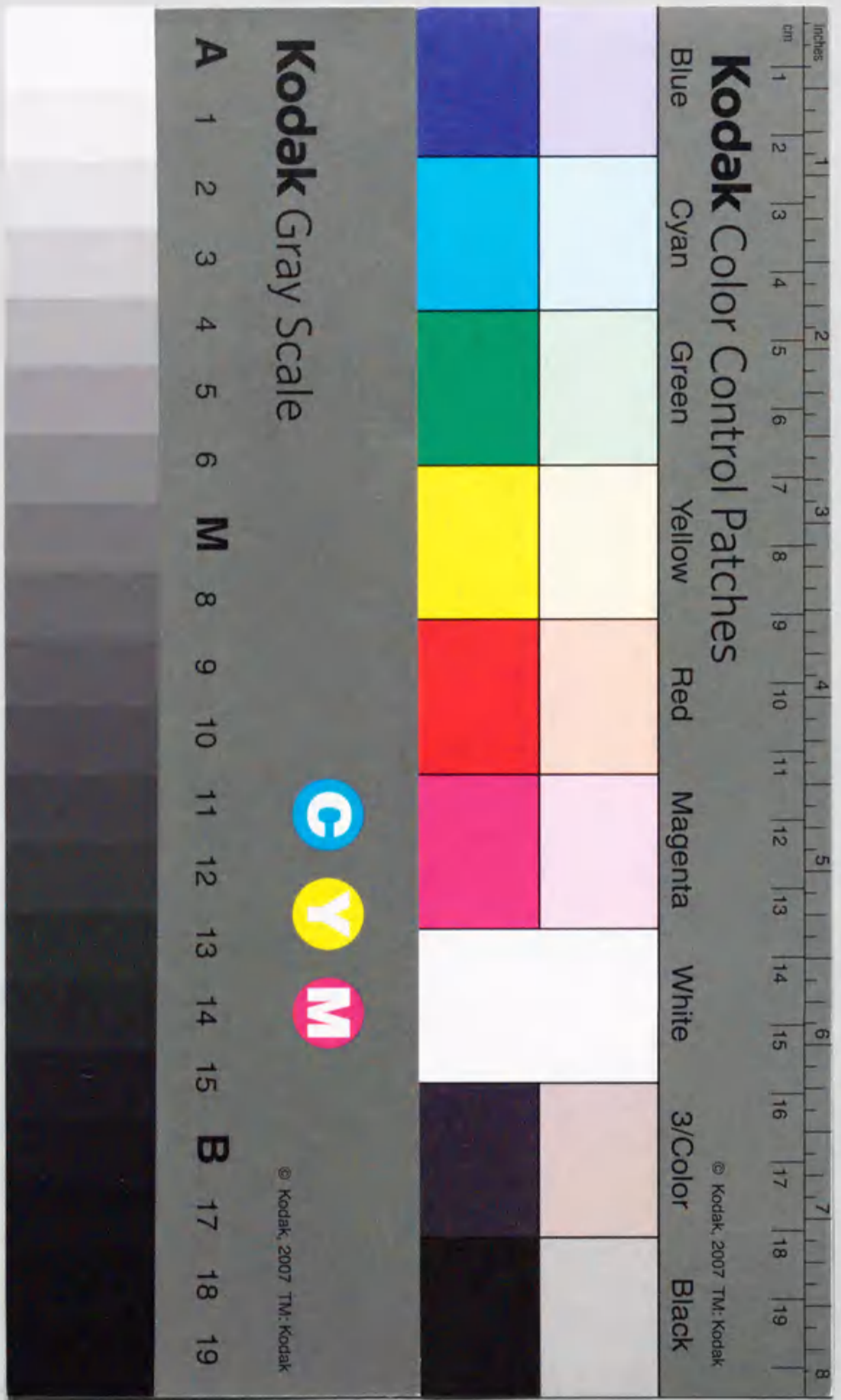


報告番号 4297 号

弾塑性分岐解析による固体の
くびれ・せん断帯挙動に関する研究

岡澤重信



①

弾塑性分岐解析による固体の
くびれ・せん断帯挙動に関する研究

岡澤重信

目 次

第1章 序論	1
1.1 緒言	2
1.2 従来の研究	3
1.3 本研究の目的及び概要	8
第2章 Updated Lagrangian 法による有限要素法定式化	10
2.1 緒言	11
2.2 仮想仕事の原理	11
2.2.1 仮想仕事の増分分解	11
2.2.2 接線剛性方程式の誘導	14
2.3 形状関数による離散化	16
2.4 アイソパラメトリック要素	21
2.5 選択型低減積分	25
2.6 結語	27
第3章 弾塑性構成方程式	28
3.1 緒言	29
3.2 古典的弾塑性理論	29
3.3 客観応力速度	36
3.4 大ひずみ問題における弾塑性構成方程式	46
3.5 結語	51
第4章 つり合い経路の追跡法	52
4.1 緒言	53
4.2 弧長法	53
4.2.1 弧長制御法	53
4.2.2 追跡方向の決定	55
4.3 応力積分法	58
4.3.1 陽解法(前進型積分)	58
4.3.2 陰解法(後退型積分)	60
4.3.3 Consistent 接線剛性	62
4.3.4 応力積分経路	66
4.3.5 除荷の取り扱い	67
4.4 結語	68

第5章 弾塑性分岐条件	69
5.1 緒言	70
5.2 Hill の分岐条件と通常分岐条件との等価性	70
5.3 安定性の判別	74
5.4 特異点の分類	77
5.5 結語	80
第6章 弾塑性分岐解析法	81
6.1 緒言	82
6.2 接線剛性マトリクス固有ペアの数理	82
6.2.1 正則剛性方程式の解	82
6.2.2 修正剛性方程式の解	83
6.2.3 特異剛性方程式の解	84
6.3 分岐方向の予測	85
6.4 Scaled Corrector による近似固有ベクトルの導出	87
6.5 固有ベクトルのスケールリングの決定方法	89
6.6 結語	91
第7章 2次元及び3次元状態における塑性不安定解析	92
7.1 緒言	93
7.2 2次元状態における塑性不安定解析	93
7.3 3次元状態における塑性不安定解析	105
7.4 結語	167
第8章 結論	169
参考文献	173
付録. 1 要素レベルでの接線剛性マトリクス k と内力ベクトル(等価節点力ベクトル) r	187
付録. 2 弧長制御法の計算手順	188
付録. 3 応力積分の計算手順	190
付録. 4 弾塑性分岐解析手順	192
付録. 5 トラス構造系の弾塑性分岐解析	193
発表論文	196
謝辞	199

第1章

序論

1.1 緒言

引張荷重が作用して塑性域に達した鋼材は、さらに荷重を増加させることによって荷重極大点が発生する。そしてその直後に断面の一部のみが急激な減少を示すいわゆるくびれが始まり、鋼材の極めて狭い部分にひずみが集中することによってやがて破断に至る。鋼材に限らず、一般的な金属材料のこのような挙動は塑性不安定現象として知られている。

塑性不安定という言葉の意味は漠然としすぎているように思われるが、本来は重力場の不安定概念より誕生したもので、復元力がないことを意味する。ゆえに塑性変形状態においては、変位増加の抑制力が効かなくなること示している[H4]。もし何らかの理由で固体物体の一部のみが塑性不安定条件を満足したとすると、その部分だけの変形は抑制力が効かず進行し、抑制力のある他の部分の変形は進行が止まる。このように一部の領域のみで変形が進行するという状況が、引張荷重下における金属材料で観察されるくびれ現象に概念的には合致している[H4]。しかしながら塑性不安定現象に対して上記のような解釈を与えたとしても、これらの解釈はあまりにも抽象的すぎて、現象を力学的に解明するまでには至っていない。例えば、塑性不安定発生後の変形状態や、くびれの発生箇所などを説明することは不可能であることがあげられる[H10]。

実際の塑性不安定現象においては、まず幅方向のくびれが金属片全体になだらかに発生する。このようなくびれは拡散くびれと呼ばれ、塑性不安定現象の初期の段階において共通して見られる挙動である。しかし、この拡散くびれだけでは金属片は破壊に至らず、拡散くびれの後に金属片の長手方向とは垂直に板厚方向に狭い領域がくびれる局所くびれ、もしくは引張り方向とは斜めに×状のせん断帯が発生する。これらの局所くびれ、せん断帯は拡散くびれの次の段階に発生する挙動で、金属片の終局的な破断形態を決定づけるものである。局所くびれ、もしくはせん断帯領域に塑性変形が集中することによって、その箇所のみの変形が進むいわゆる局所化現象により、金属片は破断する。

このような塑性不安定現象は、ひずみの局所化などの材料不安定挙動ひいては構造不安定挙動を引き起こす根本的な原因となる。よってこの塑性不安定現象を詳細に解明することは、鋼材をはじめとする金属材料の終局的挙動の把握や、構造物の安全性の検討または合理的設計においても必要不可欠である。

1.2 従来の研究

塑性不安定現象に関して、まず引張荷重下において荷重極大点が発生することに関心が持たれた。引張荷重下の金属片においては材料が塑性域に達した後、さらに荷重を増加させることによって図 1.1 のように荷重極大点が発生し、その直後に拡散くびれが出現し始める。その後、局所くびれやせん断帯などによって塑性変形の局所化が著しくなり、やがて金属片は破断に至る。荷重極大点を越えた後でも拡散くびれが発生するまでのしばらくの間、金属片の変形は均一である。この問題について力学的な解釈を始めて与えたのが Swift[S9]であろう。以下に Swift による塑性不安定理論について概説する。

今、材料内の応力(真応力)を σ 、断面積を A として、外力荷重 P により、以下のように内力と外力が平衡状態になっているとする。

$$\sigma A = P \quad (1.2.1)$$

引張力が増加するにつれて金属片は伸び、それに伴って金属片の断面積 A が減少する。また金属片は、ひずみ硬化域においてひずみが増加するにつれて硬化率は低下してくる[U2]。そして断面積 A の減少に内部応力 σ の増加が追いつけなくなると、たとえ硬化型の構成方程式であったとしても内力としての σA が減少を始める。それに伴って平衡状態を保つために外力荷重 P も減少する。よって応力-ひずみ関係が硬化型、つまり応力が増加し続けている状態において、金属がくびれる前の均一変形状態でさえも、荷重極大点が発生し荷重が減少する。この現象は断面積の変化を考慮に入れることによりはじめて説明できるものであり、一種の幾何学的非線形現象であって決して材料的な軟化挙動ではない。つまり、このような荷重の減少を有限要素解析において再現するためには、断面積の変化を考慮するために大ひずみの取り扱いが必要不可欠である。微小ひずみのはり要素などを用いたとしても均一変形での荷重の減少はシミュレートできない。また、硬化型の構成方程式でも硬化率が徐々に低下する必要性があり、Bi-linear などの構成式を用いた場合においても荷重の減少をシミュレートできない。

このように Swift は金属材料における1軸状態での応力とひずみを用いることにより、引張力が作用する金属材料の変形が均一状態で、なおかつ応力-ひずみ関係が硬化型であったとしても荷重極大点が発生し得ることを理論的に示した。しかしながらこの Swift の塑性不安定理論では、引張荷重が作用する金属材料において荷重極大点が発生する理由ではあっても、くびれが発生する根拠を明確に説明しているとは言い難い[H4]。さらにくびれの形態や、その後の金属材料が破断に至るまでの終局的な挙動の説明は全くできない。

そこでこのくびれを荷重極大点後の分岐現象として捉えた上で、その不安定挙動を解明する研究が行われるようになった[P2][11][Y3][H7][H11][W7]。その概念図を示したのが図1,2である。つまり主経路においては荷重極大点を越えた後の分岐点以降も金属片は均一変形のまま伸び続け、分岐経路に乗り移ることによって拡散くびれが始まり、さらにその分岐経路を追跡することによって、次の段階の局所くびれやせん断帯などの終局的な局所化現象をシミュレートできると解釈するものである。

分岐に関する研究は応用力学における古くからの課題の1つであり、工学において遭遇する様々な分岐現象も当初は応用数学における研究対象であった[M10]。そして微分方程式などの数学理論としての分岐理論は1950年代に体系化されているものの、これらの理論の工学分野への応用は乏しいものである。構造工学における分岐理論はKoiter[K4]やBritvec[B7]、Thompson/Hunt[T3]らによって一般安定理論として確立された。しかし、この理論において必要となる分岐方程式の高次項の評価は有限要素解析コードでは極めて困難で、仮に何らかの方法で分岐方程式を導いたとしても、非線形となる分岐方程式を実際にどう解くかという壁に突き当たるなど非現実的な側面も見受けられる[O2]。また、弾塑性材料での平衡解は経路依存型であり、全ポテンシャルエネルギーを定義することはできない。よって全ポテンシャルエネルギーの停留条件に起因する上記の一般安定理論は、弾性問題に用いることはできても弾塑性の場合において適用することは不可能である[O6]。

ここ最近の計算機環境と非線形有限要素法[C2][N12]の急速な進歩によって、工学分野において遭遇する分岐現象を、汎用的に解くことのできる計算力学的な手法[Y5]が可能になってきた。細野[H8][H9]による弧長法を用いた分岐解析法は、その先駆的な役割を果たしたと言えるであろう。そして、Wriggersら[W4][W9]によって発表されたExtended Systemによって、これまで妥協的であった分岐点の位置の精算が効率よく実行できるようになった。また静的問題に限らず動的安定問題[H12][R5]や、分岐点の絡む感度解析[N13][N14][N15][K11]などの研究もすでに多くなされている。また計算力学的な分岐解析法の研究が進む一方で、池田ら[I3][I4]は群論的なアプローチで群対称性に起因する多重分岐現象についての理論展開を行っている。このように高度な計算戦略が要求される分岐解析でも、弾性問題においてはその解析技術は整ってきている。

しかしながら弾塑性問題となると状況は一変する。弾塑性分岐挙動は弾性問題のそれに比べて遥かに複雑なものとなる。有限要素分岐解析における分岐条件は、弾性問題においてはその条件が確立されており、後はその点をいかに効率よく精算するかが問題になるのみである[F7][F8][F9][F10][F11][F12][O2][O4][W4][W9]。それに対して、弾塑性問題の安

定・不安定の議論は、材料レベル(有限要素法でいうサンプリング点レベル)において数多くなされている[B8]。その結果、材料不安定問題という研究領域を生み出し、弾性問題における構造不安定問題とは違った研究分野であるといった感がある。材料不安定問題と構造不安定問題の橋渡し役を果たすのが、Hill[H7]の分岐条件である。Hillによって提案された分岐条件により、有限要素解析による材料不安定問題の取り扱いが可能となった。このHillの条件を用いた分岐解析による塑性不安定解析がNeedleman[N9][N10]により行われている。また同様にHillの条件による塑性域での分岐解析を用いた構造における局所化現象に関する研究は、後藤ら[G4][G5][G6][G7][G8]により数多くなされている。しかしHillの分岐条件式を実際の有限要素解析にどう応用するかを示した研究[G2][G3]は極めて少ないのが現状であり、Hillの分岐条件以後は新たな弾塑性分岐条件式は提案されていない。

そのため、これまでの多くの弾塑性分岐に関する研究は、ただ単に初期不整を有する不完全系の分岐点の消滅したつり合い経路を追跡することによって代用されてきた。そうすることによって、負荷・除荷の評価を的確に行いさえすれば、擬似的な弾塑性分岐解析が可能となる。確かに実際の系は何らかの初期不整を有し、その結果分岐点は消滅して荷重極限点となり、完全系の分岐経路にすり寄ったつり合い経路になる場合が多い。しかし、このことが直ちに完全系の計算が不要であるという理由にはなり得ない。なぜなら一般に初期不整モードとして採用される原点における接線剛性マトリクスを最小固有値に対応する固有モードが、実際の分岐モードに一致するとは限らないからである[S11]。さらにある特定モードの初期不整の結果から他のモードの初期不整に対する結果を予測することは、完全系を解かない限りは不可能である。よって完全系における分岐解析を行い、その分岐挙動を把握した後で、不完全系の挙動について議論するのが正しい手順であると筆者は考える[O2]。

塑性不安定現象を完全系からの分岐として実際に有限要素解析を用いて計算した研究例[W7]は少なく、最初から幾何学的な初期不整を混入させて、分岐解析を行うことなく塑性不安定解析[T4][Z3]を行っている場合がほとんどである。また、初期不整を混入させなくても、端部固定[K9][K10]としたものは変形が進むにつれて初期不整が混入してくるという点で状況は同じである。

完全系・不完全系の違いはあれ、塑性不安定現象における研究はNeedleman[N9][N10]、富田[T1]、北川[K5][K6][K7][K8]、渡部[T4]らをはじめとする多くの研究者[P2][S6][S12][N11][B9][M4][M1][Z3][S7]によって精力的に行われてきた。また、日本塑性加工学会の塑性力学分科会においては、平面ひずみ引張り、軸対称引張り、平面応力引張りの塑性不安定解析のベンチマークテストを行い、そこでは数多くの研究機関、研究者から寄せられた

解析結果の比較がなされている[K9][K10]. その結果, 金属材料の弾塑性構成方程式として広く用いられている von Mises の降伏関数を塑性ポテンシャルとして採用する関連流れ則, いわゆる J_2 流れ則(硬化型)では, 塑性不安定現象としてのくびれの初期段階である拡散くびれをシミュレートすることはできても, その後の金属片の破断に直接的に結びつくような局所くびれやせん断帯には到達できないという認識が一般的である[B10][C8][I5][T4]. よって拡散くびれのあとに続く金属破断の直接的な原因となる挙動をシミュレートするために, 通常の流れ理論ではなく, 変形理論による様々な特殊な弾塑性構成方程式や, 本来は硬化型構成方程式であるはずの金属材料に対して, 軟化型構成方程式が用いられてきたという経緯がある[B10][S8][C8][G11][I5][T4][Z3].

しかし, 硬化型の J_2 流れ則においてくびれの初期段階の拡散くびれしかシミュレートできないことを検証した計算では, ほとんどが平面ひずみ状態を仮定した2次元解析[I5]が行われており, 3次元解析でこのことを検証した例は筆者の知る限りでは存在しない. 2次元解析の結果のみで, 硬化型の J_2 流れ則では塑性不安定現象の終局的挙動は再現できないと結論づけ[B10][C8][I5][T4], 特殊な構成方程式や軟化型構成方程式[B10][S8][C8][G11][I5][T4][Z3]を用いることには多いに疑問が残るところである.

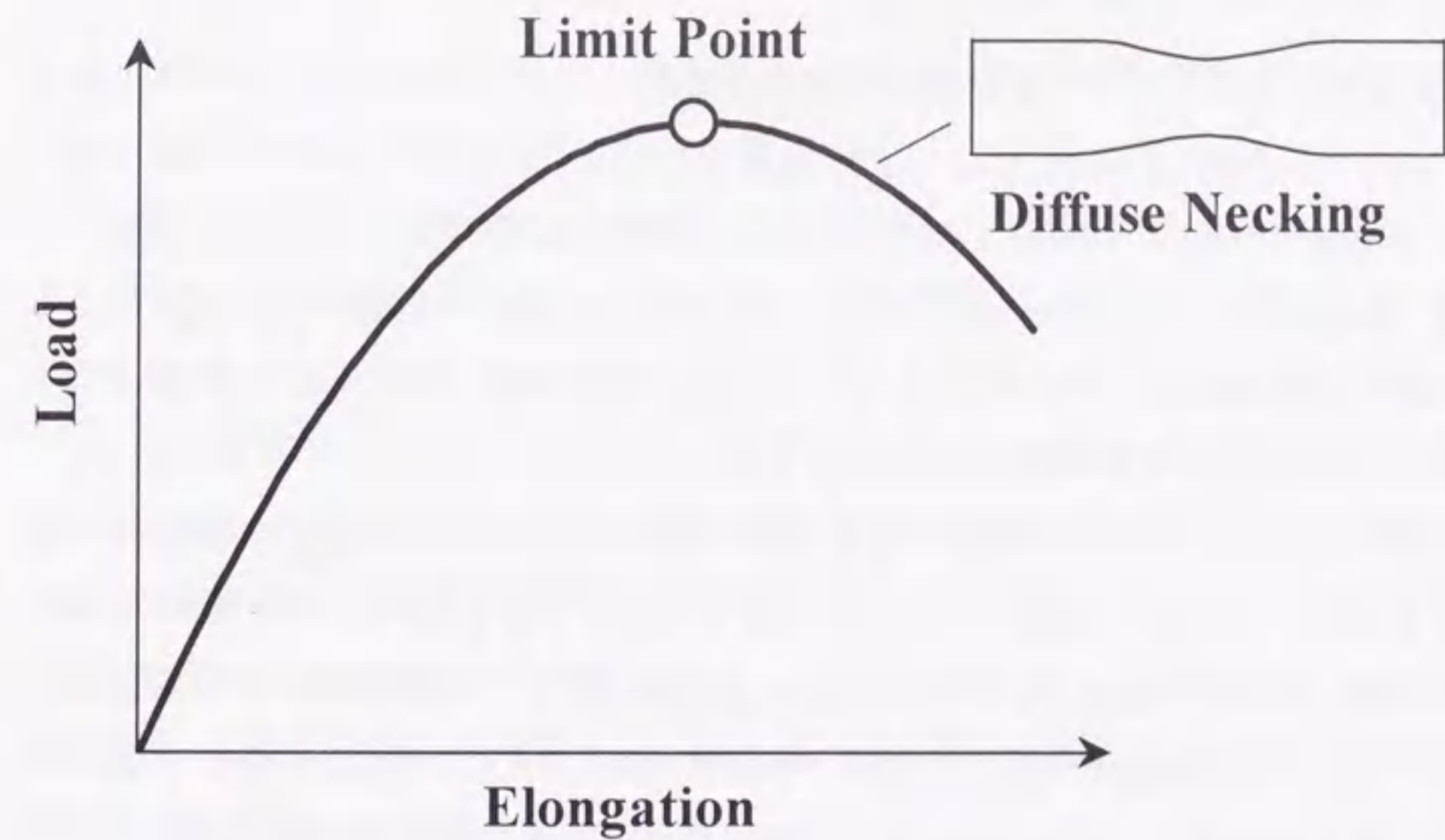


図 1.1 荷重極大点と拡散くびれ

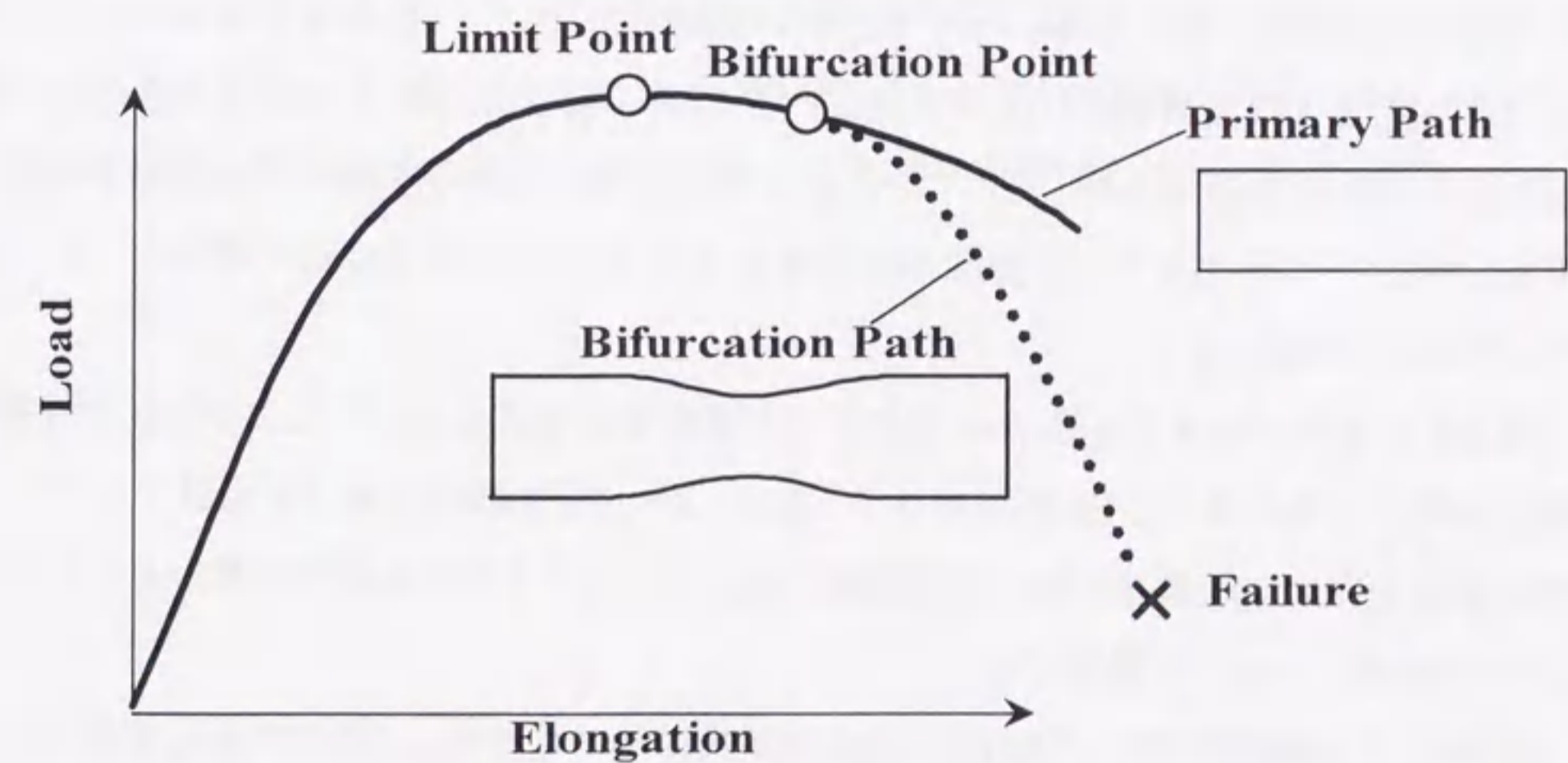


図 1.2 分岐問題としての塑性不安定現象

1.3 本研究の目的及び概要

2次元状態における塑性不安定解析に関する研究に比べて、3次元解析の研究例[T4][Z3]は極めて少ないのが実状である。しかし金属片に限らず固体物体というものは基本的には3次元状態であり、その形状が不安定挙動に及ぼす影響はかなり大きいと思われる[12][16]。硬化型の J_2 流れ則によって塑性不安定現象の終局的挙動を再現できるか否かを論ずるのは2次元解析だけでは不十分であり、金属材料の幾何学的な形状を考慮した3次元解析によって検証するのが妥当であると考えられる。

本研究の目的は、弾塑性有限要素解析手法について述べるとともに、分岐問題としての塑性不安定解析のための弾塑性分岐条件及びその解析手法を提案し、硬化型の J_2 流れ則のみを用いた3次元塑性不安定解析によって実際の塑性不安定現象の終局挙動をシミュレートできるか否かを確認することである。本研究では、一貫して完全系からの分岐としての塑性不安定解析を行うことにする。ゆえに幾何形状を忠実に再現した3次元塑性不安定解析において金属材料として一般的な構成方程式を用いて、有限要素分岐解析だけで、局所くびれやせん断帯などの終局的な破壊状態にどこまで近づけるかを検証することが本研究の最終的な目的である。

本論文は全部で8章から成り、まず第2章から第4章までは、一般的な大変位大ひずみにおける弾塑性有限要素解析のための定式化及びその解析方法について述べる。そして第5章以降は弾塑性分岐条件、そしてその分岐条件を踏まえた分岐解析手法を新たに提案すると共に、その手法を用いて塑性不安定解析を行う。以下に本章以降の概要について述べ、本論文の序論とする。

第2章では Updated Lagrangian 法による有限要素法定式化を行う。ここでは仮想仕事の増分分解式を得た後に、これを線形化することによって接線剛性方程式を誘導する。そして、形状関数を用いて離散化された接線剛性方程式を示す。さらに本研究で用いるアインパラメトリック要素についても概説する。

第3章では本研究で用いる弾塑性構成方程式について述べる。塑性不安定解析では大ひずみの取り扱いが必要不可欠となるため、本章では微小ひずみ理論における弾塑性構成方程式について概説した後に、それを大ひずみ問題においても有効となるように理論の拡張を行い、 J_2 流れ則を誘導する。上記で述べたように本研究では塑性不安定解析のための特殊な構成方程式を用いるのではなく、金属材料においては一般に広く用いられる J_2 流れ則のみを用いることにする。

第4章では第2章及び3章で定式化した弾塑性有限要素法の非線形解法について述べる。まず非線形となるつり合い経路の解法として、弧長制御法を追跡方向の効率的な決定方法と共に説明する。また大ひずみ状態における弾塑性材料の応力積分についても詳細に述べることにする。

第5章においては、弾塑性分岐条件について述べる。弾塑性分岐条件として確立されている Hill[H7]の分岐条件式の意味しているところを明確にした上で、本研究における塑性不安定解析において実際の弾塑性分岐条件をどのように与えたらよいかを検討する。

第6章では第5章の弾塑性分岐条件を踏まえて、有限要素解析において実用的な弾塑性分岐解析法を提案する。ここでは分岐解析において必要となるクリティカルな固有ベクトルを、固有値解析を行わずにこの近似値を求める方法も提案する。そしてこの近似固有ベクトルを用いて、分岐経路へアクセスする方法について述べる。この方法を用いれば分岐解析においても固有値解析が不要となり、特に細かな要素分割が要求される塑性不安定解析においては有効な手段となる。

第7章では第2章から6章までに述べてきた手法を用いて、2次元及び3次元状態における塑性不安定解析を行う。2次元解析では平面ひずみ状態と平面応力状態の両方を扱うものとする。3次元解析では試験片の幅と厚さの比率(幅厚比)の異なる数種類の試験片における塑性不安定解析を行う。そしてこの3次元解析によって、塑性不安定現象における終局的な挙動を硬化型の J_2 流れ則のみによって再現できるか否かを検証する。

第8章では、第7章までの結果をまとめると共に本研究の総括を行う。

第2章

Updated Lagrangian 法による 有限要素法定式化

2.1 緒言

本章では幾何学的非線形問題を解くための有限要素法定式化を行う。幾何学的非線形問題を解くための定式化としては、大きく分けて Total Lagrangian 法と Updated Lagrangian 法とに分類される[B1]。これはある段階までの力学挙動が解析済みで、次の段階の挙動を求める際に、参照する配置の選択による違いである。初期配置を参照配置とする方法が Total Lagrangian 法であり、現配置を参照配置とする方法が Updated Lagrangian 法である。本研究では弾塑性材料を取り扱うが、弾塑性構成方程式は刻々と変化する現配置を基準として記述されるため、有限要素解析を行うためには Updated Lagrangian 法を用いるのが都合がよい[H1]。そこで本研究では有限要素定式化において Updated Lagrangian 法を採用する。

まず最初に仮想仕事の原理を用いて、仮想仕事の増分分解式を誘導した後に、この増分分解式を線形化することによって接線剛性方程式を得る。次に有限要素解析が可能となるように、一般的な形状関数を用いることによって、初期変位マトリクスと幾何剛性マトリクスから成る接線剛性マトリクス、さらには内力ベクトル(等価節点力ベクトル)と外力ベクトルを得て、最終的に要素レベルにおいて離散化された接線剛性方程式を示す。そして本研究で用いるアイソパラメトリック要素についても概説する。また離散化された接線剛性マトリクスや内力ベクトル(等価節点力ベクトル)を実際に求める際には、積分操作が必要になる。いくつかの限られた簡潔な有限要素においては解析的な積分が可能であるが[W2]、ほとんどの場合は解析的な積分は不可能であり数値積分に頼ることになる。この数値積分においてはロッキング現象に注意を払う必要があるが、本研究で扱うような塑性不安定解析において注意すべきロッキング現象と、その解決方法についても触れることにする。

2.2 仮想仕事の原理

2.2.1 仮想仕事の増分分解

任意の時刻における仮想仕事式は、微小ひずみテンソルを \mathbf{e} 、Cauchy 応力テンソル \mathbf{T} 、そして δ 、 δR をそれぞれ仮想仕事に起因する変分、外力のなす仮想仕事とすると、次のように表される。

$$\int_V \mathbf{T} : \delta \mathbf{e} \, dv = \delta R \quad (2.2.1)$$

ここで v は任意時刻における物体の体積である. 式(2.2.1)の仮想仕事式で登場する Cauchy 応力テンソル \mathbf{T} は, その量が生じる時刻と参照時刻が同じである. そのため未知の力学的挙動を求めるために未知の配置を参照時刻としなくてはならないため, 有限要素解析では効率が悪い. そこで Cauchy 応力テンソルの代わりにその量が生じる時刻と参照時刻が異なる第2Piola-Kirchhoff 応力テンソル \mathbf{S} を用いて, 式(2.2.1)の仮想仕事式を書き直すことを考える. この第2Piola-Kirchhoff 応力テンソル \mathbf{S} を用いることによって, 未知の配置における仮想仕事式を考える際に, 既知の配置を参照時刻として選択することができる. よって効率的に有限要素解析を行うことが可能である.

