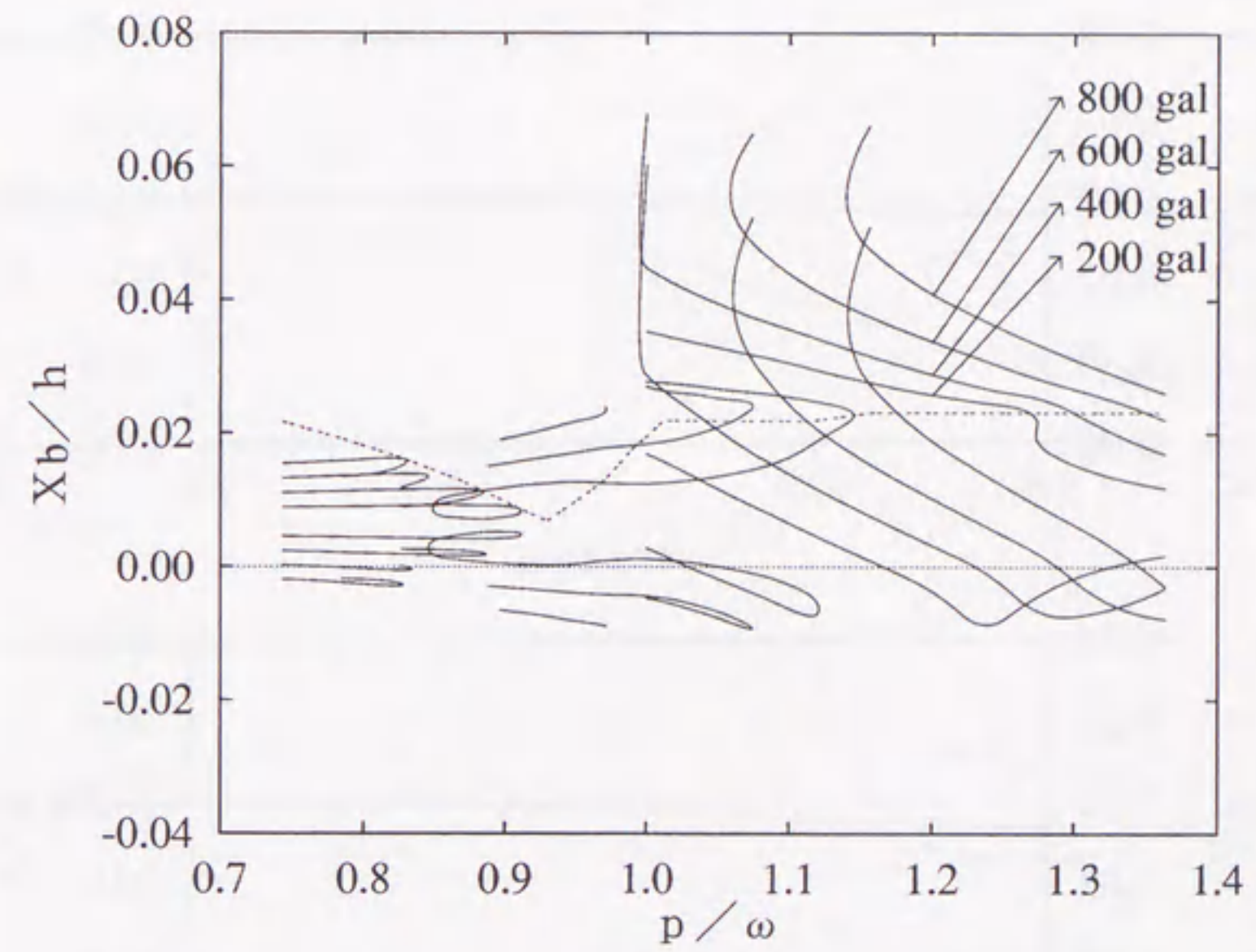


図 4.12: 共振曲線 (弾塑性系・周辺節点の応答・静的荷重あり: $\lambda = 1$)

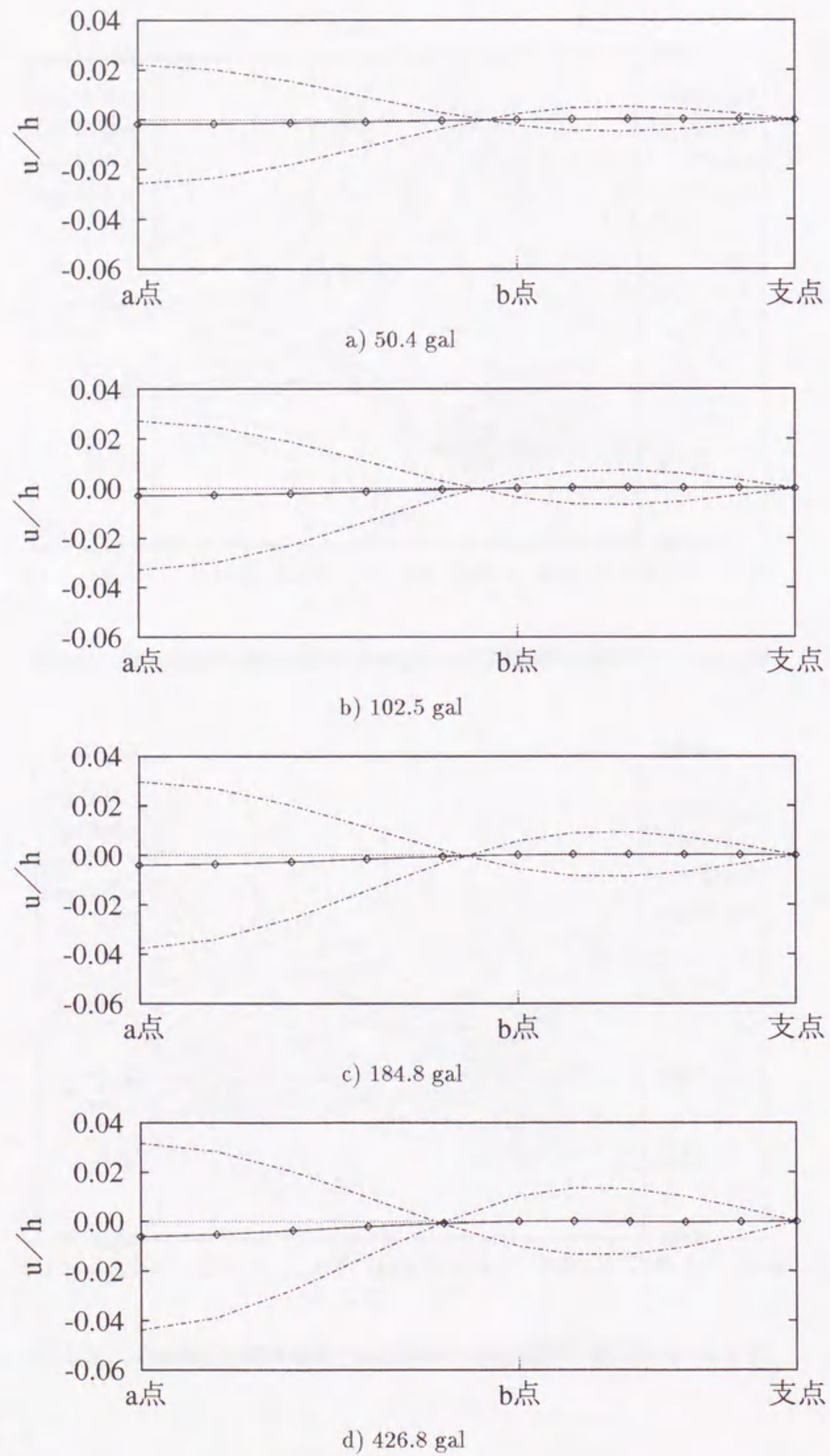


図 4.13: 定常解に示される変形性状 $p/\omega = 0.991$ (弾塑性系・静的荷重なし: $\lambda = 0$)
 実線: 振動中心, 一点鎖線: 最大変形

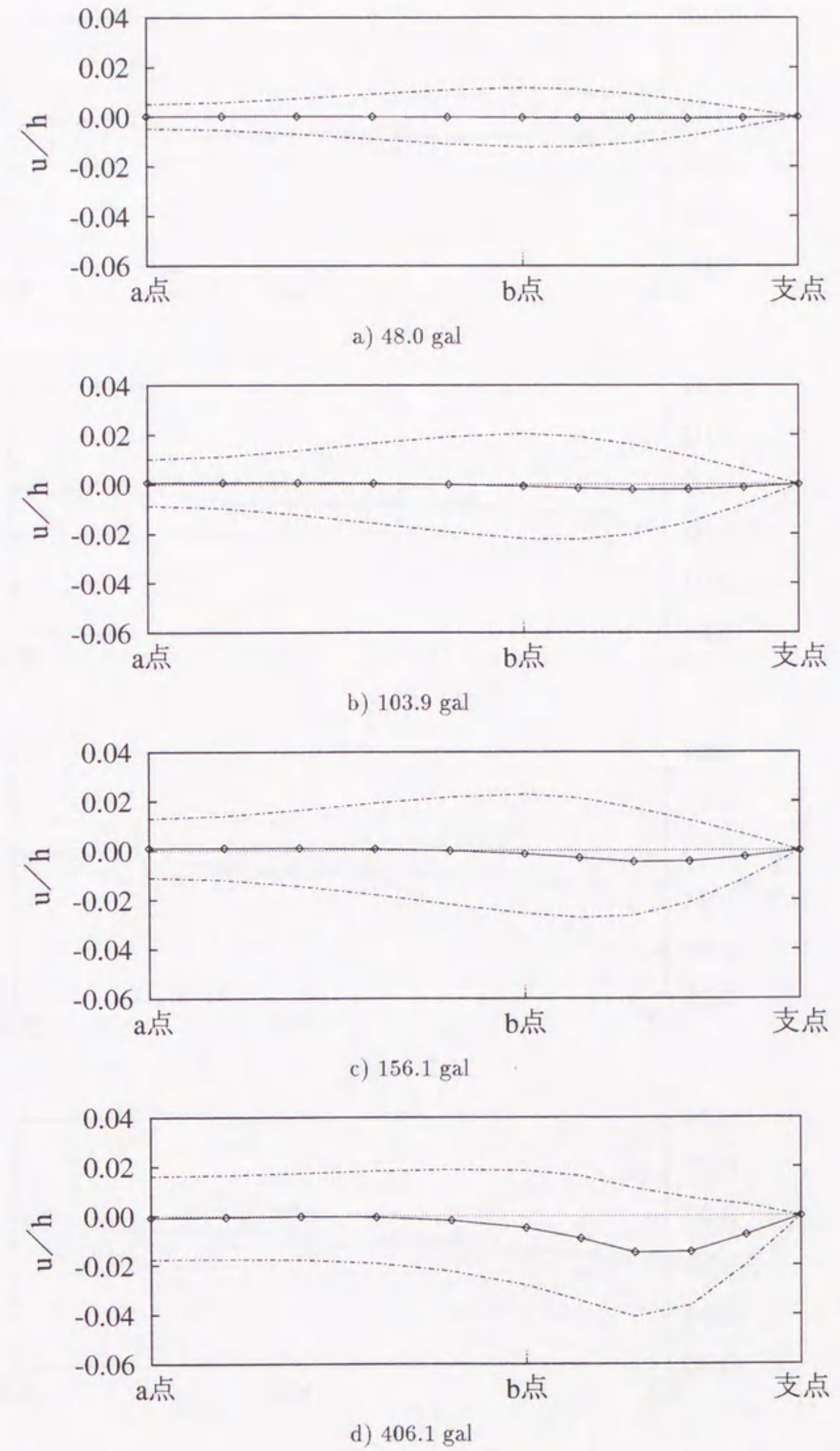


図 4.14: 定常解に示される変形性状 $p/\omega = 1.239$ (弾塑性系・静的荷重なし: $\lambda = 0$)
 実線: 振動中心, 一点鎖線: 最大変形

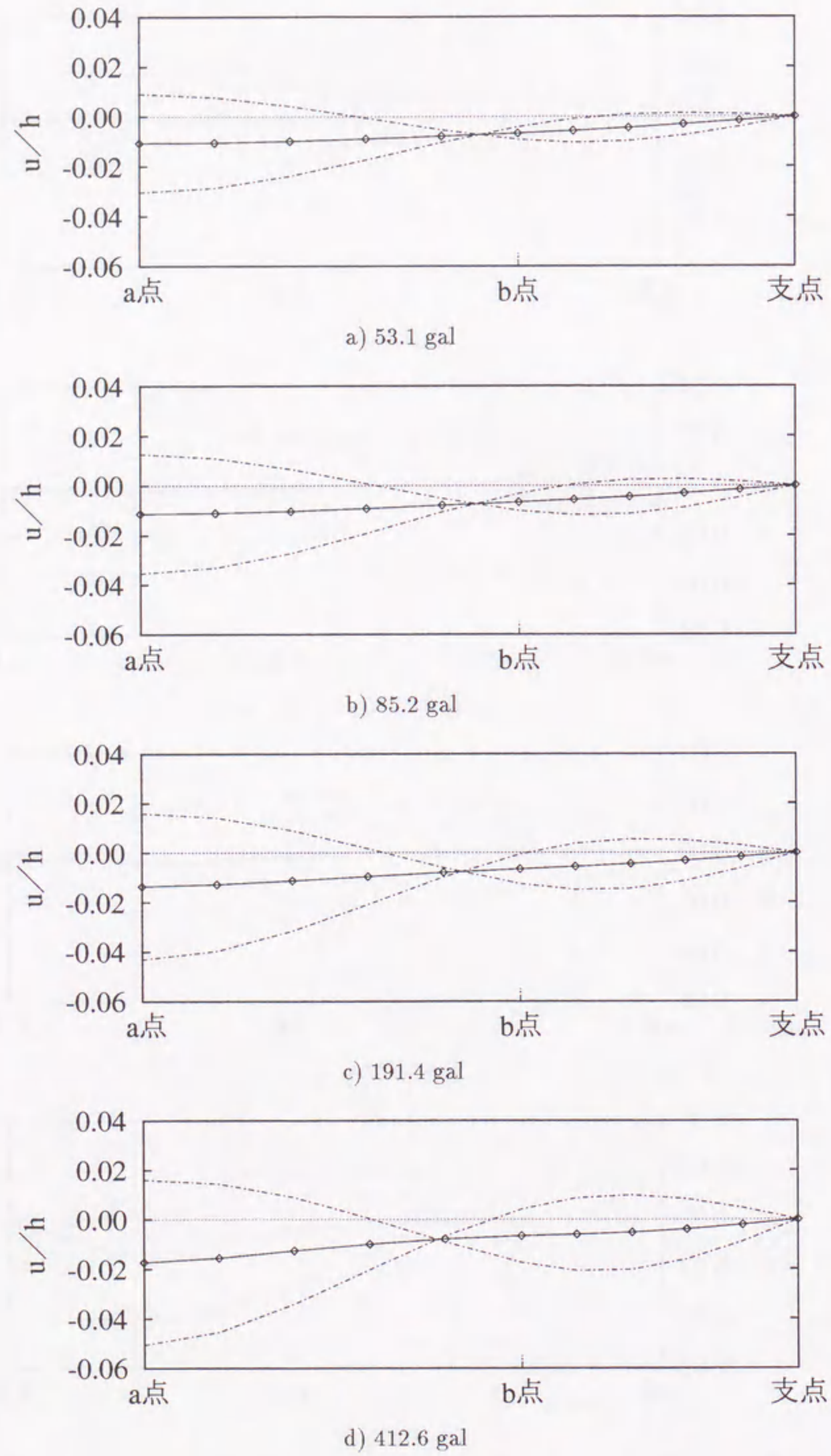


図 4.15: 定常解に示される変形性状 $p/\omega = 0.950$ (弾塑性系・静的荷重あり: $\lambda = 1$)
 実線: 振動中心, 一点鎖線: 最大変形

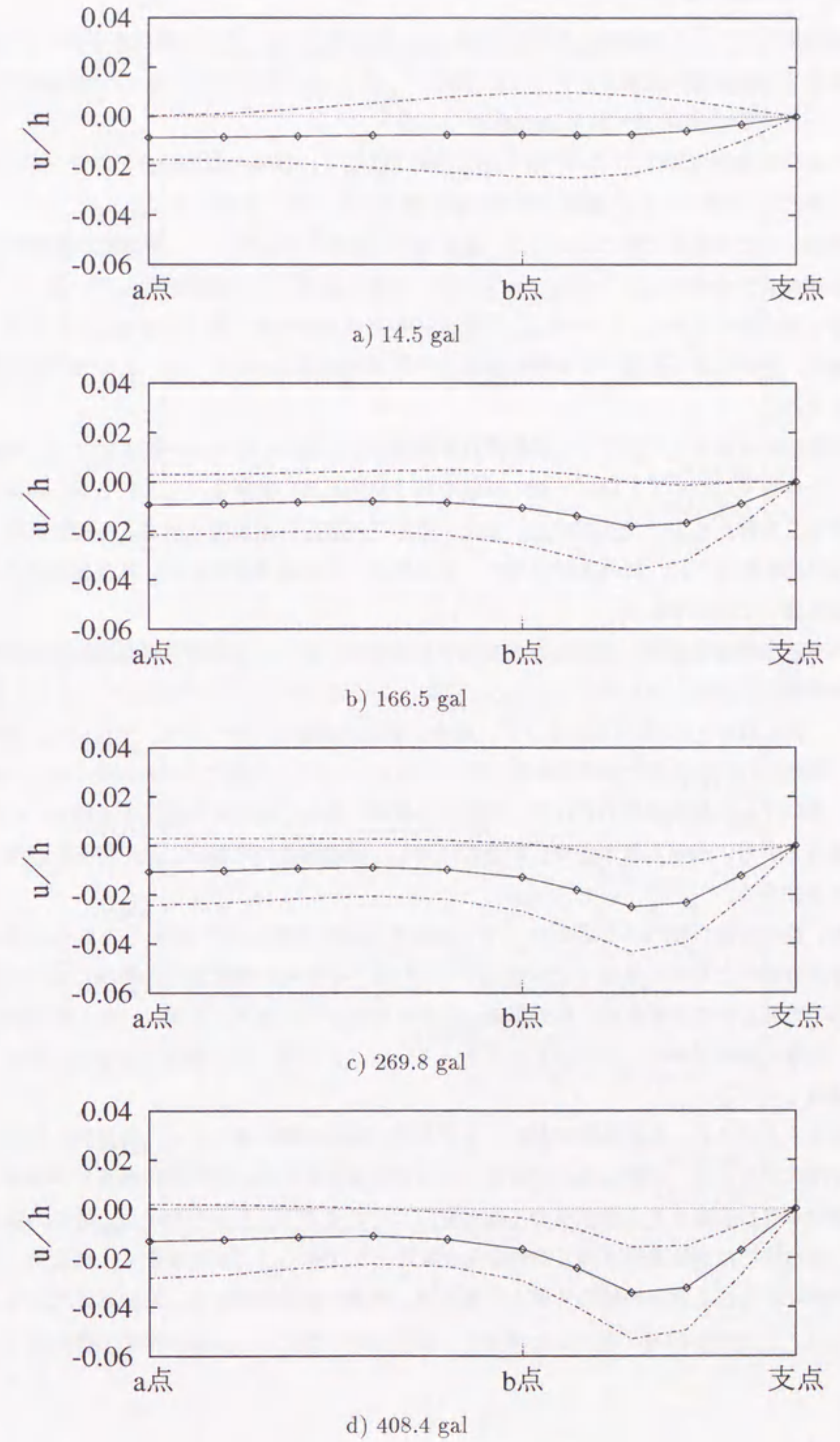


図 4.16: 定常解に示される変形性状 $p/\omega = 1.198$ (弾塑性系・静的荷重あり: $\lambda = 1$)
 実線: 振動中心, 一点鎖線: 最大変形