Green-Lagrange ひずみテンソル \mathbf{E} の速度 $\dot{\mathbf{E}}$ とストレッチングテンソル \mathbf{D} との関係は, 変形勾配テンソル \mathbf{F} を用いて, 次のようである.

$$\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{F} \quad (2.2.2)$$

以後, 上付きの \cdot は速度を意味する.

今, 時間変分 δt により $\mathbf{D}\delta t = \delta \mathbf{e}$, $\dot{\mathbf{E}}\delta t = \delta \mathbf{E}$ の関係[N1]を用いれば, 式(2.2.2)より,

$$\delta \mathbf{E} = \mathbf{F}^T \cdot \delta \mathbf{e} \cdot \mathbf{F} \quad (2.2.3)$$

$$\delta \mathbf{e} = \mathbf{F}^{-T} \cdot \delta \mathbf{E} \cdot \mathbf{F}^{-1} \quad (2.2.4)$$

式(2.2.4)を式(2.2.1)に代入して, 以下のように整理できる.

$$\begin{aligned} \int_v \mathbf{T} : \delta \mathbf{e} dv &= \int_v \mathbf{T} : (\mathbf{F}^{-T} \cdot \delta \mathbf{E} \cdot \mathbf{F}^{-1}) dv \\ &= \int_v \text{tr}(\mathbf{T} \cdot \mathbf{F}^{-T} \cdot \delta \mathbf{E} \cdot \mathbf{F}^{-1}) dv \\ &= \int_v \text{tr}(\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{F}^{-T} \cdot \delta \mathbf{E}) dv \\ &= \int_v \text{tr}\left(\frac{1}{J} \mathbf{S} \cdot \delta \mathbf{E}\right) dv \\ &= \int_V \text{tr}(\mathbf{S} \cdot \delta \mathbf{E}) dV \\ &= \int_V \mathbf{S} : \delta \mathbf{E} dV \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

ここで, V は参照時刻における物体の体積である. ただし式(2.2.5)には以下の関係式を用いている.

$$\mathbf{T} = \frac{1}{J} \mathbf{F} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^T \quad (2.2.6)$$

また, J は V から v における体積変化率であり, 変形勾配テンソル \mathbf{F} により次のように表され

る.

$$J = \det \mathbf{F} \quad (2.2.7)$$

本研究では物体の配置を意味するものとして時刻という概念を導入する. 今, 時刻 t までの物体配置が解析済みで, 次に Δt 後の時刻 $t' = t + \Delta t$ での物体の配置を求めることを考える. 時刻 t' における仮想仕事式を用いるにあたっては, 時刻 0 の初期配置を参照する Total Lagrangian 法と, 時刻 t の現配置を参照する Updated Lagrangian 法が考えられる[B1]. 本研究では上記で述べたように構成方程式として刻々の現配置を基準とする弾塑性構成方程式を用いるため, それに効率的な後者の Updated Lagrangian 法を用いることにする[H1][M1].

以後, それぞれのテンソル量の左肩記号はその量を生じる時刻, 左下記号は参照時刻を表すものとする. また左肩に時刻のない諸量は時刻 t から t' までの増分を示すものとし, 左下記号がない場合には, その量が生じる時刻と参照時刻が同じであることを意味する[H1].

今, Updated Lagrangian 法で用いられる時刻 t' における仮想仕事式を考える. 式(2.2.5)より, 仮想仕事式は第2Piola-Kirchhoff 応力テンソル \mathbf{S} と Green Lagrange ひずみテンソル \mathbf{E} を用いて, 参照時刻を時刻 t にして次のように表される.

$$\int_{v'} {}_t' \mathbf{S} : \delta {}_t' \mathbf{E} d'v = {}_t' \delta R \quad (2.2.8)$$

ここで, 第2Piola-Kirchhoff 応力の定義より, ${}_t' \mathbf{S} = {}_t' \mathbf{T}$ であるから,

$$\begin{aligned} {}_t' \mathbf{S} &= {}_t' \mathbf{S}_+ + {}_t' \mathbf{S} \\ &= {}_t' \mathbf{T}_+ + {}_t' \mathbf{S} \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

また, ${}_t' \mathbf{E} = 0$ であることを考慮すると,

$$\begin{aligned} \delta {}_t' \mathbf{E} &= \delta ({}_t' \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}) \\ &= \delta {}_t' \mathbf{E} \\ &= \delta {}_t' \mathbf{E}_L + \delta {}_t' \mathbf{E}_{NL} \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

ここで \mathbf{E}_L , \mathbf{E}_{NL} はそれぞれ Green Lagrange ひずみテンソル \mathbf{E} の線形部分と非線形部分である.

式(2.2.9), (2.2.10)を式(2.2.8)に代入すると,

$$\int_v ({}^t\mathbf{T} + \mathbf{S}) : (\delta {}^t\mathbf{E}_L + \delta {}^t\mathbf{E}_{NL}) d^t v = {}^t\delta R \quad (2.2.11)$$

さらに式(2.2.11)を展開して整理すると, 式(2.2.12)に示すような Updated Lagrangian 法における仮想仕事の増分分解式が得られる.

$$\int_v {}^t\mathbf{S} : (\delta {}^t\mathbf{E}_L + \delta {}^t\mathbf{E}_{NL}) d^t v + \int_v {}^t\mathbf{T} : \delta {}^t\mathbf{E}_{NL} d^t v = {}^t\delta R - \int_v {}^t\mathbf{T} : \delta {}^t\mathbf{E}_L d^t v \quad (2.2.12)$$

ここで \mathbf{E}_L , \mathbf{E}_{NL} , $\delta \mathbf{E}_L$, $\delta \mathbf{E}_{NL}$ は位置ベクトル \mathbf{x} , 時刻 t から t' までの変位増分ベクトル \mathbf{u} を用いると, 次のように表すことができる.

$${}^t\mathbf{E}_L = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right) + \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \right\} \quad (2.2.13)$$

$${}^t\mathbf{E}_{NL} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right) \quad (2.2.14)$$

$$\delta {}^t\mathbf{E}_L = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right) + \left(\frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \right\} \quad (2.2.15)$$

$$\delta {}^t\mathbf{E}_{NL} = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right) + \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \cdot \left(\frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right) \right\} \quad (2.2.16)$$

2.2.2 接線剛性方程式の誘導

仮想仕事の増分分解式(2.2.12)の左辺を Δt で割って, $\Delta t \rightarrow 0$ として線形化することによって接線剛性を求めることができる.

$\Delta t \rightarrow 0$ により,

$$\mathbf{S} \rightarrow {}^t\dot{\mathbf{S}} \quad (2.2.17)$$

$$\mathbf{u} \rightarrow {}^t\dot{\mathbf{u}} \quad (2.2.18)$$

式(2.2.17)において ${}^t\dot{\mathbf{S}}$ は Truesdell の応力速度と呼ばれる[H2]. また式(2.2.18)より,

$$(\delta {}^t\mathbf{E}_{NL})^* = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \cdot \left(\frac{\partial {}^t\dot{\mathbf{u}}}{\partial \mathbf{x}} \right) + \left(\frac{\partial {}^t\dot{\mathbf{u}}}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \cdot \left(\frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right) \right\} \quad (2.2.19)$$

そして, 線形化によって $(\delta {}^t\mathbf{E}_L)^* = 0$ であることも容易に分かる.

式(2.2.12)の左辺は, $\mathbf{u} \rightarrow 0$ による線形化によって \mathbf{u} に関する2次以上の項 $\mathbf{S} : \delta {}^t\mathbf{E}_{NL}$ は無視できることに注意して[H1]

式(2.2.12)の左辺

$$\rightarrow \int_v {}^t\dot{\mathbf{S}} : \delta {}^t\mathbf{E}_L d^t v + \int_v {}^t\mathbf{T} : (\delta {}^t\mathbf{E}_{NL})^* d^t v \quad (2.2.20)$$

今, ${}^t\mathbf{u}$ が既知であるので, 式(2.2.21)が成立するとする.

$$\begin{aligned} \delta {}^t\mathbf{u} &= \delta ({}^t\mathbf{u} + \mathbf{u}) \\ &= \delta \mathbf{u} \end{aligned} \quad (2.2.21)$$

そして, ここで時刻 t と t' での平衡状態において同じ変位変分を想定する[H1]と,

$$\delta {}^t\mathbf{u} = \delta {}^t'\mathbf{u} \quad (2.2.22)$$

式(2.2.21)を考慮すると式(2.2.22)は次のようになる.

$$\delta {}^t\mathbf{u} = \delta \mathbf{u} \quad (2.2.23)$$

式(2.2.23)より,

$$\delta {}^t\mathbf{E}_L = \delta {}^t'\mathbf{E}_L \quad (2.2.24)$$

また, $(\delta {}^t'\mathbf{E}_L)^* = 0$ であるから,

$$(\delta {}^t\mathbf{E}_{NL})^* = (\delta {}^t'\mathbf{E})^* \quad (2.2.25)$$

ゆえに接線剛性方程式は式(2.2.12)と式(2.2.20)より,

$$\int_v {}^t\dot{\mathbf{S}} : \delta {}^t'\mathbf{E} d^t v + \int_v {}^t\mathbf{T} : (\delta {}^t'\mathbf{E})^* d^t v = {}^t\delta R - \int_v {}^t\mathbf{T} : \delta {}^t'\mathbf{E} d^t v \quad (2.2.26)$$

ここで, Truesdell 応力速度 ${}^t\dot{\mathbf{S}}$ が, 暫定的な4階の構成式テンソル ${}^t\mathbf{C}$ と ${}^t\dot{\mathbf{E}}$ で以下のように表されると仮定する. (正しい4階の構成式テンソルは後の章で述べる)

$${}^t\dot{\mathbf{S}} = {}^t\mathbf{C} : {}^t\dot{\mathbf{E}} \quad (2.2.27)$$

式(2.2.27)を式(2.2.26)に代入することによって, Updated Lagrangian 法における最終的な接線剛性方程式が以下のように得られる.

$$\int_v ({}^t\mathbf{C} : {}^t\dot{\mathbf{E}}) : \delta {}^t'\mathbf{E} d^t v + \int_v {}^t\mathbf{T} : (\delta {}^t'\mathbf{E})^* d^t v = {}^t\delta R - \int_v {}^t\mathbf{T} : \delta {}^t'\mathbf{E} d^t v \quad (2.2.28)$$

2.3 形状関数による離散化

ここでは一般的な形状関数を用いて、前節で誘導した接線剛性方程式を離散化する。そして n 節点要素の場合の接線剛性マトリクス、内力ベクトル(等価節点力ベクトル)、外力ベクトルをそれぞれ求め、最終的に離散化された要素レベルでの接線剛性方程式を誘導する。これ以降、離散化の際に用いる、テンソル・ベクトル成分を適当に並べたマトリクス・ベクトルはイタリック表示しない。このように本研究ではイタリック表示の有無により、これらの区別を行っている。

今、要素内の任意点での変位増分ベクトルを \mathbf{u} 、 n 節点要素の節点変位増分ベクトルを \mathbf{u} とする。

$$\mathbf{u}^T = (u, v, w) \quad (2.3.1)$$

$$\mathbf{u}^T = (u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, w_2, \dots, u_n, v_n, w_n) \quad (2.3.2)$$

そして、以下のような形状関数マトリクス \mathbf{N} を定義する。ここで ϕ_i は形状関数であり、用いる有限要素の種類により異なったものとなる[W2].

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & 0 & \phi_2 & 0 & 0 & \dots & \phi_n & 0 & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & 0 & \phi_2 & 0 & \dots & 0 & \phi_n & 0 \\ 0 & 0 & \phi_1 & 0 & 0 & \phi_2 & \dots & 0 & 0 & \phi_n \end{bmatrix} \quad (2.3.3)$$

今、形状関数マトリクス \mathbf{N} を用いて、 \mathbf{u} と \mathbf{u} を一般的に次のように関連づける。

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{u} \quad (2.3.4)$$

そして以下のようなマトリクス ${}^i\mathbf{B}_L$ を定義する。

$${}^i\dot{\mathbf{E}} = {}^i\mathbf{B}_L {}^i\dot{\mathbf{u}} \quad (2.3.5)$$

ここで、ベクトル ${}^i\dot{\mathbf{E}}$ は ${}^i\dot{\mathbf{E}}$ のテンソル成分により以下のように表される。

$${}^i\dot{\mathbf{E}}^T = ({}^i\dot{E}_{xx}, {}^i\dot{E}_{yy}, {}^i\dot{E}_{zz}, 2{}^i\dot{E}_{xy}, 2{}^i\dot{E}_{yz}, 2{}^i\dot{E}_{zx}) \quad (2.3.6)$$

そして ${}^i\mathbf{B}_L$ は、次のようになる。

$${}^i\mathbf{B}_L = \begin{bmatrix} \frac{\partial\phi_1}{\partial'x} & 0 & 0 & \frac{\partial\phi_2}{\partial'x} & 0 & 0 & \dots & \frac{\partial\phi_n}{\partial'x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial\phi_1}{\partial'y} & 0 & 0 & \frac{\partial\phi_2}{\partial'y} & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial\phi_n}{\partial'y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial\phi_1}{\partial'z} & 0 & 0 & \frac{\partial\phi_2}{\partial'z} & \dots & 0 & 0 & \frac{\partial\phi_n}{\partial'z} \\ \frac{\partial\phi_1}{\partial'y} & \frac{\partial\phi_1}{\partial'x} & 0 & \frac{\partial\phi_2}{\partial'y} & \frac{\partial\phi_2}{\partial'x} & 0 & \dots & \frac{\partial\phi_n}{\partial'y} & \frac{\partial\phi_n}{\partial'x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial\phi_1}{\partial'z} & \frac{\partial\phi_1}{\partial'y} & 0 & \frac{\partial\phi_2}{\partial'z} & \frac{\partial\phi_2}{\partial'y} & \dots & 0 & \frac{\partial\phi_n}{\partial'z} & \frac{\partial\phi_n}{\partial'y} \\ \frac{\partial\phi_1}{\partial'z} & 0 & \frac{\partial\phi_1}{\partial'x} & \frac{\partial\phi_2}{\partial'z} & 0 & \frac{\partial\phi_2}{\partial'x} & \dots & \frac{\partial\phi_n}{\partial'z} & 0 & \frac{\partial\phi_n}{\partial'x} \end{bmatrix} \quad (2.3.7)$$

また、次のようなマトリクス ${}^i\mathbf{B}_{NL}$ も同様に定義する。

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}} = {}^i\mathbf{B}_{NL} {}^i\dot{\mathbf{u}} \quad (2.3.8)$$

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^T = \left(\frac{\partial'u}{\partial'x}, \frac{\partial'u}{\partial'y}, \frac{\partial'u}{\partial'z}, \frac{\partial'v}{\partial'x}, \frac{\partial'v}{\partial'y}, \frac{\partial'v}{\partial'z}, \frac{\partial'w}{\partial'x}, \frac{\partial'w}{\partial'y}, \frac{\partial'w}{\partial'z} \right) \quad (2.3.9)$$

$${}^i\mathbf{B}_{NL} = \begin{bmatrix} \frac{\partial\phi_1}{\partial'x} & 0 & 0 & \frac{\partial\phi_2}{\partial'x} & 0 & 0 & \dots & \frac{\partial\phi_n}{\partial'x} & 0 & 0 \\ \frac{\partial\phi_1}{\partial'y} & 0 & 0 & \frac{\partial\phi_2}{\partial'y} & 0 & 0 & \dots & \frac{\partial\phi_n}{\partial'y} & 0 & 0 \\ \frac{\partial\phi_1}{\partial'z} & 0 & 0 & \frac{\partial\phi_2}{\partial'z} & 0 & 0 & \dots & \frac{\partial\phi_n}{\partial'z} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial\phi_1}{\partial'x} & 0 & 0 & \frac{\partial\phi_2}{\partial'x} & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial\phi_n}{\partial'x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial\phi_1}{\partial'y} & 0 & 0 & \frac{\partial\phi_2}{\partial'y} & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial\phi_n}{\partial'y} & 0 \\ 0 & \frac{\partial\phi_1}{\partial'z} & 0 & 0 & \frac{\partial\phi_2}{\partial'z} & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial\phi_n}{\partial'z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial\phi_1}{\partial'x} & 0 & 0 & \frac{\partial\phi_2}{\partial'x} & \dots & 0 & 0 & \frac{\partial\phi_n}{\partial'x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial\phi_1}{\partial'y} & 0 & 0 & \frac{\partial\phi_2}{\partial'y} & \dots & 0 & 0 & \frac{\partial\phi_n}{\partial'y} \\ 0 & 0 & \frac{\partial\phi_1}{\partial'z} & 0 & 0 & \frac{\partial\phi_2}{\partial'z} & \dots & 0 & 0 & \frac{\partial\phi_n}{\partial'z} \end{bmatrix} \quad (2.3.10)$$

ここで Green Lagrange ひずみテンソル速度 $\dot{\mathbf{E}}$ とストレッチングテンソル \mathbf{D} の関係を考える。

これらの関係は式(2.2.2)と同様に変形勾配テンソル \mathbf{F} を用いて以下のように表される。

$$\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{F} \quad (2.3.11)$$

式(2.2.28)で登場する ${}^i\dot{\mathbf{E}}$ を考えると、式(2.3.11)は次のようになる。

$$\begin{aligned} {}^i\dot{\mathbf{E}} &= {}^i\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{D} \cdot {}^i\mathbf{F} \\ &= \mathbf{I}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{I} \\ &= \mathbf{D} \end{aligned} \quad (2.3.12)$$

式(2.3.12)において、 \mathbf{I} は単位テンソルであり、以下の関係を用いている。

$${}^i\mathbf{F} = \mathbf{I} \quad (2.3.13)$$

よって ${}^i\dot{\mathbf{E}}$ と \mathbf{D} は等価である。

接線剛性方程式(2.2.28)の左辺から、離散化された接線剛性マトリクスを求めることができる。式(2.2.28)の左辺は式(2.2.19),(2.2.25),(2.3.12)を考慮すると以下のようになる。

$$\begin{aligned} & \int_{V'} ({}^i\mathbf{C} : \mathbf{D}) : \delta {}^i\mathbf{E} d'v + \int_{V'} {}^i\mathbf{T} : (\delta {}^i\mathbf{E})^* d'v \\ &= \int_{V'} ({}^i\mathbf{C} : \mathbf{D}) : \delta {}^i\mathbf{E} d'v + \int_{V'} {}^i\mathbf{T} : \left[\frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial'x} \right)^T \cdot \left(\frac{\partial' \dot{\mathbf{u}}}{\partial'x} \right) + \left(\frac{\partial' \dot{\mathbf{u}}}{\partial'x} \right)^T \cdot \left(\frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial'x} \right) \right\} \right] d'v \end{aligned} \quad (2.3.14)$$

先に式(2.3.7),(2.3.10)で定義した ${}^i\mathbf{B}_L$ マトリクス、 ${}^i\mathbf{B}_{NL}$ マトリクスによって式(2.3.14)は以下のように離散化される。

$$\begin{aligned} & \int_{V'} ({}^i\mathbf{C} : \mathbf{D}) : \delta {}^i\mathbf{E} d'v + \int_{V'} {}^i\mathbf{T} : \left[\frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial'x} \right)^T \cdot \left(\frac{\partial' \dot{\mathbf{u}}}{\partial'x} \right) + \left(\frac{\partial' \dot{\mathbf{u}}}{\partial'x} \right)^T \cdot \left(\frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial'x} \right) \right\} \right] d'v \\ &= \int_{V'} [{}^i\mathbf{C} ({}^i\mathbf{B}_L {}^i\dot{\mathbf{u}})]^T (\delta {}^i\mathbf{B}_L \mathbf{u}) d'v + \frac{1}{2} \int_{V'} \left[\{ {}^i\mathbf{T} (\delta {}^i\mathbf{B}_{NL} \mathbf{u}) \}^T ({}^i\mathbf{B}_{NL} {}^i\dot{\mathbf{u}}) + \{ {}^i\mathbf{T} ({}^i\mathbf{B}_{NL} {}^i\dot{\mathbf{u}}) \}^T (\delta {}^i\mathbf{B}_{NL} \mathbf{u}) \right] d'v \\ &= \int_{V'} [{}^i\mathbf{C} ({}^i\mathbf{B}_L {}^i\dot{\mathbf{u}})]^T ({}^i\mathbf{B}_L \delta \mathbf{u}) d'v + \frac{1}{2} \int_{V'} \left[\{ {}^i\mathbf{T} ({}^i\mathbf{B}_{NL} \delta \mathbf{u}) \}^T ({}^i\mathbf{B}_{NL} {}^i\dot{\mathbf{u}}) + \{ {}^i\mathbf{T} ({}^i\mathbf{B}_{NL} {}^i\dot{\mathbf{u}}) \}^T ({}^i\mathbf{B}_{NL} \delta \mathbf{u}) \right] d'v \\ &= \delta \mathbf{u}^T \left[\int_{V'} {}^i\mathbf{B}_L^T {}^i\mathbf{C} {}^i\mathbf{B}_L d'v + \int_{V'} {}^i\mathbf{B}_{NL}^T {}^i\mathbf{T} {}^i\mathbf{B}_{NL} d'v \right] {}^i\dot{\mathbf{u}} \\ &= \delta \mathbf{u}^T [{}^i\mathbf{k}_L + {}^i\mathbf{k}_{NL}] {}^i\dot{\mathbf{u}} \end{aligned} \quad (2.3.15)$$

${}^i\mathbf{k}_L$ は初期変位マトリクス、 ${}^i\mathbf{k}_{NL}$ は幾何剛性マトリクスであり、それぞれ次のように表示される。

$${}^i\mathbf{k}_L = \int_{V'} {}^i\mathbf{B}_L^T {}^i\mathbf{C} {}^i\mathbf{B}_L d'v \quad (2.3.16)$$

$${}^i\mathbf{k}_{NL} = \int_{V'} {}^i\mathbf{B}_{NL}^T {}^i\mathbf{T} {}^i\mathbf{B}_{NL} d'v \quad (2.3.17)$$

ここで、 ${}^i\mathbf{T}$ は次のようになる。

$${}^i\mathbf{T} = \begin{bmatrix} {}^iT_{xx} & {}^iT_{xy} & {}^iT_{xz} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ {}^iT_{yx} & {}^iT_{yy} & {}^iT_{yz} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ {}^iT_{zx} & {}^iT_{zy} & {}^iT_{zz} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & {}^iT_{xx} & {}^iT_{xy} & {}^iT_{xz} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & {}^iT_{yx} & {}^iT_{yy} & {}^iT_{yz} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & {}^iT_{zx} & {}^iT_{zy} & {}^iT_{zz} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & {}^iT_{xx} & {}^iT_{xy} & {}^iT_{xz} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & {}^iT_{yx} & {}^iT_{yy} & {}^iT_{yz} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & {}^iT_{zx} & {}^iT_{zy} & {}^iT_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.3.18)$$

また ${}^i\mathbf{C}$ は6行6列の構成式マトリクスで、計算対象となる材料によりそれぞれ違ったものが用いられる。

内力ベクトル(等価節点力ベクトル)は式(2.2.28)の右辺第2項から求めることができる。

$$\begin{aligned} \int_{V'} {}^i\mathbf{T} : \delta {}^i\mathbf{E} d'v &= \int_{V'} {}^i\mathbf{T}^T (\delta {}^i\mathbf{B}_L \mathbf{u}) d'v \\ &= \int_{V'} ({}^i\mathbf{B}_L \delta \mathbf{u})^T {}^i\mathbf{T} d'v \\ &= \int_{V'} \delta \mathbf{u}^T {}^i\mathbf{B}_L^T {}^i\mathbf{T} d'v \\ &= \delta \mathbf{u}^T \int_{V'} {}^i\mathbf{B}_L^T {}^i\mathbf{T} d'v \end{aligned} \quad (2.3.19)$$

ここで、

$${}^i\mathbf{T}^T = ({}^iT_{xx} \quad {}^iT_{yy} \quad {}^iT_{zz} \quad {}^iT_{xy} \quad {}^iT_{yz} \quad {}^iT_{zx}) \quad (2.3.20)$$

外力ベクトルは式(2.2.28)の右辺第1項から求められる。

$$\begin{aligned} {}^i\delta R &= \int_{S'} {}^i\mathbf{P}^T \delta \mathbf{u} d's \\ &= \int_{S'} {}^i\mathbf{P}^T (\mathbf{N} \delta \mathbf{u}) d's \\ &= \int_{S'} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{N}^T {}^i\mathbf{P} d's \\ &= \delta \mathbf{u}^T \int_{S'} \mathbf{N}^T {}^i\mathbf{P} d's \end{aligned} \quad (2.3.21)$$

${}^i\mathbf{P}$ は外力が作用する面積であり、 ${}^i\mathbf{P}$ は表面力ベクトルで次のように表示される。

$${}^i\mathbf{P}^T = ({}^iP_x \quad {}^iP_y \quad {}^iP_z) \quad (2.3.22)$$

式(2.3.15),(2.3.19),(2.3.21)より離散化された接線剛性方程式は、

$$({}^i\mathbf{k}_L + {}^i\mathbf{k}_{NL}) {}^i\dot{\mathbf{u}} = \int_V \mathbf{N}^T {}^i\mathbf{P} d^iV - \int_V {}^i\mathbf{B}_L^T {}^i\mathbf{T} d^iV \quad (2.3.23)$$

式(2.3.23)をさらに簡単にすると以下のようになる。

$${}^i\mathbf{k} {}^i\dot{\mathbf{u}} = {}^i\mathbf{p} \mathbf{f} - {}^i\mathbf{r} \quad (2.3.24)$$

初期変位マトリクス ${}^i\mathbf{k}_L$ と幾何剛性マトリクス ${}^i\mathbf{k}_{NL}$ を足し合わせた ${}^i\mathbf{k}$ が接線剛性マトリクスである。そして ${}^i\mathbf{p}$ は時刻 t' における荷重変数で、 \mathbf{f} は荷重モードベクトル、 ${}^i\mathbf{r}$ は内力ベクトル(等価節点力ベクトル)である。また、 ${}^i\dot{\mathbf{u}}$ は節点変位速度ベクトルである。

式(2.3.24)が要素レベルで離散化された接線剛性方程式である。そして系全体で接線剛性マトリクス、内力ベクトル等をアセンブルすることにより、系全体としての離散化された接線剛性方程式を以下のように得ることができる。

$${}^i\mathbf{K} {}^i\dot{\mathbf{U}} = {}^i\mathbf{P} \mathbf{e} - {}^i\mathbf{R} \quad (2.3.25)$$

ここで、 ${}^i\mathbf{P}$ は系全体としての時刻 t' における荷重変数で、 \mathbf{e} は系全体での荷重モードベクトルである。そして ${}^i\mathbf{R}$ は系全体での内力ベクトル(等価節点力ベクトル)である。式(2.3.25)から、時刻 t' における変位 ${}^i\mathbf{U}$ を求めるためには、以下のような Newton-Raphson 法による反復計算が必要になる[H1]。

$${}^i\mathbf{K}^{(i-1)} \Delta \mathbf{U}^{(i)} = {}^i\mathbf{P} \mathbf{e} - {}^i\mathbf{R}^{(i-1)} \quad (2.3.26)$$

$${}^i\mathbf{U}^{(i)} = {}^i\mathbf{U}^{(i-1)} + \Delta \mathbf{U}^{(i)} \quad (2.3.27)$$

ここで (i) は反復回数を意味しており、以下が成立する。

$${}^i\mathbf{K}^{(0)} = {}^i\mathbf{K} \quad (2.3.28)$$

$${}^i\mathbf{R}^{(0)} = {}^i\mathbf{R} \quad (2.3.29)$$

$${}^i\mathbf{U}^{(0)} = {}^i\mathbf{U} \quad (2.3.30)$$

2.4 アイソパラメトリック要素

本節では実用上重要なアイソパラメトリック要素について概説する[B4][H1][W2][Z1]。アイソパラメトリック要素は、有限要素解析における収束を保証するための条件を自動的に満たす形状関数を有しているため、信頼性に優れている[H1][H3][Z2]。形状関数を局所座標系 (ξ, η, ζ) で表し、座標変換を行うことによって、全体座標系 (x, y, z) での要素の力学的特性を求めることができる。ここで形状関数 ϕ_i は、一般に ξ, η, ζ の関数である。

$$\phi_i = \phi_i(\xi, \eta, \zeta) \quad (2.4.1)$$

今、要素内の変位増分ベクトル \mathbf{u} と同様に、要素内の任意点の座標 \mathbf{x} についても、形状関数マトリクス \mathbf{N}' を用いて、次のように関連づけるものとする。

$$\mathbf{x} = \mathbf{N}' \mathbf{x} \quad (2.4.2)$$

ただし任意点の座標 \mathbf{x} と n 節点要素の節点座標 \mathbf{x} を、以下のようにする。

$$\mathbf{x} = (x, y, z) \quad (2.4.3)$$

$$\mathbf{x} = (x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_n, y_n, z_n) \quad (2.4.4)$$

ここで、変位増分ベクトルの形状関数 \mathbf{N} と要素座標の形状関数 \mathbf{N}' が同じであるとする。

$$\mathbf{N} = \mathbf{N}' \quad (2.4.5)$$

式(2.4.5)が成立するとき、その要素をアイソパラメトリック要素という[Z1]。

以後、式(2.4.5)が成立することを前提とする。よって \mathbf{N}' も式(2.3.3)のように示される。次に局所座標から全体座標への座標変換について述べる。

偏微分公式より、

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial \xi} = \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \xi} \quad (2.4.6)$$

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial \eta} = \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \eta} \quad (2.4.7)$$

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial \zeta} = \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \zeta} + \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \zeta} + \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \zeta} \quad (2.4.8)$$

式(2.4.6)から式(2.4.8)をマトリクス表示すると、

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \phi_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \phi_i}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial' x}{\partial \xi} & \frac{\partial' y}{\partial \xi} & \frac{\partial' z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial' x}{\partial \eta} & \frac{\partial' y}{\partial \eta} & \frac{\partial' z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial' x}{\partial \zeta} & \frac{\partial' y}{\partial \zeta} & \frac{\partial' z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi_i}{\partial' x} \\ \frac{\partial \phi_i}{\partial' y} \\ \frac{\partial \phi_i}{\partial' z} \end{Bmatrix} \\ &= \mathbf{J} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi_i}{\partial' x} \\ \frac{\partial \phi_i}{\partial' y} \\ \frac{\partial \phi_i}{\partial' z} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (2.4.9)$$

ここで \mathbf{J} はヤコビアンマトリクスと呼ばれる。式(2.4.2)より、

$$'x = \phi_1 'x_1 + \phi_2 'x_2 + \dots + \phi_n 'x_n \quad (2.4.10)$$

$$'y = \phi_1 'y_1 + \phi_2 'y_2 + \dots + \phi_n 'y_n \quad (2.4.11)$$

$$'z = \phi_1 'z_1 + \phi_2 'z_2 + \dots + \phi_n 'z_n \quad (2.4.12)$$

式(2.4.10)から式(2.4.12)をそれぞれ (ξ, η, ζ) で偏微分することにより、ヤコビアンマトリクス \mathbf{J} は以下のように得られる。

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n \frac{\partial \phi_j}{\partial \xi} 'x_j & \sum_{j=1}^n \frac{\partial \phi_j}{\partial \xi} 'y_j & \sum_{j=1}^n \frac{\partial \phi_j}{\partial \xi} 'z_j \\ \sum_{j=1}^n \frac{\partial \phi_j}{\partial \eta} 'x_j & \sum_{j=1}^n \frac{\partial \phi_j}{\partial \eta} 'y_j & \sum_{j=1}^n \frac{\partial \phi_j}{\partial \eta} 'z_j \\ \sum_{j=1}^n \frac{\partial \phi_j}{\partial \zeta} 'x_j & \sum_{j=1}^n \frac{\partial \phi_j}{\partial \zeta} 'y_j & \sum_{j=1}^n \frac{\partial \phi_j}{\partial \zeta} 'z_j \end{bmatrix} \quad (2.4.13)$$

式(2.4.9)より、

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \phi_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \phi_i}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi_i}{\partial' x} \\ \frac{\partial \phi_i}{\partial' y} \\ \frac{\partial \phi_i}{\partial' z} \end{Bmatrix} \quad (2.4.14)$$

式(2.4.14)の左辺のそれぞれの値を用いることによって、 $'\mathbf{B}_L, ' \mathbf{B}_{NL}$ を評価することが可能である。

また有限要素法における積分操作は解析的にはほとんど不可能であり、通常数値積分を

用いる。アイソパラメトリック要素においては、全体座標系 (x, y, z) ではなく、局所座標系 (ξ, η, ζ) で数値積分を行い、それぞれの関数を $f(x, y, z), g(\xi, \eta, \zeta)$ とした場合、数値積分における変数変換は次のようである。ここでは数値積分法については割愛する。詳しくは文献[B4][H1][Z1]を参照されたい。

$$\iiint f(x, y, z) dx dy dz = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 g(\xi, \eta, \zeta) \det \mathbf{J} d\xi d\eta d\zeta \quad (2.4.15)$$

最後に本研究で用いるアイソパラメトリック要素の形状関数を列挙する。3次元解析においては図 2.1 のような1次の8節点要素を用いるものとして、その形状関数は3変数 ξ, η, ζ により、以下のようになる。

$$\phi_1 = \frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta) \quad (2.4.16)$$

$$\phi_2 = \frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(1-\zeta) \quad (2.4.17)$$

$$\phi_3 = \frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)(1-\zeta) \quad (2.4.18)$$

$$\phi_4 = \frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(1-\zeta) \quad (2.4.19)$$

$$\phi_5 = \frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1+\zeta) \quad (2.4.20)$$

$$\phi_6 = \frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(1+\zeta) \quad (2.4.21)$$

$$\phi_7 = \frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)(1+\zeta) \quad (2.4.22)$$

$$\phi_8 = \frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(1+\zeta) \quad (2.4.23)$$

また2次元解析では図 2.2 のような1次の4節点アイソパラメトリック要素を用いるものとし、その形状関数は2変数 ξ, η により、以下のようになる。

$$\phi_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \quad (2.4.24)$$

$$\phi_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \quad (2.4.25)$$

$$\phi_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \quad (2.4.26)$$

$$\phi_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \quad (2.4.27)$$

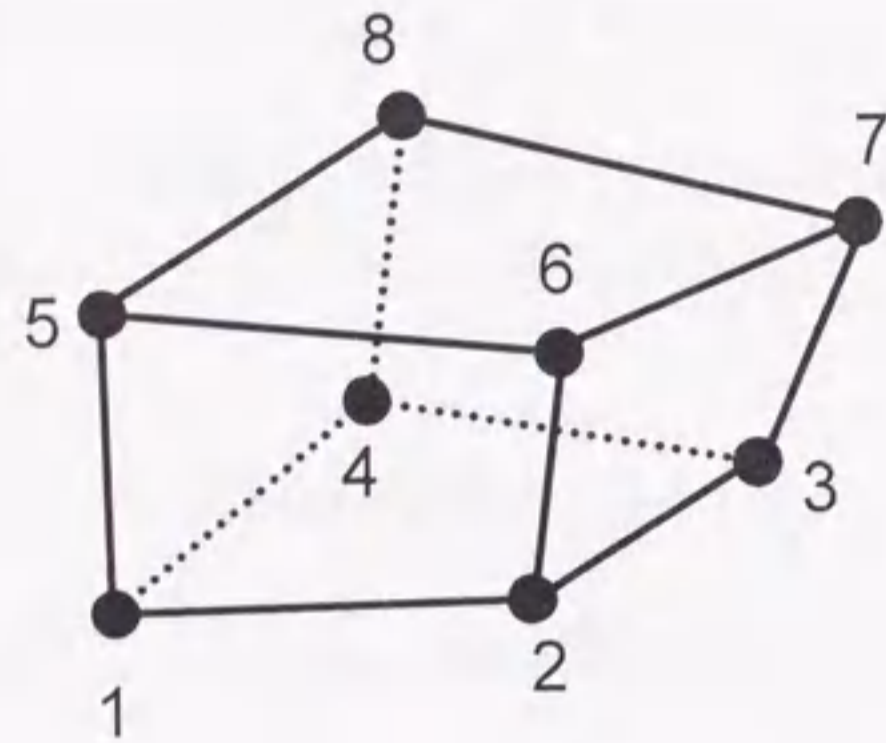


図 2.1 3次元8節点アイソパラメトリック要素

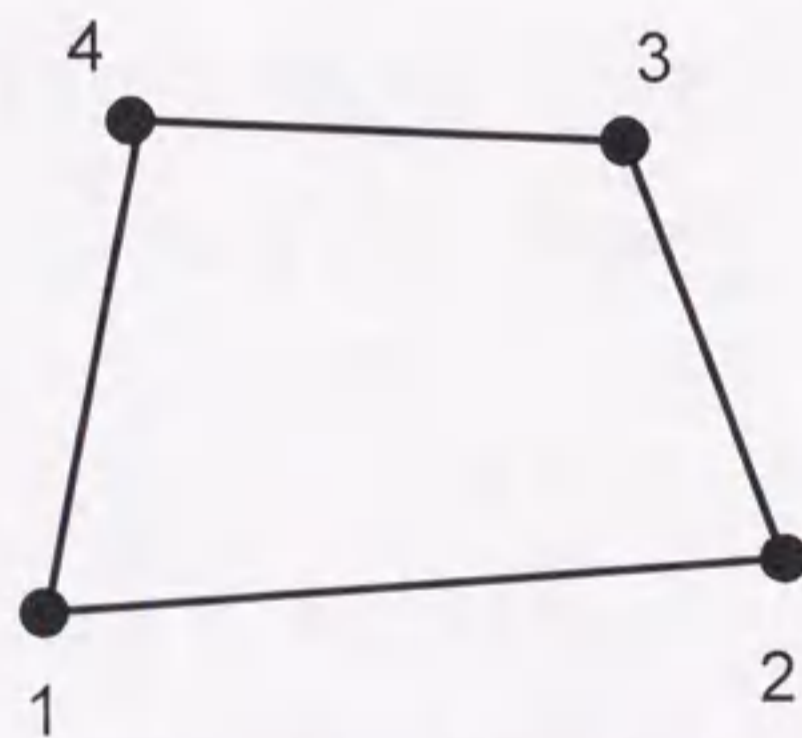


図 2.2 2次元4節点アイソパラメトリック要素

2.5 選択型低減積分

弾塑性有限要素法においては、通常数値積分によって接線剛性マトリクス等が評価される。この数値積分において、正しい積分が行われるいわゆる完全積分では、剛性等が過大に評価されるロッキング現象に遭遇する可能性がある。本研究のような塑性不安定解析においては volumetric ロッキングに注意を払う必要がある[H1][T1]。

弾塑性解析であっても変形が大きくなった場合には、塑性変形が支配的になる。通常用いられる弾塑性構成方程式は塑性変形の新圧縮性を前提としており、その構成方程式における体積一定の拘束により有限要素解析の結果が剛となりすぎる現象を volumetric ロッキングという。この volumetric ロッキングを避けるための簡単な方法としては、積分点の数を完全積分より少なくする低減積分が考えられるが、本研究で用いる図 2.1 や図 2.2 のような 1 次の有限要素における低減積分では、ゼロエネルギーモードと呼ばれる蛇腹のような変形モードが発生して安定した解は得られない[H1][T1]。そのゼロエネルギーモードを解消するためのアワーグラスコントロールも提案されており[B2][B3][W1]、それを用いた塑性不安定解析の例もあるが[Z3]、本研究では volumetric ロッキングを避けるために選択型低減積分法を用いることにする[H3][G9]。この方法は速度勾配テンソルを偏差成分と体積成分とに分割して、volumetric ロッキングに関連している体積成分のみを低減積分し、残りの偏差成分については完全積分を施すというものである。以下、その選択型低減積分について述べる。

まず速度勾配テンソル L を偏差成分 L' と体積成分 L^v に分割する。

$$L = L' + L^v \quad (2.5.1)$$

体積成分 L^v は以下のものである。

$$L^v = \left(\frac{1}{3} \text{tr} L \right) I \quad (2.5.2)$$

今、低減積分において評価した速度勾配テンソルを L^{red} とする。選択型低減積分では、体積成分だけ低減積分を行い、残りの偏差成分は完全積分を行うわけであるから、選択型低減積分における速度勾配テンソル L^{sel} は完全積分における速度勾配テンソルを L^{ful} として以下のように評価できる。

$$L^{sel} = L^{ful} + \left(\frac{1}{3} \text{tr} L^{red} \right) I - \left(\frac{1}{3} \text{tr} L^{ful} \right) I \quad (2.5.3)$$

式(2.5.3)は体積ひずみに関与する垂直ひずみ成分のみ低減積分を行い、ひずみの偏差成分は完全積分することを意味している。これを離散化した有限要素解析で反映させるためには、節点変位速度ベクトルから要素内の任意点の速度勾配テンソル \mathbf{L} の成分を求める操作、つまり式(2.3.5),(2.3.8)に修正を加えればよい。ゆえに有限要素解析において登場する式(2.3.7),(2.3.10)の ${}^i\mathbf{B}_L, {}^i\mathbf{B}_{NL}$ を数値積分で求める際に、通常の ${}^i\mathbf{B}_L, {}^i\mathbf{B}_{NL}$ の代わりに以下のような ${}^i\mathbf{B}_L^{sel}, {}^i\mathbf{B}_{NL}^{sel}$ を用いるだけで、選択型低減積分による有限要素解析が可能となる。よって、低減積分を行うための新たなサンプリング点における応力状態や相当塑性ひずみなどの記憶領域を計算機上で確保する必要はない。

$${}^i\mathbf{B}_L^{sel} \rightarrow {}^i\mathbf{B}_L^{ful} + \frac{1}{3}{}^i\mathbf{B}_{Lv}^{red} - \frac{1}{3}{}^i\mathbf{B}_{Lv}^{ful} \quad (2.5.4)$$

$${}^i\mathbf{B}_{NL}^{sel} \rightarrow {}^i\mathbf{B}_{NL}^{ful} + \frac{1}{3}{}^i\mathbf{B}_{NLv}^{red} - \frac{1}{3}{}^i\mathbf{B}_{NLv}^{ful} \quad (2.5.5)$$

ここで

$${}^i\mathbf{B}_{Lv} = \begin{bmatrix} \frac{\partial\phi_1}{\partial'x} & \frac{\partial\phi_1}{\partial'y} & \frac{\partial\phi_1}{\partial'z} & \frac{\partial\phi_2}{\partial'x} & \frac{\partial\phi_2}{\partial'y} & \frac{\partial\phi_2}{\partial'z} & \frac{\partial\phi_n}{\partial'x} & \frac{\partial\phi_n}{\partial'y} & \frac{\partial\phi_n}{\partial'z} \\ \frac{\partial\phi_1}{\partial'x} & \frac{\partial\phi_1}{\partial'y} & \frac{\partial\phi_1}{\partial'z} & \frac{\partial\phi_2}{\partial'x} & \frac{\partial\phi_2}{\partial'y} & \frac{\partial\phi_2}{\partial'z} & \frac{\partial\phi_n}{\partial'x} & \frac{\partial\phi_n}{\partial'y} & \frac{\partial\phi_n}{\partial'z} \\ \frac{\partial\phi_1}{\partial'x} & \frac{\partial\phi_1}{\partial'y} & \frac{\partial\phi_1}{\partial'z} & \frac{\partial\phi_2}{\partial'x} & \frac{\partial\phi_2}{\partial'y} & \frac{\partial\phi_2}{\partial'z} & \frac{\partial\phi_n}{\partial'x} & \frac{\partial\phi_n}{\partial'y} & \frac{\partial\phi_n}{\partial'z} \\ \frac{\partial\phi_1}{\partial'x} & \frac{\partial\phi_1}{\partial'y} & \frac{\partial\phi_1}{\partial'z} & \frac{\partial\phi_2}{\partial'x} & \frac{\partial\phi_2}{\partial'y} & \frac{\partial\phi_2}{\partial'z} & \dots & \frac{\partial\phi_n}{\partial'x} & \frac{\partial\phi_n}{\partial'y} & \frac{\partial\phi_n}{\partial'z} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.5.6)$$

$${}^i\mathbf{B}_{NLv} = \begin{bmatrix} \frac{\partial\phi_1}{\partial'x} & \frac{\partial\phi_1}{\partial'y} & \frac{\partial\phi_1}{\partial'z} & \frac{\partial\phi_2}{\partial'x} & \frac{\partial\phi_2}{\partial'y} & \frac{\partial\phi_2}{\partial'z} & \frac{\partial\phi_n}{\partial'x} & \frac{\partial\phi_n}{\partial'y} & \frac{\partial\phi_n}{\partial'z} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial\phi_1}{\partial'x} & \frac{\partial\phi_1}{\partial'y} & \frac{\partial\phi_1}{\partial'z} & \frac{\partial\phi_2}{\partial'x} & \frac{\partial\phi_2}{\partial'y} & \frac{\partial\phi_2}{\partial'z} & \dots & \frac{\partial\phi_n}{\partial'x} & \frac{\partial\phi_n}{\partial'y} & \frac{\partial\phi_n}{\partial'z} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial\phi_1}{\partial'x} & \frac{\partial\phi_1}{\partial'y} & \frac{\partial\phi_1}{\partial'z} & \frac{\partial\phi_2}{\partial'x} & \frac{\partial\phi_2}{\partial'y} & \frac{\partial\phi_2}{\partial'z} & \frac{\partial\phi_n}{\partial'x} & \frac{\partial\phi_n}{\partial'y} & \frac{\partial\phi_n}{\partial'z} \end{bmatrix} \quad (2.5.7)$$

2.6 結語

本章では幾何学的非線形問題を解くための Updated Lagrangian 法による有限要素法の定式化を示した。本章の要点を以下にまとめる。

1. 連続体力学を基盤とした仮想仕事の原理から出発して、最終的にアイソパラメトリック要素により離散化を行った。本章では暫定的な構成方程式を用いて定式化を行っているが、この構成方程式を解析対象となる材料に合わせて書き換えることによって、弾塑性解析等が可能となる。
2. 本研究で扱う塑性不安定解析で問題となる volumetric ロッキングについて述べると共に、それを解消するための選択型低減積分法について述べた。

なお本章ではアイソパラメトリック要素として、もっとも単純な(低次な)1次の有限要素についてしか述べていない。本研究で扱うような大ひずみ問題、特に不安定問題では、個別の有限要素自体が大きくひずむ。そのため高次の有限要素を用いて要素内の応力やひずみなどの高次の評価を行うことは意味がない[N2]。本研究で扱うような塑性不安定解析においては高次の有限要素に頼らず、最も簡潔な要素を用いて、計算機環境と時間の許す限り細かな要素分割を行い、有限要素解析を実行するのが有効である。

第3章

弾塑性構成方程式

3.1 緒言

本章では弾塑性構成方程式について述べる。まず、微小ひずみにおける古典的弾塑性理論について概説する。本研究では von Mises の降伏関数を用い、それを塑性ポテンシャルとして採用する関連流れ則を用いることにする。このような弾塑性構成方程式は Prandtl-Reuss の式と呼ばれ、金属材料の弾塑性構成方程式として一般に最もよく採用されるものである。

また微小ひずみ理論である弾塑性構成方程式を、大ひずみの場合においても適用できるように理論を拡張する。その際に必要不可欠となる、客観応力速度についてまず述べる。ここでは客観性のあるテンソルの定義を示した上で、Cauchy 応力と相対 Kirchhoff 応力の客観応力速度を何種類か定義して、それらの客観性の有無を調べる。そして、本章で定義した客観応力速度を用いて、微小ひずみ理論における弾塑性構成方程式を大ひずみでも有効となるように理論の拡張を行い、大ひずみ問題における弾塑性構成方程式 J_2 流れ則を示す。最後に、大ひずみ問題の弾塑性有限要素解析が可能となるように、大ひずみ弾塑性構成方程式における客観応力速度から、Updated Lagrangian 法で用いられている Truesdell 応力速度への変換を行うことにする。

3.2 古典的弾塑性理論

ここでは von Mises の降伏関数を塑性ポテンシャルとする関連流れ則に基づいた、微小ひずみにおける弾塑性構成方程式を定義する。弾塑性体の初期降伏条件および後続降伏条件は、降伏関数 F 、微小ひずみ状態における Cauchy 応力テンソル σ 、降伏応力 σ_y として、以下のように表すことができる。

$$F(\sigma, \sigma_y(\bar{e}^p)) = 0 \quad (3.2.1)$$

ここで降伏応力 σ_y は微小ひずみ状態における相当塑性ひずみ \bar{e}^p の関数である。降伏進行中は常に $F=0$ が満足されているから、次式が成立する。

$$\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial \sigma} : \dot{\sigma} + \frac{\partial F}{\partial e^p} : \dot{e}^p = 0 \quad (3.2.2)$$

また、微小ひずみにおける塑性ひずみテンソル速度 \dot{e}^p を、塑性ポテンシャル Θ を対応する応力成分で偏微分することにより得られるという流れ理論より、以下のように表す。

$$\dot{\epsilon}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial \Theta}{\partial \sigma} \quad (3.2.3)$$

ここで、 $\dot{\lambda}$ は未知の比例定数である。そして、塑性ポテンシャルと降伏関数が等しいとする関連流れ則を用いる。

$$\Theta = F \quad (3.2.4)$$

式(3.2.4)より、式(3.2.3)は以下のようになる。

$$\dot{\epsilon}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \sigma} \quad (3.2.5)$$

塑性ひずみ仕事率 \dot{W}^p において、次式を満たすものとする。

$$\begin{aligned} \dot{W}^p &= \sigma : \dot{\epsilon}^p \\ &= \bar{\sigma} \dot{\bar{\epsilon}}^p \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

そして、相当応力 $\bar{\sigma}$ 、相当塑性ひずみ $\bar{\epsilon}^p$ を次のように定義する。

$$\bar{\sigma} = H \bar{\epsilon}^p \quad (3.2.7)$$

$$\dot{\bar{\sigma}} = H' \dot{\bar{\epsilon}}^p \quad (3.2.8)$$

ここで、 H' は硬化係数または塑性係数である。

von Mises の降伏関数は、偏差応力テンソル σ' を用いて式(3.2.9),(3.2.10)で与えられる。

$$F = \frac{1}{3} [\bar{\sigma}^2 - \sigma_y^2(\bar{\epsilon}^p)] \quad (3.2.9)$$

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{3}{2} (\sigma' : \sigma') \quad (3.2.10)$$

式(3.2.10)を式(3.2.9)に代入すると

$$F = \frac{1}{3} \left[\frac{3}{2} (\sigma' : \sigma') - \sigma_y^2(\bar{\epsilon}^p) \right] \quad (3.2.11)$$

式(3.2.11)を σ で偏微分すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \sigma} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\sigma - \frac{1}{3} (\text{tr } \sigma) \mathbf{I} \right) : \sigma' + \sigma' : \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\sigma - \frac{1}{3} (\text{tr } \sigma) \mathbf{I} \right) \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial \sigma_{ij}} \left(\sigma_{rs} - \frac{\sigma_{kk}}{3} \delta_{rs} \right) \sigma'_{rs} \\ &= \left(\delta_{ir} \delta_{js} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{rs} \right) \sigma'_{rs} \\ &= \delta_{ir} \delta_{js} \sigma'_{rs} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{rs} \sigma'_{rs} \\ &= \sigma'_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{rs} \sigma'_{rs} \\ &= \sigma'_{ij} - \frac{1}{3} \sigma'_{ii} \\ &= \sigma'_{ij} \end{aligned} \quad (3.2.12)$$

式(3.2.12)より

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma} = \sigma' \quad (3.2.13)$$

よって、式(3.2.5)は次のようになる。

$$\dot{\epsilon}^p = \dot{\lambda} \sigma' \quad (3.2.14)$$

式(3.2.14)の両辺と σ との内積をとると、

$$\sigma : \dot{\epsilon}^p = \dot{\lambda} \sigma : \sigma' \quad (3.2.15)$$

式(3.2.15),(3.2.6)より

$$\bar{\sigma} \dot{\bar{\epsilon}}^p = \dot{\lambda} \sigma : \sigma' \quad (3.2.16)$$

後述の式(3.2.20)より

$$\bar{\sigma} \dot{\bar{\epsilon}}^p = \dot{\lambda} \sigma' : \sigma' \quad (3.2.17)$$

式(3.2.17)に式(3.2.10)を用いると、

$$\bar{\sigma} \dot{\bar{\epsilon}}^p = \dot{\lambda} \frac{2}{3} \bar{\sigma}^2 \quad (3.2.18)$$

式(3.2.18)を整理すると、

$$\dot{\lambda} = \frac{3}{2} \frac{\dot{\bar{\epsilon}}^p}{\bar{\sigma}} \quad (3.2.19)$$

なお、式(3.2.17)においては、次式のような関係を用いている。

$$\begin{aligned}
\sigma' : \dot{\sigma}' &= \sigma'_{ij} \dot{\sigma}'_{ij} \\
&= \left[\sigma_{ij} - \frac{1}{3} (\text{tr } \sigma) \delta_{ij} \right] \dot{\sigma}'_{ij} \\
&= \sigma_{ij} \dot{\sigma}'_{ij} - \frac{1}{3} (\text{tr } \sigma) \delta_{ij} \dot{\sigma}'_{ij} \\
&= \sigma_{ij} \dot{\sigma}'_{ij} - \frac{1}{3} (\text{tr } \sigma) \dot{\sigma}'_{ii} \\
&= \sigma_{ij} \dot{\sigma}'_{ij} \\
&= \sigma : \dot{\sigma}'
\end{aligned} \tag{3.2.20}$$

式(3.2.14)に式(3.2.19)を代入して整理すると,

$$\dot{\sigma}' = \frac{2}{3} \frac{\bar{\sigma}}{\dot{\bar{e}}^p} \dot{\bar{e}}^p \tag{3.2.21}$$

式(3.2.21)を式(3.2.10)に代入すると,

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}^2 &= \frac{3}{2} \left\{ \left(\frac{2}{3} \frac{\bar{\sigma}}{\dot{\bar{e}}^p} \dot{\bar{e}}^p \right) : \left(\frac{2}{3} \frac{\bar{\sigma}}{\dot{\bar{e}}^p} \dot{\bar{e}}^p \right) \right\} \\
&= \frac{2}{3} \frac{\bar{\sigma}^2}{\dot{\bar{e}}^{p^2}} (\dot{\bar{e}}^p : \dot{\bar{e}}^p)
\end{aligned} \tag{3.2.22}$$

式(3.2.22)より, 相当塑性ひずみ速度 $\dot{\bar{e}}^p$ は以下のように表される.

$$\dot{\bar{e}}^p = \sqrt{\frac{2}{3} (\dot{\bar{e}}^p : \dot{\bar{e}}^p)} \tag{3.2.23}$$

降伏時には, $F=0$ であるから, 式(3.2.9)より

$$\bar{\sigma}^2 = \sigma_y^2 \tag{3.2.24}$$

また, $\dot{F}=0$ であるから, 式(3.2.11),(3.2.20)より

$$\dot{F} = \frac{1}{2} \{ (\dot{\sigma} : \sigma') + (\sigma : \dot{\sigma}') \} - \frac{2}{3} \sigma_y \frac{\partial \sigma_y}{\partial \bar{e}^p} \dot{\bar{e}}^p = 0 \tag{3.2.25}$$

ここで, 以下の関係が成り立つ.

$$\begin{aligned}
\sigma : \dot{\sigma}' &= \left(\sigma' + \frac{1}{3} (\text{tr } \sigma) \mathbf{I} \right) : \dot{\sigma}' \\
&= \sigma' : \dot{\sigma}' + \frac{1}{3} (\text{tr } \sigma) \mathbf{I} : \dot{\sigma}' \\
&= \sigma' : \left(\dot{\sigma}' - \frac{1}{3} (\text{tr } \dot{\sigma}') \mathbf{I} \right) + \frac{1}{3} (\text{tr } \sigma) \mathbf{I} : \dot{\sigma}' \\
&= \sigma' : \dot{\sigma}' - \frac{1}{3} (\text{tr } \dot{\sigma}') \sigma' : \mathbf{I} + \frac{1}{3} (\text{tr } \sigma) \mathbf{I} : \dot{\sigma}' \\
&= \sigma' : \dot{\sigma}'
\end{aligned} \tag{3.2.26}$$

式(3.2.26)を用いると, 式(3.2.25)は,

$$\dot{\sigma} : \sigma' = \frac{2}{3} \sigma_y \frac{\partial \sigma_y}{\partial \bar{e}^p} \dot{\bar{e}}^p \tag{3.2.27}$$

式(3.2.24)より, $\sigma_y = \bar{\sigma}$ であるから, 式(3.2.27)は次のようになる.

$$\dot{\sigma} : \sigma' = \frac{2}{3} \bar{\sigma} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{e}^p} \dot{\bar{e}}^p \tag{3.2.28}$$

続いて, 式(3.2.28)に式(3.2.19)を代入すると,

$$\dot{\sigma} : \sigma' = \frac{4}{9} \bar{\sigma}^2 \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{e}^p} \dot{\lambda} \tag{3.2.29}$$

また, 式(3.2.8)より, 式(3.2.29)は

$$\dot{\sigma} : \sigma' = \frac{4}{9} \bar{\sigma}^2 H' \dot{\lambda} \tag{3.2.30}$$

今, 微小ひずみテンソルを \mathbf{e} として, 降伏後も Hooke 則が成立するという一般的な以下の様な仮定を用いる.

$$\dot{\sigma} = \mathbf{C} : (\dot{\mathbf{e}} - \dot{\lambda} \sigma') \tag{3.2.31}$$

ここで \mathbf{C} は Hooke 則による4階の弾性構成式テンソルである.