4.3.4 時刻歴応答解析

弾塑性系のモデルの時刻歴応答解析(付録E.2)の結果として, 正負の最大応答値と定常解によって示される共振曲線の比較を, 図4.17, 図4.18, 図4.23, 図4.24に, 個々の時刻歴応答波形を, 図4.19~図4.22, 図4.25~図4.28に示す。

入力波の加速度波形は, 3.3.3の図3.18と同様であるが, 振幅の漸増部分および一定部分の波数を, いずれも20波とした。運動方程式の直接積分の方法は, 前章と同じである。

定常解との応答値の比較においては, 高次側の応答の一部を除いて, 時刻歴応答解析の結果は, 共振曲線の特徴を反映したのようになっており, 両者は概ね良好な対応を示しているといえる。例外となる高次側の応答については, 正の最大応答値が共振曲線で示される値よりも大きくなる傾向があり, 静的荷重が作用する場合の図4.23や図4.24に見られるように, この差が相当開くものも存在する。

時刻歴応答波形を見てみると, 静的荷重が作用しない場合の図4.19~図4.22では, 低次側の応答は, その後半において, ほぼ一定の振幅を持つ規則正しい波形を示しているが, 高次側の応答は, うなりを伴うものとなっている。また, 前節で両者の共振曲線に示される振動性状の違いとして指摘されたように, 低次側の応答は, 正負対称に近い波形であるが, 高次側の応答は, やや正の側に偏った波形である。

静的荷重が作用する図4.25~図4.28の応答波形においても, 静的荷重が作用しない場合と同様に, 高次側の応答にうなりが生じている。特に, この場合では, 入力加速度の大きさが400galのときに, 図4.27のg)に見られるように, 途中で変位が急激に大きくなり, それ以降, 振動中心が大きく移動した応答を示す場合がある。図4.28のh)~k)も, 上記に比べればその変化は緩慢であるが, 振動中心の移動が認められる。これらの波形の変化に着目すると, 中央節点の応答は, 変位の増大とともに振幅も増大させているのに対し, 周辺節点の応答は, 逆に振幅を減少させていることがわかる。

なお, 静的荷重が作用する場合の $p/\omega = 0.950$ に対する図4.25のd)に示される応答は, 他の時刻歴応答波形とかなり異なった挙動を示している。これは, 低次側の共振点に近い応答であるが, その時間に対する変化は, 中央節点の応答の振幅が一旦増大した後, 一転して単調に減少し始め, 次第に振幅が消失していくものとなっている。この間, 周辺節点の応答は, ほぼ一定の振幅を維持している。

以上をまとめると, 共振曲線において上下の非対称性が弱い場合には, 時刻歴応答は, 徐々に振幅を増大させた後, 共振曲線にほぼ等しい定常応答となるが, 非対称性が著しい場合には, 共振曲線で示される値よりも大きくなる傾向を持つといえよう。しかしながら, 後者の場合においても, 定性的には共振曲線と同じ特徴を見出すことができる。このことから, 低次側, 高次側のそれぞれに示される共振曲線の外形上の差異は, 実際の動的挙動にも, 反映されていると判断される。

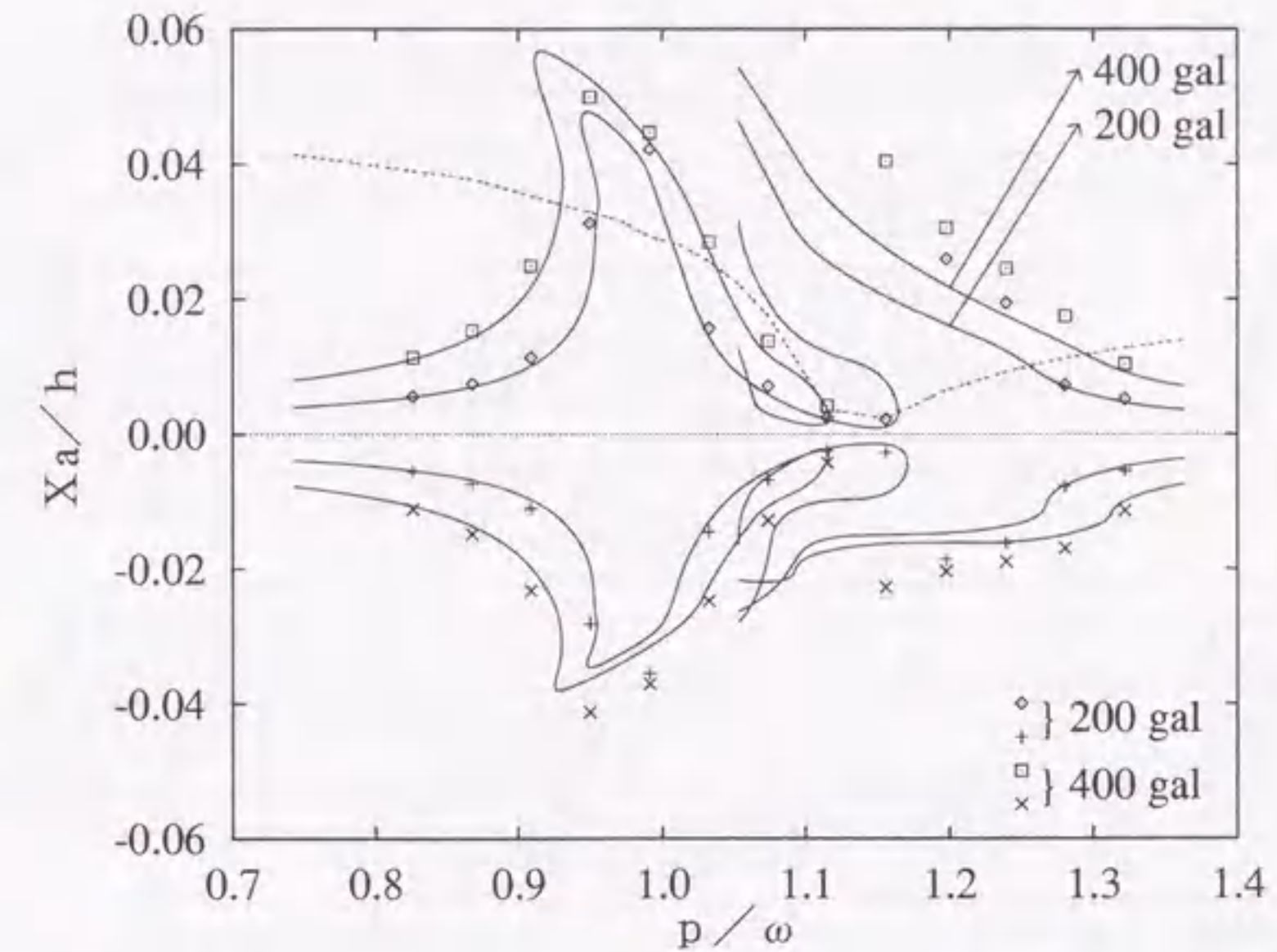


図4.17: 時刻歴応答解析結果との比較(弾塑性系・中央節点の応答・静的荷重なし: $\lambda = 0$)

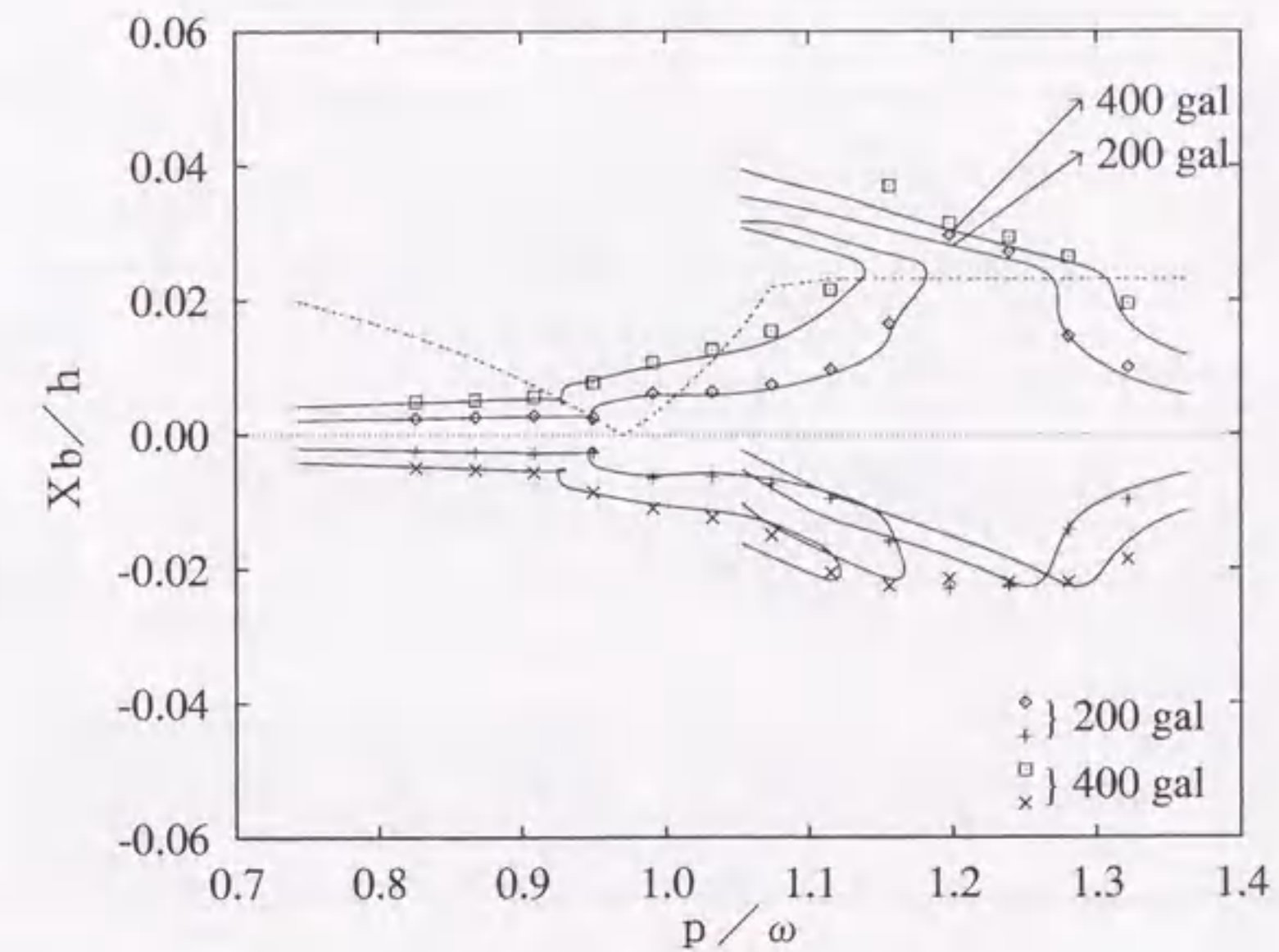


図4.18: 時刻歴応答解析結果との比較(弾塑性系・周辺節点の応答・静的荷重なし: $\lambda = 0$)

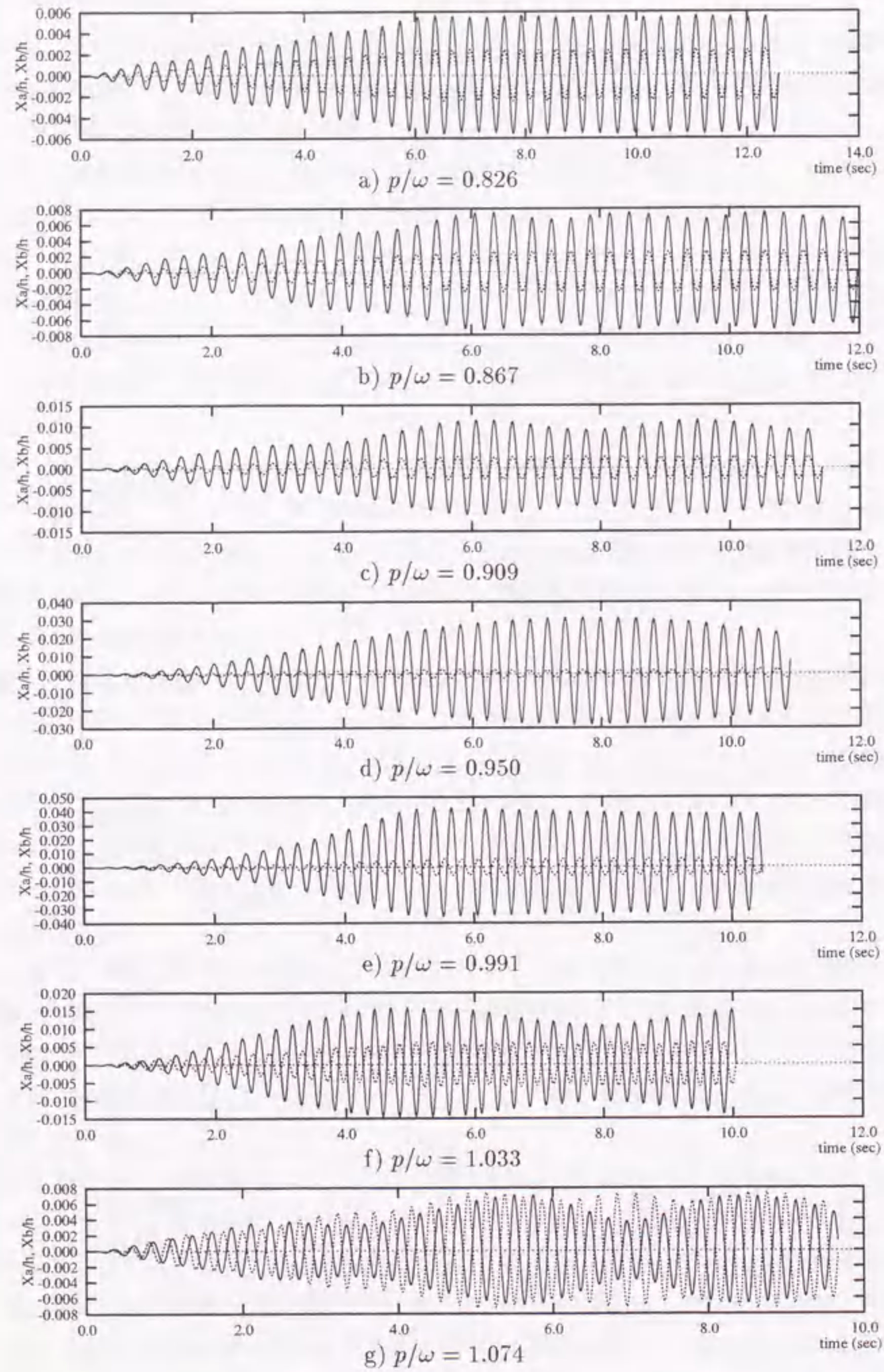


図 4.19: 時刻歴応答波形 (弾塑性系・静的荷重なし: $\lambda = 0$, 200 gal - その1)
実線: 中央節点 X_a/h , 破線: 周辺節点 X_b/h