式(3.2.31)に式(3.2.14)を代入すると,

$$\dot{\sigma} = \mathbf{C} : (\dot{\mathbf{e}} - \dot{\lambda} \sigma') \tag{3.2.32}$$

式(3.2.32)の両辺と σ' との内積をとると,

$$\dot{\sigma} : \sigma' = \left[\mathbf{C} : (\dot{\mathbf{e}} - \dot{\lambda} \sigma') \right] : \sigma' \tag{3.2.33}$$

式(3.2.33)に式(3.2.30)を代入して、 $\dot{\lambda}$ について整理すると、以下ようになる。

$$\dot{\lambda} = \frac{(\mathbf{C} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}) : \boldsymbol{\sigma}'}{(\mathbf{C} : \boldsymbol{\sigma}') : \boldsymbol{\sigma}' + \frac{4}{9} \bar{\sigma}^2 H'} \quad (3.2.34)$$

式(3.2.34)を式(3.2.32)に代入すれば、

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \left[\mathbf{C} - \frac{(\mathbf{C} : \boldsymbol{\sigma}') \otimes (\mathbf{C} : \boldsymbol{\sigma}')}{(\mathbf{C} : \boldsymbol{\sigma}') : \boldsymbol{\sigma}' + \frac{4}{9} \bar{\sigma}^2 H'} \right] : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \quad (3.2.35)$$

今、 \mathbf{C} について考える。 \mathbf{C} をインデックス表示すると Hooke 則より以下ようになる。

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{kl} \delta_{ij} + 2\mu \delta_{ik} \delta_{jl} \quad (3.2.36)$$

ここで、 δ_{ij} はクロネッカーのデルタ、 λ, μ はラメの定数であり、以下のように定義される。

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (3.2.37)$$

$$\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (3.2.38)$$

ただし E はヤング係数、 G はせん断係数、そして ν はポアソン比である。

式(3.2.36)の両辺に σ'_{kl} をかけると、

$$\begin{aligned} C_{ijkl} \sigma'_{kl} &= (\lambda \delta_{kl} \delta_{ij} + 2\mu \delta_{ik} \delta_{jl}) \sigma'_{kl} \\ &= \lambda \delta_{ij} \sigma'_{kk} + 2\mu \sigma'_{ij} \\ &= 2\mu \sigma'_{ij} \end{aligned} \quad (3.2.39)$$

式(3.2.39)より、

$$\mathbf{C} : \boldsymbol{\sigma}' = 2G \boldsymbol{\sigma}' \quad (3.2.40)$$

式(3.2.40)を式(3.2.35)に代入すると、

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\sigma}} &= [\mathbf{C} - \mathbf{C}^p] : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \\ &= \mathbf{C}^{ep} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \end{aligned} \quad (3.2.41)$$

ただし、 \mathbf{C}^p は以下のものである。

$$\mathbf{C}^p = \frac{9G^2}{3G + H'} \left(\frac{1}{\bar{\sigma}^2} \right) (\boldsymbol{\sigma}' \otimes \boldsymbol{\sigma}') \quad (3.2.42)$$

式(3.2.41)が von Mises の降伏関数による関連流れ則の弾塑性構成方程式であり、これを一般に Prandtl-Reuss の式と呼んでいる。ここで有限要素解析に都合のいいように、この

弾塑性構成方程式をマトリクス表示しておく。

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\sigma}} &= \mathbf{C}^{ep} \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \\ &= (\mathbf{C} - \mathbf{C}^p) \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \end{aligned} \quad (3.2.43)$$

ここで

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^T = (\dot{\sigma}_{xx} \quad \dot{\sigma}_{yy} \quad \dot{\sigma}_{zz} \quad \dot{\sigma}_{xy} \quad \dot{\sigma}_{yz} \quad \dot{\sigma}_{zx}) \quad (3.2.44)$$

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^T = (\dot{\epsilon}_{xx} \quad \dot{\epsilon}_{yy} \quad \dot{\epsilon}_{zz} \quad 2\dot{\epsilon}_{xy} \quad 2\dot{\epsilon}_{yz} \quad 2\dot{\epsilon}_{zx}) \quad (3.2.45)$$

$$\mathbf{C} = \frac{2G}{1-2\nu} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ & sym. & & & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ & & & & & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (3.2.46)$$

$$\mathbf{C}^p = \frac{9G^2}{(3G + H') \bar{\sigma}^2} \begin{bmatrix} \sigma'_{xx} \sigma'_{xx} & \sigma'_{xx} \sigma'_{yy} & \sigma'_{xx} \sigma'_{zz} & \sigma'_{xx} \sigma'_{xy} & \sigma'_{xx} \sigma'_{yz} & \sigma'_{xx} \sigma'_{zx} \\ & \sigma'_{yy} \sigma'_{yy} & \sigma'_{yy} \sigma'_{zz} & \sigma'_{yy} \sigma'_{xy} & \sigma'_{yy} \sigma'_{yz} & \sigma'_{yy} \sigma'_{zx} \\ & & \sigma'_{zz} \sigma'_{zz} & \sigma'_{zz} \sigma'_{xy} & \sigma'_{zz} \sigma'_{yz} & \sigma'_{zz} \sigma'_{zx} \\ & & & \sigma'_{xy} \sigma'_{xy} & \sigma'_{xy} \sigma'_{yz} & \sigma'_{xy} \sigma'_{zx} \\ & & & & \sigma'_{yz} \sigma'_{yz} & \sigma'_{yz} \sigma'_{zx} \\ & & & & & \sigma'_{zx} \sigma'_{zx} \end{bmatrix} \quad (3.2.47)$$

最後に、式(3.2.43)の構成方程式を2次元問題(平面ひずみ、平面応力)へ縮小する[01]。まず平面ひずみ状態においては、 $e_{zz} = e_{yz} = e_{zx} = 0$ 、 $\sigma_{yz} = \sigma_{zx} = 0$ 、 $\sigma_{zz} \neq 0$ であるから、この条件を上記の構成方程式に加味して非ゼロの応力速度を求めると以下ようになる。ここで \mathbf{C}^{ep} に付ける右下添字 ij は、一般的な3次元弾塑性構成方程式マトリクス6行6列のうちの、 i 行 j 列を意味している。

$$\dot{\sigma}_{xx} = C^{ep}_{11} \dot{\epsilon}_{xx} + C^{ep}_{12} \dot{\epsilon}_{yy} + C^{ep}_{14} 2\dot{\epsilon}_{xy} \quad (3.2.48)$$

$$\dot{\sigma}_{yy} = C^{ep}_{21} \dot{\epsilon}_{xx} + C^{ep}_{22} \dot{\epsilon}_{yy} + C^{ep}_{24} 2\dot{\epsilon}_{xy} \quad (3.2.49)$$

$$\dot{\sigma}_{zz} = C^{ep}_{31} \dot{e}_{xx} + C^{ep}_{32} \dot{e}_{yy} + C^{ep}_{34} 2\dot{e}_{xy} \quad (3.2.50)$$

$$\dot{\sigma}_{xy} = C^{ep}_{41} \dot{e}_{xx} + C^{ep}_{42} \dot{e}_{yy} + C^{ep}_{44} 2\dot{e}_{xy} \quad (3.2.51)$$

式(3.2.48), (3.2.49), (3.2.51)より平面ひずみの場合の縮小された3行3列の弾塑性構成方程式のマトリクス表示は次のようになる。

$$\begin{Bmatrix} \dot{\sigma}_{xx} \\ \dot{\sigma}_{yy} \\ \dot{\sigma}_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C^{ep}_{11} & C^{ep}_{12} & C^{ep}_{14} \\ C^{ep}_{21} & C^{ep}_{22} & C^{ep}_{24} \\ C^{ep}_{41} & C^{ep}_{42} & C^{ep}_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{e}_{xx} \\ \dot{e}_{yy} \\ 2\dot{e}_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.2.52)$$

そして $\dot{\sigma}_{zz}$ は式(3.2.50)で別途求めることができる。

また平面応力状態においては, $e_{yz} = e_{zx} = 0$, $e_{zz} \neq 0$, $\sigma_{zz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zx} = 0$ であるから, その条件を考慮すると, 式(3.2.43)の3行目の方程式より, \dot{e}_{zz} を得ることができる。

$$\dot{e}_{zz} = -\frac{1}{C^{ep}_{33}} [C^{ep}_{31} \dot{e}_{xx} + C^{ep}_{32} \dot{e}_{yy} + C^{ep}_{34} 2\dot{e}_{xy}] \quad (3.2.53)$$

式(3.2.53)を式(3.2.43)に代入して平面応力状態の条件を考慮して整理すると, 3行3列の構成方程式マトリクスは以下のように書き換えられる。

$$\begin{Bmatrix} \dot{\sigma}_{xx} \\ \dot{\sigma}_{yy} \\ \dot{\sigma}_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C^{ep}_{11} - \frac{C^{ep}_{13}C^{ep}_{31}}{C^{ep}_{33}} & C^{ep}_{12} - \frac{C^{ep}_{13}C^{ep}_{32}}{C^{ep}_{33}} & C^{ep}_{14} - \frac{C^{ep}_{13}C^{ep}_{34}}{C^{ep}_{33}} \\ C^{ep}_{21} - \frac{C^{ep}_{23}C^{ep}_{31}}{C^{ep}_{33}} & C^{ep}_{22} - \frac{C^{ep}_{23}C^{ep}_{32}}{C^{ep}_{33}} & C^{ep}_{24} - \frac{C^{ep}_{23}C^{ep}_{34}}{C^{ep}_{33}} \\ C^{ep}_{41} - \frac{C^{ep}_{43}C^{ep}_{31}}{C^{ep}_{33}} & C^{ep}_{42} - \frac{C^{ep}_{43}C^{ep}_{32}}{C^{ep}_{33}} & C^{ep}_{44} - \frac{C^{ep}_{43}C^{ep}_{34}}{C^{ep}_{33}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{e}_{xx} \\ \dot{e}_{yy} \\ 2\dot{e}_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.2.54)$$

3.3 客観応力速度

今, 時刻 t で一致している3つの基底ベクトル, e_i , \tilde{g}_i , \bar{g}_i を考える。ここで e_i は空間に固定された正規直交基底ベクトルである。時刻 t で e_i に等しかった \tilde{g}_i は, 物質点の時刻 t から τ までの剛体回転 ${}^t\mathbf{R}$ と同量だけ回転するものとする。

$${}^t\tilde{g}_i = {}^t\mathbf{R} \cdot \tilde{g}_i \quad (3.3.1)$$

また, \bar{g}_i は物体に埋め込まれた物質点とともに時刻 t から τ までの相対変形勾配テンソル ${}^t\mathbf{F}$ だけ変形するものとする。

$${}^t\bar{g}_i = {}^t\mathbf{F} \cdot \bar{g}_i \quad (3.3.2)$$

そして \bar{g}_i に対する反変基底ベクトル \bar{g}^i を考えることも可能である。

ここで τ の記号のないものは, 時刻 t における量であることを示す。

一般的な Cauchy 応力テンソル \mathbf{T} を, 時刻 t , τ において上記で示した基底ベクトルを用いて表すと,

$$\mathbf{T} = T^{ij} e_i \otimes e_j = \tilde{T}^{ij} \tilde{g}_i \otimes \tilde{g}_j = \bar{T}^{ij} \bar{g}_i \otimes \bar{g}_j = \bar{T}_{ij} \bar{g}^i \otimes \bar{g}^j \quad (3.3.3)$$

$${}^t\mathbf{T} = {}^tT^{ij} e_i \otimes e_j = {}^t\tilde{T}^{ij} \tilde{g}_i \otimes \tilde{g}_j = {}^t\bar{T}^{ij} \bar{g}_i \otimes \bar{g}_j = {}^t\bar{T}_{ij} \bar{g}^i \otimes \bar{g}^j \quad (3.3.4)$$

今, 式(3.3.1)を τ で微分すると,

$$\begin{aligned} \dot{{}^t\tilde{g}}_i &= \dot{{}^t\mathbf{R}} \cdot \tilde{g}_i + {}^t\mathbf{R} \cdot \dot{\tilde{g}}_i \\ &= \dot{{}^t\mathbf{R}} \cdot \tilde{g}_i \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

そして, $\tau \rightarrow t$ とすると,

$$\dot{\tilde{g}}_i = \mathbf{W} \cdot \tilde{g}_i \quad (3.3.6)$$

ここで, \mathbf{W} はスピントテンソルであり, 以下のような関係を用いている[H2].

$$\dot{{}^t\mathbf{R}} = \mathbf{W} \quad (3.3.7)$$

同様に式(3.3.2)を τ で微分すると,

$$\begin{aligned} \dot{{}^t\bar{g}}_i &= \dot{{}^t\mathbf{F}} \cdot \bar{g}_i + {}^t\mathbf{F} \cdot \dot{\bar{g}}_i \\ &= \dot{{}^t\mathbf{F}} \cdot \bar{g}_i \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

$\tau \rightarrow t$ として,

$$\dot{\bar{g}}_i = \mathbf{L} \cdot \bar{g}_i \quad (3.3.9)$$

ここで, \mathbf{L} は速度勾配テンソルで, 次の関係[H2]を用いている。

$$\dot{{}^t\mathbf{F}} = \mathbf{L} \quad (3.3.10)$$

式(3.3.4)より,

$${}^t\mathbf{T} = {}^t\tilde{T}^{ij} \tilde{g}_i \otimes \tilde{g}_j \quad (3.3.11)$$

式(3.3.11)を τ で微分すると,

$$\dot{{}^t\mathbf{T}} = \dot{{}^t\tilde{T}^{ij}} \tilde{g}_i \otimes \tilde{g}_j + \tilde{T}^{ij} \dot{\tilde{g}}_i \otimes \tilde{g}_j + \tilde{T}^{ij} \tilde{g}_i \otimes \dot{\tilde{g}}_j \quad (3.3.12)$$

$\tau \rightarrow t$ とすると, 式(3.3.12)は

$$\begin{aligned} \dot{T} &= \dot{\tilde{T}}^y \tilde{g}_i \otimes \tilde{g}_j + \tilde{T}^y (W \cdot \tilde{g}_i) \otimes \tilde{g}_j + \tilde{T}^y \tilde{g}_i \otimes (W \cdot \tilde{g}_j) \\ &= \dot{\tilde{T}}^y \tilde{g}_i \otimes \tilde{g}_j + W \cdot \tilde{T}^y (\tilde{g}_i \otimes \tilde{g}_j) + \tilde{T}^y (\tilde{g}_i \otimes \tilde{g}_j) \cdot W^T \\ &= \dot{\tilde{T}}^y \tilde{g}_i \otimes \tilde{g}_j + W \cdot T + T \cdot W^T \\ &= \dot{\tilde{T}}^y \tilde{g}_i \otimes \tilde{g}_j + W \cdot T - T \cdot W \end{aligned} \quad (3.3.13)$$

式(3.3.13)においては, スピンテンソル W の反対称性を用いている.

$$W^T = -W \quad (3.3.14)$$

式(3.3.13)において, 次のように $\dot{T}^{(j)}$ を定義する.

$$\dot{T}^{(j)} = \dot{\tilde{T}}^y \tilde{g}_i \otimes \tilde{g}_j \quad (3.3.15)$$

式(3.3.13), (3.3.15)より,

$$\dot{T}^{(j)} = \dot{T} - W \cdot T + T \cdot W \quad (3.3.16)$$

ここで, $\dot{T}^{(j)}$ は Cauchy 応力の Jaumann 速度である. $\dot{T}^{(j)}$ は \tilde{g}_i の変化を感知せず, 一定 ($\dot{\tilde{g}}_i = 0, W = 0$) とする観測者, すなわち物質点の W と同量だけスピンする観測者から見た客観性のある応力速度である. 客観性の検討は後で行うが, 以後, 客観性のある応力速度には右肩に() を付け, その中に客観速度の種類を示す頭文字を挿入する. ただし一般的な客観応力速度には右肩に(-) を付ける.

また, 式(3.3.4)より,

$${}^*T = {}^*T^y {}^*g_i \otimes {}^*g_j \quad (3.3.17)$$

式(3.3.17)を τ で微分すると,

$${}^*\dot{T} = {}^*\dot{T}^y {}^*g_i \otimes {}^*g_j + {}^*T^y \dot{{}^*g}_i \otimes {}^*g_j + {}^*T^y {}^*g_i \otimes \dot{{}^*g}_j \quad (3.3.18)$$

$\tau \rightarrow t$ とすると, 式(3.3.18)は

$$\begin{aligned} \dot{T} &= \dot{T}^y \bar{g}_i \otimes \bar{g}_j + \bar{T}^y (L \cdot \bar{g}_i) \otimes \bar{g}_j + \bar{T}^y \bar{g}_i \otimes (L \cdot \bar{g}_j) \\ &= \dot{T}^y \bar{g}_i \otimes \bar{g}_j + L \cdot \bar{T}^y (\bar{g}_i \otimes \bar{g}_j) + \bar{T}^y (\bar{g}_i \otimes \bar{g}_j) \cdot L^T \\ &= \dot{T}^y \bar{g}_i \otimes \bar{g}_j + L \cdot T + T \cdot L^T \end{aligned} \quad (3.3.19)$$

式(3.3.19)において, 次のように $\dot{T}^{(0)}$ を定義する.

$$\dot{T}^{(0)} = \dot{T}^y \bar{g}_i \otimes \bar{g}_j \quad (3.3.20)$$

式(3.3.19), (3.3.20)より,

$$\dot{T}^{(0)} = \dot{T} - L \cdot T - T \cdot L^T \quad (3.3.21)$$

$\dot{T}^{(0)}$ は Cauchy 応力の Oldroyd 速度である. $\dot{T}^{(0)}$ は \bar{g}_i の変化を感知せず, 一定 ($\dot{\bar{g}}_i = 0, L = 0$) とする観測者, すなわち現配置で埋め込まれ, 物質点とともに同じ変形速度勾配を有しながら移動していく観測者から見た応力速度である.

式(3.3.4)より,

$${}^*T = {}^*T^y {}^*g_i \otimes {}^*g_j \quad (3.3.22)$$

式(3.3.22)を τ で微分すると,

$${}^*\dot{T} = {}^*\dot{T}^y {}^*g_i \otimes {}^*g_j + {}^*T^y \dot{{}^*g}_i \otimes {}^*g_j + {}^*T^y {}^*g_i \otimes \dot{{}^*g}_j \quad (3.3.23)$$

$\tau \rightarrow t$ とすると, 式(3.3.23)は

$$\dot{T} = \dot{T}^y \bar{g}_i \otimes \bar{g}_j + \bar{T}^y \dot{\bar{g}}_i \otimes \bar{g}_j + \bar{T}^y \bar{g}_i \otimes \dot{\bar{g}}_j \quad (3.3.24)$$

ここで, クロネッカーのデルタ δ を用いて次式を考える.

$$\bar{g}_i \cdot \bar{g}^j = \delta_i^j \quad (3.3.25)$$

式(3.3.25)を t で微分すると,

$$\dot{\bar{g}}_i \cdot \bar{g}^j + \bar{g}_i \cdot \dot{\bar{g}}^j = 0 \quad (3.3.26)$$

式(3.3.26)を整理すると,

$$\begin{aligned} \bar{g}_i \cdot \dot{\bar{g}}^j &= -\dot{\bar{g}}_i \cdot \bar{g}^j \\ &= -(L \cdot \bar{g}_i) \cdot \bar{g}^j \\ &= -(\bar{g}_i \cdot L^T) \cdot \bar{g}^j \end{aligned} \quad (3.3.27)$$

式(3.3.27)より,

$$\dot{\bar{g}}^j = -L^T \cdot \bar{g}^j \quad (3.3.28)$$

式(3.3.28)を式(3.3.24)に代入すると,

$$\begin{aligned} \dot{T} &= \dot{T}^y \bar{g}_i \otimes \bar{g}_j - L^T \cdot \bar{T}^y \bar{g}_i \otimes \bar{g}_j - \bar{T}^y \bar{g}_i \otimes (L^T \cdot \bar{g}^j) \\ &= \dot{T}^y \bar{g}_i \otimes \bar{g}_j - L^T \cdot \bar{T}^y \bar{g}_i \otimes \bar{g}_j - \bar{T}^y \bar{g}_i \otimes \bar{g}^j \cdot L \\ &= \dot{T}^y \bar{g}_i \otimes \bar{g}_j - L^T \cdot T - T \cdot L \end{aligned} \quad (3.3.29)$$

式(3.3.29)において, 次のように $\dot{T}^{(c)}$ を定義する.

$$\dot{T}^{(C)} = \dot{\bar{T}}_y \bar{g}^i \otimes \bar{g}^j \quad (3.3.30)$$

式(3.2.29),(3.3.30)より,

$$\dot{T}^{(C)} = \dot{T} + L^T \cdot T + T \cdot L \quad (3.3.31)$$

$\dot{T}^{(C)}$ は Cauchy 応力の Cotter-Rivlin 速度である.

以上で Cauchy 応力の Jaumann 速度 $\dot{T}^{(J)}$, Oldroyd 速度 $\dot{T}^{(O)}$, Cotter-Rivlin 速度 $\dot{T}^{(C)}$ を示したが, それらの相互関係を以下に表わす.

$\dot{T}^{(J)}$ と $\dot{T}^{(O)}$ の間の関係は, 式(3.3.16), (3.3.21)より

$$\dot{T}^{(J)} - \dot{T}^{(O)} = (-W + L) \cdot T + T \cdot (W + L^T) \quad (3.3.32)$$

速度勾配テンソル L には以下の関係がある.

$$L = D + W \quad (3.3.33)$$

式(3.3.33)を転置すると,

$$\begin{aligned} L^T &= D^T + W^T \\ &= D - W \end{aligned} \quad (3.3.34)$$

式(3.3.33)より,

$$-W + L = D \quad (3.3.35)$$

式(3.3.34)より,

$$W + L^T = D \quad (3.3.36)$$

式(3.3.35),(3.3.36)を式(3.3.32)に代入して整理すると, 以下のように $\dot{T}^{(J)}$ と $\dot{T}^{(O)}$ の関係が得られる.

$$\dot{T}^{(J)} = \dot{T}^{(O)} + D \cdot T + T \cdot D \quad (3.3.37)$$

$\dot{T}^{(J)}$ と $\dot{T}^{(C)}$ の間の関係は, 式(3.3.16), (3.3.31)より

$$\dot{T}^{(J)} - \dot{T}^{(C)} = (-W - L^T) \cdot T + T \cdot (W - L) \quad (3.3.38)$$

式(3.3.34)より,

$$-W - L^T = -D \quad (3.3.39)$$

式(3.3.35)より,

$$W - L = -D \quad (3.3.40)$$

式(3.3.39),(3.3.40)を式(3.3.38)に代入して整理すると, 次のような関係が得られる.

$$\dot{T}^{(J)} = \dot{T}^{(C)} - D \cdot T - T \cdot D \quad (3.3.41)$$

次に, 相対 Kirchhoff 応力の客観速度について考える. 相対 Kirchhoff 応力 \hat{T} と Cauchy 応力 T の関係は以下のものである.

$${}^i\hat{T} = {}^iJ' T \quad (3.3.42)$$

ここで, iJ は時刻 t から τ における体積変化率であり, 相対変形勾配テンソル iF により以下のように定義される.

$${}^iJ = \det {}^iF \quad (3.3.43)$$

$\dot{T}^{(J)}$ を求めたのと同様に, 相対 Kirchhoff 応力の Jaumann 速度 ${}^i\dot{\hat{T}}^{(J)}$ は以下のように表される.

$${}^i\dot{\hat{T}}^{(J)} = {}^i\dot{\hat{T}} - W \cdot {}^i\hat{T} + {}^i\hat{T} \cdot W \quad (3.3.44)$$

ここで式(3.3.42)を τ で微分すると,

$${}^i\dot{\hat{T}} = {}^iJ' T + {}^iJ' \dot{T} \quad (3.3.45)$$

式(3.3.45)において, $\tau \rightarrow t$ とすると,

$$\begin{aligned} {}^i\dot{\hat{T}} &= {}^iJ' T + {}^iJ' \dot{T} \\ &= (\text{tr } L) T + \dot{T} \end{aligned} \quad (3.3.46)$$

ここで, 次のような関係を用いている.

$${}^iJ = \text{tr } L \quad (3.3.47)$$

また, 以下のような関係も成立する.

$${}^i\hat{T} = T \quad (3.3.48)$$

$$\text{tr } L = \text{tr } D \quad (3.3.49)$$

式(3.3.46)~(3.3.49)を考慮すると, 式(3.3.44)は以下のようになる.

$${}^i\dot{\hat{T}}^{(J)} = (\text{tr } D) T + \dot{T} - W \cdot T + T \cdot W \quad (3.3.50)$$

式(3.3.16)より式(3.3.50)は,

$${}^i\dot{\hat{T}}^{(J)} = \dot{T}^{(J)} + (\text{tr } D) T \quad (3.3.51)$$

そして、 $\dot{T}^{(o)}$ を求めたのと同様に、相対 Kirchhoff 応力の Oldroyd 速度 $\dot{T}^{(o)}$ は以下のようになる。

$$\dot{T}^{(o)} = \dot{T} - L \cdot T - T \cdot L^T \quad (3.3.52)$$

式(3.3.46)~(3.3.49)を式(3.3.52)に代入すると、

$$\dot{T}^{(o)} = (\text{tr } D)T + \dot{T} - L \cdot T - T \cdot L^T \quad (3.3.53)$$

式(3.3.21)より式(3.3.53)は、

$$\dot{T}^{(o)} = \dot{T}^{(o)} + (\text{tr } D)T \quad (3.3.54)$$

さらに $\dot{T}^{(c)}$ を求めたのと同様に、相対 Kirchhoff 応力の Cotter-Rivlin 速度 $\dot{T}^{(c)}$ は以下のようである。

$$\dot{T}^{(c)} = \dot{T} + L^T \cdot T + T \cdot L \quad (3.3.55)$$

式(3.3.46)~(3.3.49)を式(3.3.55)に代入すると、

$$\dot{T}^{(c)} = (\text{tr } D)T + \dot{T} + L^T \cdot T + T \cdot L \quad (3.3.56)$$

式(3.3.31)より式(3.3.56)は、

$$\dot{T}^{(c)} = \dot{T}^{(c)} + (\text{tr } D)T \quad (3.3.57)$$

以上のように相対 Kirchhoff 応力のそれぞれの客観速度は、Cauchy 応力のそれぞれの客観速度に $(\text{tr } D)T$ を足すことによって得られる。

次に本節で定義した客観応力速度の、客観性の検討を行う。

今、2つの基準枠 O^* と O における位置ベクトル x と x^* が、並進変位 c と剛体回転を示す直交テンソル Q により、次のような関係にあるとする。

$$x^* = c + Q \cdot x \quad (3.3.58)$$

この場合、ある物体の運動に対して両枠から見た Cauchy 応力の関係は、並進変位 c は関与せずに Q のみによって表される。

$$T^* = Q \cdot T \cdot Q^T \quad (3.3.59)$$

となる。

今、2点間を結ぶベクトルを考える。

$$b^* = x_2^* - x_1^* \quad (3.3.60)$$

$$b = x_2 - x_1 \quad (3.3.61)$$

式(3.3.58)より、

$$x_2^* = c + Q \cdot x_2 \quad (3.3.62)$$

$$x_1^* = c + Q \cdot x_1 \quad (3.3.63)$$

式(3.3.62), (3.3.63)より、

$$x_2^* - x_1^* = Q \cdot (x_2 - x_1) \quad (3.3.64)$$

そして、式(3.3.64)は以下のようになる。

$$b^* = Q \cdot b \quad (3.3.65)$$

両枠から観測されるベクトルが、現時刻での剛体回転 Q のみによって式(3.3.65)のように表わされる場合、このベクトルには客観性があるという。

そして、テンソルはベクトルの線形結合であるから、客観性のあるテンソルは以下のように定義される。

$$X^* = Q \cdot X \cdot Q^T \quad (3.3.66)$$

よって式(3.3.59)に示すように、Cauchy 応力テンソルには客観性があるということになる。

なお客観性のあるスカラーについては、基準枠によらず一定となる。

$$a^* = a \quad (3.3.67)$$

本節で定義した応力速度の客観性を検討する前に、その準備として以下のような、 L^* , D^* , W^* を定義する。まず L^* については以下のようになる。

$$\begin{aligned} L^* &= \dot{F}^* \cdot F^{*-1} \\ &= (Q \cdot \dot{F}) \cdot (Q \cdot F)^{-1} \\ &= (\dot{Q} \cdot F + Q \cdot \dot{F}) \cdot F^{-1} \cdot Q^{-1} \\ &= (\dot{Q} \cdot F + Q \cdot \dot{F}) \cdot F^{-1} \cdot Q^T \\ &= \dot{Q} \cdot Q^T + Q \cdot \dot{F} \cdot F^{-1} \cdot Q^T \\ &= \dot{Q} \cdot Q^T + Q \cdot L \cdot Q^T \end{aligned} \quad (3.3.68)$$

なお、式(3.3.68)においては以下の関係を用いている[H2].

$$L = \dot{F} \cdot F^{-1} \quad (3.3.69)$$

$$F^* = Q \cdot F \quad (3.3.70)$$

$$Q^{-1} = Q^T \quad (3.3.71)$$

また, D^* は,

$$\begin{aligned} D^* &= \frac{1}{2}(L^* + L^{*T}) \\ &= \frac{1}{2}[(\dot{Q} \cdot Q^T + Q \cdot L \cdot Q^T) + (Q \cdot \dot{Q}^T + Q \cdot L^T \cdot Q^T)] \\ &= \frac{1}{2}[(\dot{Q} \cdot Q^T + Q \cdot \dot{Q}^T) + Q \cdot (L + L^T) \cdot Q^T] \\ &= \frac{1}{2}[\dot{I} + Q \cdot (L + L^T) \cdot Q^T] \\ &= Q \cdot \frac{1}{2}(L + L^T) \cdot Q^T \\ &= Q \cdot D \cdot Q^T \end{aligned} \quad (3.3.72)$$

ゆえにストレッチングテンソル D には客観性があることが分かる.

式(3.3.72)の誘導にあたっては, 以下の関係を用いている.

$$(Q \cdot Q^T)^* = \dot{I} \quad (3.3.73)$$

そして, W^* は次のようになる.

$$\begin{aligned} W^* &= \frac{1}{2}(L^* - L^{*T}) \\ &= \frac{1}{2}[(\dot{Q} \cdot Q^T + Q \cdot L \cdot Q^T) - (Q \cdot \dot{Q}^T + Q \cdot L^T \cdot Q^T)] \\ &= \frac{1}{2}[(\dot{Q} \cdot Q^T - Q \cdot \dot{Q}^T) + Q \cdot (L - L^T) \cdot Q^T] \\ &= \frac{1}{2}[(-\dot{Q} \cdot Q^T - Q \cdot \dot{Q}^T + 2\dot{Q} \cdot Q^T) + Q \cdot (L - L^T) \cdot Q^T] \\ &= \frac{1}{2}[-\dot{I} + 2\dot{Q} \cdot Q^T + Q \cdot (L - L^T) \cdot Q^T] \\ &= \dot{Q} \cdot Q^T + Q \cdot \frac{1}{2}(L - L^T) \cdot Q^T \\ &= \dot{Q} \cdot Q^T + Q \cdot W \cdot Q^T \end{aligned} \quad (3.3.74)$$

上記の式(3.3.68),(3.3.72),(3.3.74)で定義した L^*, D^*, W^* を用いて, Cauchy 応力の Jaumann 速度 $\dot{T}^{(J)}$, Oldroyd 速度 $\dot{T}^{(O)}$, Cotter-Rivlin 速度 $\dot{T}^{(C)}$ の客観性を検討すると,

$$\begin{aligned} \dot{T}^{(J)*} &= \dot{T}^* - W^* \cdot T^* + T^* \cdot W^* \\ &= \dot{Q} \cdot T \cdot Q^T + Q \cdot \dot{T} \cdot Q^T + Q \cdot T \cdot \dot{Q}^T - (\dot{Q} \cdot Q^T + Q \cdot W \cdot Q^T) \cdot Q \cdot T \cdot Q^T \\ &\quad + Q \cdot T \cdot Q^T \cdot (\dot{Q} \cdot Q^T + Q \cdot W \cdot Q^T) \\ &= Q \cdot \dot{T} \cdot Q^T + Q \cdot T \cdot \dot{Q}^T - Q \cdot W \cdot T \cdot Q^T - Q \cdot T \cdot Q^T \cdot (\dot{Q} \cdot Q^T)^T + Q \cdot T \cdot W \cdot Q^T \\ &= Q \cdot (\dot{T} - W \cdot T + T \cdot W) \cdot Q^T \\ &= Q \cdot \dot{T}^{(J)} \cdot Q^T \end{aligned} \quad (3.3.75)$$

$$\begin{aligned} \dot{T}^{(O)*} &= \dot{T}^* - L^* \cdot T^* - T^* \cdot L^{*T} \\ &= \dot{Q} \cdot T \cdot Q^T + Q \cdot \dot{T} \cdot Q^T + Q \cdot T \cdot \dot{Q}^T - (\dot{Q} \cdot Q^T + Q \cdot L \cdot Q^T) \cdot Q \cdot T \cdot Q^T \\ &\quad - Q \cdot T \cdot Q^T \cdot (\dot{Q} \cdot Q^T + Q \cdot L^T \cdot Q^T) \\ &= Q \cdot (\dot{T} - L \cdot T - T \cdot L^T) \cdot Q^T \\ &= Q \cdot \dot{T}^{(O)} \cdot Q^T \end{aligned} \quad (3.3.76)$$

$$\begin{aligned} \dot{T}^{(C)*} &= \dot{T}^* + L^{*T} \cdot T^* + T^* \cdot L^* \\ &= \dot{Q} \cdot T \cdot Q^T + Q \cdot \dot{T} \cdot Q^T + Q \cdot T \cdot \dot{Q}^T + (Q \cdot \dot{Q}^T + Q \cdot L^T \cdot Q^T) \cdot Q \cdot T \cdot Q^T \\ &\quad + Q \cdot T \cdot Q^T \cdot (\dot{Q} \cdot Q^T + Q \cdot L \cdot Q^T) \\ &= \dot{Q} \cdot T \cdot Q^T + Q \cdot \dot{T} \cdot Q^T + Q \cdot T \cdot \dot{Q}^T - (Q \cdot \dot{Q}^T)^T \cdot Q \cdot T \cdot Q^T + Q \cdot L^T \cdot T \cdot Q^T \\ &\quad - Q \cdot T \cdot Q^T \cdot (\dot{Q} \cdot Q^T)^T + Q \cdot T \cdot L \cdot Q^T \\ &= Q \cdot (\dot{T} + L^T \cdot T + T \cdot L) \cdot Q^T \\ &= Q \cdot \dot{T}^{(C)} \cdot Q^T \end{aligned} \quad (3.3.77)$$

式(3.3.75),(3.3.76),(3.3.77)より, $\dot{T}^{(J)}$, $\dot{T}^{(O)}$, $\dot{T}^{(C)}$ には客観性があることが分かる.

次に, 相対 Kirchhoff 応力の Jaumann 速度 $\dot{T}^{(J)}$, Oldroyd 速度 $\dot{T}^{(O)}$, Cotter-Rivlin 速度 $\dot{T}^{(C)}$ の客観性の有無を調べる.

$$\begin{aligned} \dot{T}^{(J)*} &= \dot{T}^{(J)*} + T^* \operatorname{tr} D^* \\ &= Q \cdot \dot{T}^{(J)} \cdot Q^T + Q \cdot T \cdot Q^T \operatorname{tr}(Q \cdot D \cdot Q^T) \\ &= Q \cdot \dot{T}^{(J)} \cdot Q^T + Q \cdot T \cdot Q^T \operatorname{tr}(Q^T \cdot Q \cdot D) \\ &= Q \cdot \dot{T}^{(J)} \cdot Q^T + Q \cdot T \cdot Q^T \operatorname{tr} D \\ &= Q \cdot (\dot{T}^{(J)} + T \operatorname{tr} D) \cdot Q^T \\ &= Q \cdot \dot{T}^{(J)} \cdot Q^T \end{aligned} \quad (3.3.78)$$

$$\begin{aligned}
{}^i\dot{\hat{T}}^{(O)*} &= \dot{T}^{(O)*} + T^* \operatorname{tr} D^* \\
&= \mathbf{Q} \cdot \dot{T}^{(O)} \cdot \mathbf{Q}^T + \mathbf{Q} \cdot T \cdot \mathbf{Q}^T \operatorname{tr}(\mathbf{Q} \cdot D \cdot \mathbf{Q}^T) \\
&= \mathbf{Q} \cdot \dot{T}^{(O)} \cdot \mathbf{Q}^T + \mathbf{Q} \cdot T \cdot \mathbf{Q}^T \operatorname{tr}(\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} \cdot D) \\
&= \mathbf{Q} \cdot \dot{T}^{(O)} \cdot \mathbf{Q}^T + \mathbf{Q} \cdot T \cdot \mathbf{Q}^T \operatorname{tr} D \\
&= \mathbf{Q} \cdot (\dot{T}^{(O)} + T \operatorname{tr} D) \cdot \mathbf{Q}^T \\
&= \mathbf{Q} \cdot {}^i\dot{\hat{T}}^{(O)} \cdot \mathbf{Q}^T
\end{aligned} \tag{3.3.79}$$

$$\begin{aligned}
{}^i\dot{\hat{T}}^{(C)*} &= \dot{T}^{(C)*} + T^* \operatorname{tr} D^* \\
&= \mathbf{Q} \cdot \dot{T}^{(C)} \cdot \mathbf{Q}^T + \mathbf{Q} \cdot T \cdot \mathbf{Q}^T \operatorname{tr}(\mathbf{Q} \cdot D \cdot \mathbf{Q}^T) \\
&= \mathbf{Q} \cdot \dot{T}^{(C)} \cdot \mathbf{Q}^T + \mathbf{Q} \cdot T \cdot \mathbf{Q}^T \operatorname{tr}(\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} \cdot D) \\
&= \mathbf{Q} \cdot \dot{T}^{(C)} \cdot \mathbf{Q}^T + \mathbf{Q} \cdot T \cdot \mathbf{Q}^T \operatorname{tr} D \\
&= \mathbf{Q} \cdot (\dot{T}^{(C)} + T \operatorname{tr} D) \cdot \mathbf{Q}^T \\
&= \mathbf{Q} \cdot {}^i\dot{\hat{T}}^{(C)} \cdot \mathbf{Q}^T
\end{aligned} \tag{3.3.80}$$

ゆえに ${}^i\dot{\hat{T}}^{(J)}$, ${}^i\dot{\hat{T}}^{(O)}$, ${}^i\dot{\hat{T}}^{(C)}$ にも客観性がある。

以上のように本節で定義した客観応力速度には、すべて客観性があることが証明された。

3.4 大ひずみ問題における弾塑性構成方程式

本節では先に述べた微小ひずみにおける弾塑性構成方程式を、客観性のあるテンソルを用いることにより、大ひずみの場合にも適用できるようにする。そして、大ひずみの弾塑性構成方程式を前章で定式化した Updated Lagrangian 法に組み込むことができるように構成方程式の変換を行う。

弾塑性理論では、変形を弾性変形と塑性変形とに分離できるものとする。その分離方法としては、変形勾配テンソルが弾性部分と塑性部分の積とされる multiplicative なもの [E1][L1][L2][M2][P1][S3][S12]と、ひずみ速度が弾性部分と塑性部分の和に分割できるとする additive なものに大きく分類される。本研究では、微小ひずみから大ひずみへの理論の拡張が容易な、後者の additive な方法を採用する。今、物質点の速度ベクトル \mathbf{v} が弾性成分 \mathbf{v}^e と塑性成分 \mathbf{v}^p の和に分離できるものとする。

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^e + \mathbf{v}^p \tag{3.4.1}$$

また、ストレッチングテンソル D も同様に、弾性・塑性成分の和に分解できるものとする。

$$D = D^e + D^p \tag{3.4.2}$$

先の微小ひずみ状態での Cauchy 応力テンソル σ ではなく、一般的な Cauchy 応力テンソル T を用いた微小ひずみ理論における時刻 t での弾塑性構成方程式は、

$${}^i\dot{\hat{T}} = {}^iC^{ep} : \dot{\epsilon} \tag{3.4.3}$$

式(3.4.3)において、大ひずみの場合に $\dot{\epsilon}$ は客観性のある D に、 ${}^i\dot{\hat{T}}$ は客観応力速度 ${}^i\dot{\hat{T}}^{(-)}$ で置き換えられるとすれば、式(3.4.3)は以下ようになる。

$${}^i\dot{\hat{T}}^{(-)} = {}^iC^{ep} : D \tag{3.4.4}$$

D は物質点の座標の関数であり、物質点と共に移動する観測者から見たひずみテンソルの定義に一致する。また前節でも述べたように、 ${}^i\dot{\hat{T}}^{(-)}$ も移動する観測者から見た応力速度という意味合いを持つ。つまり大ひずみ問題においては、応力速度、ひずみ速度を両方とも客観性のあるものに置き換え、どれだけ要素がゆがんだとしても、微小ひずみ状態での弾塑性理論が成立すると考える。よって ${}^iC^{ep}$ は微小ひずみ理論におけるものと同一であり、式(3.2.41)のように表される。式(3.4.4)は、Cauchy 応力の第2不変量を用いた von Mises の降伏関数による関連流れ則を大ひずみ問題へと拡張したものであるため、 J_2 流れ則と言われる [H2]。

式(3.4.4)の構成方程式を有限要素解析において、そのまま用いたのでは、理由は後ほど述べるが、そこから得られる接線剛性マトリクスは非対称となり効率が悪い。そこで非対称な接線剛性マトリクスを避け、対称な接線剛性マトリクスを得るために、構成方程式を Cauchy 応力ではなく、相対 Kirchhoff 応力の客観速度 ${}^i\dot{\hat{T}}^{(-)}$ を用いて次のようにする。

$${}^i\dot{\hat{T}}^{(-)} = {}^iC^{ep} : D \tag{3.4.5}$$

ここで、 ${}^i\dot{\hat{T}}^{(-)}$ と ${}^i\dot{\hat{T}}^{(J)}$ の差異は $(\operatorname{tr} D) {}^iT$ であり、これは塑性変形における非圧縮性 $\operatorname{tr} D^p = 0$ と弾性微小ひずみの仮定から無視できるものと考えられる [H1][H2]。

客観応力速度としては、Jaumann 速度を用いるものとする。

$${}^i\dot{\hat{T}}^{(J)} = {}^iC^{ep} : D \tag{3.4.6}$$

ここで、Updated Lagrangian 法で用いられる Truesdell 応力速度 ${}^i\dot{\hat{S}}$ と相対 Kirchhoff 応力の Jaumann 速度 ${}^i\dot{\hat{T}}^{(J)}$ との関係を求める。Cauchy 応力テンソル T と第2Piola-Kirchhoff 応

カテンソル S の時刻 t から τ までの相対的な関係は以下のである。

$${}^{\tau}T = \frac{1}{J} {}^{\tau}F \cdot {}^{\tau}S \cdot {}^{\tau}F^T \quad (3.4.7)$$

式(3.4.7)を変形して、両辺を τ で微分すると、

$${}^{\tau}\dot{F} \cdot {}^{\tau}S \cdot {}^{\tau}F^T + {}^{\tau}F \cdot \dot{{}^{\tau}S} \cdot {}^{\tau}F^T + {}^{\tau}F \cdot {}^{\tau}S \cdot \dot{{}^{\tau}F}^T = \dot{J} T + J \dot{T} \quad (3.4.8)$$

式(3.4.8)において、 $\tau \rightarrow t$ とすると、

$${}^t\dot{F} \cdot {}^tS \cdot {}^tF^T + {}^tF \cdot \dot{{}^tS} \cdot {}^tF^T + {}^tF \cdot {}^tS \cdot \dot{{}^tF}^T = \dot{J} T + J \dot{T} \quad (3.4.9)$$

ここで以下のような関係が成立する。

$${}^tF = I \quad (3.4.10)$$

$${}^tJ = 1.0 \quad (3.4.11)$$

$${}^t\dot{F} = L \quad (3.4.12)$$

$${}^t\dot{J} = \text{tr} L \quad (3.4.13)$$

$${}^tS = T \quad (3.4.14)$$

式(3.4.10)~(3.4.14)を用いると、式(3.4.9)は次のようになる。

$$L \cdot T + \dot{S} + T \cdot L^T = (\text{tr} L) T + \dot{T} \quad (3.4.15)$$

式(3.4.15)を整理すると、

$$\begin{aligned} {}^t\dot{S} &= \dot{T} - L \cdot T - T \cdot L^T + (\text{tr} L) T \\ &= \dot{T}^{(0)} + (\text{tr} D) T \\ &= \dot{T}^{(0)} \end{aligned} \quad (3.4.16)$$

なお、式(3.4.16)においては $\text{tr} L = \text{tr} D$ の関係を用いている。ゆえに Truesdell 応力速度 ${}^t\dot{S}$ は相対 Kirchhoff 応力の Oldroyd 速度 $\dot{T}^{(0)}$ と同一であり、式(3.3.53)のように表される。よって、Truesdell 応力速度 ${}^t\dot{S}$ と、相対 Kirchhoff 応力の Jaumann 速度 $\dot{T}^{(j)}$ の関係は、

$$\begin{aligned} {}^t\dot{S} - \dot{T}^{(j)} &= \dot{T}^{(0)} - \dot{T}^{(j)} \\ &= [\dot{T} - L \cdot T - T \cdot L^T + (\text{tr} D) T] - [\dot{T} - W \cdot T + T \cdot W + (\text{tr} D) T] \\ &= (-L + W) \cdot T + T \cdot (-W - L^T) \\ &= -D \cdot T - T \cdot D \end{aligned} \quad (3.4.17)$$

ゆえに、 ${}^t\dot{S}$ と $\dot{T}^{(j)}$ の間には以下のような関係が成立する。

$${}^t\dot{S} = \dot{T}^{(j)} - D \cdot T - T \cdot D \quad (3.4.18)$$

式(3.4.18)に本研究で用いる大ひずみでの弾塑性構成方程式(3.4.6)を代入して、インデックス表示すると、

$$\begin{aligned} {}^t\dot{S}_{ij} &= {}^tC_{ijkl}^{ep} D_{kl} - D_{im} T_{mj} - T_{im} D_{mj} \\ &= {}^tC_{ijkl}^{ep} D_{kl} - \frac{1}{2} (D_{ik} T_{kj} + D_{il} T_{lj}) - \frac{1}{2} (T_{ik} D_{kj} + T_{il} D_{lj}) \\ &= \left\{ {}^tC_{ijkl}^{ep} - \frac{1}{2} (\delta_{il} T_{kj} + \delta_{ik} T_{lj}) - \frac{1}{2} (T_{ik} \delta_{jl} + T_{il} \delta_{jk}) \right\} D_{kl} \\ &= {}^t\tilde{C}_{ijkl}^{ep} D_{kl} \end{aligned} \quad (3.4.19)$$

${}^t\tilde{C}_{ijkl}^{ep}$ は $i \leftrightarrow j, k \leftrightarrow l$ また、 $(i, j) \leftrightarrow (k, l)$ の可変性があるので、4階のテンソルとして対称である。

$${}^t\dot{S} = {}^t\tilde{C}^{ep} : D \quad (3.4.20)$$

第2章の式(2.2.27)で暫定的に定義された構成方程式の代わりに、式(3.4.20)のような構成方程式を用いることによって、大ひずみ問題の弾塑性有限要素解析が可能となる。また、この場合の4階の構成式テンソル ${}^t\tilde{C}^{ep}$ は対称であるから、式(2.3.16)で表される初期変位マトリクスも対称となる。そして式(2.3.17)の幾何剛性マトリクスは常に対称であるので、結果的に接線剛性マトリクスも対称となる[T1]。ここで、もし相対 Kirchhoff 応力ではなく、Cauchy 応力の Jaumann 速度を用いたとするならば、式(3.4.17)において $(\text{tr} D) T$ の項が打ち消されない。その結果、Truesdell 応力速度 ${}^t\dot{S}$ とストレッチングテンソル D を結びつける4階の構成式テンソルが非対称となり、接線剛性マトリクスも非対称となる。

最後に大ひずみの場合の構成方程式(3.4.20)をマトリクス表示しておく。

$$\begin{aligned} {}^t\dot{S} &= {}^t\tilde{C}^{ep} D \\ &= ({}^tC^{ep} - {}^tA) D \end{aligned} \quad (3.4.21)$$

ここで,

$${}^i\dot{\mathbf{S}}^T = ({}^i\dot{S}_{xx} \quad {}^i\dot{S}_{yy} \quad {}^i\dot{S}_{zz} \quad {}^i\dot{S}_{xy} \quad {}^i\dot{S}_{yz} \quad {}^i\dot{S}_{zx}) \quad (3.4.22)$$

$$\mathbf{D}^T = (D_{xx} \quad D_{yy} \quad D_{zz} \quad 2D_{xy} \quad 2D_{yz} \quad 2D_{zx}) \quad (3.4.23)$$

$${}^i\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2{}^i T_{xx} & 0 & 0 & {}^i T_{xy} & 0 & {}^i T_{zx} \\ & 2{}^i T_{yy} & 0 & {}^i T_{xy} & {}^i T_{yz} & 0 \\ & & 2{}^i T_{zz} & 0 & {}^i T_{yz} & {}^i T_{zx} \\ & & & \frac{1}{2}({}^i T_{xx} + {}^i T_{yy}) & \frac{1}{2}{}^i T_{zx} & \frac{1}{2}{}^i T_{yz} \\ & sym. & & \frac{1}{2}({}^i T_{yy} + {}^i T_{zz}) & \frac{1}{2}{}^i T_{xy} & \\ & & & & \frac{1}{2}({}^i T_{zz} + {}^i T_{xx}) & \end{bmatrix} \quad (3.4.24)$$

なお, ${}^i\mathbf{C}^{ep}$ については微小ひずみの場合と同一である. ゆえに, 式(2.3.16)において ${}^i\mathbf{C}$ の代わりに ${}^i\tilde{\mathbf{C}}^{ep}$ を用いれば, 大ひずみ問題における弾塑性有限要素解析のための離散化された接線剛性マトリクスを作成できる.

3.5 結語

本章では本研究で用いる弾塑性構成方程式について述べた. 本章の要点を以下にまとめる.

1. 微小ひずみ理論における弾塑性構成方程式として, 金属材料においては通常よく用いられる Prandtl-Reuss の式について概説した. これは von Mises の降伏関数を用いて, それを塑性ポテンシャルとして採用する関連流れ則である.
2. 大ひずみにおける弾塑性構成方程式を扱うために必要不可欠な, 客観応力速度について述べた. 本章では Cauchy 応力と相対 Kirchhoff 応力の客観応力速度を数種類定義して, その客観性の証明を行った. このように客観応力速度は唯一のものではなく, 例えば Cauchy 応力の客観応力速度の場合を見ても複数定義できる. それぞれの客観応力速度の物理的な意味合いは異なるが, 大域的な意味で, 物質点とともに移動していく観測者から見た応力速度であるということに変わりはない.
3. 客観応力速度を用いて, 大ひずみにおける弾塑性構成方程式 J_2 流れ則を誘導した. 大ひずみを取り扱うための客観応力速度としては, 何を選択しても構わないのである [H2]が, ここでは Jaumann 速度を採用した. しかしながら微小ひずみ理論で Cauchy 応力速度が用いられているからといって, Cauchy 応力の Jaumann 速度を用いた場合, そこから Updated Lagrangian 法によって得られる接線剛性マトリクスは非対称となり, 有限要素解析においては非常に効率が悪い. そこで本研究では Cauchy 応力ではなく, 相対 Kirchhoff 応力の Jaumann 速度を用いることにした. この客観応力速度を用いることによって, 大ひずみ問題においても対称な接線剛性マトリクスを導くことが可能となる.

第4章

つり合い経路の追跡法

4.1 緒言

非線形有限要素法におけるつり合い経路の追跡法としては、通常弧長法が用いられる。これは予測子ステップと修正子ステップとを1サイクルとして、非線形なつり合い経路を逐次追跡していく方法である。この弧長法においては制御するパラメーターの違いにより、荷重制御法、変位制御法、弧長制御法、またある種の仕事を制御する方法などこれまで数多くの方法[W5][R3][R4][C4][C5]が提案されており、非線形なつり合い経路を追跡するための研究は1980年代初頭に研究し尽くされた感がある。また弾塑性材料を扱う際には応力積分を行う必要性があり、この応力積分法は前進型積分を用いる陽解法と、後退型積分を用いる陰解法とに分類される。

本章では、まず弧長法の数多いバージョンの中から弧長制御法について、追跡方向の効率的な決定方法と共に概説する。そして応力積分法は、大ひずみ問題における陽解法と陰解法の両方について述べる。さらに陰解法における弾塑性解析においても、弧長法で2次の収束を得ることができるような弾塑性構成方程式の書き換えや、有限要素解析における妥当な応力積分経路、そして除荷の取り扱いについても触れることにする。

4.2 弧長法

4.2.1 弧長制御法

弧長制御法は、式(2.3.26), (2.3.27)を Newton-Raphson 法で解く際に、1回の予測子と数回の修正子を1サイクルとして、変位だけでなく荷重も未知数として非線形な曲線を追跡する方法である。今、時刻 t において N 個の自由度 U と荷重変数 P で支配される系があるとして、次に時刻 t' における平衡状態に解を収束させることを考える。

予測子は、図 4.1 に示すように非線形なつり合い経路の接線方向に解を前に押し進める役割を果たす。今、弧長制御法において規定すべきステップサイズを $\Delta\xi$ とすると、 $N+1$ 本の未知数である予測子 (dU, dP) を求めるために解くべき方程式は次の $N+1$ 本である。

$${}^t\mathbf{K} d\mathbf{U} = dP \mathbf{e} \quad (4.2.1)$$

$$d\mathbf{U}^T d\mathbf{U} + dP^2 = \Delta\xi^2 \quad (4.2.2)$$

荷重増分 dP を 1.0 とした時の $d\mathbf{U}$ を $d\mathbf{U}_e$ とすると、

$${}^i\mathbf{K} d\mathbf{U}_e = +\mathbf{e} \quad (4.2.3)$$

そして、任意の荷重増分 dP に対する変位増分ベクトル $d\mathbf{U}$ は次のようになる。

$$d\mathbf{U} = dP d\mathbf{U}_e \quad (4.2.4)$$

式(4.2.4)を式(4.2.2)に代入すると、 dP を以下のように求めることができる。

$$dp = \pm \frac{\Delta\xi}{\sqrt{d\mathbf{U}_e^T d\mathbf{U}_e + 1.0}} \quad (4.2.5)$$

式(4.2.5)の右辺における \pm は追跡方向を示すもので、この選択方法については次節で詳しく述べることにする。またステップサイズ $\Delta\xi$ については、この後で述べる修正子が通常2-3回となるように解くべき問題によって最適な大きさを選択すべきである[C6]。'U, 'Pに予測子(dU, dP)を足し合わせるにより、変位ベクトル、荷重変数をそれぞれ更新する。

$${}^i\mathbf{U}^{(i)} = {}^i\mathbf{U} + d\mathbf{U} \quad (4.2.6)$$

$${}^iP^{(i)} = {}^iP + dP \quad (4.2.7)$$

予測子によってつり合い経路から逸脱した点を、図 4.1 のように修正子による反復計算により再びつり合い経路へと引き戻す。修正子($\Delta\mathbf{U}^{(i+1)}, \Delta P^{(i+1)}$)を求めるための拘束条件としては、荷重やある変位を一定にする方法など[C3][F2][S2][W6][B6]があるが、本研究では予測子と修正子を直交させる拘束条件[R4]を採用することにする。その条件を採用した場合に、解くべき方程式は次の N+1 本である。

$${}^i\mathbf{K}^{(i)} \Delta\mathbf{U}^{(i+1)} - \Delta P^{(i+1)} \mathbf{e} = {}^iP^{(i)} \mathbf{e} - {}^i\mathbf{R}^{(i)} \quad (4.2.8)$$

$$d\mathbf{U}^T \Delta\mathbf{U}^{(i+1)} + dP \Delta P^{(i+1)} = 0 \quad (4.2.9)$$

式(4.2.8)より $\Delta\mathbf{U}^{(i+1)}$ は次のように求められる。

$$\Delta\mathbf{U}^{(i+1)} = \Delta P^{(i+1)} \Delta\mathbf{U}_e^{(i+1)} + \Delta\mathbf{U}_E^{(i+1)} \quad (4.2.10)$$

ただし

$${}^i\mathbf{K}^{(i)} \Delta\mathbf{U}_e^{(i+1)} = +\mathbf{e} \quad (4.2.11)$$

$${}^i\mathbf{K}^{(i)} \Delta\mathbf{U}_E^{(i+1)} = {}^iP^{(i)} \mathbf{e} - {}^i\mathbf{R}^{(i)} \quad (4.2.12)$$

$\Delta\mathbf{U}_e^{(i+1)}$, $\Delta\mathbf{U}_E^{(i+1)}$ はそれぞれ単位荷重増分及び不つり合い力に対する変位修正子である。

式(4.2.10)を式(4.2.9)に代入すると、荷重増分 $\Delta P^{(i+1)}$ は以下のように求めることができる。

$$\Delta P^{(i+1)} = - \frac{d\mathbf{U}^T \Delta\mathbf{U}_E^{(i+1)}}{d\mathbf{U}^T \Delta\mathbf{U}_e^{(i+1)} + dP} \quad (4.2.13)$$

そして修正子によって、変位ベクトル、荷重変数は以下のように更新される。

$${}^i\mathbf{U}^{(i+1)} = {}^i\mathbf{U}^{(i)} + \Delta\mathbf{U}^{(i+1)} \quad (4.2.14)$$

$${}^iP^{(i+1)} = {}^iP^{(i)} + \Delta P^{(i+1)} \quad (4.2.15)$$

修正子の収束条件としてはいくつか考えられるが、不つり合い力ベクトルのノルムがある誤差 $tol1$ 以下になる条件

$$\|{}^iP\mathbf{e} - {}^i\mathbf{R}\| \leq tol1 \quad (4.2.16)$$

または、変位修正子ベクトル $\Delta\mathbf{U}$ のノルムが誤差 $tol2$ 以下となる条件などを採用する。

$$|\Delta\mathbf{U}| \leq tol2 \quad (4.2.17)$$

4.2.2 追跡方向の決定

図 4.2 や図 4.3 で示されるような、Snap-Through や Snap-Back が発生する付近で、つり合い経路を後戻りすることなく追跡するためには、接線方向2方向のうちの追跡方向、つまり式(4.2.5)の予測子の荷重増分の符号の選択を的確に行う必要がある。このようなつり合い経路を効率的に追跡する方法については、つり合い経路の曲率の大小により2つのパラメータを使い分ける方法[H5][K2]などが提案されているが、ここではより簡便な方法を提案する。

いま、簡単のために2変数(x,y)からなる非線形な曲線を考える。

$$f(x,y) = 0 \quad (4.2.18)$$

図 4.4 からも明らかなように、各変数の折り返し点では増分量の正負が逆転する。ゆえに増分量の絶対値が最小となる変数成分の折り返し点か、もっとも発生しやすいことになる。これとは逆に、増分量の絶対値が最大となる変数成分の折り返し点か、もっとも発生しにくいと考えることができる。したがってある変数の折り返し点において、非線形な曲線を後戻りすることなく追跡するためには、1つ手前の予測子ベクトルの成分のなかで、絶対値が最大の成分番号とその符号のみを記憶しておく。そして現在の予測子ベクトルの中で同じ成分番号を持

つ成分が、記憶したものと同一符号となるように、式(4.2.5)の符号を決定する。これによって Snap-Through や Snap-Back などにおいても後戻りすることなく、非線形なつり合い経路を安定に追跡することができる[F3][F4][F5].