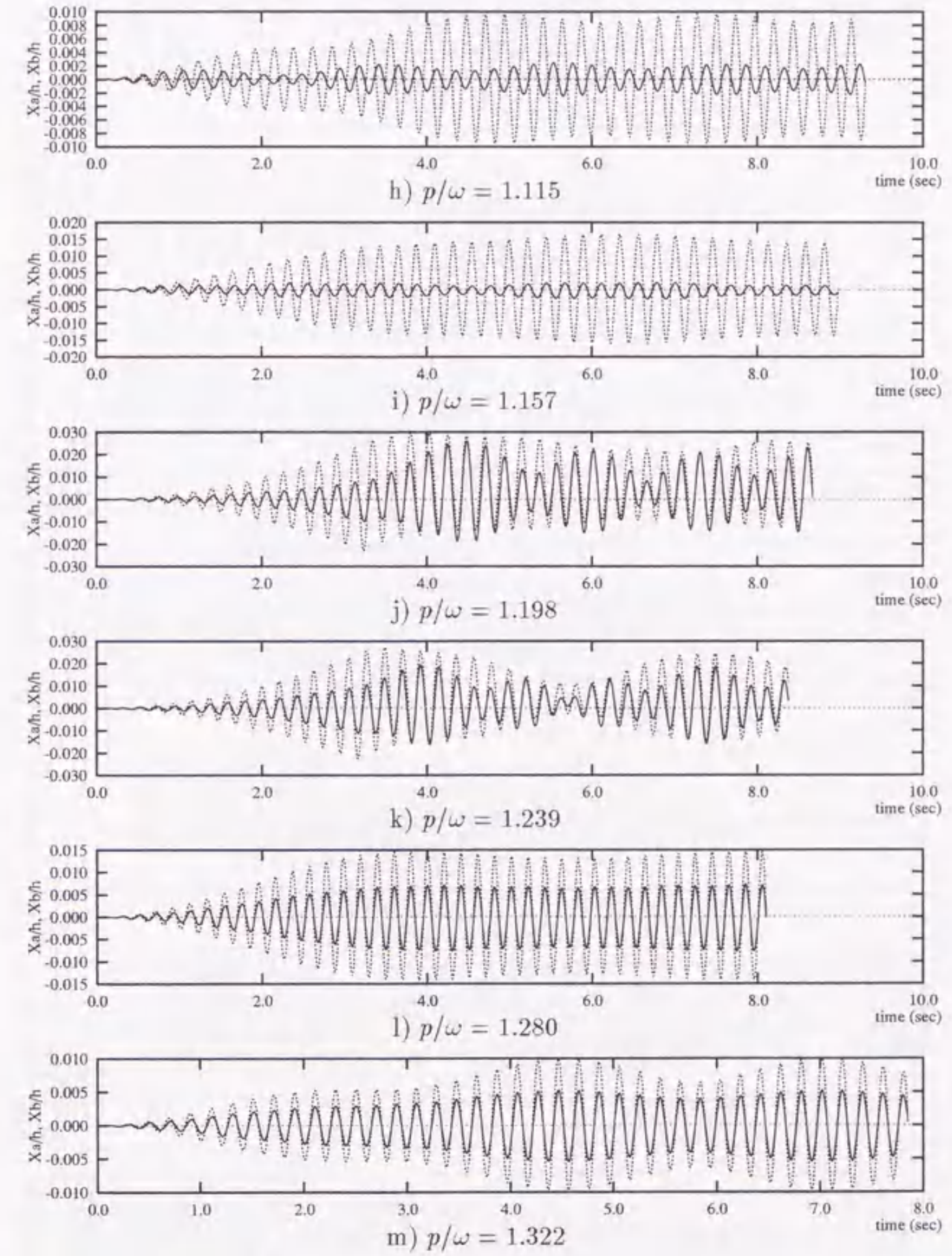


図 4.20: 時刻歴応答波形 (弾塑性系・静的荷重なし: $\lambda = 0$, 200 gal - その2)
実線: 中央節点 X_a/h , 破線: 周辺節点 X_b/h

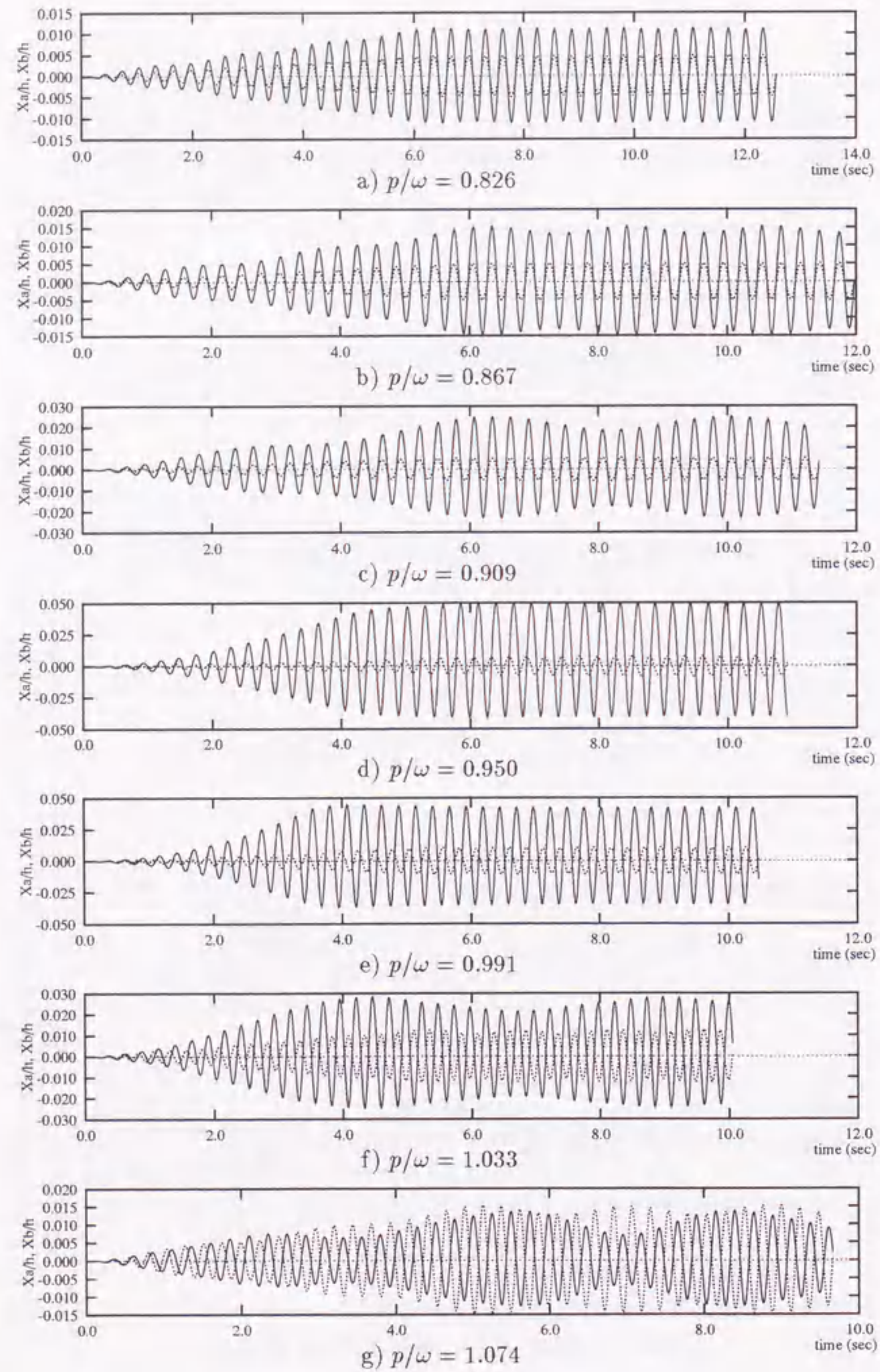


図 4.21: 時刻歴応答波形 (弾塑性系・静的荷重なし: $\lambda = 0$, 400 gal - その1)
実線: 中央節点 X_a/h , 破線: 周辺節点 X_b/h

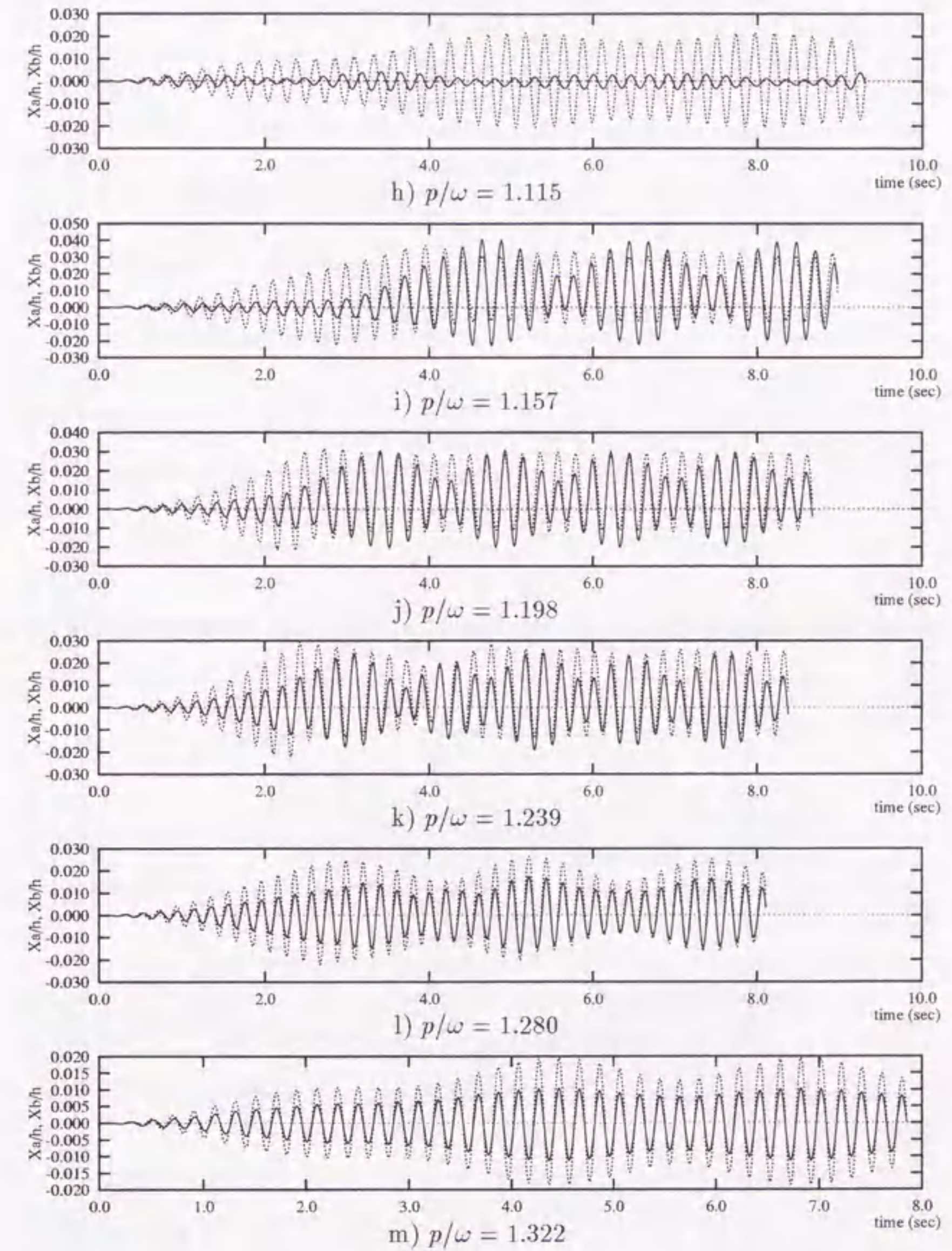


図 4.22: 時刻歴応答波形 (弾塑性系・静的荷重なし: $\lambda = 0$, 400 gal - その2)
実線: 中央節点 X_a/h , 破線: 周辺節点 X_b/h

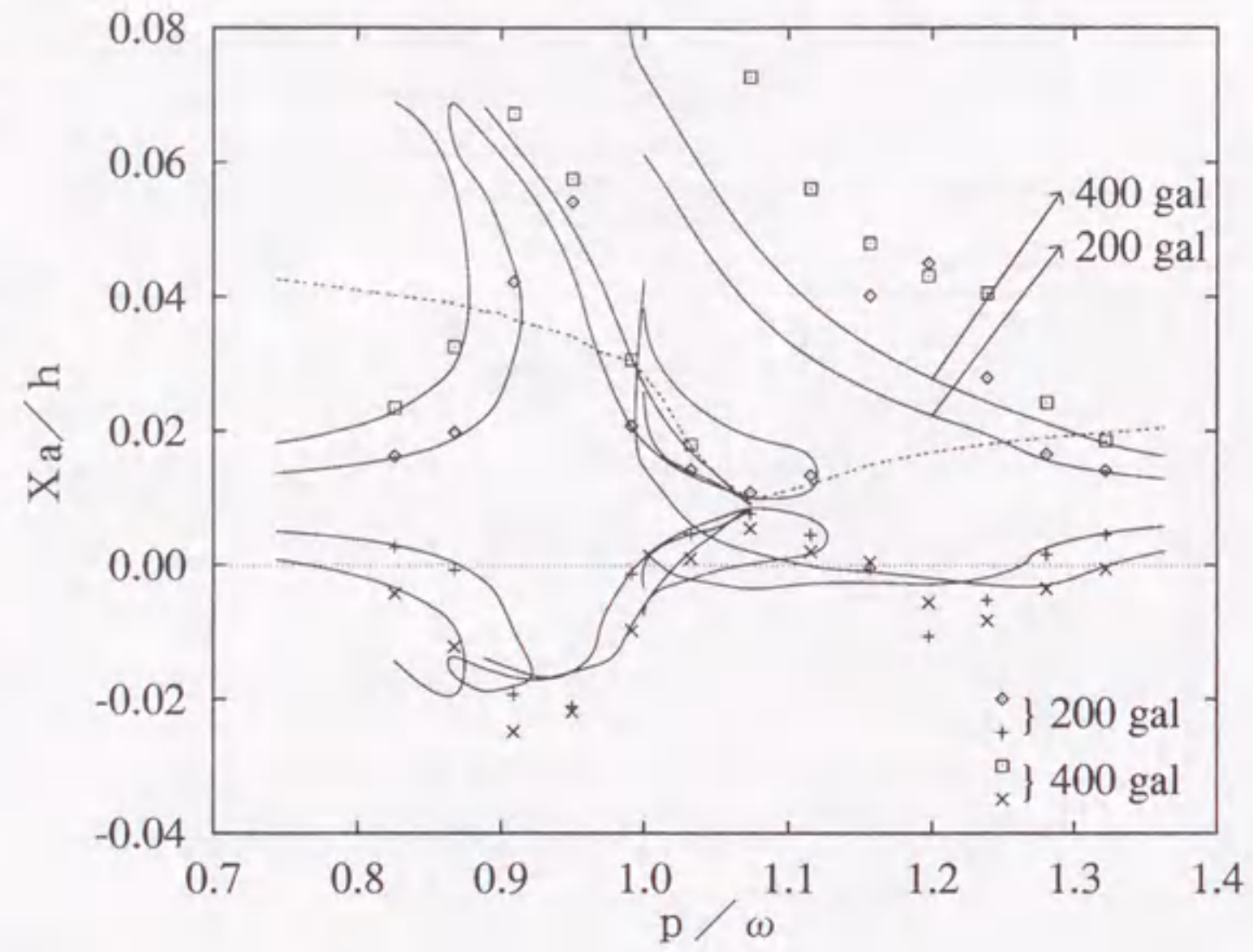


図 4.23: 時刻歴応答解析結果との比較 (弾塑性系・中央節点の応答・静的荷重あり : $\lambda = 1$)

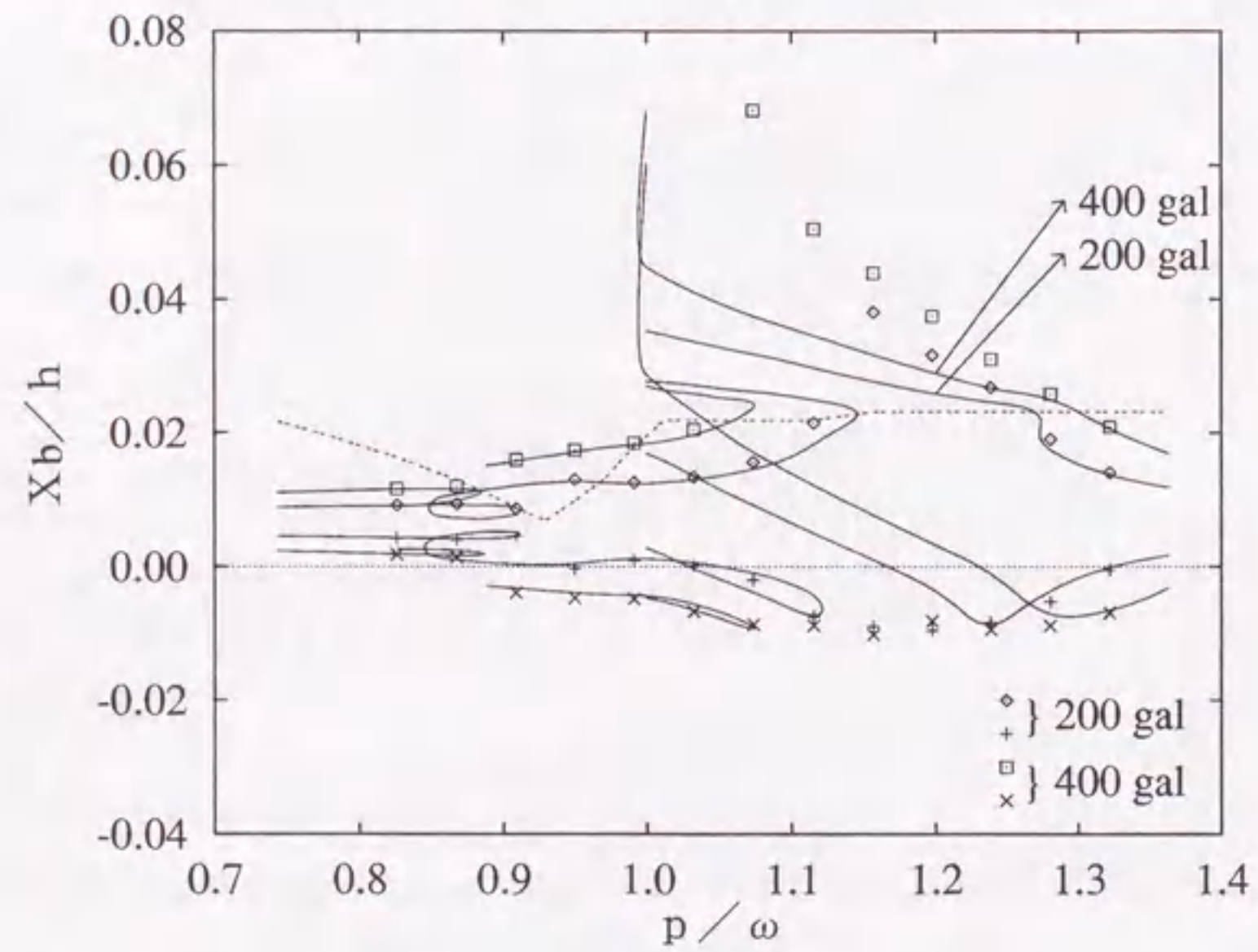


図 4.24: 時刻歴応答解析結果との比較 (弾塑性系・周辺節点の応答・静的荷重あり : $\lambda = 1$)