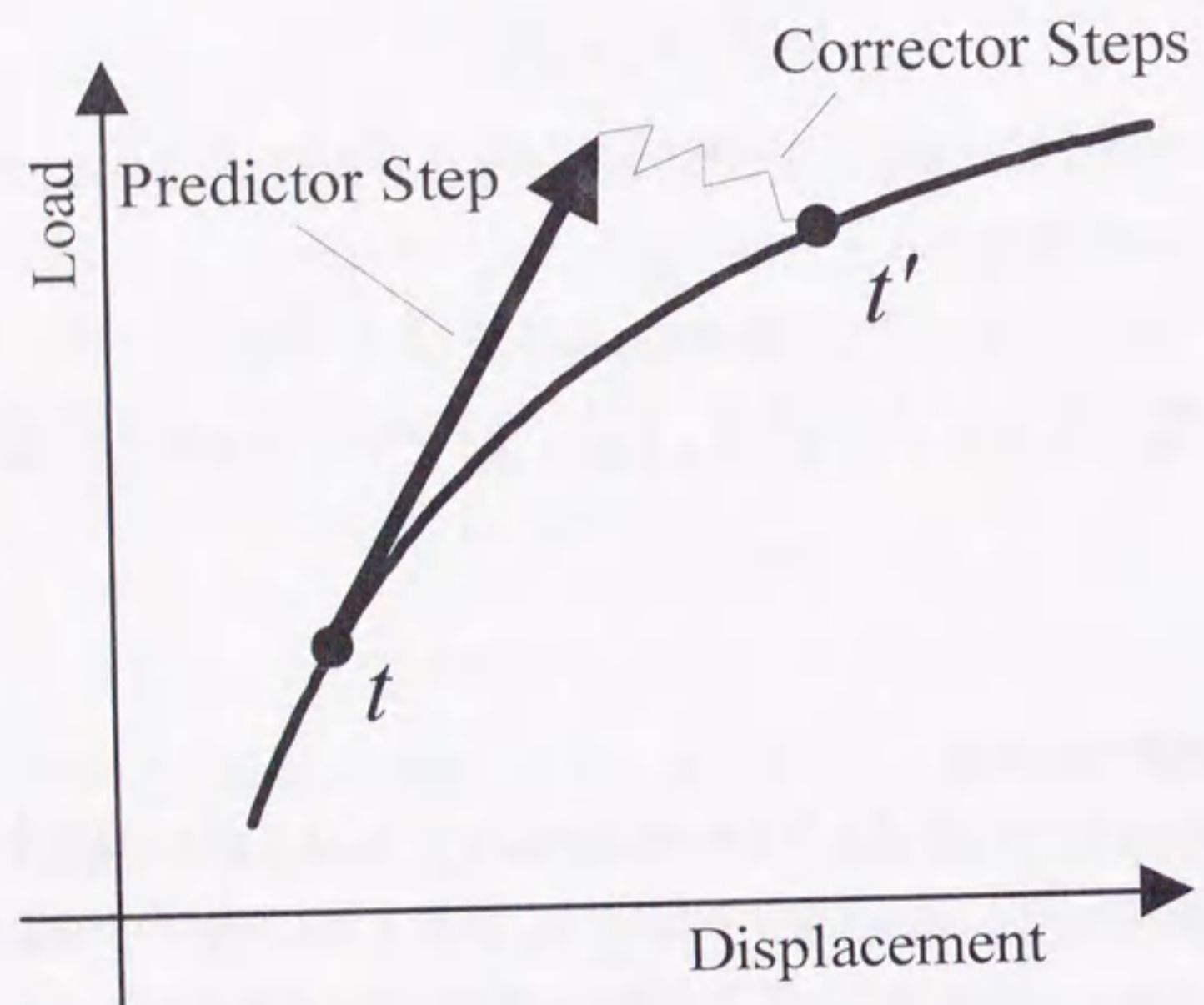


図 4.1 弧長制御法

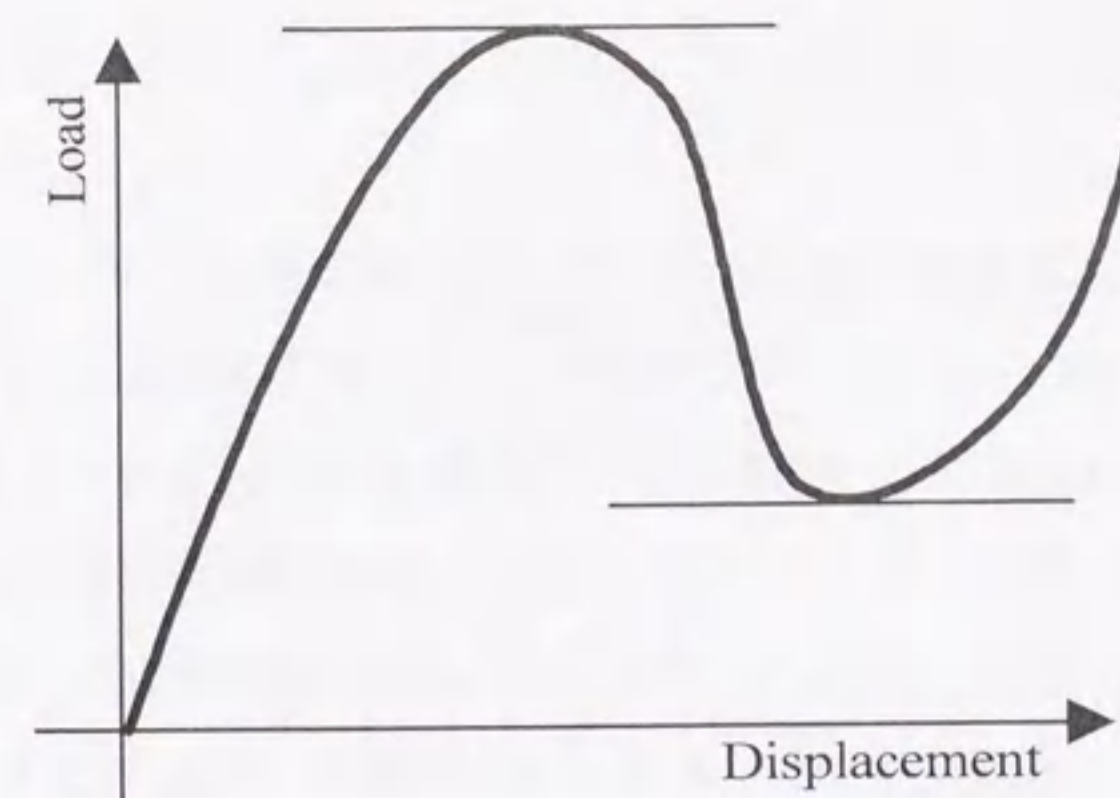


図 4.2 Snap-Through

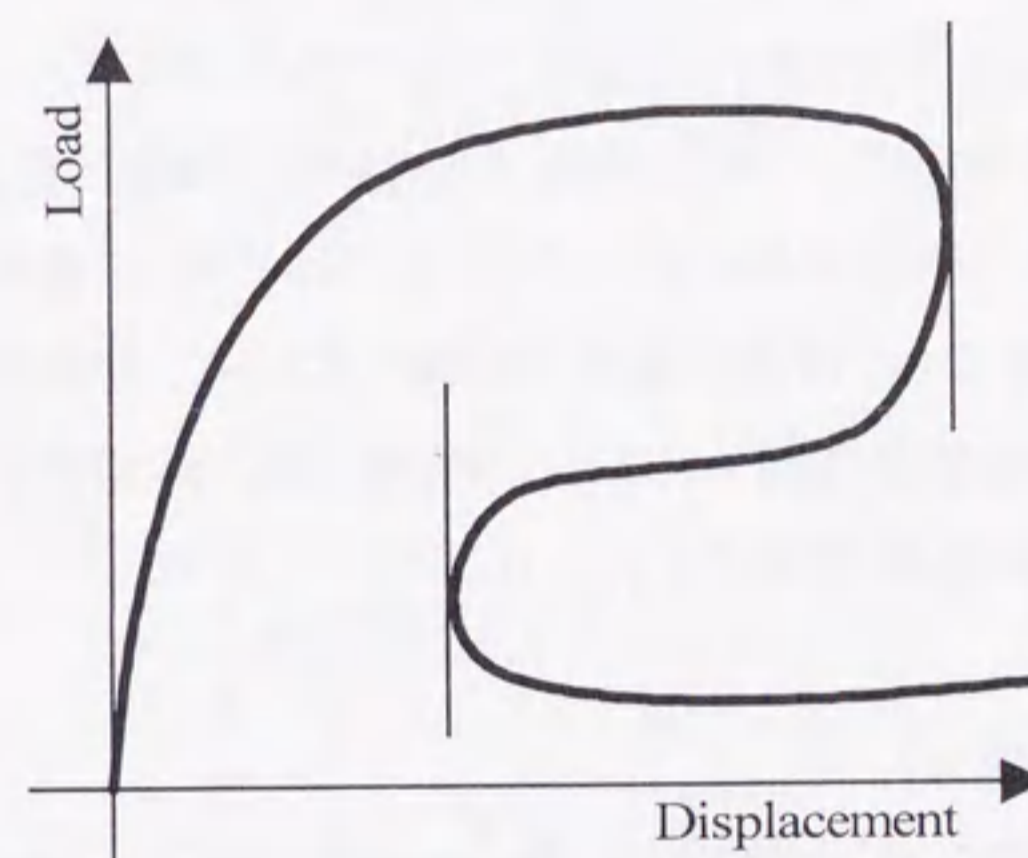


図 4.3 Snap-Back

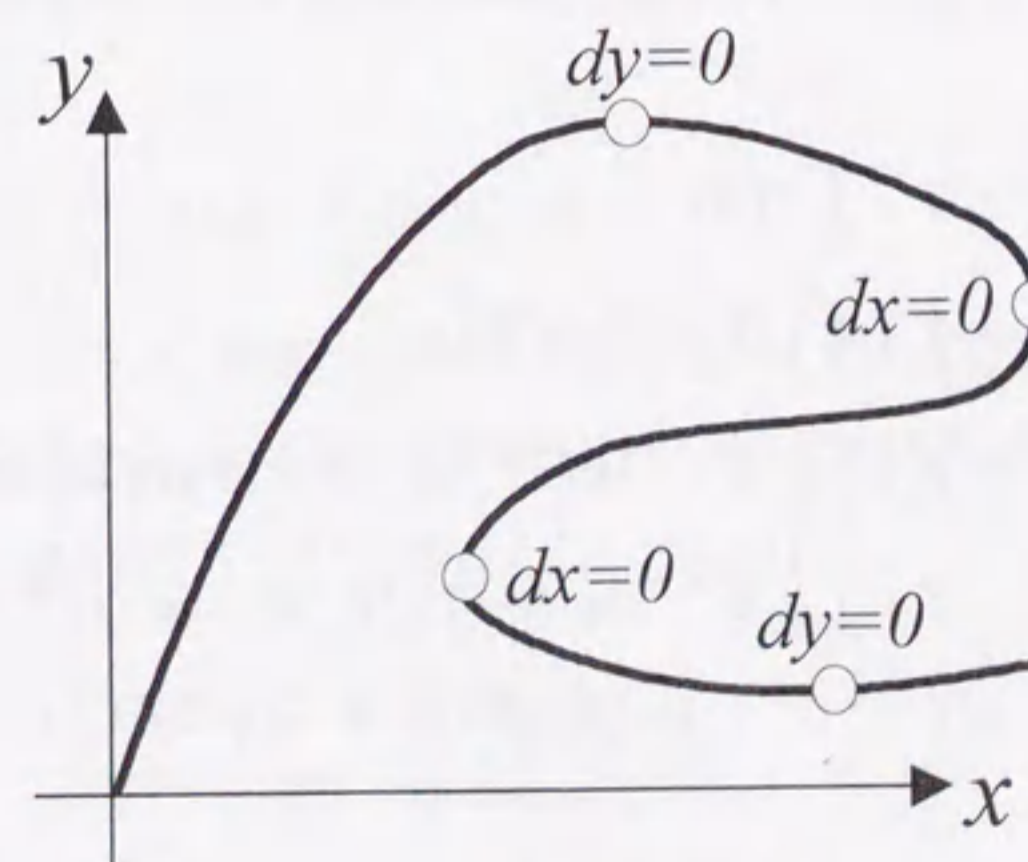


図 4.4 変数の折り返し点

4.3 応力積分法

弾塑性構成方程式は速度形で表されるため、有限要素解析において有限増分を扱うためには応力積分を行わなくてはならない。本節では大ひずみ問題における、時刻 t から t' までの応力積分法について述べる。前節で述べた弧長制御法によって系全体での節点変位増分が求まったならば、要素レベルでの節点変位増分の評価が可能となり、その要素レベルでの変位増分を変位速度と見なして、式(2.3.8)のような操作を行うことができる。ここで式(2.3.9)で表される成分は速度勾配テンソル L の成分となる。さらにその L を加算分解することにより、その対称成分としてストレッチングテンソル D の評価が可能である。この D は、大ひずみ問題におけるひずみ速度テンソルとして見なすことができる。

応力積分には2つの方法が考えられる[M3]。ストレッチングテンソル D を構成式テンソル C^{ep} に乗じて得られた応力速度に、時間に乗じたものを応力増分とする、いわゆる前進型積分によって応力積分を行う解法を陽解法という[M1]。これに対して陽解法のように応力速度を扱うのではなく、応力そのものが降伏条件等を満たすように、非線形方程式を解きながら応力積分をする、いわゆる後退型積分による方法を陰解法という[N4][N5][N6][S4]。以下に大ひずみ問題における陽解法・陰解法それぞれについて述べる。

4.3.1 陽解法(前進型積分)

有限要素解析において必要となる応力は Cauchy 応力である。よって Cauchy 応力速度を、本研究で大ひずみ問題において用いている相対 Kirchhoff 応力の Jaumann 速度に変換することによって、以下のように大ひずみの場合の前進型応力積分が可能である。

$$\begin{aligned} {}^t T^{fm} &= {}^t T + \int_t^{t'} \dot{{}^t T} dt \\ &= {}^t T + \int_t^{t'} \left[\dot{{}^t T} - (\text{tr}^t D) {}^t T \right] dt \\ &= {}^t T + \int_t^{t'} \left[\dot{{}^t T} + {}^t W \cdot {}^t T - {}^t T \cdot {}^t W - (\text{tr}^t D) {}^t T \right] dt \\ &= {}^t T + \int_t^{t'} \left[{}^t C^{ep} : \dot{{}^t D} + {}^t W \cdot {}^t T - {}^t T \cdot {}^t W - (\text{tr}^t D) {}^t T \right] dt \\ &\cong {}^t T + [{}^t C^{ep} : \dot{{}^t D} + {}^t W \cdot {}^t T - {}^t T \cdot {}^t W - (\text{tr}^t D) {}^t T] \Delta t \end{aligned} \quad (4.3.1)$$

なおスピンテンソル W は L の反対称部分として求まる。また、相当塑性ひずみの更新については、式(3.2.19)と式(3.2.34)より、大ひずみ問題においては微小ひずみテンソル e は D

に、微小ひずみ理論における Cauchy 応力テンソル σ は一般的な Cauchy 応力テンソル T に置き換えることによって、

$$\frac{3}{2} \frac{\bar{D}^p}{\bar{T}} = \frac{(C : D) : {}^t T'}{(C : T') : T' + \frac{4}{9} \bar{T}^2 H'} \quad (4.3.2)$$

$$\bar{D}^p = \frac{2}{3} \bar{T} \frac{(C : D) : {}^t T'}{(C : T') : T' + \frac{4}{9} \bar{T}^2 H'} \quad (4.3.3)$$

式(3.2.40)より式(4.3.3)は、

$$\bar{D}^p = \frac{2}{3} \bar{T} \frac{(C : D) : {}^t T'}{(2G : T') : T' + \frac{4}{9} \bar{T}^2 H'} \quad (4.3.4)$$

式(3.2.10)より、

$$T' : T' = \frac{2}{3} \bar{T}^2 \quad (4.3.5)$$

式(4.3.5)より、式(4.3.4)は、

$$\begin{aligned} \bar{D}^p &= \frac{2}{3} \bar{T} \frac{(C : D) : {}^t T'}{\frac{4}{3} G : T' + \frac{4}{9} \bar{T}^2 H'} \\ &= \frac{1}{2G + \frac{2}{3} H'} \frac{1}{\bar{T}} [(C : D) : {}^t T'] \end{aligned} \quad (4.3.6)$$

ゆえに大ひずみ問題における相当塑性ひずみの更新は、式(4.3.6)を用いて以下になる。

$$\int_0^{t'} \bar{D}^p dt = \int_0^{t'} \bar{D}^p dt + \bar{D}^p \quad (4.3.7)$$

この陽解法による方法では、時刻 t における諸量を用いるため、式(4.3.1)で得られる試行応力 ${}^t T^{fm}$ が降伏曲面上に載っているという保証はない。そこで試行応力 ${}^t T^{fm}$ を降伏曲面上まで引き戻すことにより、最終応力 ${}^t T^{fm}$ を得ることができる[H1]。

$${}^t T^{fm} = {}^t T^{tr} \frac{\sigma_y \left(\int_0^{t'} \bar{D}^p dt \right)}{\bar{T}} \quad (4.3.8)$$

この方法は時刻 t の諸量を用いて、時刻 t' の応力等を陽的に求めるため、ステップサイズを

十分小さくとらなければ正しい解は得られないが、応力積分自体の操作は極めて簡単である。なお弾性域から塑性域への移行の際には、ひずみ増分を弾性成分と塑性成分に分けるような手続きをとらなくてはならない[O1][Y6]。

4.3.2 陰解法(後退型積分)

後退型積分では応力積分において時刻 t における \mathbf{C}^{ep} を用いるのではなく、時刻 t' での \mathbf{C}^{ep} を用いる。ここではまず、微小ひずみの場合の後退型応力積分法について述べ、その後で大ひずみの場合にも有効となるように理論を拡張する。

式(3.2.31)の Hooke 則より、時刻 t' での応力は以下のように表される。

$$\mathbf{t}'\sigma = \mathbf{t}'\sigma + \mathbf{C} : (\Delta\mathbf{e} - \Delta\mathbf{e}^p) \quad (4.3.9)$$

$\Delta\mathbf{e}^p$ は時刻 t から t' における塑性ひずみ増分で、式(3.2.14)及び式(3.2.19)より時刻 t' における量を用いて、

$$\Delta\mathbf{e}^p = \Delta\lambda \mathbf{t}'\sigma' \quad (4.3.10)$$

$$\Delta\lambda = \frac{3}{2} \frac{\Delta\bar{e}^p}{\mathbf{t}'\bar{\sigma}} \quad (4.3.11)$$

式(4.3.10),(4.3.11)を式(4.3.9)に代入すると、最終応力 $\mathbf{t}'\sigma^{\text{fin}}$ は

$$\mathbf{t}'\sigma^{\text{fin}} = \mathbf{t}'\sigma^{\text{tri}} - \frac{3}{2} \frac{\Delta\bar{e}^p}{\mathbf{t}'\bar{\sigma}} \mathbf{C} : \mathbf{t}'\sigma^{\text{fin}} \quad (4.3.12)$$

ここで試行応力 $\mathbf{t}'\sigma^{\text{tri}}$ は、次のようである。

$$\mathbf{t}'\sigma^{\text{tri}} = \mathbf{t}'\sigma + \mathbf{C} : \Delta\mathbf{e} \quad (4.3.13)$$

式(3.2.40)を式(4.3.12)に代入すると、

$$\mathbf{t}'\sigma^{\text{fin}} = \mathbf{t}'\sigma^{\text{tri}} - \frac{3}{2} \frac{\Delta\bar{e}^p}{\mathbf{t}'\bar{\sigma}} 2G \mathbf{t}'\sigma^{\text{fin}} \quad (4.3.14)$$

式(4.3.14)より

$$\text{tr} \mathbf{t}'\sigma^{\text{fin}} = \text{tr} \mathbf{t}'\sigma^{\text{tri}} \quad (4.3.15)$$

式(4.3.15)より、式(4.3.14)の偏差成分のみを整理すると、以下ようになる。

$$\left(1 + 3G \frac{\Delta\bar{e}^p}{\mathbf{t}'\bar{\sigma}}\right) \mathbf{t}'\sigma^{\text{fin}} = \mathbf{t}'\sigma^{\text{tri}} \quad (4.3.16)$$

式(3.2.10),(4.3.16)より、 $\mathbf{t}'\bar{\sigma}^{\text{fin}}$ と $\mathbf{t}'\bar{\sigma}^{\text{tri}}$ は平行であることが分かる。

$$\left(1 + 3G \frac{\Delta\bar{e}^p}{\mathbf{t}'\bar{\sigma}^{\text{fin}}}\right) = \frac{\mathbf{t}'\bar{\sigma}^{\text{tri}}}{\mathbf{t}'\bar{\sigma}^{\text{fin}}} \quad (4.3.17)$$

ここで、次式が成立する。

$$\begin{aligned} \mathbf{t}'\bar{\sigma}^{\text{fin}} &= \sigma_y(\mathbf{t}'\bar{e}^p) \\ &= \sigma_y(\mathbf{t}'\bar{e}^p + \Delta\bar{e}^p) \end{aligned} \quad (4.3.18)$$

式(4.3.18)を式(4.3.17)に代入して整理すると、 $\Delta\bar{e}^p$ に関する以下のような方程式が得られる。

$$\Delta\bar{e}^p = \frac{1}{3G} \left[\mathbf{t}'\bar{\sigma}^{\text{tri}} - \sigma_y(\mathbf{t}'\bar{e}^p + \Delta\bar{e}^p) \right] \quad (4.3.19)$$

式(4.3.19)は一般的には非線形方程式となり、Newton-Raphson 法等の反復計算が必要になる。ここで $\Delta\bar{e}^p$ が求まったならば、式(4.3.16)より最終応力の偏差成分は以下ようになる。

$$\mathbf{t}'\sigma^{\text{fin}} = \frac{\mathbf{t}'\bar{\sigma}^{\text{fin}}}{\mathbf{t}'\bar{\sigma}^{\text{fin}} + 3G\Delta\bar{e}^p} \mathbf{t}'\sigma^{\text{tri}} \quad (4.3.20)$$

また、応力の体積成分 σ^v は降伏に関係なく、弾性圧縮性のみで評価できる[Y4]ので、

$$\mathbf{t}'\sigma^v = \mathbf{t}'\sigma^v + 3K\Delta\mathbf{e}^v \quad (4.3.21)$$

ここで、右肩の v 記号は体積成分を示している。

$$\sigma^v = \frac{1}{3} \text{tr} \sigma \quad (4.3.22)$$

$$\mathbf{e}^v = \frac{1}{3} \text{tr} \mathbf{e} \quad (4.3.23)$$

そして K は体積弾性係数で、ヤング係数 E とポアソン比 ν により、以下のように定義される。

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad (4.3.24)$$

ゆえに、最終応力は偏差成分と体積成分を合わせて、

$$\mathbf{t}'\sigma^{\text{fin}} = \mathbf{t}'\sigma^{\text{fin}} + \mathbf{t}'\sigma^v \mathbf{I} \quad (4.3.25)$$

以上が微小ひずみの場合の後退型応力積分法であるが、これを大ひずみ問題において

も有効となるように修正を加える。ここでは物体がどれほど変形しても、その中に含まれる弾性ひずみは微小であり Hooke の線形理論が成立するものとする。よって、例え大ひずみを扱う場合にも、それぞれの塑性状態にあるサンプリング点の応力を降伏曲面上に載せるという操作は、微小ひずみ場合とまったく同一のものとなる。大ひずみ問題において異なる箇所は、微小ひずみ状態として得られた、時刻 t' における応力と時刻 t での応力の差を客観応力増分と見なすことである。本研究では客観応力速度として相対 Kirchhoff 応力の Jaumann 速度 $\dot{\hat{T}}^{(j)}$ を用いているので、微小ひずみ状態として後退型応力積分によって得られた応力差を $\Delta\hat{T}^{(j)}$ とする。

$$\Delta\hat{T}^{(j)} = {}^t\sigma^{fin} - {}^t\sigma^{in} \quad (4.3.26)$$

そして後退型積分法で得られた応力差 $\Delta\hat{T}^{(j)}$ を Cauchy 応力の増分に変換するには、以下のような関係を用いる。ただし、ここでは ${}^tD, {}^tW, {}^tT$ は時刻 t から t' までの増分間で一定であると仮定する。

$$\Delta T = \Delta\hat{T}^{(j)} + {}^tW : T - T : {}^tW - \text{tr}({}^tD) T \quad (4.3.27)$$

式(4.3.27)の変換を施すことによって、大ひずみの場合の時刻 t' における最終的な Cauchy 応力は次のように求められる。

$${}^tT^{fin} = T + \Delta T \quad (4.3.28)$$

後退型応力積分法を用いれば、応力-ひずみ曲線の折れ曲がり点でひずみ増分を調節する必要がないため、有限要素解析において効率的である[H1]。また、増分ステップを任意に選択できない地震応答解析などでは、特に有効である。

4.3.3 Consistent 接線剛性

後退型応力積分法を用いた場合、一般的な4階の弾塑性構成式テンソル C^{ep} によって接線剛性マトリクスを作成しても、弧長法等における反復計算で2次の収束は得られない。これは弾塑性構成式テンソル C^{ep} が本来、応力速度とひずみ速度の関係で成立するものであり、有限要素解析で扱う、有限応力増分と有限ひずみ増分間の接線にはなっていないことに起因する。弧長法における反復計算において2次の収束を得るためには、時刻 t ではなく時刻 t' で新たに微分を行った後退型応力積分アルゴリズムに Consistent な構成式テン

ソル C^{ep} を用いる必要がある[S5]。

ここではまず微小ひずみにおける Consistent 弾塑性構成方程式について述べた後に、大ひずみの場合の適用について考える。

今、次式のような4階テンソル P を導入する。

$${}^t\sigma' = P : {}^t\sigma \quad (4.3.29)$$

工学ひずみと対応させるための便宜上の応力を σ^* として、式(4.3.29)をマトリクス表示すると、

$$\begin{Bmatrix} {}^t\sigma_{xx}^* \\ {}^t\sigma_{yy}^* \\ {}^t\sigma_{zz}^* \\ {}^t\sigma_{xy}^* \\ {}^t\sigma_{yz}^* \\ {}^t\sigma_{zx}^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} {}^t\sigma_{xx} \\ {}^t\sigma_{yy} \\ {}^t\sigma_{zz} \\ 2 {}^t\sigma_{xy} \\ 2 {}^t\sigma_{yz} \\ 2 {}^t\sigma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} +\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & +\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & +\frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} {}^t\sigma_{xx} \\ {}^t\sigma_{yy} \\ {}^t\sigma_{zz} \\ {}^t\sigma_{xy} \\ {}^t\sigma_{yz} \\ {}^t\sigma_{zx} \end{Bmatrix} \quad (4.3.30)$$

式(4.3.10)に式(4.3.29)を代入すると、

$$\Delta e^p = \Delta\lambda P : {}^t\sigma \quad (4.3.31)$$

また式(4.3.31)を式(4.3.9)に代入すると、時刻 t' における Cauchy 応力 ${}^t\sigma$ は以下のようになる。

$${}^t\sigma = {}^t\sigma + C : ({}^t e - {}^t e - \Delta\lambda P : {}^t\sigma) \quad (4.3.32)$$

ここで、次式を用いている。

$$\Delta e = {}^t e - {}^t e \quad (4.3.33)$$

式(4.3.32)の両辺を時刻 t' で微分すると、

$$d^t\sigma = C : (d^t e - d(\Delta\lambda) P : {}^t\sigma - \Delta\lambda P : d^t\sigma) \quad (4.3.34)$$

式(4.3.34)の左側から C^{-1} をかけると、

$$C^{-1} : d^t\sigma = d^t e - d(\Delta\lambda) P : {}^t\sigma - \Delta\lambda P : d^t\sigma \quad (4.3.35)$$

$$(C^{-1} + \Delta\lambda P) : d^t\sigma = d^t e - d(\Delta\lambda) P : {}^t\sigma \quad (4.3.36)$$

$$d^t\sigma = (C^{-1} + \Delta\lambda P)^{-1} : (d^t e - d(\Delta\lambda) P : {}^t\sigma) \quad (4.3.37)$$

ここで式(4.3.29)の関係をを用いると、式(4.3.37)は、

$$d^r \sigma = (C^{-1} + \Delta \lambda P)^{-1} : (d^r e - d(\Delta \lambda) {}^r \sigma') \quad (4.3.38)$$

そして、次のように C^* を定義する。

$$C^* = (C^{-1} + \Delta \lambda P)^{-1} \quad (4.3.39)$$

式(4.3.39)の C^* を用いると、式(4.3.38)は以下のようになる。

$$d^r \sigma = C^* : (d^r e - d(\Delta \lambda) {}^r \sigma') \quad (4.3.40)$$

ここで、次式が成立する。

$${}^r \bar{\sigma} = \sigma_y ({}^r \bar{e}^p) \quad (4.3.41)$$

式(4.3.41)の両辺を時刻 t' で微分すると、

$$\begin{aligned} d^r \bar{\sigma} &= \frac{\partial \sigma_y}{\partial \bar{e}^p} \Big|_{t'} d^r \bar{e}^p \\ &= {}^r H' d^r \bar{e}^p \end{aligned} \quad (4.3.42)$$

また、 ${}^r \bar{e}^p$ は次のように表される。

$${}^r \bar{e}^p = {}^r \bar{e}^p + \Delta \bar{e}^p \quad (4.3.43)$$

そして、式(4.3.11)より、

$$\Delta \bar{e}^p = \frac{2}{3} \Delta \lambda {}^r \bar{\sigma} \quad (4.3.44)$$

式(4.3.44)を式(4.3.43)に代入すると、

$${}^r \bar{e}^p = {}^r \bar{e}^p + \frac{2}{3} \Delta \lambda {}^r \bar{\sigma} \quad (4.3.45)$$

式(4.3.45)の両辺を時刻 t' で微分すると、

$$d^r \bar{e}^p = \frac{2}{3} d(\Delta \lambda) {}^r \bar{\sigma} + \frac{2}{3} \Delta \lambda d^r \bar{\sigma} \quad (4.3.46)$$

式(4.3.46)を式(4.3.42)に代入すると、

$$d^r \bar{\sigma} = {}^r H' \left(\frac{2}{3} d(\Delta \lambda) {}^r \bar{\sigma} + \frac{2}{3} \Delta \lambda d^r \bar{\sigma} \right) \quad (4.3.47)$$

$$\left(1 - \frac{2}{3} {}^r H' \Delta \lambda \right) d^r \bar{\sigma} = \frac{2}{3} {}^r H' d(\Delta \lambda) {}^r \bar{\sigma} \quad (4.3.48)$$

$$d^r \bar{\sigma} = \frac{2}{3} \gamma {}^r H' d(\Delta \lambda) {}^r \bar{\sigma} \quad (4.3.49)$$

ただし、 γ は次のように定義される。

$$\gamma = \left(1 - \frac{2}{3} {}^r H' \Delta \lambda \right)^{-1} \quad (4.3.50)$$

今、von Mises の降伏関数を用いているので、時刻 t' における偏差応力テンソル ${}^r \sigma'$ と、相当応力 ${}^r \bar{\sigma}$ の関係は

$${}^r \bar{\sigma}^2 = \frac{3}{2} ({}^r \sigma' : {}^r \sigma') \quad (4.3.51)$$

式(3.2.20)より式(4.3.51)は

$${}^r \bar{\sigma}^2 = \frac{3}{2} ({}^r \sigma : {}^r \sigma') \quad (4.3.52)$$

さらに式(4.3.52)の両辺を時刻 t' で微分すると、次のようになる。

$$2 {}^r \bar{\sigma} d^r \bar{\sigma} = \frac{3}{2} (d^r \sigma : {}^r \sigma' + {}^r \sigma : d^r \sigma') \quad (4.3.53)$$

式(3.2.26)を考慮すると、式(4.3.53)は以下のようになる。

$${}^r \bar{\sigma} d^r \bar{\sigma} = \frac{3}{2} (d^r \sigma : {}^r \sigma') \quad (4.3.54)$$

ここで式(4.3.49)の両辺に ${}^r \bar{\sigma}$ をかけると、

$${}^r \bar{\sigma} d^r \bar{\sigma} = \frac{2}{3} \gamma {}^r H' d(\Delta \lambda) {}^r \bar{\sigma}^2 \quad (4.3.55)$$

式(4.3.54)を式(4.3.55)に代入すると以下のような関係が得られる。

$$d^r \sigma : {}^r \sigma' = \frac{4}{9} \gamma {}^r H' d(\Delta \lambda) {}^r \bar{\sigma}^2 \quad (4.3.56)$$

また、式(4.3.40)の両辺と ${}^r \sigma'$ との内積をとると

$$d^r \sigma : {}^r \sigma' = [C^* : (d^r e - d(\Delta \lambda) {}^r \sigma')] : {}^r \sigma' \quad (4.3.57)$$

式(4.3.56)を式(4.3.57)に代入すると、

$$\frac{4}{9} \gamma {}^r H' d(\Delta \lambda) {}^r \bar{\sigma}^2 = [C^* : (d^r e - d(\Delta \lambda) {}^r \sigma')] : {}^r \sigma' \quad (4.3.58)$$

そして式(4.3.58)から $d(\Delta \lambda)$ を以下のように求めることができる。

$$d(\Delta\lambda) = \left\{ \frac{4}{9} \gamma {}^t H {}^t \bar{\sigma}^2 + (\mathbf{C}^* : {}^t \sigma') : {}^t \sigma' \right\}^{-1} (\mathbf{C}^* : d^t e) : {}^t \sigma' \quad (4.3.59)$$

式(4.3.59)を式(4.3.40)に代入すると,

$$\begin{aligned} d^t \sigma &= \mathbf{C}^* : \left\{ d^t e - \frac{(\mathbf{C}^* : d^t e) : {}^t \sigma'}{\frac{4}{9} \gamma {}^t H {}^t \bar{\sigma}^2 + (\mathbf{C}^* : {}^t \sigma') : {}^t \sigma'} {}^t \sigma' \right\} \\ &= \mathbf{C}^{ep*} : d^t e \end{aligned} \quad (4.3.60)$$

ただし, ここで \mathbf{C}^{ep*} は以下のものである.

$$\mathbf{C}^{ep*} = \mathbf{C}^* - \frac{(\mathbf{C}^* : {}^t \sigma') \otimes (\mathbf{C}^* : {}^t \sigma')}{\frac{4}{9} \gamma {}^t H {}^t \bar{\sigma}^2 + (\mathbf{C}^* : {}^t \sigma') : {}^t \sigma'} \quad (4.3.61)$$

式(4.3.61)が微小ひずみ状態における, Consistent な4階の弾塑性構成式テンソル \mathbf{C}^{ep*} である.