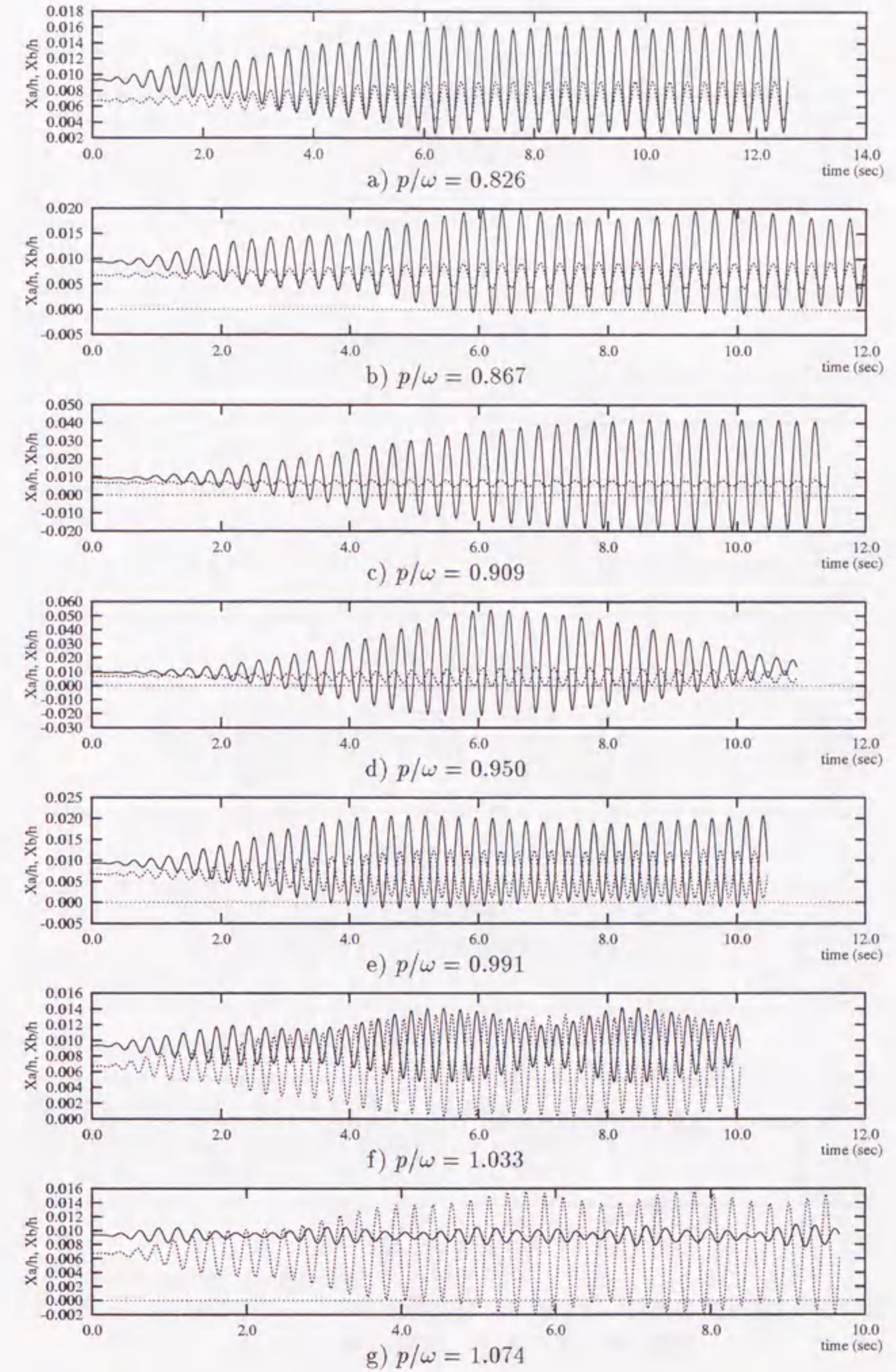


図 4.25: 時刻歴応答波形 (弾塑性系・静的荷重あり : $\lambda = 1$, 200 gal - その1)
実線: 中央節点 X_a/h , 破線: 周辺節点 X_b/h

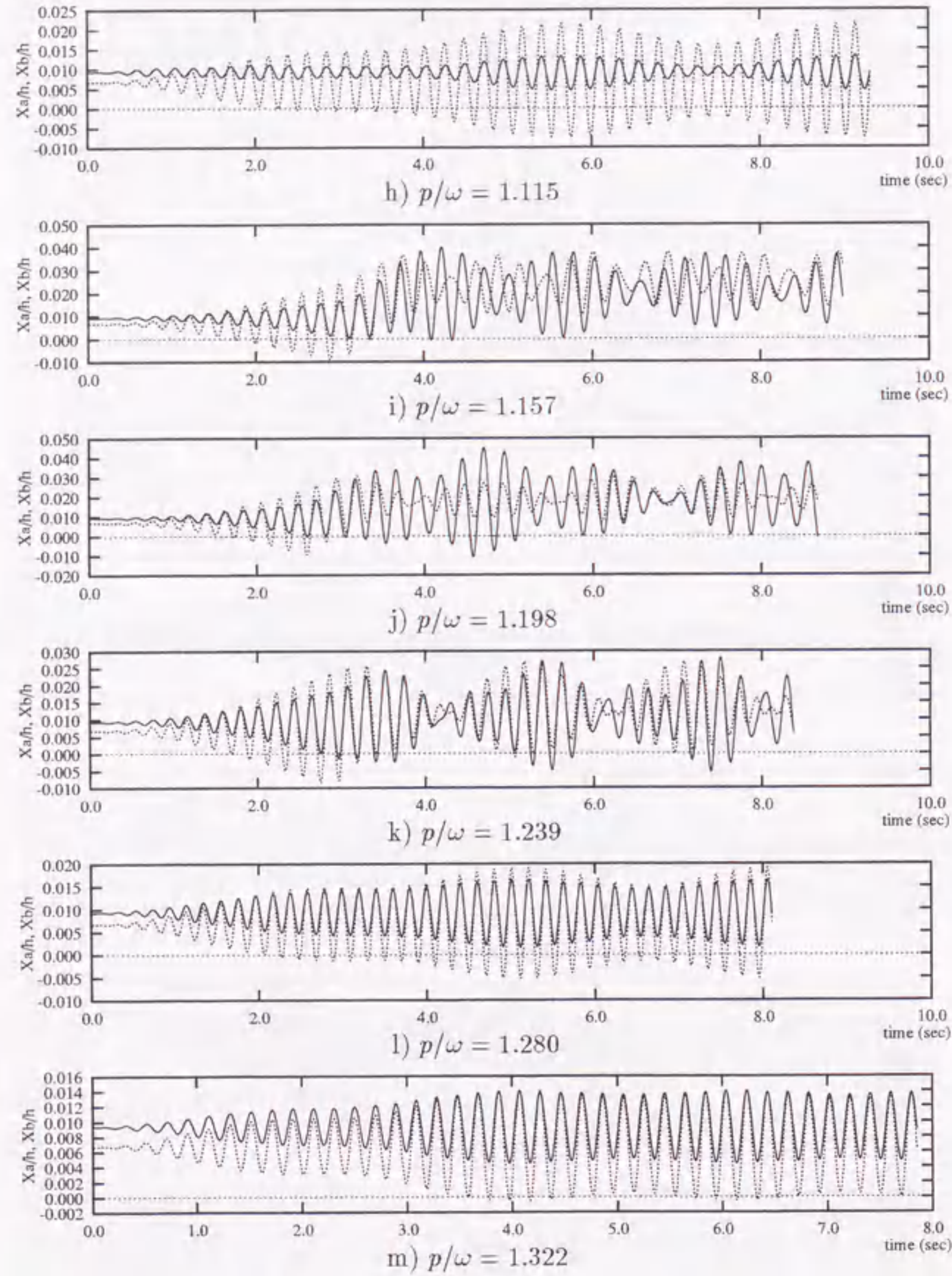


図 4.26: 時刻歴応答波形 (弾塑性系・静的荷重あり: $\lambda = 1$, 200 gal - その2)
実線: 中央節点 X_a/h , 破線: 周辺節点 X_b/h

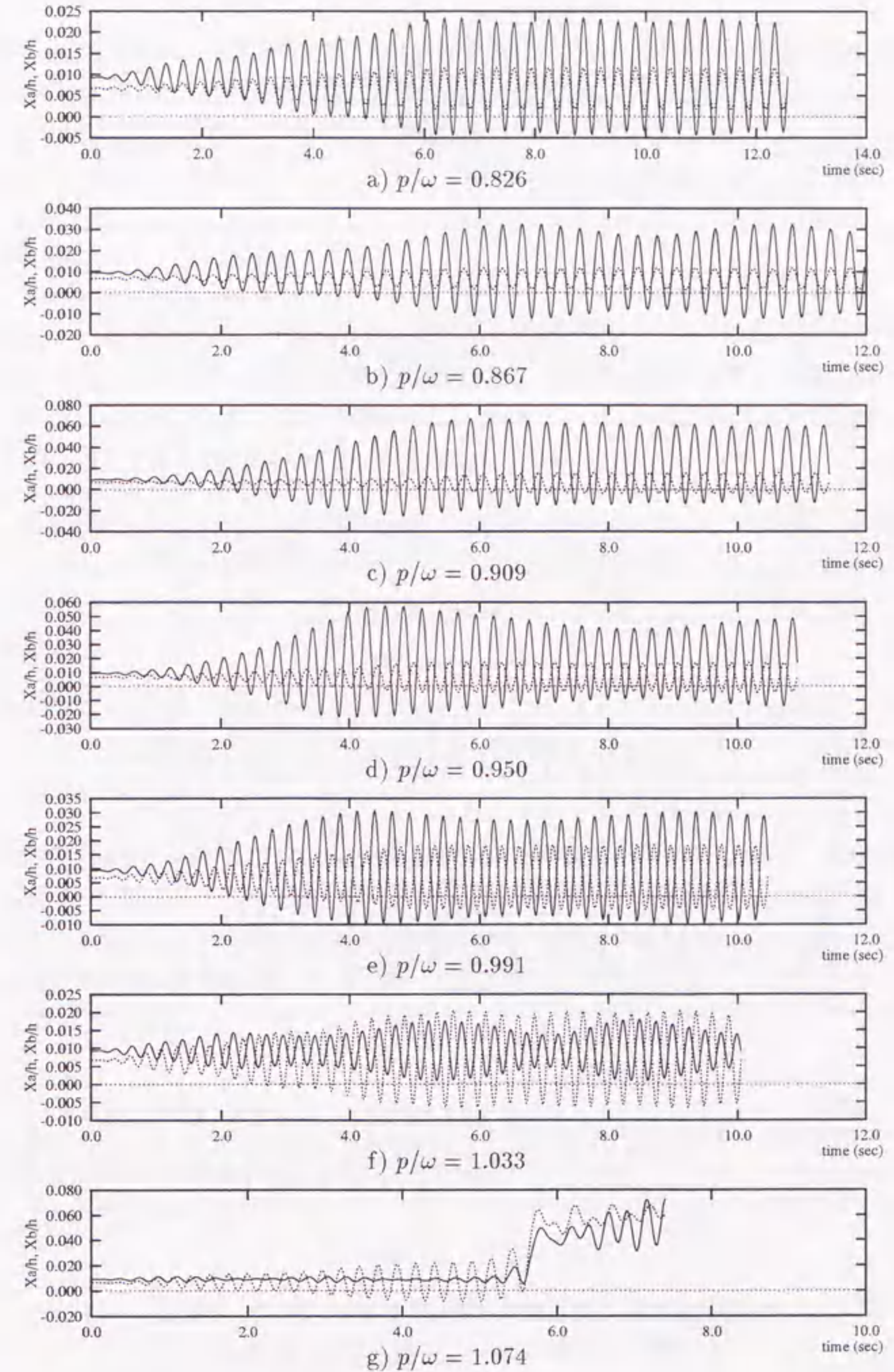


図 4.27: 時刻歴応答波形 (弾塑性系・静的荷重あり: $\lambda = 1$, 400 gal - その1)
実線: 中央節点 X_a/h , 破線: 周辺節点 X_b/h

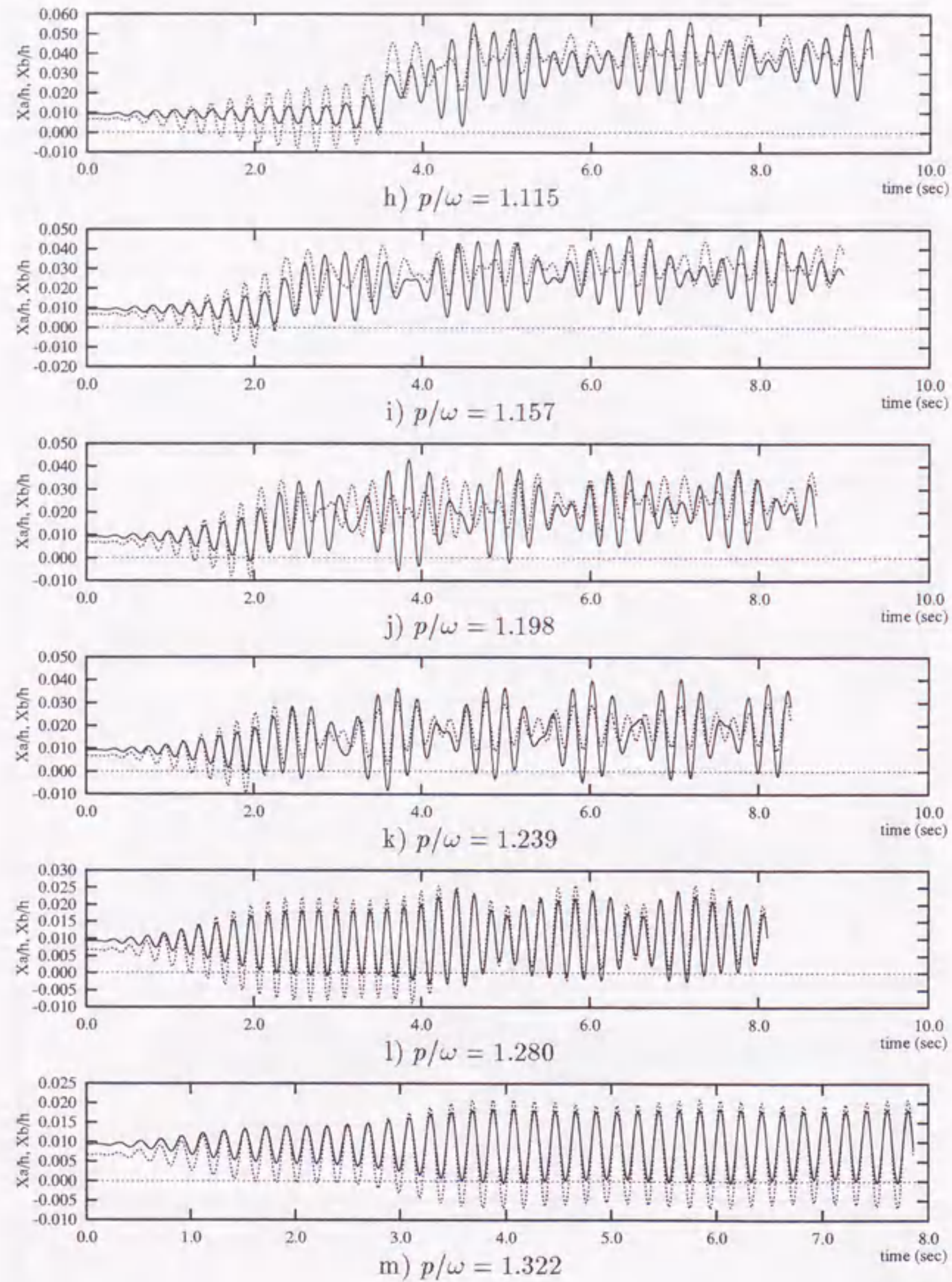


図 4.28: 時刻歴応答波形 (弾塑性系・静的荷重あり: $\lambda = 1$, 400 gal - その2)
 実線: 中央節点 X_a/h , 破線: 周辺節点 X_b/h

4.4 まとめ

円形断面を有する3次元梁要素を用いた定常振動解析により, ドーム状の空間骨組構造物の定常解を求めた。そして, これと時刻歴応答解析結果の対応から, その振動性状を分析した。この結果, 定常解によって示される共振曲線に, 前章までの結果と共通する幾つかの特徴が見出されるとともに, 励起される振動モードによって, 非線形領域での応答に違いがもたらされることが明らかとなった。

これらをまとめると, 以下のようになる。

1. 定常解に基づく分析によれば, 本章で取り上げられた解析モデルの鉛直振動に関する2つの共振領域での変形性状は, 塑性化の進展に伴い, 異なる変化を示す。すなわち, 低次側では, 固有値解析より求められる振動モードとほぼ同じ形が保持されるが, 高次側では, 塑性化後, 周辺節点付近を中心とする局部的なたわみが進行する。
2. 上記に対応して, 双方の共振曲線の外形上の性質にも違いが現れる。すなわち, 低次側の共振曲線は, 微小変形理論の下で取り扱われる履歴系の共振曲線に近い形となり, 高次側の共振曲線は, 前章までに検討された非線形1質点系モデルや偏平三角ラーメンの共振曲線に近い形となる。
3. 静的荷重の影響は, 高次側の共振曲線に顕著に現れ, これまでの問題でも見られたように, 下部の共振曲線が反転して, 上部の共振曲線との間隔をほぼ同じに保つか, 狭めるようにして上方に伸びていく。
4. 時刻歴応答解析結果によれば, 低次側の応答は, 静的荷重の有無に関わらず, 共振曲線にほぼ等しい定常応答となる。これに対して, 高次側の応答は, 共振曲線に示される応答よりも幾分大きな応答となる傾向がある。しかしながら, 定性的には, これらの応答の中に, 共振曲線と同じ特徴を見出すことができる。

第5章

結論

5.1 本研究で得られた成果のまとめ

本研究においては、材料および幾何学的非線形性を伴う構造物の動的な非線形挙動を定性的に分析することを目的として、このような力学系を対象とした定常解の数値解析手法を提案し、幾つかの例題を通じて、その非線形振動の大域的な性質を明らかにした。

第1章では、研究の背景を示し、非線形振動問題の要点や、関連する既往の研究成果の内容を概説した。加えて、この研究の目的、手法の概要および論文の構成を述べた。

第2章では、対象とする問題の基礎的事項を整理することを目的として、構造物の力学特性を簡略な機構で表現した非線形1質点系モデルの定常解の性質を、安定性も含めて議論した。さらに、これらと時刻歴応答解析結果との対比から、実際の応答との対応を詳細に分析した。ここでは特に、定常解に基づいて描かれた共振曲線が、個々の非線形問題を単独に扱った場合とは異なる外形上の特徴を有することや、時刻歴応答解析結果に示される複雑な応答が、位相平面上で定常解に対応した動きを示していることを明らかにした。

第3章では、より具体性を持った構造物の検討を可能とするために、非線形1質点系モデルに適用した定常振動解析の考え方を、有限要素法に採り入れ、平面骨組構造物を対象とした解析手法を示した。その際、一般的な問題を対象として定常振動問題を取り扱う際の留意事項を整理し、その具体的な数値解析の手続きを述べる中で、このような定常解の力学的な意味付けを明確にした。これより、本解析手法が、構造物の塑性化以後の動的特性を、外乱の振動数というパラメータを加味した一種の弾塑性特性として具現化する手法として位置付けられることを述べた。そして、本研究の対象とする力学系の典型的な例題として、屈服型の座屈性状を有する偏平三角ラーメンの解析を行った。その結果、定常解に基づいて描かれた共振曲線に、非線形1質点系モデルと同様の特徴が認められた。

第4章では、有限要素法を用いた定常振動解析手法を立体骨組構造物の解析に適用できるように拡張し、ドーム状の空間骨組構造物の解析を行った。この章では特に、励起される振動モードによって、振動性状にどのような違いが現れるかが議論の対象とされた。それぞれの共振領域における共振曲線の形状や変形状の変遷に、この違いは明瞭に示された。また、時刻歴応答解析

結果にも、これらの特性は反映された。

以上の検討を通して、本研究で得られた成果をまとめると、次のようになる。

定常解に示される性質について

材料および幾何学的非線形性（変位に関する2次と3次の非線形項を有する）の両者を考慮して得られた構造物の共振曲線は、幾何学的非線形性の影響が小さい、極く限られた範囲を除き、共振点に微小変形理論の下で取り扱われる履歴系に見られるような応答の上限を持たず、正負の応答値にも顕著な非対称性を示す。

構造物に作用する静的荷重によって、上記の性状はより強められ、その結果、変位の増大に伴って逆に振幅が減少する挙動が共振曲線上に示されるようになる。一方、共振点を挟む左右の共振曲線の間隔は、変位がある程度の大きさに達すると、次第に広がっていくようになる。この静的荷重と、幾何学的非線形性によってもたらされる2次の非線形項は、系の振動に対して、ほぼ同等の効果を与えるものと推察される。

多自由度系の場合には、複数の振動モードが考慮されることになるが、非線形領域での振動性状は、励起される振動モードによって大きく異なることがある。これは、振動モードによって、塑性化後の挙動に対する、幾何学的非線形性の影響の度合いが異なるためと考えられる。すなわち、変位の大きさが同程度であれば、幾何学的非線形性の影響が大きい振動モードが励起される場合の共振曲線は、上述の特徴を有するが、幾何学的非線形性の影響が小さい振動モードが励起される場合の共振曲線は、微小変形理論の下で取り扱われる履歴系の共振曲線に近い形となる。後者に比べて、前者の場合には、応答の増大に伴って変形状が著しく変化する。

時刻歴応答との対応について

定常解（共振曲線）に示される応答値と、運動方程式の直接積分によって得られた時刻歴応答の応答値は、後者に示される系の応答が一定の振幅を持つ規則正しい波形となる場合には、概ね良好な対応を示す。ただし、応答の非対称性が強い場合には、その程度が増大するに従って、時刻歴応答の応答値は、定常解の応答値よりも過大ぎみの値となる。しかしながら、いずれの応答にも、振動中心や振幅の変化に、定常解と同様の性質が認められる。

また、時刻歴応答が定常性を示さない複雑な応答となる場合でも、その挙動は、与えられた条件の下で存在する複数の解や、それらの安定性と密接に関連したものとなる。

さらに弾性系と異なり、除荷を含む挙動を考慮すれば、与えられた条件に対する定常応答は、このような経路においても存在することがある。すなわち、定常解の示す応答が不安定な場合でも、安定な定常応答が、過渡的な塑性化の進展の後、振幅の減少による準弾性的な挙動に見出されるならば、一時的な変位の増大を伴いながら、最終的にそのような応答に落ち着く場合がある。

動的な崩壊挙動との関連について

定常解に示された振動性状は、対象となる構造物の動的崩壊挙動に関しても、重要な示唆を含んでいるものと考えられる。このことは、本研究において、定常解の検討と同時に実行された時刻歴応答解析の結果にも示されている他、動的崩壊挙動を取り扱った既往の研究（1.3.3を参照）との関連からも推察される。

動的な外乱の他に静的荷重、すなわち死荷重を支える力学系にあっては、静的な釣り合い曲線に示される荷重値がこの荷重レベルを下回ることによって、系の釣り合いを保持できない状態となり、崩壊に至るが、本研究で求められた定常解では、この変位に近づくにつれて、振幅は次第に減少し、遂には定められた条件に適合する定常解が存在しなくなるという状況に及んでいる。この変位は、静的な規準でもって既定される動的崩壊の指標 [31], [33] とされている。

一方、実際の応答においては、この変位に達する以前に、安定な定常応答から逸脱した挙動、すなわち急激な変位の増大や、振動中心の移動が観察され、この時点において、既に系は、動的な意味での安定性を欠いているものと判断される。これが、定常解の安定性に関するものであることは、第2章でも述べた通りである。

弾塑性振動においては、弾性系以上に、幾何学的非線形性によってもたらされる応答の非対称性を生み出す効果、すなわち2次の非線形項の影響が重要となり、塑性化が進行する過程において、このような幾何学的非線形性の効果が優勢であるか劣性であるかが、構造物の非線形領域における動的な耐力を大きく左右するものと考えられる。

5.2 今後の課題

本研究によって、材料および幾何学的非線形性を考慮した構造物の定常解が示され、その性質や実際の動的挙動との関連について、様々な知見が得られたが、依然として多くの検討課題も残されている。これらを列挙すると、次のようになる。

定常解の安定判別について

非線形1質点系モデルを対象とした解析では、定常解の安定判別を行ったが、有限要素法を用いた定常振動解析において、同様の安定判別を行うことは、かなり煩雑な手順を要するなど、克服すべき問題点も多いため、定常解の安定性についての議論は行わなかった。

系の応答に潜む危険性を確実に見出すためには、このような安定判別が不可欠であるため、これらを解決して、一般の構造物に対して求められた定常解の安定性を明らかにする必要がある。

分岐座屈の影響について

検討されたモデルにおいては、いずれも、分岐座屈を伴う挙動は取り扱われていない。

現実の構造物においては、屈服型の座屈を生ずる前に、分岐座屈を起こすものが多いので、これを考慮した振動性状についても検討する必要がある。

2次共振の影響について

定常解は、全て主共振を対象として、仮定調波に定数項と sine, cosine の基本調波のみを採用して解析されたものであり、高調波共振や分数調波共振についての検討は行われていない。

構造物の応答に最も多大な影響を与えるのは、主共振の特性であると考えられるが、条件によっては高調波共振や分数調波共振が支配的となる場合もあるので、これら 2 次共振の影響についても検討する必要がある。

過渡応答の影響や不規則外乱の作用について

構造物の実際の応答には過渡応答の影響が含まれ、また、外乱の多くは不規則なものである。

現状では、定常解と時刻歴応答の対応に関しては、定常解と同じ状態を実現させるような条件の下で得られた応答を議論するにとどまっているが、より現実的な問題に言及するためには、過渡応答の影響や、周期的な外乱を不規則外乱に置き換えた場合の違いについて考察する必要がある。

参考文献
発表論文リスト
謝辞
付録

参考文献

- [1] Burgreen, D. and Brooklyn, N.Y. : Free Vibration of a Pin-Ended Column with Constant Distance between Ends, *Journal of Applied Mechanics*, Vol.18, pp.135-139, 1951.
- [2] Sethna, P.R. : Steady-State Undamped Vibrations of a class of Nonlinear Discrete Systems, *Journal of Applied Mechanics*, Vol.27, pp.187-195, 1960.
- [3] Iwan, W.D. : Application of an Equivalent Nonlinear System Approach to Dissipative Dynamical Systems, *Journal of Applied Mechanics*, Vol.36, pp.412-416, 1969.
- [4] Ho, C.H., Scott, R.A. and Easley, J.G. : Non-Planar, Non-Linear Oscillations of Beam-I. Forced Motions, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol.10, pp.113-127, 1975.
- [5] Sethna, P.R. : Vibrations of Dynamic Systems with Quadratic Nonlinearities, *Journal of Applied Mechanics*, Vol.32, pp.576-582, 1965.
- [6] Grossman, P.L., Koplik, B. and Yu, Y.Y. : Nonlinear Vibration of Shallow Spherical Shells, *Journal of Applied Mechanics*, Vol.36, pp.451-458, 1969.
- [7] 皆川洋一 : 非線形運動方程式の定常解問題 (第1報—既往の研究と非線形代数方程式の未知数の分類), *日本建築学会論文報告集*, 第276号, pp.59-67, 1979年.
- [8] 皆川洋一 : 非線形運動方程式の定常解問題の分類 (非線形運動方程式の定常解問題—第2報), *日本建築学会論文報告集*, 第277号, pp.45-54, 1979年.
- [9] 皆川洋一 : 非線形自由振動 (非線形運動方程式の定常解問題—第3報), *日本建築学会論文報告集*, 第278号, pp.9-14, 1979年.
- [10] 皆川洋一 : 非線形振動の数値解析 (非線形運動方程式の定常解問題—第4報), *日本建築学会論文報告集*, 第279号, pp.21-27, 1979年.
- [11] Takahashi, K. and Konishi, Y. : Non-Linear Vibrations of Cables in Three Dimensions, Part I: Non-Linear Free Vibrations, *Journal of Sound and Vibration*, Vol.118, No.1, pp.69-84, 1987.
- [12] Takahashi, K. and Konishi, Y. : Non-Linear Vibrations of Cables in Three Dimensions, Part II: Out-of-Plane Vibrations under In-Plane Sinusoidally Time-Varying Load, *Journal of Sound and Vibration*, Vol.118, No.1, pp.85-97, 1987.
- [13] Lau, S.L. and Cheung, Y.K. : Amplitude Incremental Variational Principle for Nonlinear Vibration of Elastic Systems, *Journal of Applied Mechanics*, Vol.48, pp.959-964, 1981.

- [14] 田村英之, 松崎健一郎: 定常振動問題の解と安定判別のための数値解法とプログラム, 日本機械学会論文集 (C編), 第60巻, 第569号, pp.30-37, 1994年.
- [15] Jacobsen, L.S.: Damping in Composite Structures, Proceedings of the 2nd World Conference on Earthquake Engineering, Vol.2, pp.1029-1044, Tokyo and Kyoto, Japan, July, 1960.
- [16] Caughey, T.K.: Sinusoidal Excitation of a System with Bilinear Hysteresis, Journal of Applied Mechanics, Vol.27, pp.640-643, 1960.
- [17] Jennings, P.C.: Periodic Response of a General Yielding Structure, Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol.90, No.EM2, pp.131-166, 1964.
- [18] Iwan, W.D.: The Steady-State Response of a Two-Degree-of-Freedom Bilinear Hysteretic System, Journal of Applied Mechanics, Vol.32, pp.151-156, 1965.
- [19] Iwan, W.D.: The Steady-State Response of the Double Bilinear Hysteretic Model, Journal of Applied Mechanics, Vol.32, pp.921-925, 1965.
- [20] Iwan, W.D.: Response of Multi-Degree-of-Freedom Yielding Systems, Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol.94, No.EM2, pp.421-437, 1968.
- [21] Masri, S.F.: Forced Vibration of the Damped Bilinear Hysteretic Oscillator, Journal of the Acoustical Society of America, Vol.57, No.1, pp.106-112, 1975.
- [22] DebChaudhury, A.: Periodic Response of Yielding Oscillators, Journal of Engineering Mechanics, Vol.111, No.8, pp.977-994, 1985.
- [23] Miller, G.R. and Butler, M.E.: Periodic Response of Elasto-Perfectly Plastic SDOF Oscillator, Journal of Engineering Mechanics, Vol.114, No.3, pp.536-551, 1988.
- [24] Badrakhn, F.: Dynamic Analysis of Yielding and Hysteretic Systems by Polynomial Approximation, Journal of Sound and Vibration, Vol.125, No.1, pp.23-42, 1988.
- [25] Capecchi, D.: Accurate Solutions and Stability Criterion for Periodic Oscillations in Hysteretic Systems, Meccanica, No.25, pp.159-167, 1990.
- [26] Capecchi, D.: Periodic Response and Stability of Hysteretic Oscillators, Dynamic and Stability of Systems, Vol.6, No.2, pp.89-106, 1991.
- [27] 吉武 裕, 末岡淳男, 田村英之, 羽衣季隆: 直接数値積分法による非線形系の周期解の求解 (運動方程式に不連続関数を含む場合), 日本機械学会論文集 (C編), 第59巻, 第561号, pp.98-105, 1993年.

- [28] Pratap, R. and Mukherjee, S.: Dynamic Behavior of a Bilinear Hysteretic Elasto-Plastic Oscillator, Part II: Oscillations under Periodic Impulse Forcing, Journal of Sound and Vibration, Vol.172, No.3, pp.339-358, 1994.
- [29] Morisako, K., Ishida, S., Nakamura, T. and Ishizaki, H.: Dynamic Collapse of Frames under Wind Disturbances, Journal of the Structural Division, ASCE, Vol.107, No.ST12, pp.2365-2380, 1981.
- [30] 中村恒善, 小坂郁夫, 来田義弘: 正弦波加速度外乱下の1質点非線形履歴型骨組モデルの定常振動と発散挙動, 日本建築学会大会学術講演梗概集 (構造系), pp.1027-1028, 1983年.
- [31] Kuranishi, S. and Nakajima, A.: Dynamic Strength Characteristics of Axially Loaded Columns Subjected to Periodic Lateral Acceleration, Proceedings of JSCE, No.341, pp.41-49, 1984.
- [32] 石田修三, 森迫清貴: 正弦波外力をうける1自由度バイリニア履歴系の動的挙動の分類, 第35回応用力学連合講演会講演予稿集, pp.195-198, 1985年.
- [33] 加藤史郎, 石川浩一郎, 横尾義貫: 大スパントラス構造物の耐震性に関する研究, 一上下地震動を受ける平行弦トラスばりの耐震性について, 日本建築学会構造系論文報告集, 第360号, pp.64-74, 1986年.
- [34] 加藤史郎, 石川浩一郎, 横尾義貫: 上下地震動を受けるトラス平板の耐震性について, 日本建築学会構造系論文報告集, 第370号, pp.60-68, 1986年.
- [35] 和田 章, 向 秀元: 一方向大スパン複層円筒トラス構造物の地震応答解析, 日本建築学会構造系論文報告集, 第413号, pp.87-96, 1990年.
- [36] 多田元英, 米山隆也: 建築物の屋上に設置された2層立体トラスの鉛直地震応答性状, 日本建築学会構造系論文報告集, 第452号, pp.77-86, 1993年.
- [37] Williams, F. W.: An Approach to the Non-linear Behaviour of the Members of a Rigid Jointed Plane Framework with Finite Deflections, Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, Vol.17, Pt.4, pp.451-469, 1964.
- [38] 石田修三, 森迫清貴, 山本靖: 変位関数に曲げ縮み連成項を含む一次元複合非線形有限要素法, 日本建築学会構造系論文報告集, 第384号, pp.80-89, 1988年.
- [39] Hangai, Y. and Kawamata, S.: Perturbation Method in the Analysis of Geometrically Nonlinear and Stability Problems, Advancement in Computational Mechanics in Structural Mechanics and Design, pp.473-489, UAH Press, 1972.

- [40] 吉田 裕：有限要素法による幾何学的非線形構造解析法の現状と課題，土木学会論文集，第374号，pp.25-37，1986年。
- [41] 榎木義一：非線形振動論，共立出版，1960年。
- [42] 三木忠夫：常微分方程式とその応用，コロナ社，1969年。
- [43] Bolotin, V.V. 原著，近藤誠治，中田和夫 邦訳：弾性系の動的安定，コロナ社，1972年。
- [44] 藤田廣一：非線形問題，コロナ社，1978年。
- [45] 柴田明德：最新耐震構造解析，森北出版，1981年。
- [46] 鷺津久一郎，宮本博，山田嘉昭，山本善之，川井忠彦共編：有限要素法ハンドブック II 応用編，培風館，1983年。
- [47] 土木学会編：動的解析と耐震設計（第2巻）動的解析の方法，技報堂出版，1989年。
- [48] Bažant, Z.P. and Cedolin, L.: Stability of Structures, Oxford University Press, 1991.
- [49] 嘉納秀明，江原信郎，小林博明，小野 治：動的システムの解析と制御，コロナ社，1992年。
- [50] 日本建築学会：シェル・単層ラチス構造の振動解析—地震，風応答と動的安定—，1993年。
- [51] 高田 勝：機械計算法，養賢堂，1994年。
- [52] 日本建築学会：構造物の不安定現象と限界状態，1994年。

発表論文リスト

審査論文

1. 松井徹哉，萩原伸幸，原田昭徳，竹内徹，鈴木達人：単層スペースフレーム用システム化接合部の開発のための基礎研究，鋼構造年次論文報告集，第2巻，pp.243-248，1994年。
2. 石原競，八木孝憲，萩原伸幸，大森博司：極小曲面解析による膜構造の形状解析～複合変分汎関数を用いて～，日本建築学会構造系論文集，第469号，pp.61-70，1995年。
3. 萩原伸幸，大森博司，松井徹哉：大スパン構造物の弾塑性振動特性に関する基礎的研究～定常振動解に基づく偏平三角ラーメンの振動性状の考察～，日本建築学会構造系論文集，第471号，pp.101-110，1995年。
4. 萩原伸幸，大森博司，松井徹哉：幾何学的非線形性を考慮した弾塑性系の動的挙動と安定性，日本建築学会構造系論文集，第488号，pp.77-86，1996年。

国際会議

1. Ohmori, H., Hagiwara, N., Matsui, T. and Matsuoka, O. : Numerical Analysis of Minimum Surface by Finite Element Method, Proceedings of the International Association for Shell and Spatial Structures, Madrid, Spain, Vol.5, 1989.
2. Hagiwara, N., Ohmori, H. and Matsui, T. : Fundamental Study on Nonlinear Dynamics of Elasto-Plastic Structures, Proceedings of the Second Asian-Pacific Conference on Computational Mechanics, Sydney, Australia, Vol.1, pp.101-105, 1993.
3. Ishihara, K., Ohmori, H. and Hagiwara, N. : Shape Finding Analysis for Membrane Structures, Proceedings of the Second Asian-Pacific Conference on Computational Mechanics, Sydney, Australia, Vol.2, pp.931-936, 1993.
4. Ishihara, K., Ohmori, H. and Hagiwara, N. : Shape Finding Method by Using Minimal Surface, Proceedings of the SEIKEN-IASS Symposium, Tokyo, Japan, pp.261-266, 1993.
5. Ishihara, K., Yagi, T., Hagiwara, N. and Ohmori, H. : Shape Finding Analysis of Membrane Structure by Using Quasi-Newton Method, Proceedings of the IASS International Symposium 1995, Spatial Structures: Heritage, Present and Future, Milano, Italia, Vol.2, pp.767-774, 1995.
6. Hagiwara, N., Ohmori, H. and Matsui, T. : Shape Optimization of Truss Structures by Stress Adjustment, Proceedings of the International Symposium University of

Stuttgart, Conceptual Design of Structures, Stuttgart, Germany, Vol.1, pp.238-245, 1997.