次に大ひずみの場合における Consistent な4階の構成式テンソルについて考える. 大ひずみ問題における後退型積分法においては, 式(4.3.26)のように得られた応力増分を相対 Kirchhoff 応力の Jaumann 速度に時間増分を乗じた応力増分としている. そのため, その応力増分を Cauchy 応力増分に変換するために時刻 t におけるスピントテンソル ${}^t W$, ストレッチングテンソル ${}^t D$, Cauchy 応力テンソル ${}^t T$ を用いて式(4.3.27)のような操作を行っている. Consistent な構成式テンソルを求めるためには, 上記で述べてきたように時刻 t' での微分を行っている. 時刻 t' での微分を行った場合, 式(4.3.27)の右辺では第1項以外は消去され, 構成方程式の取り扱いが微小ひずみの場合と全く同じになる. ゆえに大ひずみ問題においても \mathbf{C}^{ep} の代わりに, 式(4.3.61)の \mathbf{C}^{ep*} を Consistent な弾塑性構成式テンソルとして用いることが可能である.

4.3.4 応力積分経路

弾塑性材料を扱う際には経路依存性を忠実に守るために, 応力積分経路についても細心の注意を払わなくてはならない[H1].

今, 時刻 t における応力状態 ${}^t \sigma$ が既知で, 次に時刻 t' における応力状態 ${}^{t'} \sigma$ を求めることを考える. その場合, 陽解法・陰解法を問わずに応力積分経路としては2つの方法が考えられる. ひとつは反復点ごとに応力積分を行う方法である.

$${}^{t'} \sigma = {}^t \sigma + \int_t^{t_1} d\sigma + \int_{t_1}^{t_2} d\sigma + \dots + \int_{t_n}^{t'} d\sigma \quad (4.3.62)$$

ここで時刻 t から t' 間の反復点における時刻を t_1, t_2, \dots, t_n としている. そしてもうひとつは, 直前の収束点から応力積分を行う方法である.

$${}^{t'} \sigma = {}^t \sigma + \int_t^{t'} d\sigma \quad (4.3.63)$$

式(4.3.62)の方法では, すべての反復点を結ぶ経路を応力積分経路としている. そのため明らかに積分経路が実際よりも長く蛇行しており, 正しい応力積分となっていない[H1]. それに対して, 式(4.3.63)ではそれぞれの収束つり合い点を線分で結ぶ経路に沿って応力積分経路を取っている. 隣接するつり合い点間を線分で近似することの誤差は, ステップサイズを十分小さくすることで解消できる. ゆえに弾塑性解析における応力積分経路は式(4.3.63)の方法を用いるべきである.

4.3.5 除荷の取り扱い

除荷の判定は時刻 t においてすでに降伏しているサンプリング点でのみ行い, 時刻 t において弾性状態であるサンプリング点ではこの判定は不要である. 除荷の判定は陽解法・陰解法ともに時刻 t における降伏応力 ${}^t \sigma_y$ と, 応力積分における試行応力 ${}^t \sigma^m$ とを比較することによって行われる. まず反復過程において時刻 t' における試行応力による相当応力を評価する.

$${}^t \bar{\sigma}^m = \sqrt{\frac{3}{2} ({}^t \sigma^m : {}^t \sigma^m)} \quad (4.3.64)$$

そして, ${}^t \bar{\sigma}^m$ が ${}^t \sigma_y$ よりも小さければ除荷と判定される. 試行応力を求める際に陰解法では弾性テンソル \mathbf{C} を用いるので, Elastic Predictor 法と言われる. それに対して陽解法では \mathbf{C}^{ep} を用いるので Tangential Predictor 法と言われる[H1]. 弧長法においてすでに降伏しているサンプリング点のうちの1つでも除荷と判定された場合は, そこまでの反復計算はもはやまったく意味を成さない. よって直前の収束点まで戻り, 除荷と判定されたサンプリング点を弾性状態として反復計算をやり直す. やり直した反復計算においても新たな除荷が発生しないとは限らないし, 先に除荷と判定して弾性状態に変更したサンプリング点が再び負荷と判定される場合もある. つまり, 反復計算を行いながらすべてのサンプリング点の負荷・除荷

をチェックし、何度も反復計算をやり直す必要がある。そして時刻 t での接線剛性マトリクス形成時に仮定したすべてのサンプリング点における負荷・除荷パターンと、時刻 t' までの応力増分が構成式に矛盾なく対応している時のみ、時刻 t から t' までの反復計算は正しいものであると言える [U1]。

また上記の方法は、本研究で用いるような硬化型の構成方程式の場合についてのみ有効である。軟化型の構成方程式の場合は、降伏が続行する場合でも相当応力が減少するため、上記のような試行応力のみでは除荷の判定はできない。よって相当塑性ひずみ等の助けが必要になる[C7]。なお除荷の判定は本来、収束計算のすべての反復点において行わなくてはならないが、弧長法における予測子に対する判定だけで十分な場合が多い。

4.4 結語

本章では弾塑性有限要素解析におけるつり合い経路の追跡法について述べた。本章の要点を以下に示す。

1. 非線形なつり合い経路を追跡するための弧長制御法について概説した。この弧長制御法は曲率の大きくなりがちな不安定領域におけるつり合い経路を、荷重制御法や変位制御法に比べて効率よく追跡できる。
2. 弧長制御法における追跡方向の決定方法を提案した。この方法を用いれば、わずかな手続きを加えるだけでつり合い経路を後戻りすることなく安定に非線形なつり合い経路を追跡することが可能となる。
3. 応力積分においては、陽解法と陰解法の2つを示すと共に、大ひずみ問題でも有効となるようにそれらの理論の拡張を行った。
4. 弾塑性構成方程式を有限応力増分と有限ひずみ増分間の接線関係となるように書き換え、陰解法における後退型応力積分アルゴリズムに Consistent な弾塑性構成方程式を示した。この Consistent な構成式テンソルを用いることによって弧長制御法の反復計算において2次の収束が保証され、有限要素解析において大きなステップサイズを選択が可能である。しかしながら、大きなステップサイズにおいても、弾塑性挙動の履歴を忠実に再現しているかは疑問が残るところである。弾塑性解析においてはやはり小さなステップサイズを選択するというのが大前提であろう。

第5章

弾塑性分岐条件

5.1 緒言

本章では Hill の弾塑性分岐条件式の意味するところを示した上で、有限要素解析で弾塑性分岐条件をどのように与えたらよいかを考察する。また分岐点は一般に特異点として与えられるが、つり合い経路上の特異点は分岐点だけでなく荷重極限点も存在する。有限要素分岐解析においては、これら2つの特異点の分類も重要であるので、本章では特異点の分類についても触れることにする。

5.2 Hill の分岐条件と通常分岐条件との等価性

弾塑性分岐問題において広く議論されている Hill[H7]の弾塑性分岐条件式は、体積 v の物体において以下のような形で与えられる[W7]。

$$I = \int_v \left[\dot{S}^* : \dot{E}^* + S : (\text{grad}^T \dot{u}^* \cdot \text{grad } \dot{u}^*) \right] dv = 0 \quad (5.2.1)$$

ここで、 S は第2Piola-Kirchhoff 応力テンソル、 E は Green-Lagrange ひずみテンソル、そして \dot{u} は変位速度ベクトルである。また右肩の * は分岐経路方向と主経路方向の解の差を示す。この式(5.2.1)は、つり合い方程式における分岐経路方向と主経路方向の2次項の差がゼロとなることを意味している。

今、Updated Lagrangian 法を考えると、時刻 t における現配置を基準配置にとると、時刻 t での式(5.2.1)は、

$$I = \int_v \left[\dot{S}^* : \dot{E}^* + S : (\text{grad}^T \dot{u}^* \cdot \text{grad } \dot{u}^*) \right] d^t v = 0 \quad (5.2.2)$$

ここで、

$$\dot{S} = \dot{T} \quad (5.2.3)$$

また、以下のような関係が成立する。

$$\dot{E} = F^T \cdot D \cdot F \quad (5.2.4)$$

$$F = I \quad (5.2.5)$$

式(5.2.4),(5.2.5)より、次式が成立する。

$$\begin{aligned} \dot{E} &= F^T \cdot D \cdot F \\ &= I^T \cdot D \cdot I \\ &= D \end{aligned} \quad (5.2.6)$$

ただし、ここで F 、 D 、 I はそれぞれ変形勾配テンソル、ストレッチングテンソル、単位テンソルである。

ゆえに、式(5.2.2)は以下ようになる。

$$I = \int_v \left[\dot{S}^* : D^* + T : (\text{grad}^T \dot{u}^* \cdot \text{grad } \dot{u}^*) \right] d^t v = 0 \quad (5.2.7)$$

次に Hill[H7]によって考案された線形比較体(Comparison Solid)を導入する。これは、時刻 t の現配置で降伏しているサンプリング点においては、主経路方向にも分岐経路方向にも降伏が引き続き続行すると仮定し、除荷の可能性を一切排除した材料である。

Truesdell 応力速度 \dot{S} とストレッチングテンソル D を結びつける構成方程式は、式(3.4.20)と同様に以下のように書き表される。

$$\dot{S} = \dot{C}^{ep} : D \quad (5.2.8)$$

ここで、 \dot{C}^{ep} は降伏しているサンプリング点においては負荷と除荷によってそれぞれ異なった値をとる。

線形比較体では除荷の可能性を排除して、降伏している点については次の段階の変形挙動に関わらず負荷状態が続行するという仮定をとる。

$$\dot{S}_{II} = \dot{C}^c : D_{II} \quad (5.2.9)$$

$$\dot{S}_I = \dot{C}^c : D_I \quad (5.2.10)$$

ここで、右下付きの II は分岐経路方向の解、 I は主経路方向の解を意味する。

\dot{C}^c については現配置の時刻 t において弾性状態の場合には、線形比較体を用いる必要はなく、弾性構成式テンソルが用いられる。

$$\dot{C}^c = \dot{C} \quad (5.2.11)$$

そして、時刻 t において降伏している場合には、次の段階の挙動によらず常に負荷となる。

$$\dot{C}^c = \dot{C}^{ep} \quad (5.2.12)$$

式(5.2.9)より式(5.2.10)を引くと,

$${}^i\dot{S}_H - {}^i\dot{S}_I = {}^i\tilde{C}^c : (D_H - D_I) \quad (5.2.13)$$

式(5.2.13)を右肩の * 記号を用いて表すと,

$${}^i\dot{S}^* = {}^i\tilde{C}^c : D^* \quad (5.2.14)$$

式(5.2.14)を式(5.2.7)に代入すると,

$$\begin{aligned} I &= \int_v [({}^i\tilde{C}^c : D^*) : D^* + {}^iT : (\text{grad}^T {}^i\dot{u}^* \cdot \text{grad} {}^i\dot{u}^*)] d^i v \\ &= \int_v [D^* : ({}^i\tilde{C}^c : D^*) + {}^iT : (\text{grad}^T {}^i\dot{u}^* \cdot \text{grad} {}^i\dot{u}^*)] d^i v \end{aligned} \quad (5.2.15)$$

一般的な形状関数を用いて離散化すると, 式(5.2.15)は次のようになる.

$$\begin{aligned} I &= \int_v [({}^i\mathbf{B}_L^T {}^i\dot{u}^*)^T {}^i\tilde{C}^c ({}^i\mathbf{B}_L^T {}^i\dot{u}^*) + {}^i\mathbf{T} ({}^i\mathbf{B}_{NL}^T {}^i\dot{u}^*) ({}^i\mathbf{B}_{NL}^T {}^i\dot{u}^*)] d^i v \\ &= \int_v [{}^i\dot{u}^{*T} {}^i\mathbf{B}_L^T {}^i\tilde{C}^c {}^i\mathbf{B}_L^T {}^i\dot{u}^* + {}^i\dot{u}^{*T} {}^i\mathbf{B}_{NL}^T {}^i\mathbf{T} {}^i\mathbf{B}_{NL}^T {}^i\dot{u}^*] d^i v \end{aligned} \quad (5.2.16)$$

ここで \mathbf{u} は式(2.3.2)で与えられるような節点変位増分ベクトルである. また ${}^i\mathbf{B}_L$ は式(2.3.7), ${}^i\mathbf{B}_{NL}$ は式(2.3.10), ${}^i\mathbf{T}$ は式(2.3.18), そして ${}^i\tilde{C}^c$ は式(3.4.21)のようにそれぞれマトリクス表示される.

式(5.2.16)はさらに以下のように書き換えられる.

$$I = {}^i\dot{u}^{*T} ({}^i\mathbf{k}_L^c + {}^i\mathbf{k}_{NL}) {}^i\dot{u}^* = 0 \quad (5.2.17)$$

ここで,

$${}^i\mathbf{k}_L^c = \int_v {}^i\mathbf{B}_L^T {}^i\tilde{C}^c {}^i\mathbf{B}_L d^i v \quad (5.2.18)$$

$${}^i\mathbf{k}_{NL} = \int_v {}^i\mathbf{B}_{NL}^T {}^i\mathbf{T} {}^i\mathbf{B}_{NL} d^i v \quad (5.2.19)$$

また ${}^i\dot{u}^*$ は,

$${}^i\dot{u}^* = {}^i\dot{u}_H - {}^i\dot{u}_I \quad (5.2.20)$$

式(5.2.20)より, 式(5.2.17)は

$$I = ({}^i\dot{u}_H - {}^i\dot{u}_I)^T ({}^i\mathbf{k}_L^c + {}^i\mathbf{k}_{NL}) ({}^i\dot{u}_H - {}^i\dot{u}_I) = 0 \quad (5.2.21)$$

ここで, ${}^i\mathbf{k}_{NL}$ は第2章で誘導した Updated Lagrangian 定式化における幾何剛性マトリクスそのものである. また ${}^i\mathbf{k}_L^c$ において, 通常の初期変位マトリクス ${}^i\mathbf{k}_L$ と異なるのは4階の構成式テンソルの部分だけである. よって, ${}^i\mathbf{k}_L$ から降伏しているサンプリング点において除荷の可能性を明確に排除することにより ${}^i\mathbf{k}_L^c$ を得ることができる.

式(5.2.21)が要素レベルで離散化された Hill の分岐条件式である. そして計算対象となる系全体で式(5.2.21)をアセンブルすることにより, 系全体としての Hill の分岐条件式が以下のように得られる.

$$({}^i\dot{U}_H - {}^i\dot{U}_I)^T ({}^i\mathbf{K}_L^c + {}^i\mathbf{K}_{NL}) ({}^i\dot{U}_H - {}^i\dot{U}_I) = 0 \quad (5.2.22)$$

ここで, 以下のような線形比較体を用いた系全体での接線剛性マトリクス ${}^i\mathbf{K}^c$ を定義する.

$${}^i\mathbf{K}^c = {}^i\mathbf{K}_L^c + {}^i\mathbf{K}_{NL} \quad (5.2.23)$$

この場合, 系全体で離散化された Hill の分岐条件式(5.2.22)においては, 次のような条件式が成立する.

$${}^i\mathbf{K}^c {}^i\dot{U}^* = 0 \quad (5.2.24)$$

式(5.2.24)において, 非ゼロの ${}^i\dot{U}^*$ が存在する時に分岐が発生すると考えることができる[T1]ので, Hill の分岐条件は ${}^i\mathbf{K}^c$ が特異マトリクスであるという条件となる.

$$\det {}^i\mathbf{K}^c = 0 \quad (5.2.25)$$

${}^i\mathbf{K}^c$ を線形比較体による架空の接線剛性マトリクスとした場合, 式(5.2.25)は Updated Lagrangian 法によって得られる真の接線剛性マトリクス ${}^i\mathbf{K}$ を用いた弾性問題における分岐条件式(5.2.26)と同じ式の形態である[W7].

$$\det {}^i\mathbf{K} = 0 \quad (5.2.26)$$

${}^i\mathbf{K}^c$ と ${}^i\mathbf{K}$ の違いは初期変位マトリクス ${}^i\mathbf{K}_L$ 中の4階の弾塑性構成式テンソル ${}^i\tilde{C}^p$ の部分だけである. そして通常の接線剛性マトリクス ${}^i\mathbf{K}$ で, 降伏しているサンプリング点において除荷の可能性を排除すれば, ${}^i\mathbf{K}^c$ と ${}^i\mathbf{K}$ は全く同一のものとなる. ゆえに Hill による線形比較体という概念[H7]を導入した架空の接線剛性マトリクスを用いなくても, 連続体力学に

忠実な有限要素法の定式化を行い、それから得られる真の接線剛性マトリクス \mathbf{K} から除荷の可能性をすべて排除することによって、Hillの線形比較体を用いた場合と全く同様にして弾塑性分岐点の評価が可能である。本研究では、第2章で定式化した真の接線剛性マトリクス \mathbf{K} を用いて弾塑性分岐点の評価することにする。

ここではHillの弾塑性分岐条件を否定しているのではない。ただUpdated Lagrangian法で得られる真の接線剛性マトリクスにおいて、降伏しているサンプリング点から除荷の可能性を排除してそれが特異マトリクスになるとして分岐の可能性を議論する場合と、Hillの線形比較体を用いた分岐条件が全く等価であるということここでは強調したいだけである。

ただ、上記のHillの分岐条件にしても、本研究で用いる分岐条件にしても、それらが常に真の弾塑性分岐点を与えるかどうかは疑問が残る。主経路においてすでに除荷が発生して、なおかつその除荷領域が刻々と進展しているような状況においては、例えば本研究における分岐条件を用いてうまく分岐解析を行えたとしても、果たしてその分岐点を実挙動としての真の分岐点を捉えているかどうかは議論の余地があると思われる。ただし本研究で扱う塑性不安定現象は、主経路においてはすべてのサンプリング点で一切除荷が発生しないため、除荷の可能性を排除するという仮定と実際の挙動が一致し、本節で述べた弾塑性分岐条件において真の分岐点を与えることになる。

5.3 安定性の判別

前節で述べたように、Updated Lagrangian法から得られる接線剛性マトリクスにおいて、降伏しているサンプリング点から除荷の可能性を排除することによって、弾性問題と同じように分岐点の評価が可能である。そこで本節では、除荷の可能性を排除した場合の安定性の判別方法について述べる。なお除荷の可能性を排除しているわけであるから、以下の議論は弾性の場合でも成立するものである。

N 個の自由度 \mathbf{U} 、荷重変数 P における時刻 t での平衡状態から微小変位増分ベクトル $d\mathbf{U}$ ($d\mathbf{U} \neq 0$)により系内部に蓄えられるひずみエネルギーである、図5.1の斜線部によって示される面積 ΔS を、増分過程の間は接線剛性マトリクス \mathbf{K} が一定であるとして、2次形式[T2]を用いて表現すると次のようになる。

$$\Delta S = \frac{1}{2} d\mathbf{U}^T \mathbf{K} d\mathbf{U} \quad (5.3.1)$$

本来は接線剛性マトリクスを \mathbf{K} と表現すべきであるが、簡略化のため本節以降では t の記号をはずして単に \mathbf{K} とする。そして、このときすべての変位増分ベクトル $d\mathbf{U}$ に対して、 ΔS の値が正となるようであるならば、系はそのつり合い状態において安定である。ゆえに系が安定であるための十分条件は、すべての $d\mathbf{U}$ に対して次式のようになることである。

$$d\mathbf{U}^T \mathbf{K} d\mathbf{U} > 0 \quad (5.3.2)$$

逆にこの安定性の前提が最初に崩れるのは、内部エネルギーを放出するような変位増分ベクトル $d\mathbf{U}$ がただ1つでも存在する場合であり、このとき系が不安定となる。ゆえに系が不安定であるための十分条件は、次式が成立する $d\mathbf{U}$ がただ1つでも存在することである。

$$d\mathbf{U}^T \mathbf{K} d\mathbf{U} < 0 \quad (5.3.3)$$

このような、系が不安定となる $d\mathbf{U}$ のモードを詳しく調べるために、いま N 自由度の系の \mathbf{K} をその固有値 λ_j と固有ベクトル θ_j を用いて、スペクトル展開すると

$$\mathbf{K} = \sum_{j=1}^N \lambda_j \theta_j \theta_j^T \quad (5.3.4)$$

これは \mathbf{K} が特異マトリクスの場合でも成立する。また基底ベクトルとして固有ベクトル θ_j を用いて、 $d\mathbf{U}$ を表現すると

$$d\mathbf{U} = \sum_{j=1}^N (\theta_j^T d\mathbf{U}) \theta_j \quad (5.3.5)$$

式(5.3.4)、(5.3.5)を不等式(5.3.3)の中に代入し、固有ベクトルの直交性を考慮すると、不等式(5.3.3)は

$$\sum_{j=1}^N \lambda_j (\theta_j^T d\mathbf{U})^2 < 0 \quad (5.3.6)$$

式(5.3.6)の左辺において $(\theta_j^T d\mathbf{U})^2$ はゼロまたは正値をとる。したがって、不安定条件が成立するためには少なくとも1個は \mathbf{K} に負の固有値が存在しなくてはならない。例えば $\lambda_m < 0$ のとき θ_m と同じ方向の変位増分 $d\mathbf{U}$ に対して系は明らかに不安定となる。これとは逆に、安定であるためには \mathbf{K} のすべての固有値が正値でなくてはならない。よってつり合い経路を追跡する際に \mathbf{K} の負の固有値の有無をモニターすることによって安定・不安定を判別でき、その限界点ではゼロ固有値が発生する。この限界点は特異点と呼ばれ、図5.2のように荷重極限点と分岐点とに分類される[H13]。

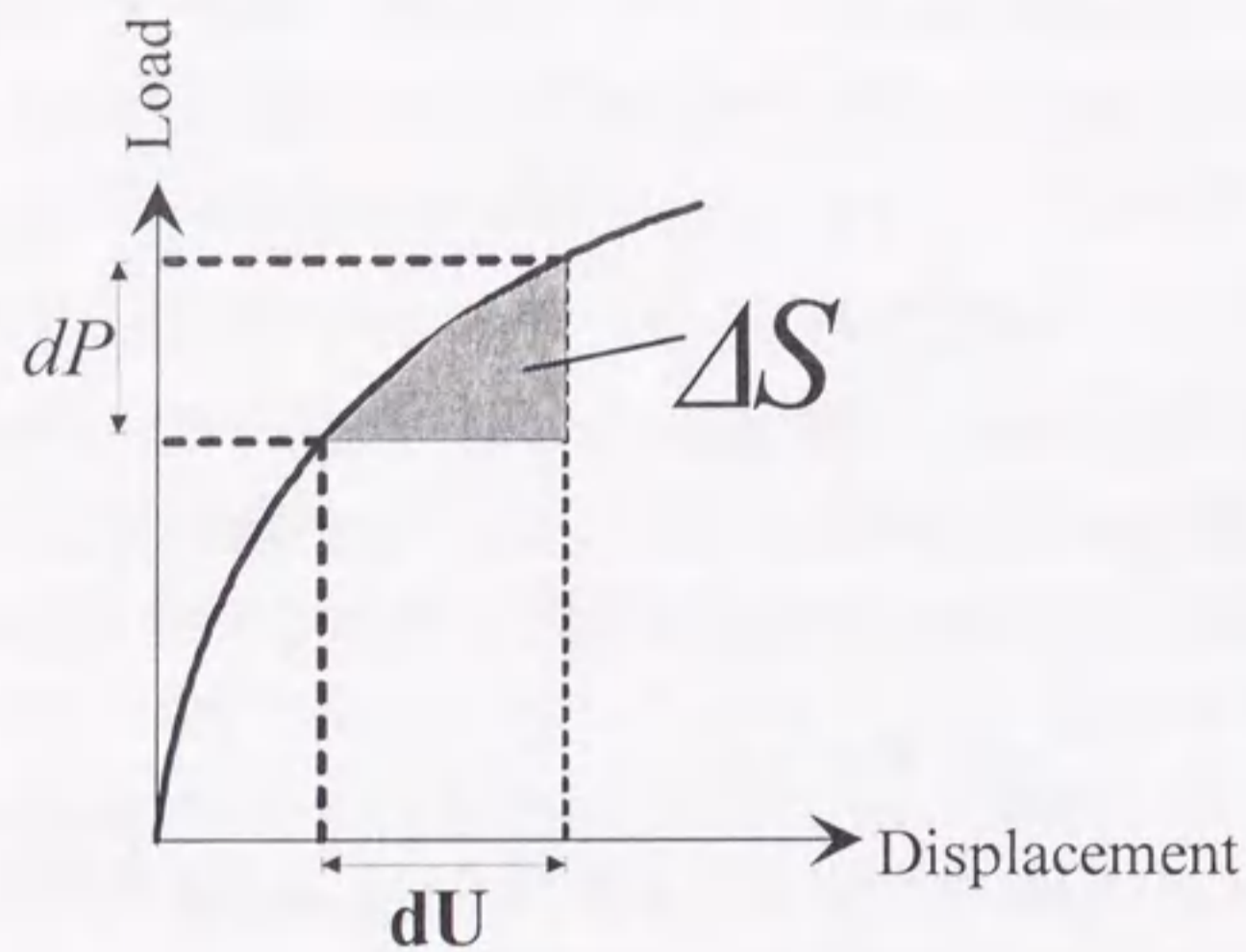


図 5.1 系内部に蓄えられるひずみエネルギー ΔS の定義

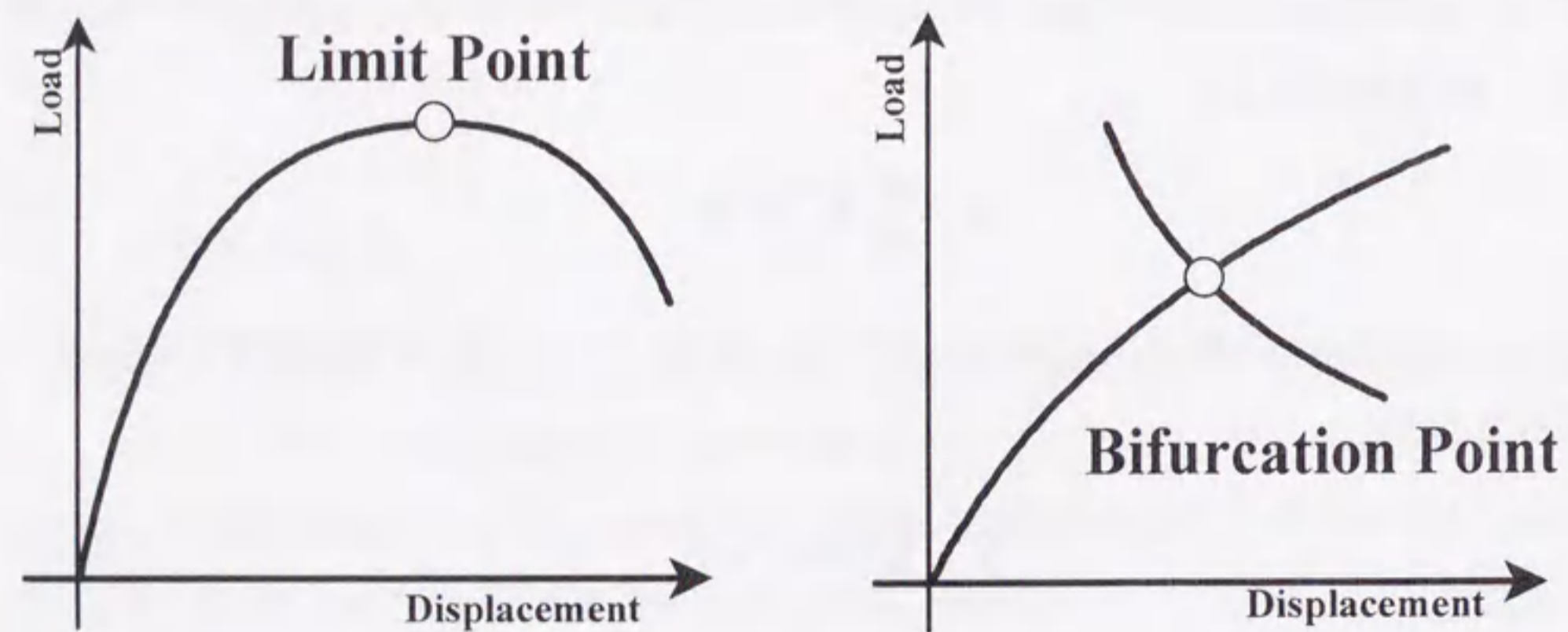


図 5.2 荷重極限点と分岐点

5.4 特異点の分類

特異点の分類を行うために、現在点において座標変換を行い接線剛性マトリクス \mathbf{K} の対角化を試みる。いま座標変換前の変位増分ベクトルを $d\tilde{\mathbf{U}}$ 、荷重モードベクトルを $\tilde{\mathbf{e}}$ として次式で与えられるような変換マトリクス \mathbf{H} を導入する。

$$d\mathbf{U} = \mathbf{H} d\tilde{\mathbf{U}} \quad (5.4.1)$$

$$\mathbf{e} = \mathbf{H} \tilde{\mathbf{e}} \quad (5.4.2)$$

\mathbf{K} を対角化するためには、 \mathbf{K} の正規化された N 個の固有ベクトル θ_j を用いて次のように \mathbf{H} を設定する。

$$\mathbf{H} = [\theta_1 \ \theta_2 \ \dots \ \theta_N] \quad (5.4.3)$$

荷重増分および荷重モードベクトルをそれぞれ dP 、 \mathbf{e} とした場合の線形化方程式は、

$$\mathbf{K}d\mathbf{U} = dP\mathbf{e} \quad (5.4.4)$$

式(5.4.4)に、式(5.4.1)と式(5.4.2)を代入すると、

$$\mathbf{K} \mathbf{H} d\tilde{\mathbf{U}} = dP \mathbf{H} \tilde{\mathbf{e}} \quad (5.4.5)$$

式(5.4.5)の両辺の左側から \mathbf{H}^T を掛けて、左辺を固有値 λ_j を用いて表せば

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & \lambda_N \end{bmatrix} d\tilde{\mathbf{U}} = dP \tilde{\mathbf{e}} \quad (5.4.6)$$

ここで、例えば特異点において $\lambda_1 = 0$ の場合を考えれば、 $d\tilde{\mathbf{U}}$ と $\tilde{\mathbf{e}}$ の第1成分をそれぞれ $d\tilde{U}_1$ 、 \tilde{e}_1 とすると、式(5.4.6)の第1行目の方程式は

$$0 \times d\tilde{U}_1 = dP \tilde{e}_1 \quad (5.4.7)$$

これが非ゼロの解 $d\tilde{U}_1$ を持つためには、右辺項 $dP \tilde{e}_1$ について次式が成立する。

$$dP \tilde{e}_1 = 0 \quad (5.4.8)$$

式(5.4.8)より、式(5.4.7)は次の形式をとらねばならない。

$$0 \times d\tilde{U}_1 = 0 \quad (5.4.9)$$

式(5.4.8)を固有ベクトル θ_1 と荷重モードベクトル \mathbf{e} を用いて表すと,

$$dP \theta_1^T \mathbf{e} = 0 \quad (5.4.10)$$

また, 式(5.4.2)を用いると式(5.4.6)の解 $d\tilde{\mathbf{U}}$ は, 次のようになる.

$$d\tilde{\mathbf{U}} = \begin{Bmatrix} C \\ dP \frac{\theta_2^T \mathbf{e}}{\lambda_2} \\ \vdots \\ dP \frac{\theta_N^T \mathbf{e}}{\lambda_N} \end{Bmatrix} \quad (5.4.11)$$

ただし,

$$d\tilde{\mathbf{U}}_1 = C \quad (5.4.12)$$

ここで, $C (\neq 0)$ は式(5.4.9)における(0/0)による不定解である.