7. Yagi, T., Ishihara, K., Hagiwara, N. and Ohmori, H.: Study on Shape Determination of Membrane structures by Using Minimal Surface Method, Proceedings of the International Symposium University of Stuttgart, Conceptual Design of Structures, Stuttgart, Germany, Vol.1, pp.368-375, 1997.

その他(口頭発表等)

膜構造協会論文集

1. 大森博司, 萩原伸幸, 松井徹哉, 松岡理: 有限要素法による極小曲面の数値解析, 膜構造研究論文集, pp.1-10, 1988年.

日韓コロキウム

1. 大森博司, 萩原伸幸, 松井徹哉, 松岡理: 張力構造に関する基礎的考察(極小曲面の数値解析), 第2回日韓コロキウム論文集, pp.119-126, 1987年.

応用力学連合講演会

1. 萩原伸幸, 大森博司, 松井徹哉, 松岡理: 極小曲面の解析法に関する基礎的研究一解の安定性について一, 第38回応用力学連合講演会講演予稿集, pp.291-294, 1988年.
2. 萩原伸幸, 大森博司, 松井徹哉: 構造物の非線形動力学特性に関する基礎的研究, 第42回応用力学連合講演会講演予稿集, pp.377-378, 1993年.

構造工学における数値解析法シンポジウム

1. 萩原伸幸, 大森博司, 松井徹哉: 定常振動解に基づく非線形構造物の動力学特性, 構造工学における数値解析法シンポジウム論文集, 第17巻, pp.559-562, 1993年.

計算工学講演会

1. 萩原伸幸, 程波, 大森博司, 松井徹哉: 応力低減によるトラス構造物の逐次形状修正, 計算工学講演会論文集, 第2巻, 第3号, pp.1197-1200, 1997年.

日本建築学会大会学術講演会

1. 大森博司, 萩原伸幸, 松井徹哉, 松岡理: 張力構造に関する基礎的研究(その1: 極小曲面問題の直接的な数値解析), 日本建築学会大会学術講演梗概集 B, pp.1197-1198, 1987年.

2. 大森博司, 萩原伸幸, 松井徹哉, 松岡理: 張力構造に関する基礎的研究(その2: 極小曲面の安定性について), 日本建築学会大会学術講演梗概集 B, pp.1329-1330, 1988年.
3. 護雅史, 大森博司, 松井徹哉, 松岡理, 萩原伸幸: 張力構造に関する基礎的研究(その3: 有限要素法による軸対称極小曲面の解析), 日本建築学会大会学術講演梗概集 B, pp.1167-1168, 1989年.
4. 萩原伸幸, 大森博司, 松井徹哉, 松岡理, 護雅史: 張力構造に関する基礎的研究(その4: 有限要素法による一般三次元極小曲面の解析), 日本建築学会大会学術講演梗概集 B, pp.1169-1170, 1989年.
5. 大森博司, 松井徹哉, 松岡理, 萩原伸幸, 護雅史: 張力構造に関する基礎的研究(その5: 極小曲面の離散化に関する考察), 日本建築学会大会学術講演梗概集 B, pp.1171-1172, 1989年.
6. 萩原伸幸, 鈴木俊男, 山本浩二: スペースフレームの部材座屈解析に関する高次要素の適用について, 日本建築学会大会学術講演梗概集 B, pp.1323-1324, 1990年.
7. 萩原伸幸, 鈴木俊男, 山本浩二, 田村正英: 開閉式ドームの耐震設計上の検討(その1) 連成振動効果の簡易モデルによる考察, 日本建築学会大会学術講演梗概集 B, pp.1343-1344, 1991年.
8. 田村正英, 萩原伸幸, 鈴木俊男, 山本浩二: 開閉式ドームの耐震設計上の検討(その2) 弾塑性パネの最適化, 日本建築学会大会学術講演梗概集 B, pp.1345-1346, 1991年.
9. 萩原伸幸, 大森博司, 松井徹哉: 円弧アーチの弾塑性振動特性, 日本建築学会大会学術講演梗概集 B, pp.1701-1702, 1992年.
10. 下川剛司, 萩原伸幸, 大森博司, 松井徹哉: 大スパン構造物の弾塑性振動特性に関する基礎的研究(その1 定常振動問題の近似解析手法について), 日本建築学会大会学術講演梗概集 B, pp.1429-1430, 1993年.
11. 萩原伸幸, 大森博司, 松井徹哉, 下川剛司: 大スパン構造物の弾塑性振動特性に関する基礎的研究(その2 簡単な非線形モデルの数値解析), 日本建築学会大会学術講演梗概集 B, pp.1431-1432, 1993年.
12. 八木孝憲, 大森博司, 萩原伸幸, 石原競: 張力構造に関する基礎的研究(その9: 要素長に関する付帯条件下の最小長さ曲線問題), 日本建築学会大会学術講演梗概集 B, pp.1425-1426, 1993年.
13. 石原競, 大森博司, 萩原伸幸, 八木孝憲: 張力構造に関する基礎的研究(その10: 要素面積に関する付帯条件の導入), 日本建築学会大会学術講演梗概集 B, pp.1427-1428, 1993年.
14. 大森博司, 石原競, 八木孝憲, 山本憲司, 萩原伸幸: 極小曲面の形状解析 - その1: 複合変分汎関数の提案 -, 日本建築学会大会学術講演梗概集 B, pp.2031-2032, 1994年.

15. 石原 競, 大森博司, 八木孝憲, 山本憲司, 萩原伸幸: 極小曲面の形状解析 - その2: 複合変分汎関数の応用 -, 日本建築学会大会学術講演梗概集 B, pp.2033-2034, 1994年.
16. 山本憲司, 大森博司, 石原 競, 八木孝憲, 萩原伸幸: 極小曲面の形状解析 - その3: 数値解析例 -, 日本建築学会大会学術講演梗概集 B, pp.2035-2036, 1994年.
17. 八木孝憲, 大森博司, 石原 競, 山本憲司, 萩原伸幸: 極小曲面の形状解析 - その4: Quasi-Newton 法による数値解析 -, 日本建築学会大会学術講演梗概集 B, pp.2037-2038, 1994年.
18. 松井徹哉, 萩原伸幸, 鈴木達人, 竹内 徹, 喻 進: 単層スペースフレーム用システム化接合部の開発のための基礎研究- その1 接合部の加力試験 -, 日本建築学会大会学術講演梗概集 B, pp.1877-1878, 1994年.
19. 喻 進, 松井徹哉, 萩原伸幸, 鈴木達人, 竹内 徹: 単層スペースフレーム用システム化接合部の開発のための基礎研究- その2 全体スペースフレームの応力解析 -, 日本建築学会大会学術講演梗概集 B, pp.1879-1880, 1994年.
20. 鈴木達人, 竹内 徹, 松井徹哉, 萩原伸幸, 喻 進: 単層スペースフレーム用システム化接合部の開発のための基礎研究- その3 組立施工性の検証 -, 日本建築学会大会学術講演梗概集 B, pp.1881-1882, 1994年.
21. 下川剛司, 萩原伸幸, 大森博司, 松井徹哉: 大スパン構造物の弾塑性振動特性に関する基礎的研究 (その3 有限要素法による定常解析の定式化), 日本建築学会大会学術講演梗概集 B, pp.1907-1908, 1994年.
22. 萩原伸幸, 大森博司, 松井徹哉, 下川剛司: 大スパン構造物の弾塑性振動特性に関する基礎的研究 (その4 円弧アーチの非線形動力特性の検討), 日本建築学会大会学術講演梗概集 B, pp.1909-1910, 1994年.
23. 萩原伸幸, 大森博司, 松井徹哉, 金子慶一: 非線形系の動力特性と安定性に関する研究 (その1: 定式化および安定判別法について), 日本建築学会大会学術講演梗概集 B-1, pp.427-428, 1995年.
24. 金子慶一, 萩原伸幸, 大森博司, 松井徹哉: 非線形系の動力特性と安定性に関する研究 (その2: 1自由度モデルの数値解析と動的挙動), 日本建築学会大会学術講演梗概集 B-1, pp.429-430, 1995年.
25. 宮原里枝, 萩原伸幸, 下川剛司, 松井徹哉, 鈴木達人, 竹内 徹: システム化接合部を用いた単層スペースフレームの弾塑性座屈解析 (その1: モデル化および理論展開), 日本建築学会大会学術講演梗概集 B-1, pp.585-586, 1995年.
26. 下川剛司, 萩原伸幸, 宮原里枝, 松井徹哉, 鈴木達人, 竹内 徹: システム化接合部を用いた単層スペースフレームの弾塑性座屈解析 (その2: 円弧アーチの解析), 日本建築学会大会学術講演梗概集 B-1, pp.587-588, 1995年.

27. 萩原伸幸, 大森博司, 松井徹哉, 程 波: 応力低減による平面トラスの形状解析 (その1: 定式化), 日本建築学会大会学術講演梗概集 B-1, pp.947-948, 1996年.
28. 程 波, 萩原伸幸, 大森博司, 松井徹哉: 応力低減による平面トラスの形状解析 (その2: 数値解析結果), 日本建築学会大会学術講演梗概集 B-1, pp.949-950, 1996年.
29. 上村充範, 萩原伸幸, 宮原里枝, 中村隆志, 松井徹哉: システム化接合部を用いた単層スペースフレームの弾塑性座屈解析 (その1: モデル化および定式化), 日本建築学会大会学術講演梗概集 B-1, pp.1113-1114, 1996年.
30. 宮原里枝, 萩原伸幸, 上村充範, 中村隆志, 松井徹哉: システム化接合部を用いた単層スペースフレームの弾塑性座屈解析 (その2: 円弧アーチの解析), 日本建築学会大会学術講演梗概集 B-1, pp.1115-1116, 1996年.
31. 金子大祐, 萩原伸幸, 程 波, 大森博司, 松井徹哉: 応力低減によるトラスの形状修正 (その1: 幾何学的制約条件による同一形状ユニットの生成), 日本建築学会大会学術講演梗概集 B-1, pp.1037-1038, 1997年.
32. 萩原伸幸, 程 波, 金子大祐, 大森博司, 松井徹哉: 応力低減によるトラスの形状修正 (その2: 立体トラスへの応用), 日本建築学会大会学術講演梗概集 B-1, pp.1039-1040, 1997年.
33. 上村充範, 宮原里枝, 松井徹哉, 萩原伸幸: システム化接合部を用いた単層スペースフレームの弾塑性座屈解析 (その3: 円弧アーチの弾塑性解析), 日本建築学会大会学術講演梗概集 B-1, pp.989-990, 1997年.
34. 宮原里枝, 上村充範, 松井徹哉, 萩原伸幸: システム化接合部を用いた単層スペースフレームの弾塑性座屈解析 (その4: 単層円筒ラチスシェルの弾塑性解析), 日本建築学会大会学術講演梗概集 B-1, pp.991-992, 1997年.
35. 中村隆志, 喬 鋒, 松井徹哉, 萩原伸幸: システム化接合部を用いた単層スペースフレームの地震応答性状 (その1: 一方向入力の場合), 日本建築学会大会学術講演梗概集 B-1, pp.961-962, 1997年.
36. 喬 鋒, 松井徹哉, 萩原伸幸, 中村隆志: システム化接合部を用いた単層スペースフレームの地震応答性状 (その2: 上下・水平二方向同時入力の場合), 日本建築学会大会学術講演梗概集 B-1, pp.963-964, 1997年.

日本建築学会東海支部研究報告

1. 萩原伸幸, 鈴木達人, 松井徹哉, 竹内 徹: 大スパン単層スペースフレーム用システム化接合部の加力試験, 日本建築学会東海支部研究報告集, 第32号, pp.301-304, 1994年.
2. 萩原伸幸, 上村充範, 下川剛司, 宮原里枝, 松井徹哉, 鈴木達人, 竹内 徹: システム化接合部を有する単層スペースフレームの弾塑性座屈解析 (その1: モデル化および理論展開), 日本建築学会東海支部研究報告集, 第34号, pp.309-312, 1996年.

3. 宮原里枝, 萩原伸幸, 下川剛司, 松井徹哉, 鈴木達人, 竹内 徹: システム化接合部を有する単層スペースフレームの弾塑性座屈解析 (その2: 平面ラチスアーチの解析), 日本建築学会東海支部研究報告集, 第34号, pp.313-316, 1996年.

謝辞

本論文は、筆者が名古屋大学に奉職して以来、6年余りに亘って行ってきた研究をまとめたものであります。

研究の遂行に際して、名古屋大学教授 松井徹哉先生、同助教授 大森博司先生には、丁重なるご指導とご支援を頂きました。特に、筆者が大学院生として、この研究室に籍をおいて以来、一度大学を離れた後も、問題に行く手を阻まれた際には、しばしば相談に応じて下さるとともに、再び助手として赴任してからも、この海のものとも山のものともわからない研究テーマに深い理解を示して頂き、その研究に没頭する一方で、助手としての他の業務が滞りがちとなっているにも関わらず、暖かく見守り下さったことに深甚の謝意を表します。この研究の礎となるものは、先生方から直接ご指導頂いた事柄であり、その着想は、身近に触れた先生方の様々な研究内容に触発されたことにより生まれたものですが、これらを踏まえて、単なる修士論文の延長ではない研究テーマを開拓しようという、無謀かつわがままな試みが許されたのも、一重に両先生方のご理解と、この研究室の自由な雰囲気のおかげであると思えます。

名古屋大学教授 谷川恭雄先生には、本論文を取りまとめるにあたり、貴重なご助言、励ましの言葉を頂き、また、名古屋大学教授 福和伸夫先生には、特に振動学の立場より、研究の初期の段階から、問題点を的確にご指摘頂き、研究を進めていく上で大変参考になりました。厚くお礼申し上げます。

名古屋大学名誉教授 松岡 理先生には、大学院生時代よりご指導を賜るとともに、今日に至るまで、常に暖かな励ましの言葉を頂いたことは、筆者の研究生活において、大変大きな支えとなりました。深く感謝の意を表します。

東京大学生産技術研究所教授 半谷裕彦先生には、日本計算工学会の研究分科会の活動を通じて、また、筆者の所属する研究室と夏期に合同で開催されるゼミでの研究発表を通じて、非線形振動、数値解析その他に関わる貴重なご意見を頂きました。厚くお礼申し上げます。

筆者は名古屋大学大学院に進学する以前には、名城大学理工学部建築学科において学びましたが、指導教官であった名城大学教授 村田 賢先生には、構造力学の基礎から、数値解析のノウハウに至るまで、細かなご指導を頂き、また、卒業してからも、進路や、研究の進め方に関して貴重なご助言を頂きました。深く感謝いたします。

また、大学院を修了した後の2年半の間、株式会社フジタに在職していた際には、空間構造に関わる様々な研究や業務の中で、多くのことを学び、これが本研究の動機付けを与えることとなりました。その中で、特に株式会社フジタ技術研究所 鈴木俊男博士には、当時新入社員であった筆者をご指導頂き、その後も、研究についてはもとより、多くの面で大変お世話になりました。深く感謝いたします。また、折りに触れ、暖かい励ましやご助言を頂いた株式会社フジタの皆様にも、厚くお礼申し上げます。

かつて博士課程後期課程に在籍していた、豊田工業高等専門学校講師 山田耕司氏、東京工芸大学助手 石原 競氏、太陽工業株式会社 八木孝憲氏、株式会社巴コーポレーション 上村充範氏と

は、常に研究に関する屈託のない議論を交わし、また比較的年齢が近いこともあり、公私を通じて多くのことを語り合えました。このことは、孤独に陥りやすい研究生活の中で、大きな心の支えともなりました。特に石原 競氏には、在学中に研究室の計算機環境を整備して頂き、これがこの研究の数値解析や論文作成において、大いに役立つこととなりました。ありがとうございました。

この研究を進めていく過程において、多くの学生諸氏の協力を得ました。特に、下川剛司氏（現：五洋建設株式会社）、金子慶一氏（現：株式会社飯島建築事務所）、古川立子氏（現：東京大学大学院生）には、本研究に関わる数値解析から図表の作成に至るまで多大なる尽力を頂きました。ここに謝意を表します。

この6年余りの年月は、筆者にとって長くもあり、また短くもありました。私事ながら、この間に両親を相次いで亡くし、自分の周りの環境が大きく変わったときでもありました。生前に報告できなかったことが悔やまれますが、ここに一つの成果として区切りをつけられたことを墓前に報告し、深く感謝したいと思います。

最後に、これまでの研究生活を理解し、これを支え、ときにはわがままを許してくれた妻 操に感謝します。

平成10年5月

萩原伸幸

付録 A

剛性比 κ の値を変えた場合の非線形1質点系モデルの荷重-変位曲線

非線形1質点系モデルの弾性ばねと弾塑性ばねの剛性比を与えるパラメータ κ の値を、第2章で与えた値の1/10 ($\kappa = 5$) および1/100 ($\kappa = 0.5$) とした場合の荷重-変位曲線を、それぞれ図A.1, 図A.2に示す。いずれの場合も、 κ 以外の他のパラメータについては第2章の表2.1に示したものと同一値を用いている。

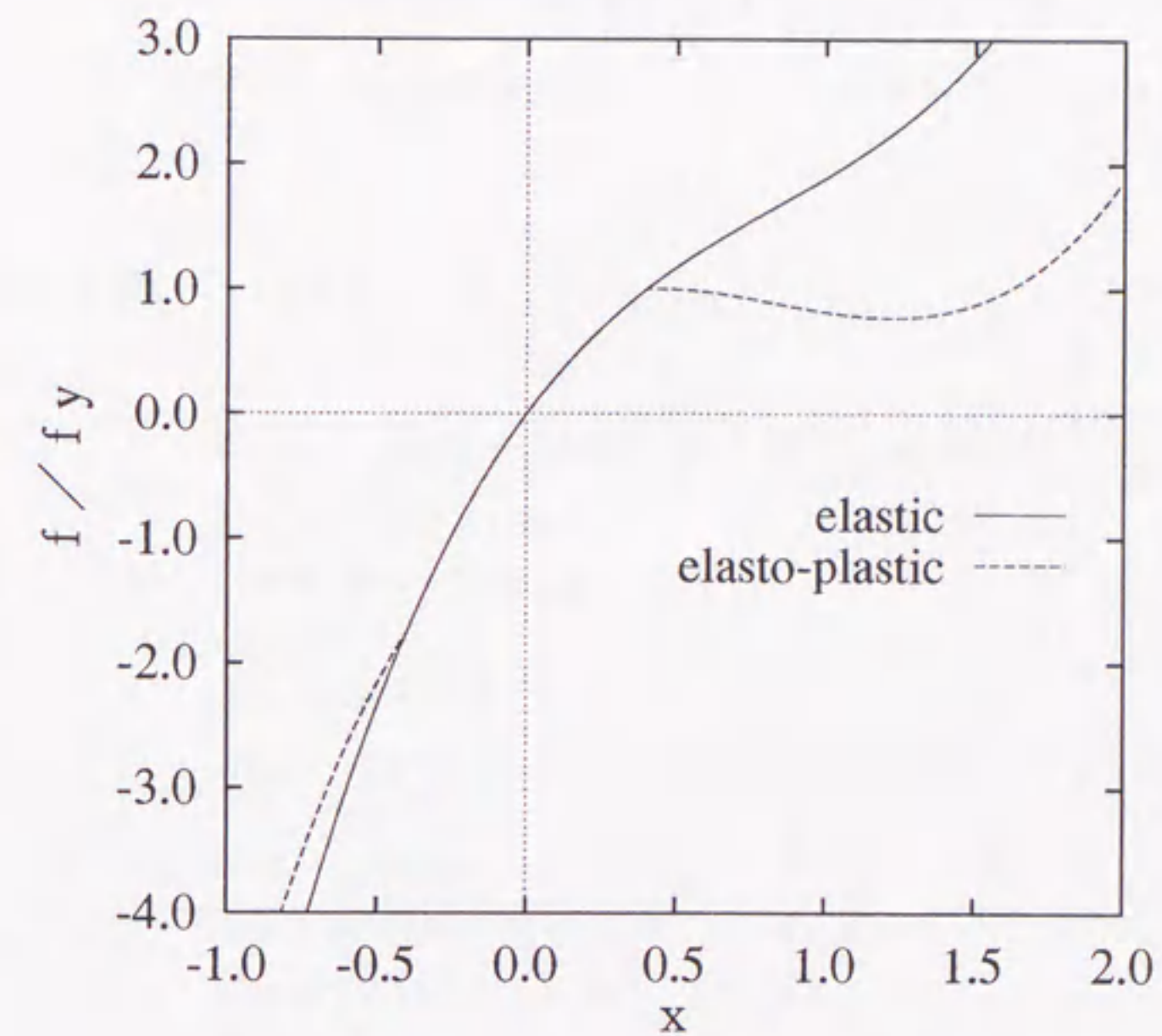
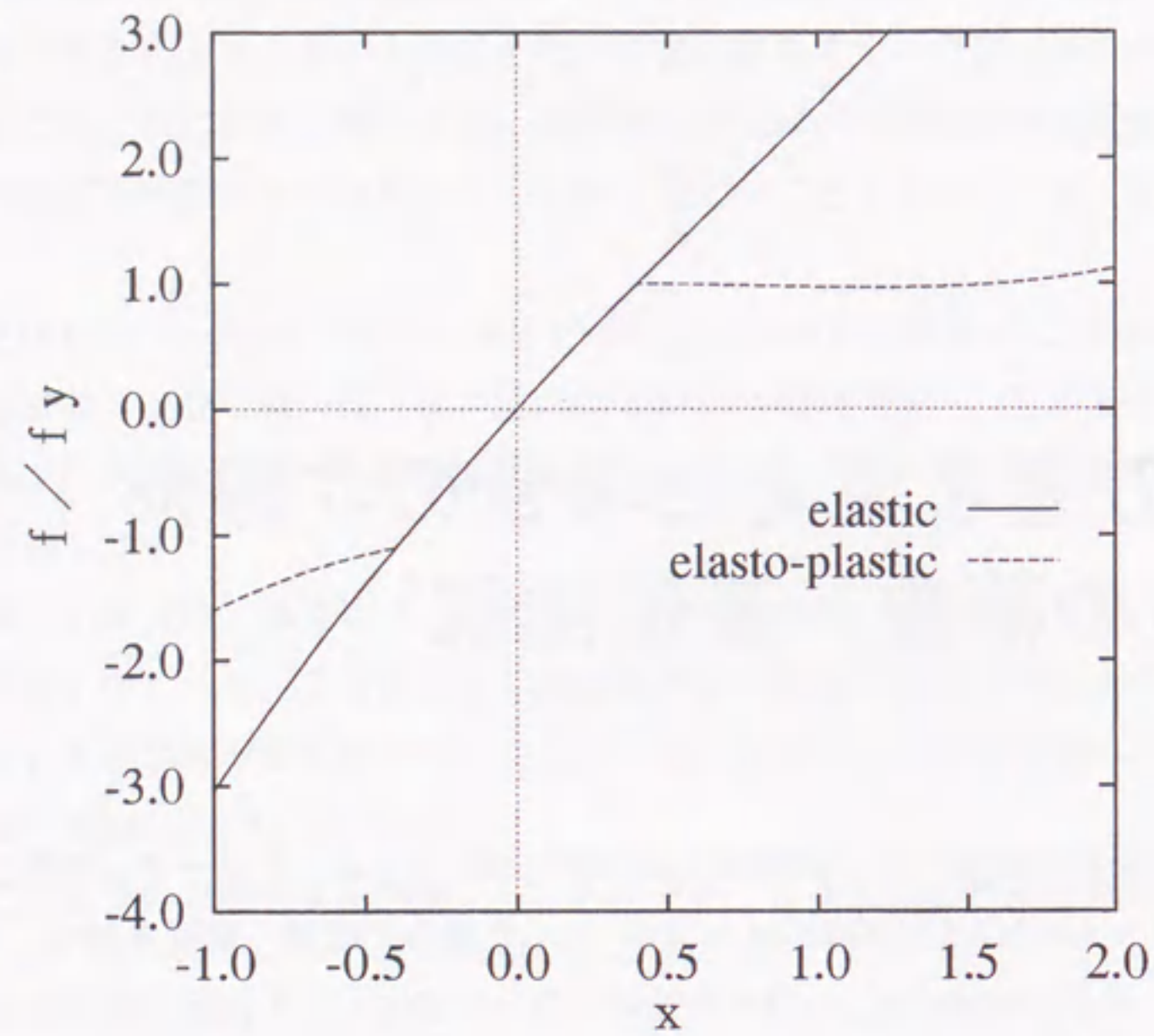


図 A.1: $\kappa = 5$ の場合の荷重-変位曲線

図 A.2: $\kappa = 0.5$ の場合の荷重-変位曲線

付録 B

2.3.1 の非線形代数方程式に対する修正方程式

2.3.1において示された非線形代数方程式(2.9)~(2.11)式および(2.12)式をNewton-Raphson法で解く際に用いられる修正方程式を次式で表す。

$$\begin{bmatrix} H_{11} & \cdots & H_{14} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{41} & \cdots & H_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta A_1 \\ \vdots \\ \Delta A_3 \\ \Delta \Omega \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} G_1 \\ \vdots \\ G_4 \end{Bmatrix} \quad (\text{B.1})$$

ここに、 $G_1 \sim G_4$ は(2.9)~(2.11)式および(2.12)式の左辺であり、係数マトリクス $[H]$ の内容は次のようになる。

i) 弾性範囲で振動しているとき

$$\begin{aligned} H_{11} &= \nu_L^2 + \nu_N^2 + 2\beta A_1 + 3\gamma \left(A_1^2 + \frac{1}{2}A_2^2 + \frac{1}{2}A_3^2 \right) \\ H_{12} &= \beta A_2 + 3\gamma A_1 A_2 \\ H_{13} &= \beta A_3 + 3\gamma A_1 A_3 \\ H_{14} &= 0 \\ H_{21} &= 2\beta A_2 + 6\gamma A_1 A_2 \\ H_{22} &= -\Omega^2 + \nu_L^2 + \nu_N^2 + 2\beta A_1 + 3\gamma \left(A_1^2 + \frac{3}{4}A_2^2 + \frac{1}{4}A_3^2 \right) \\ H_{23} &= \frac{3}{2}\gamma A_2 A_3 \\ H_{24} &= -2\Omega A_2 \\ H_{31} &= 2\beta A_3 + 6\gamma A_1 A_3 \\ H_{32} &= \frac{3}{2}\gamma A_2 A_3 \\ H_{33} &= -\Omega^2 + \nu_L^2 + \nu_N^2 + 2\beta A_1 + 3\gamma \left(A_1^2 + \frac{1}{4}A_2^2 + \frac{3}{4}A_3^2 \right) \\ H_{34} &= -2\Omega A_3 \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

ii) 弾塑性バネが正の降伏点を越えているとき

$$\begin{aligned}
 H_{11} &= \nu_N^2 + 2\beta A_1 + 3\gamma \left(A_1^2 + \frac{1}{2}A_2^2 + \frac{1}{2}A_3^2 \right) \\
 H_{12} &= \beta A_2 + 3\gamma A_1 A_2 - \frac{\nu_L^2 A_2}{\sqrt{A_2^2 + A_3^2}} \\
 H_{13} &= \beta A_3 + 3\gamma A_1 A_3 - \frac{\nu_L^2 A_3}{\sqrt{A_2^2 + A_3^2}} \\
 H_{14} &= 0 \\
 H_{21} &= 2\beta A_2 + 6\gamma A_1 A_2 \\
 H_{22} &= -\Omega^2 + \nu_L^2 + \nu_N^2 + 2\beta A_1 + 3\gamma \left(A_1^2 + \frac{3}{4}A_2^2 + \frac{1}{4}A_3^2 \right) \\
 H_{23} &= \frac{3}{2}\gamma A_2 A_3 \\
 H_{24} &= -2\Omega A_2 \\
 H_{31} &= 2\beta A_3 + 6\gamma A_1 A_3 \\
 H_{32} &= \frac{3}{2}\gamma A_2 A_3 \\
 H_{33} &= -\Omega^2 + \nu_L^2 + \nu_N^2 + 2\beta A_1 + 3\gamma \left(A_1^2 + \frac{1}{4}A_2^2 + \frac{3}{4}A_3^2 \right) \\
 H_{34} &= -2\Omega A_3
 \end{aligned} \tag{B.3}$$

iii) 弾塑性バネが交番塑性に至り、履歴ループを描くとき

$$\begin{aligned}
 H_{11} &= \nu_N^2 + 2\beta A_1 + 3\gamma \left(A_1^2 + \frac{1}{2}A_2^2 + \frac{1}{2}A_3^2 \right) \\
 H_{12} &= \beta A_2 + 3\gamma A_1 A_2 \\
 H_{13} &= \beta A_3 + 3\gamma A_1 A_3 \\
 H_{14} &= 0 \\
 H_{21} &= 2\beta A_2 + 6\gamma A_1 A_2 \\
 H_{22} &= \nu_N^2 - \Omega^2 + 2\beta A_1 + 3\gamma \left(A_1^2 + \frac{3}{4}A_2^2 + \frac{1}{4}A_3^2 \right) \\
 &\quad + \frac{\nu_L^2 x_y (4A_2 A_3 + \pi A_3^2)}{\pi(A_2^2 + A_3^2)^{3/2}} - \frac{8\nu_L^2 x_y^2 A_2 A_3}{\pi(A_2^2 + A_3^2)^2} \\
 H_{23} &= \frac{3}{2}\gamma A_2 A_3 - \frac{\nu_L^2 x_y (4A_2^2 + \pi A_2 A_3)}{\pi(A_2^2 + A_3^2)^{3/2}} + \frac{4\nu_L^2 x_y^2 (A_2^2 - A_3^2)}{\pi(A_2^2 + A_3^2)^2} \\
 H_{24} &= -2\Omega A_2 \\
 H_{31} &= 2\beta A_3 + 6\gamma A_1 A_3 \\
 H_{32} &= \frac{3}{2}\gamma A_2 A_3 + \frac{\nu_L^2 x_y (4A_3^2 - \pi A_2 A_3)}{\pi(A_2^2 + A_3^2)^{3/2}} - \frac{4\nu_L^2 x_y^2 (A_3^2 - A_2^2)}{\pi(A_2^2 + A_3^2)^2} \\
 H_{33} &= \nu_N^2 - \Omega^2 + 2\beta A_1 + 3\gamma \left(A_1^2 + \frac{1}{4}A_2^2 + \frac{3}{4}A_3^2 \right) \\
 &\quad + \frac{\nu_L^2 x_y (-4A_2 A_3 + \pi A_2^2)}{\pi(A_2^2 + A_3^2)^{3/2}} + \frac{8\nu_L^2 x_y^2 A_2 A_3}{\pi(A_2^2 + A_3^2)^2} \\
 H_{34} &= -2\Omega A_3
 \end{aligned} \tag{B.4}$$

付録 C

Routh-Hurwitz の定理

対象となる微分方程式の特性方程式を次式で表す。

$$f(\lambda) = p_0 \lambda^N + p_1 \lambda^{N-1} + \dots + p_{N-1} \lambda + p_N = 0 \tag{C.1}$$

応答が安定であるかどうかを判断するためには、(C.1)式の特性方程式の根を求める必要はなく、根の実部の符号がわかればよい。すなわち、(C.1)式の全ての根の実部が負であることが示されれば、系の応答は安定である。Routh-Hurwitz の定理は、この全ての根が負の実部を持つための必要十分条件を示したもので、これには、Hurwitz マトリクスと呼ばれる次のようなマトリクスを利用する。

$$H = \begin{vmatrix} p_1 & p_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ p_3 & p_2 & p_1 & p_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ p_5 & p_4 & p_3 & p_2 & p_1 & p_0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & & & & p_N \end{vmatrix} \tag{C.2}$$

式(C.2)の全ての根が負の実部を持つための必要十分条件は、係数 $p_0 \sim p_N$ が全て正で、Hurwitz マトリクスの全ての小行列式

$$\Delta_1 = p_1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} p_1 & p_0 \\ p_3 & p_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} p_1 & p_0 & 0 \\ p_3 & p_2 & p_1 \\ p_5 & p_4 & p_3 \end{vmatrix}, \quad \dots \quad \Delta_N = \det H \tag{C.3}$$

が、正であることである。

例として、特性方程式が λ に関する 4 次方程式の場合は、Hurwitz マトリクスは、

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} p_1 & p_0 & 0 & 0 \\ p_3 & p_2 & p_1 & p_0 \\ 0 & p_4 & p_3 & p_2 \\ 0 & 0 & p_4 & p_3 \end{vmatrix} \quad (\text{C.4})$$

となり、安定の条件は、

$$\begin{cases} p_1 > 0 \\ p_1 p_2 - p_0 p_3 > 0 \\ (p_1 p_2 - p_0 p_3) p_3 - p_1^2 p_4 > 0 \\ p_4 > 0 \end{cases} \quad (\text{C.5})$$

によって、与えられる。

付録 D

等価粘性減衰係数の算出方法の妥当性について

3.2.1で示した、高調波を含む歪応答に対する履歴系のエネルギー損失の概算方法と、これに基づく等価粘性減衰係数の評価について、以下のような簡単な数値実験を行い、その妥当性を検討した。

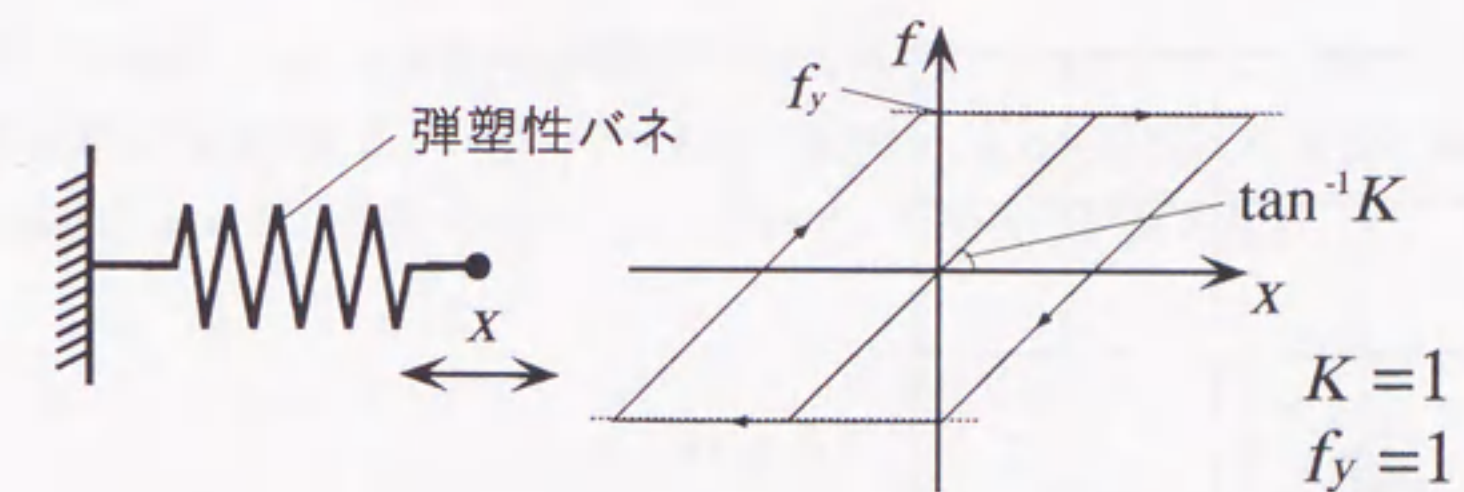


図 D.1: 履歴系のモデル

図 D.1に示すような履歴系に次式で示される強制的な変位を与え、これによるエネルギー損失を履歴過程を忠実に追跡して求めた等価粘性減衰係数と、本論で示した考え方により近似的に求めた等価粘性減衰係数を比較した。

$$x = \sum_{i=1}^N a_i \cos(ipt + \phi) \quad (\text{D.1})$$

ここに、 a_i , ϕ は次の範囲の一様乱数で与えられる。

$$\begin{aligned} -\frac{4}{\sqrt{N}} < a_i < \frac{4}{\sqrt{N}} \\ 0 < \phi < 2\pi \end{aligned}$$