式(5.4.11)をさらに $d\mathbf{U}$ に変換すると

$$d\mathbf{U} = C \theta_1 + dP d\mathbf{U}_p \quad (5.4.13)$$

ただし, 右辺の第1項, 第2項はそれぞれ余解($C \theta_1$), 特解($dP d\mathbf{U}_p$)を表し,

$$d\mathbf{U}_p = \sum_{j=2}^N \frac{(\theta_j^T \mathbf{e})}{\lambda_j} \theta_j \quad (5.4.14)$$

また,

$$\mathbf{K} \theta_1 = \mathbf{0} \quad (5.4.15)$$

$$\mathbf{K} d\mathbf{U}_p = \mathbf{e} \quad (5.4.16)$$

すなわち \mathbf{K} が (λ_1, θ_1) をクリティカルな固有ペアとして持つ特異マトリクスするとき, 式(5.4.10)が成立するならば, 式(5.4.4)の一般解は式(5.4.13)のようになる.

次に式(5.4.10)の条件を考える. まず, 以下のような場合を想定する.

$$\theta_1^T \mathbf{e} \neq 0 \text{ and } dP = 0 \quad (5.4.17)$$

この場合, 式(5.4.4)は同次連立方程式に帰着される.

$$\mathbf{K} d\mathbf{U} = \mathbf{0} \quad (5.4.18)$$

ここで, 自明解以外の解は明らかに次のようである.

$$d\mathbf{U} = C \theta_1 \quad (5.4.19)$$

これは, 一般解の式(5.4.13)で $dP=0$ で特解が消滅するとしても求まる. 式(5.4.17)が成り立つ特異点でのつり合い経路の接線ベクトルは,

$$\begin{pmatrix} d\mathbf{U} \\ dP \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C \theta_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.4.20)$$

C は不定であるが, どのような $C (\neq 0)$ に対しても接線ベクトル($d\mathbf{U}, dP$)が同じ固有ベクトル θ_1 の方向を向くことになるので, 経路の枝別れは発生せずに経路の伸びる方向の唯一性を保証する. しかも $dP=0$ であるので荷重変数 P の折り返し点である. すなわち, このような特異点は荷重極限点である.

次に, 次式(5.4.21)の場合を考える.

$$\theta_1^T \mathbf{e} = 0 \text{ and } dP \neq 0 \quad (5.4.21)$$

式(5.4.21)のため, 特解 $dP d\mathbf{U}_p$ は存在し, 式(5.4.13)の一般解 $d\mathbf{U}$ は多価性を有して, 主経路の解 $d\mathbf{U}_I$ 以外にも, 別の解 $d\mathbf{U}_{II}$ が存在する. ただし

$$d\mathbf{U}_I = C_I \theta_1 + dP d\mathbf{U}_p \quad (5.4.22)$$

$$d\mathbf{U}_{II} = C_{II} \theta_1 + dP d\mathbf{U}_p \quad (5.4.23)$$

これは, つり合い経路が主経路($d\mathbf{U}_I, dP$)とは異なる別の方向($d\mathbf{U}_{II}, dP$)にもつり合い解が存在する可能性を示すもので, このような特異点は分岐点となる. つまりクリティカルな固有ベクトルと荷重モードベクトルが直交する場合にその特異点は分岐点であり, そうでないときは荷重極限点であることが分かる. また両者が一致する特別な場合は, 頂上分岐と呼ばれる[F7][O2].

5.5 結語

本章では弾塑性分岐条件と、特異点の分類について述べた。本章で得られた結果をまとめると以下のようなになる。

1. 線形比較体という概念を用いて弾塑性材料の分岐条件を与える Hill の分岐条件式は、Updated Lagrangian 法において得られる接線剛性マトリクスから除荷の可能性を排除した場合に、それが特異マトリクスとなる条件と全く等価である。よって線形比較体による Hill の分岐条件に頼らなくても、通常の接線剛性マトリクスのみで弾塑性分岐点の評価が可能であり、さらに除荷の可能性を排除しているのであるから、その特異性を弾性問題と同様に扱うことができる。
2. 接線剛性マトリクスの負の固有値の有無により、系としての安定性を評価できる。またその限界点では特異マトリクスとなり、少なくとも1つのゼロ固有値が発生する。
3. つり合い経路上の特異点は分岐点と荷重極限点に分類され、その分類方法はクリティカルな固有ベクトルと荷重モードベクトルを用いることによって可能である。これら2つが直交している時が分岐点、そうでない時が荷重極限点である。
4. 主経路上ですでに除荷が発生して、なおかつその除荷領域が刻々と進展している状況においては、Hill の分岐条件や本研究で用いる分岐条件によって真の分岐点を捉えているかは議論の余地がある。しかしながら本研究で扱う塑性不安定現象は主経路上で一切除荷が発生しないので、これらの分岐条件で真の分岐点の評価できる。

第6章

弾塑性分岐解析法

6.1 緒言

前章のような方法で弾塑性分岐点を捉えたとしても、その後、実際に分岐経路へアクセスして分岐経路を追跡しなければ分岐後の不安定挙動などを解析することはできない。しかしながら弾塑性材料ではすべてのサンプリング点における負荷・除荷が関与してくるため、分岐経路への切り換えのための数理手続きは、弾性問題に比べて遥かに複雑なものになるということは容易に想像がつく。

分岐点における分岐方向を予測するには、弾性問題[H8][H9]と同様にクリティカルな固有ベクトルが必要となる。しかしながら有限要素解析における接線剛性マトリクスの固有値解析を実行することは、多大な時間、計算容量を必要とするため実用的でない。とりわけ本研究で扱うような塑性不安定解析では、極めて細かな要素分割が要求されるためその傾向は顕著である。そこで本章では固有値解析を行わなくてもクリティカルな固有ベクトルの近似値を求める方法を示した上で、弾塑性分岐問題における分岐経路へのアクセス方法について述べる。

6.2 接線剛性マトリクスの固有ペアの数理

分岐現象の特異性を特徴づけるには、接線剛性マトリクス \mathbf{K} の固有ペア(固有値とそれに対応する固有ベクトル)を用いると都合がよい。固有ペアを操作することによって、接線剛性マトリクスの特異性をうまく処理することが可能である。そこでまず固有ペアの数理[F6][F7][O2]に関する数学的背景について述べる。

6.2.1 正則剛性方程式の解

N 個の自由度 \mathbf{U} 、荷重変数 P で支配される保存系の時刻 t での平衡状態における接線剛性方程式は、

$$\mathbf{K}\mathbf{dU} = dP\mathbf{e} \quad (6.2.1)$$

ここで、 \mathbf{e} は規定された荷重モードベクトルである。また (\mathbf{dU}, dP) は増分接線解である。

\mathbf{K} を、その固有値 λ_j と正規化した固有ベクトル $\boldsymbol{\theta}_j$ を用いてスペクトル展開すると、

$$\mathbf{K} = \sum_{j=1}^N \lambda_j \boldsymbol{\theta}_j \boldsymbol{\theta}_j^T \quad (6.2.2)$$

\mathbf{K} が正則マトリクスである場合には、

$$\mathbf{K}^{-1} = \sum_{j=1}^N \frac{1}{\lambda_j} \boldsymbol{\theta}_j \boldsymbol{\theta}_j^T \quad (6.2.3)$$

また、式(6.2.1)の右辺の $dP\mathbf{e}$ を固有ベクトルで展開すると、

$$dP\mathbf{e} = dP \sum_{j=1}^N (\boldsymbol{\theta}_j^T \mathbf{e}) \boldsymbol{\theta}_j \quad (6.2.4)$$

そして、式(6.2.3)、(6.2.4)を用いると、式(6.2.1)で荷重増分 dP を規定した場合の解 \mathbf{dU} は、次のように表現することができる。

$$\mathbf{dU} = dP \sum_{j=1}^N \frac{\boldsymbol{\theta}_j^T \mathbf{e}}{\lambda_j} \boldsymbol{\theta}_j \quad (6.2.5)$$

6.2.2 修正剛性方程式の解

\mathbf{K} の s 番目の固有値に対応する固有ベクトル $\boldsymbol{\theta}_s$ を用いて、接線剛性マトリクスを次のように修正する。

$$\tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{K} + \lambda_s^* \boldsymbol{\theta}_s \boldsymbol{\theta}_s^T \quad (6.2.6)$$

ここで、 λ_s^* は任意に規定する定数である。

式(6.2.6)に式(6.2.2)を代入すると

$$\tilde{\mathbf{K}} = \sum_{j=1, j \neq s}^N \lambda_j \boldsymbol{\theta}_j \boldsymbol{\theta}_j^T + (\lambda_s + \lambda_s^*) \boldsymbol{\theta}_s \boldsymbol{\theta}_s^T \quad (6.2.7)$$

よって、 \mathbf{K} と $\tilde{\mathbf{K}}$ の固有ベクトルは同一となる。

式(6.2.1)の代わりに、式(6.2.6)の $\tilde{\mathbf{K}}$ を係数マトリクスに持つ修正剛性方程式を考える。

$$\tilde{\mathbf{K}}\mathbf{d}\tilde{\mathbf{U}} = dP\mathbf{e} \quad (6.2.8)$$

式(6.2.8)の解は、次のようになる。

$$\mathbf{d}\tilde{\mathbf{U}} = dP \left(\frac{\boldsymbol{\theta}_s^T \mathbf{e}}{\lambda_s + \lambda_s^*} \right) \boldsymbol{\theta}_s + dP \sum_{j=1, j \neq s}^N \frac{\boldsymbol{\theta}_j^T \mathbf{e}}{\lambda_j} \boldsymbol{\theta}_j \quad (6.2.9)$$

式(6.2.5)と式(6.2.9)より、正則剛性方程式の解 \mathbf{dU} と修正剛性方程式の解 $\mathbf{d}\tilde{\mathbf{U}}$ とを比較すると、 $\boldsymbol{\theta}_s$ の混入度のみが影響を受けており、他の固有ベクトルの混入度には全く影響がなく、注目する固有ベクトルの混入度を制御できることが分かる。

6.2.3 特異剛性方程式の解

式(6.2.1)の接線剛性マトリクスが特異マトリクスである場合を考える。この場合は接線剛性マトリクス \mathbf{K} の行列式がゼロとなる。

$$\det(\mathbf{K}) = 0 \quad (6.2.10)$$

さらにクリティカルな固有ペア (λ_s, θ_s) を用いて、その特異性を次のように特徴づけることができる。

$$\lambda_s = 0 \quad (6.2.11)$$

$$\mathbf{K}\theta_s = \mathbf{0} \quad (6.2.12)$$

式(6.2.1)の解 $d\mathbf{U}$ が存在するためには、式(6.2.5)の右辺の固有ベクトル θ_s の重みについて、分母の λ_s がゼロであるから分子についても次式が成立する必要がある。

$$\theta_s^T \mathbf{e} = 0 \quad (6.2.13)$$

したがって、式(6.2.1)の解 $d\mathbf{U}$ の一般形は次のようになる。

$$d\mathbf{U} = d\mathbf{U}_h + d\mathbf{U}_p \quad (6.2.14)$$

ここで、式(6.2.14)の右辺の第1項、第2項はそれぞれ同次解 $d\mathbf{U}_h$ と特解 $d\mathbf{U}_p$ であり

$$\mathbf{K}d\mathbf{U}_h = \mathbf{0} \quad (6.2.15)$$

$$\mathbf{K}d\mathbf{U}_p = d\mathbf{P}\mathbf{e} \quad (6.2.16)$$

また、

$$d\mathbf{U}_h = C\theta_s \quad (6.2.17)$$

$$d\mathbf{U}_p = dP \sum_{j=1, \neq s}^N \frac{\theta_j^T \mathbf{e}}{\lambda_j} \theta_j \quad (6.2.18)$$

式(6.2.17)の C は $(0/0)$ による不定係数である。さらに $d\mathbf{U}_p$ には固有ベクトル θ_s が含まれないので、同次解 $d\mathbf{U}_h$ と特解 $d\mathbf{U}_p$ は直交する。すなわち

$$d\mathbf{U}_h^T d\mathbf{U}_p = 0 \quad (6.2.19)$$

特解 $d\mathbf{U}_p$ を与える式(6.2.18)では、クリティカルな固有ペア以外のすべての固有ペアを必要

とするためこれを求めることは工学的には有用でない。そこで式(6.2.16)の接線剛性方程式を解くことによって特解 $d\mathbf{U}_p$ を求めることを考える。しかし、式(6.2.16)の \mathbf{K} は特異マトリクスであるためこのままでは解くことができないので、式(6.2.6)により修正剛性マトリクス $\tilde{\mathbf{K}}$ を作成する。この $\tilde{\mathbf{K}}$ はもはや特異マトリクスではなく、次の剛性方程式を解くことができる。

$$\tilde{\mathbf{K}}d\tilde{\mathbf{U}}_p = d\mathbf{P}\mathbf{e} \quad (6.2.20)$$

式(6.2.9), (6.2.11)より

$$d\tilde{\mathbf{U}}_p = dP \left(\frac{\theta_s^T \mathbf{e}}{\lambda_s^*} \right) \theta_s + dP \sum_{j=1, \neq s}^N \frac{\theta_j^T \mathbf{e}}{\lambda_j} \theta_j \quad (6.2.21)$$

式(6.2.13), (6.2.18), (6.2.21)より

$$d\mathbf{U}_p = d\tilde{\mathbf{U}}_p \quad (6.2.22)$$

式(6.2.6)で規定すべき値 λ_s^* の影響は全く消滅する。ゆえに λ_s^* は任意の実数を選択可能である。このように特異マトリクスにおける特解を、剛性方程式を1度解くだけで効率的に求めることができる。

6.3 分岐方向の予測

弾性問題の場合の分岐点における経路切り換えにおいては、幾何学的非線形性のみが関与して対称分岐・非対称分岐等の区別がなされるが[F7][F8][O2][O3]、弾塑性問題の場合には負荷・除荷の材料非線形性が関与してくるため、これらの区別が有効であるとは言い難い。そこで本節では、対称分岐・非対称分岐の区別はせずに、一般的な分岐挙動における分岐方向を予測する。

今、固有ペア (λ_s, θ_s) がクリティカルとなる分岐点において、同じ荷重増分 dP に対する主経路に沿う接線ベクトルを $(d\mathbf{U}_p, dP)$ 、分岐経路に沿うそれを $(d\mathbf{U}_h, dP)$ とする。

分岐点での線形化方程式は以下ようになる。

$$\mathbf{K}d\mathbf{U}_p = d\mathbf{P}\mathbf{e} \quad (6.3.1)$$

$$\mathbf{K}d\mathbf{U}_h = d\mathbf{P}\mathbf{e} \quad (6.3.2)$$

式(6.3.1), (6.3.2)の解は、特解を $d\mathbf{U}_p$ とすると式(6.2.14)~(6.2.18)よりそれぞれ

$$dU_I = C_I \theta_s + dU_p \quad (6.3.3)$$

$$dU_{II} = C_{II} \theta_s + dU_p \quad (6.3.4)$$

ただし, dU_p は式(6.2.18)で求められる特解であるが, (λ_s, θ_s) 以外の固有ペアをすべて求めなくても前節の修正剛性方程式を用いることによって効率的に求めることができる. 式(6.3.3), (6.3.4)から

$$dU_{II} = C \theta_s + dU_I \quad (6.3.5)$$

ただし,

$$C = C_{II} - C_I \quad (6.3.6)$$

ここで, dU_I は厳格には評価不可能である. そこで, 分岐点付近での主経路上の正則つり合い点において, 次式で求められるような単位荷重増分($dP=1.0$)に対する変位増分ベクトル dU_e を用いる.

$$\mathbf{K} dU_e = +e \quad (6.3.7)$$

そして, dU_I は dU_e を用いて十分な精度で次のように近似できる.

$$dU_I \cong dP dU_e \quad (6.3.8)$$

したがって分岐方向は, 次のように予測できる.

$$\begin{cases} dU_{II} \\ dP \end{cases} = \begin{cases} C \theta_s + dP dU_e \\ dP \end{cases} \quad (6.3.9)$$

また, この分岐方向の予測は Hill[H7]の分岐条件式からも誘導することができる. 前章で述べたように, 分岐点を評価する際に降伏しているサンプリング点において除荷の可能性を排除することによって, 線形比較体[H7]による架空の接線剛性マトリクス \mathbf{K}^c と, 真の接線剛性マトリクス \mathbf{K} は全く等価であるから, 以下の議論では次式が成立するものとする.

$$\mathbf{K}^c = \mathbf{K} \quad (6.3.10)$$

前章の Hill[H7]の分岐条件式は以下のように表された.

$$\dot{\mathbf{U}}^{*T} \mathbf{K} \dot{\mathbf{U}}^* = 0 \quad (6.3.11)$$

式(6.3.11)において接線剛性マトリクス \mathbf{K} をスペクトル展開すると, 以下のようになる.

$$\dot{\mathbf{U}}^{*T} \left(\sum_{j=1}^N \lambda_j \theta_j \theta_j^T \right) \dot{\mathbf{U}}^* = 0 \quad (6.3.12)$$

分岐点においては, 接線剛性マトリクスの固有値がゼロになる. よってここでは $\lambda_s = 0$ の場合を考えると, 式(6.3.12)は (λ_s, θ_s) 以外の固有ペアを用いて式(6.3.13)のように書ける.

$$\dot{\mathbf{U}}^{*T} \left(\sum_{j=1, s}^N \lambda_j \theta_j \theta_j^T \right) \dot{\mathbf{U}}^* = 0 \quad (6.3.13)$$

式(6.3.13)をさらに整理すると,

$$\sum_{j=1, s}^N \lambda_j (\dot{\mathbf{U}}^{*T} \theta_j)^2 = 0 \quad (6.3.14)$$

固有ベクトルの直交性を考慮すると式(6.3.14)を満たすためには, $\dot{\mathbf{U}}^*$ が以下のようにならなくてはならない.

$$\dot{\mathbf{U}}^* = C \theta_s \quad (6.3.15)$$

ここで C はゼロ以外の任意のスカラー係数である.

式(6.3.15)は

$$\dot{\mathbf{U}}_{II} - \dot{\mathbf{U}}_I = C \theta_s \quad (6.3.16)$$

式(6.3.16)より, 分岐経路方向の速度解は次の式(6.3.17)のように与えられる.

$$\dot{\mathbf{U}}_{II} = C \theta_s + \dot{\mathbf{U}}_I \quad (6.3.17)$$

この分岐方向の速度解は, 本研究で用いる分岐条件すなわち真の接線剛性マトリクスが特異であるという条件から導いた分岐方向の予測解である式(6.3.5)と同一である.

6.4 Scaled Corrector による近似固有ベクトルの導出

今, 特異点において固有ペア (λ_s, θ_s) がクリティカルとなる場合を考える. 式(6.2.3)より特異点付近では, 接線剛性マトリクスの逆マトリクス \mathbf{K}^{-1} において絶対値最小固有値 λ_s が支配的になる. よって特異点付近の \mathbf{K}^{-1} は固有ペア (λ_s, θ_s) のみを用いて, 次のように近似するこ

とができる。

$$\mathbf{K}^{-1} \equiv \frac{1}{\lambda_s} \mathbf{0}_s \mathbf{0}_s^T \quad (6.4.1)$$

式(6.4.1)は、分岐点付近での接線剛性マトリクスの逆マトリクス \mathbf{K}^{-1} のすべての列または行は、近似的にクリティカルな固有ベクトル $\mathbf{0}_s$ の方向を向いていることを意味する。ゆえに \mathbf{K}^{-1} の右側から $\mathbf{0}_s$ とは直交しない非ゼロベクトルを掛けることによって、容易に \mathbf{K}^{-1} から近似的なクリティカルな固有ベクトルを取り出すことが可能である。このような特質を有限要素分岐解析において効率的に用いるためには、分岐点付近での収束点直後の変位修正子ベクトルを計算すると都合がよい。なぜならこの変位修正子は、分岐点付近において \mathbf{K}^{-1} の右側から不つり合いベクトル \mathbf{E} を掛けて得られるもので、有限要素解析コードをわずかに書き換えるだけで近似固有ベクトルを求めることができる。

$$\mathbf{0}_s \equiv \mathbf{K}^{-1} \mathbf{E} \quad (6.4.2)$$

この変位修正子を正規化したものを本研究では“Scaled Corrector”と呼ぶことにする。このScaled Correctorを用いることによって、固有値解析を行うことなく分岐方向を予測するためのクリティカルな固有ベクトルの近似値を求めることが可能である[05]。

また分岐点付近での変位修正子がクリティカルな固有ベクトルの近似値に成り得ることは、すでに以下のようなアプローチでも示されている[N7][N8]。現在点が分岐点付近である場合、そこでの変位修正子ベクトル $\Delta \mathbf{U}$ は不つり合いベクトルがほとんどゼロベクトルであるので、以下のようになる。

$$\mathbf{K} \Delta \mathbf{U} \equiv \mathbf{0} \quad (6.4.3)$$

また分岐点においては接線剛性マトリクスの固有値がゼロとなるから、クリティカルとなる固有ベクトル $\mathbf{0}_s$ を用いて、分岐点付近で以下のような近似式が成立する。

$$\mathbf{K} \mathbf{0}_s \equiv \mathbf{0} \quad (6.4.4)$$

式(6.4.3)と式(6.4.4)とを比較すると、分岐点付近の収束点直後の変位修正子ベクトル $\Delta \mathbf{U}$ が、クリティカルな固有ベクトル $\mathbf{0}_s$ を近似できることを意味している。

$$\Delta \mathbf{U} \equiv \mathbf{0}_s \quad (6.4.5)$$

このように前者後者どちらのアプローチによっても、分岐点付近における収束点直後の変位

修正子ベクトルが、分岐方向の予測に必要となるクリティカルな固有ベクトルの近似値を与えるということに変わりはない。

ゆえに分岐点付近において、固有値解析を行わなくても剛性方程式を1度解くというわずかな手続きを加えるだけで、既存の有限要素解析コードをほとんど変更することなく、クリティカルな固有ベクトルの近似値を求めることができる。これによってクリティカルな固有ベクトルを求める際の計算労力が格段に軽減される。

6.5 固有ベクトルのスケージングの決定方法

有限要素法による分岐解析において最も問題になるのは、分岐経路に切り換えを行う際のクリティカルな固有ベクトルのスケージングパラメーター C の決定方法である。弾性問題においては、通常この不定パラメーター C が試行錯誤的に決定され[H8][H9][W8][K3]、分岐経路へのアクセスが常に成功するわけではない。また接線剛性マトリクス \mathbf{K} の微分項を用いる方法[K4][B7][T3]も考えられるが、これらの高次項の評価は実際の有限要素コードにおいては困難である。それに対して、弾塑性の場合には高次項を用いなくても、スケージングパラメーター C を決定する際に有用な情報を得ることができる。ここでは弾塑性問題の場合の固有ベクトルのスケージングパラメーター C の決定方法について述べる。

線形比較体を用いたHillの分岐条件の場合、また本研究で用いる分岐条件の場合でも、分岐点を評価する際にその点からの除荷の可能性を排除しているのであるから、実際の分岐の瞬間に除荷が発生してしまえば理論の整合性が成立しない[H11]。ゆえに固有ベクトルのスケージングパラメーター C は除荷が発生しないように決定するべきである。しかし選択する C が小さすぎると、反復計算において収束点が再び主経路に戻ってくる可能性がある。さらに分岐現象は突然これまでとは変形の進行方向が変化するのであるから、分岐することによって分岐の瞬間は除荷が発生しないとしても分岐経路にアクセスした後、分岐経路を追跡することによって、除荷が発生すると考えるのが妥当である。そこで最初に除荷が始まると考えられるサンプリング点が中立負荷となるように C を決定する。そうすることによってすべてのサンプリング点に除荷が発生しない範囲で、最も大きな C を選択することができる。

上記のような条件を満たす C は理論的には一意に決定される。しかしながら実際の有限要素解析においては、経路切り換えの際にあらかじめこの最適な C の値を知ることはできない。そこで本研究では、以下に述べるような方法で経路切り換えを行う。まず最初に、いくつかのサンプリング点が除荷となるような C を選択し、徐々に C の値をできるだけ小さい減少

幅で小さくしながらサンプリング点の負荷・除荷をチェックする。そしてすべてのサンプリング点で除荷が発生しなくなった時点での C を経路切り換えの際の C として適用する。このように C を決定することによって、分岐経路に向けての第1ステップ目では除荷が発生することなく分岐経路にアクセスすることができる。そして第2ステップ以降から除荷が発生し始める。ここで負荷・除荷のチェックは分岐点において降伏しているサンプリング点においてのみ必要であり、分岐点で弾性状態であるサンプリング点についてはチェックは不要である。

これらの議論は増分が無限に小さい速度形における連続体力学の範囲内において成立するものであるから、有限要素解析におけるステップサイズも経路切り換えの際には極力小さくしてはならない。また分岐経路に載った後でも、除荷領域が刻々と進展していくような塑性不安定問題では、除荷の進展具合を忠実に再現するために微小なステップサイズが必要不可欠である。そうしなければ、弾塑性材料の経路依存性を忠実に再現しているとは言えない。そのため塑性不安定解析における有限要素解析では、ステップサイズを大きく取れることが特徴である陰解法よりも、ステップサイズが小さいということを前提としている陽解法の方が向いているように思われる。

6.6 結語

本章では弾塑性分岐解析における分岐経路へのアクセス方法について述べたが、ここで得られた結果を以下にまとめる。

1. 固有ペアの数理により、分岐問題に絡む接線剛性マトリクスの特異性を難なく処理することができる。また修正剛性マトリクスを用いることによって、本来はクリティカルな固有ペア以外のすべての固有ペアが必要となる特異点上の特解を、剛性方程式を1度解くだけで効率的に求めることが可能である。
2. 分岐点における分岐方向は、主経路方向の解とクリティカルな固有ベクトルとの線形結合で与えられる。
3. Scaled Corrector を用いることによって、分岐経路にアクセスするために不可欠なクリティカルな固有ベクトルの近似値を、固有値解析を用いることなく求めることができる。この手法は特に細かな要素分割が要求される塑性不安定解析において、固有値解析で要求される膨大な計算時間を節約することができるため極めて有効な手段である。
4. 固有ベクトルのスケーリングパラメーターは、弾塑性分岐の場合においては理論上は一意に決定される。本章では有限要素解析におけるこのスケーリングパラメーターの具体的な決定方法を示した。

本章のような数理手続きを用いることによって、汎用的で効率的な弾塑性分岐解析が可能となる。