$N = 2$, $N = 4$, $N = 6$ の場合について、各々1000個のサンプル波を用いて得られた結果を図 D.2に示す。縦軸 C_e は、概算的に求められた等価粘性減衰係数を、横軸 \bar{C}_e は履歴過程に基づくエ

エネルギー損失から算出された等価粘性減衰係数を表す。波数が増えるに従い若干過減衰となる傾向を有するが、本解析で対象とする程度の波数の範囲内では、ほぼ妥当な対応を示していると考えられる。

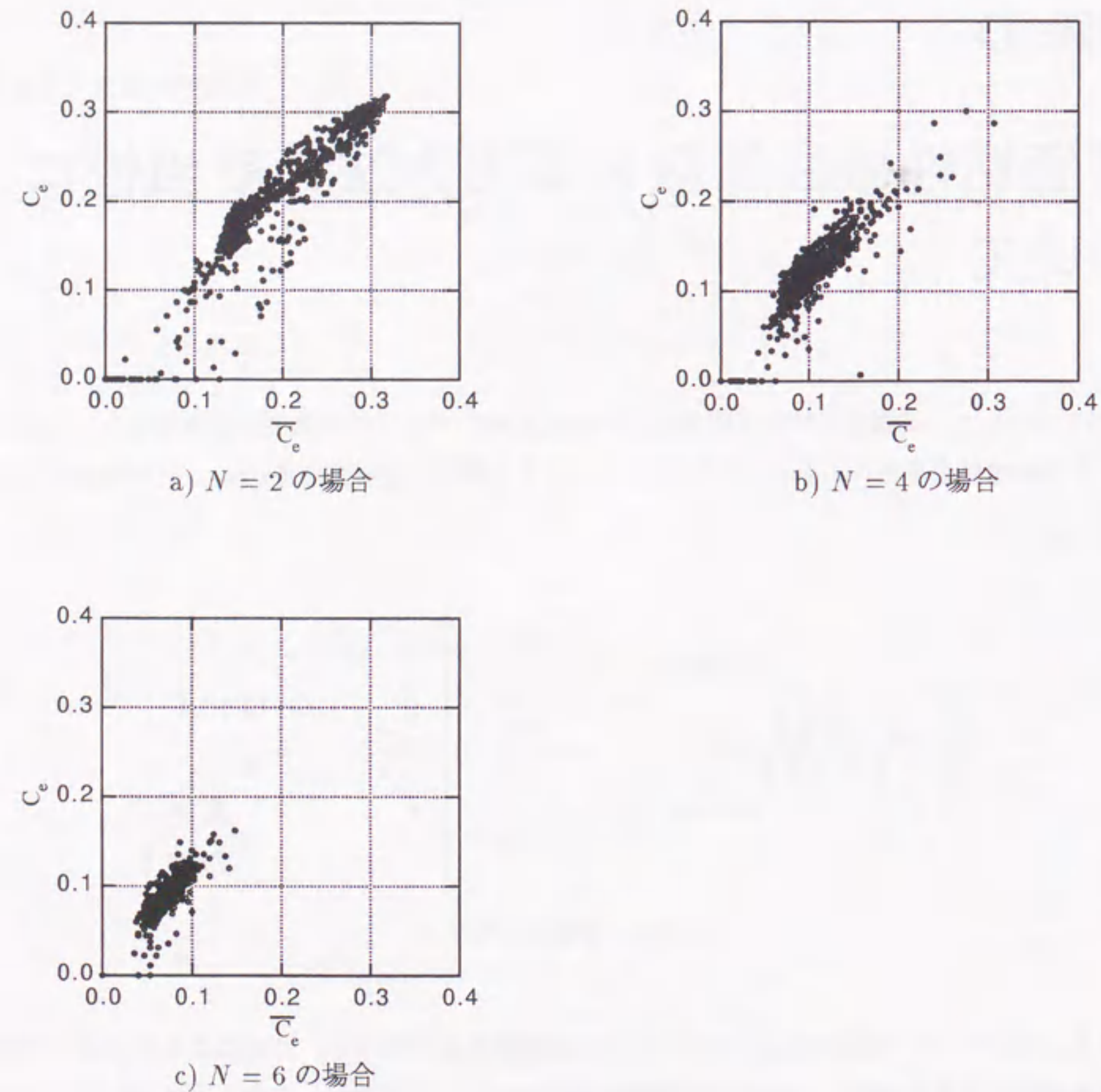


図 D.2: 等価粘性減衰係数の比較

付録 E

時刻歴応答解析について

E.1 非線形 1 質点系モデルの時刻歴応答解析

第 2 章で行なった非線形 1 質点系モデルの時刻歴応答解析に関する定式化について述べる。

以下に、この問題の運動方程式を示す*。

$$\ddot{x} + \bar{q}_L + \nu_N^2 x + bx^2 + \gamma x^3 = -\ddot{y} + f \quad (\text{E.1})$$

上記の運動方程式が、 $\tau = \tau_0 + \Delta\tau$ の時刻において表されているものとする。時刻 τ_0 における変位と弾塑性ばねの復元力を x_0 , $\bar{q}_L(\tau_0)$ とすれば、時刻 $\tau_0 + \Delta\tau$ における変位と弾塑性ばねの復元力は、微小区間 $\Delta\tau$ の間の変位の増分 Δx を用いて、次のように表される。

$$x = x_0 + \Delta x \quad (\text{E.2})$$

$$\bar{q}_L = \bar{q}_L(\tau_0) + s\Delta x \quad (\text{E.3})$$

ここに、 s は、弾塑性ばねの接線剛性を表す。

Newmark の β 法によれば、

$$x = x_0 + \dot{x}_0 \Delta t + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \ddot{x}_0 \Delta t^2 + \beta \ddot{x} \Delta t^2 \quad (\text{E.4})$$

$$\dot{x} = \dot{x}_0 + \frac{1}{2}(\ddot{x}_0 + \ddot{x}) \Delta t$$

これらより、次式を得る。

$$\dot{x} = \frac{1}{2\beta\Delta t} \Delta x + \left(1 - \frac{1}{2\beta}\right) \dot{x}_0 + \left(1 - \frac{1}{4\beta}\right) \ddot{x}_0 \Delta t \quad (\text{E.5})$$

$$\ddot{x} = \frac{1}{\beta\Delta t^2} \left(\Delta x - \dot{x}_0 \Delta t - \frac{1}{2} \ddot{x}_0 \Delta t^2\right) + \ddot{x}_0 \quad (\text{E.6})$$

*Newmark の β 法の β と (2.4) 式で記した運動方程式の係数 β が混在することになるので (2.4) 式の運動方程式に表れる β を、ここでは b と記す。また、この節に限り $\dot{\quad} = \frac{d}{d\tau}$ とする。

(E.6) 式を (E.1) 式に代入すれば、次のようになる。

$$\ddot{x}_0 - \frac{1}{\beta \Delta t^2} \left(\dot{x}_0 \Delta t + \frac{1}{2} \ddot{x}_0 \Delta t^2 \right) + \bar{q}_{L(0)} + \nu_N^2 x_0 + b x_0^2 + \gamma x_0^3 + \left(\frac{1}{\beta \Delta t^2} + s + \nu_N^2 + 2b x_0 + 3\gamma x_0^2 \right) \Delta x + (b + 3\gamma x_0) \Delta x^2 + \gamma \Delta x^3 = -\ddot{y} + f \quad (\text{E.7})$$

(E.7) 式は Δx に関する非線形方程式となっているので、各時間ステップにおいて、与えられた加速度 \ddot{y} に対する Δx を収束計算により求める。これを (E.5) 式および (E.6) 式に代入して、時刻 $\tau_0 + \Delta \tau$ の変位、速度、加速度を得る。なお、静的荷重 f が存在するときには、最初にこの荷重値に対する静的解析を行い、これによって求められる状態を初期値として、(E.7) 式に基づく応答解析を行う。

E.2 有限要素法による骨組構造物の時刻歴応答解析

第 3 章および第 4 章で行なった骨組構造物の時刻歴応答解析の定式化について述べる。以下では、3次元梁要素の場合について定式化の概略を示す。

この問題の仮想仕事式は、次式で表される。

$$\int \int \int_V \{ \sigma \delta \varepsilon + \tau \delta \gamma + \rho (\ddot{u}_x + \ddot{\eta}_x) \delta u_x + \rho (\ddot{u}_y + \ddot{\eta}_y) \delta u_y + \rho (\ddot{u}_z + \ddot{\eta}_z) \delta u_z \} dV + \sum_{i=1}^{12} m_i \{ (\ddot{d}_i^e + \ddot{\zeta}_i^e) - f_i^e \} \delta d_i^e = 0 \quad (\text{E.8})$$

(E.8) 式が、 $t = t_0 + \Delta t$ の時刻において表されているものとする。時刻 t_0 における変位を $d_{i(0)}^e$ 、応力を σ_0 、 τ_0 、歪を ε_0 、 γ_0 とすれば、時刻 $t_0 + \Delta t$ における変位、応力、歪は、微小区間 Δt の間の増分 Δd_i^e 、 $\Delta \sigma$ 、 $\Delta \tau$ 、 $\Delta \varepsilon$ 、 $\Delta \gamma$ を用いて、次のように表される。

$$d_i^e = d_{i(0)}^e + \Delta d_i^e \quad (\text{E.9})$$

$$\sigma = \sigma_0 + \Delta \sigma \quad (\text{E.10})$$

$$\tau = \tau_0 + \Delta \tau \quad (\text{E.11})$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \Delta \varepsilon \quad (\text{E.12})$$

$$\gamma = \gamma_0 + \Delta \gamma \quad (\text{E.13})$$

歪-節点変位関係式 (4.3) 式に、(E.9) 式を用いれば、

$$\begin{aligned} \varepsilon &= B_i \left(d_{i(0)}^e + \Delta d_i^e \right) + B_{ij}^N \left(d_{i(0)}^e + \Delta d_i^e \right) \left(d_{j(0)}^e + \Delta d_j^e \right) \\ &= B_i d_{i(0)}^e + B_{ij}^N d_{i(0)}^e d_{j(0)}^e + \left(B_i + 2B_{ij}^N d_{j(0)}^e \right) \Delta d_i^e + B_{ij}^N \Delta d_i^e \Delta d_j^e \\ \gamma &= B_i^T \left(d_{i(0)}^e + \Delta d_i^e \right) \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon &= \left(B_i + 2B_{ij}^N d_{j(0)}^e \right) \Delta d_i^e + B_{ij}^N \Delta d_i^e \Delta d_j^e \\ \Delta \gamma &= B_i^T \Delta d_i^e \end{aligned} \quad (\text{E.14})$$

また、応力の増分と歪の増分の関係は、次のように表される。

$$\begin{aligned} \Delta \sigma &= E_t \Delta \varepsilon \\ \Delta \tau &= G \Delta \gamma \end{aligned} \quad (\text{E.15})$$

ここに、 E_t は材料の接線係数である。

$d_{i(0)}^e$ 、 ε_0 、 γ_0 は既知量であるから、 δd_i^e 、 $\delta \varepsilon$ 、 $\delta \gamma$ は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \delta d_i^e &= \delta \Delta d_i^e \\ \delta \varepsilon &= \delta \Delta \varepsilon \\ &= \left(B_i + 2B_{ij}^N d_{j(0)}^e \right) \delta \Delta d_i^e + 2B_{ij}^N \Delta d_j^e \delta \Delta d_i^e \\ \delta \gamma &= \delta \Delta \gamma \\ &= B_i^T \delta \Delta d_i^e \end{aligned} \quad (\text{E.16})$$

従って、(E.8) 式に、(E.9)~(E.11) 式と、(E.14)~(E.16) 式、第 4 章の (4.1) 式および (4.5) 式を用いて、 Δd_i^e に関する 2 次以上の項を無視すれば、次のような増分形式の運動方程式を得る。

$$M_{ij}^e \Delta \ddot{d}_j^e + K_{ij}^e \Delta d_j^e = -M_{ij}^e \ddot{\zeta}_j^e + f_i^e - M_{ij}^e \ddot{d}_{j(0)}^e - Q_i^e \quad (\text{E.17})$$

ここに、

$$\begin{aligned} K_{ij}^e &= K_{ij}^{(L)e} + K_{ij}^{(G)e} + K_{ij}^{(N)e} \\ M_{ij}^e &= \int \int \int_V \rho N_{ki} N_{kj} dV + \delta_{ij} m_i^e \\ Q_i^e &= \int \int \int_V \left\{ \sigma_0 \left(B_i + 2B_{ij}^N d_{j(0)}^e \right) + \tau_0 B_i^T \right\} dV \\ K_{ij}^{(L)e} &= \int \int \int_V \left(E_t B_i B_j + G B_i^T B_j^T \right) dV \\ K_{ij}^{(G)e} &= 2 \int \int \int_V \sigma_0 B_{ij}^N dV \\ K_{ij}^{(N)e} &= \int \int \int_V E_t \left(2B_i B_{jk}^N d_{k(0)}^e + 2B_j B_{ik}^N d_{k(0)}^e + 4B_{ik}^N B_{jl}^N d_{k(0)}^e d_{l(0)}^e \right) dV \end{aligned}$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

Newmark の β 法によれば、

$$\begin{aligned} d_i^e &= d_{i(0)}^e + \dot{d}_{i(0)}^e \Delta t + \left(\frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{d}_{i(0)}^e \Delta t^2 + \beta \ddot{d}_i^e \Delta t^2 \\ \dot{d}_i^e &= \dot{d}_{i(0)}^e + \frac{1}{2} \left(\ddot{d}_{i(0)}^e + \ddot{d}_i^e \right) \Delta t \end{aligned} \quad (\text{E.18})$$

これらより、次式を得る。

$$\dot{d}_i^e = \frac{1}{2\beta\Delta t}\Delta d_i^e + \left(1 - \frac{1}{2\beta}\right)\dot{d}_{i(0)}^e + \left(1 - \frac{1}{4\beta}\right)\ddot{d}_{i(0)}^e\Delta t \quad (\text{E.19})$$

$$\ddot{d}_i^e = \frac{1}{\beta\Delta t^2}\left\{\Delta d_i^e - \dot{d}_{i(0)}^e\Delta t - \left(\frac{1}{2} - \beta\right)\ddot{d}_{i(0)}^e\Delta t^2\right\} \quad (\text{E.20})$$

$$\Delta\ddot{d}_i^e = \frac{1}{\beta\Delta t^2}\left(\Delta d_i^e - \dot{d}_{i(0)}^e\Delta t - \frac{1}{2}\ddot{d}_{i(0)}^e\Delta t^2\right) \quad (\text{E.21})$$

(E.21) 式を (E.17) 式に代入し、整理すると次のようになる。

$$\bar{K}_{ij}^e\Delta d_j^e = -M_{ij}^e\ddot{\zeta}_j^e + f_i^e - M_{ij}^e\ddot{d}_{j(0)}^e - Q_i^e + M_{ij}^e\left(\frac{1}{\beta\Delta t}\dot{d}_{j(0)}^e + \frac{1}{2\beta}\ddot{d}_{j(0)}^e\right) \quad (\text{E.22})$$

ここに、

$$\bar{K}_{ij}^e = \frac{1}{\beta\Delta t^2}M_{ij}^e + K_{ij}^e \quad (\text{E.23})$$

(E.22) 式に座標変換を施した上で全要素について重ね合わせ、これを解いて、 Δd_i^e を求める。

ただし、上記の予測子計算によって求められた値は、 $t_0 + \Delta t$ の時刻における運動方程式において残差を生じるので、この状態に基づいて更新された \bar{K}_{ij}^e 、 Q_i^e を用いて、次式による修正子計算を行う。

$$\bar{K}_{ij}^e\Delta\widehat{d}_j^e = -M_{ij}^e\ddot{\zeta}_j^e + f_i^e - M_{ij}^e\ddot{d}_{j(0)}^e - Q_i^e + M_{ij}^e\left(\frac{1}{\beta\Delta t}\dot{d}_{j(0)}^e + \frac{1}{2\beta}\ddot{d}_{j(0)}^e - \frac{1}{\beta\Delta t^2}\Delta\widehat{d}_j^e\right) \quad (\text{E.24})$$

ここに、 $\Delta\widehat{d}_i^e$ は、 Δt の間の変位の増分 Δd_i^e の修正量であり、 $\Delta\widetilde{d}_i^e$ は、(E.22) 式あるいは (E.24) 式に基づく前回までの計算で求められた Δd_i^e を表す。すなわち、 Δd_i^e は、

$$\Delta d_i^e \leftarrow \Delta\widetilde{d}_i^e + \Delta\widehat{d}_i^e \quad (\text{E.25})$$

のように更新される。これに基づいて、(E.9)、(E.19)、(E.20) 式より、時刻 $t_0 + \Delta t$ の変位、速度、加速度を得る。(E.24) 式の右辺の残差項が十分小さくなるまで、時間ステップ内で上記の計算を繰り返す。なお、静的荷重 f_i^e が存在するときには、非線形 1 質点系モデルの場合と同様に、この荷重値に対する静的解析により求められる状態を初期値として、応答解析を行う。

