

## 第7章

### 2次元及び3次元状態における 塑性不安定解析

#### 7.1 緒言

本章では、これまでに述べてきた大変位大ひずみの弾塑性有限要素法及び分岐解析法を用いて塑性不安定解析を行う。ここでは2次元だけでなく3次元の塑性不安定解析を行うこととして、3次元解析では対象とする金属片の幅と厚さの比(幅厚比)を変化させたパラメトリック解析を行う。弾塑性構成方程式としては塑性不安定解析のための特別なものを用いず、金属材料において一般によく用いられている硬化型の  $J_2$  流れ則のみを使用することにする。そして、分岐解析を行うことによって塑性不安定現象における拡散くびれ現象だけでなく、その後の局所くびれやせん断帯などの、金属片破断の直接的な原因に至るような塑性変形の局所化現象までの挙動をシミュレートできるかどうかを検証する。

#### 7.2 2次元状態における塑性不安定解析

ここではまず2次元状態(平面ひずみ及び平面応力)における塑性不安定解析を行う。弾塑性構成方程式としては第3章で述べた  $J_2$  流れ則を用いることとして、塑性域においては次のような相当応力  $\bar{\sigma}$  と相当塑性ひずみ  $\bar{e}^p$  の関係を仮定する。

$$\bar{\sigma} = \sigma_y \left( 1 + \frac{\bar{e}^p}{e_y} \right)^n \quad (7.2.1)$$

$$e_y = \frac{\sigma_y}{E} = \frac{1}{500} \quad (7.2.2)$$

なお、ここでの相当塑性ひずみ  $\bar{e}^p$  としては、式(4.3.6)によって得られる  $\bar{D}^p$  を初期状態から現時刻まで積分した(足し合わせた)  $\int \bar{D}^p dt$  が用いられる。また本研究では微小ひずみ理論での Cauchy 応力  $\sigma$  に対して、一般的な Cauchy 応力は  $\mathbf{T}$  を用いているので、大ひずみ問題においては式(7.2.1)は次のように表すのが妥当である。

$$\bar{\mathbf{T}} = \sigma_y \left( 1 + \frac{\int \bar{D}^p}{e_y} \right)^n \quad (7.2.3)$$

ここで右下付き文字の“y”は降伏値を意味するものである。ヤング係数  $E=200(\text{GPa})$ 、ポアソン比  $\nu=0.3333$ 、そして式(7.2.1)または式(7.2.3)において  $n=0.0625$  と設定して、硬化型の弾塑性構成方程式を表すものとする。図 7.1 が2次元解析において計算対象とした金属試験



片であるが、対称性により1/4部分のみの計算を行った。有限要素は4節点のアイソパラメトリック要素を用いて、断面方向に20、長手方向に120で1/4モデルを要素分割した。そして荷重は端部の変位が水平方向に一様となるように作用させた。

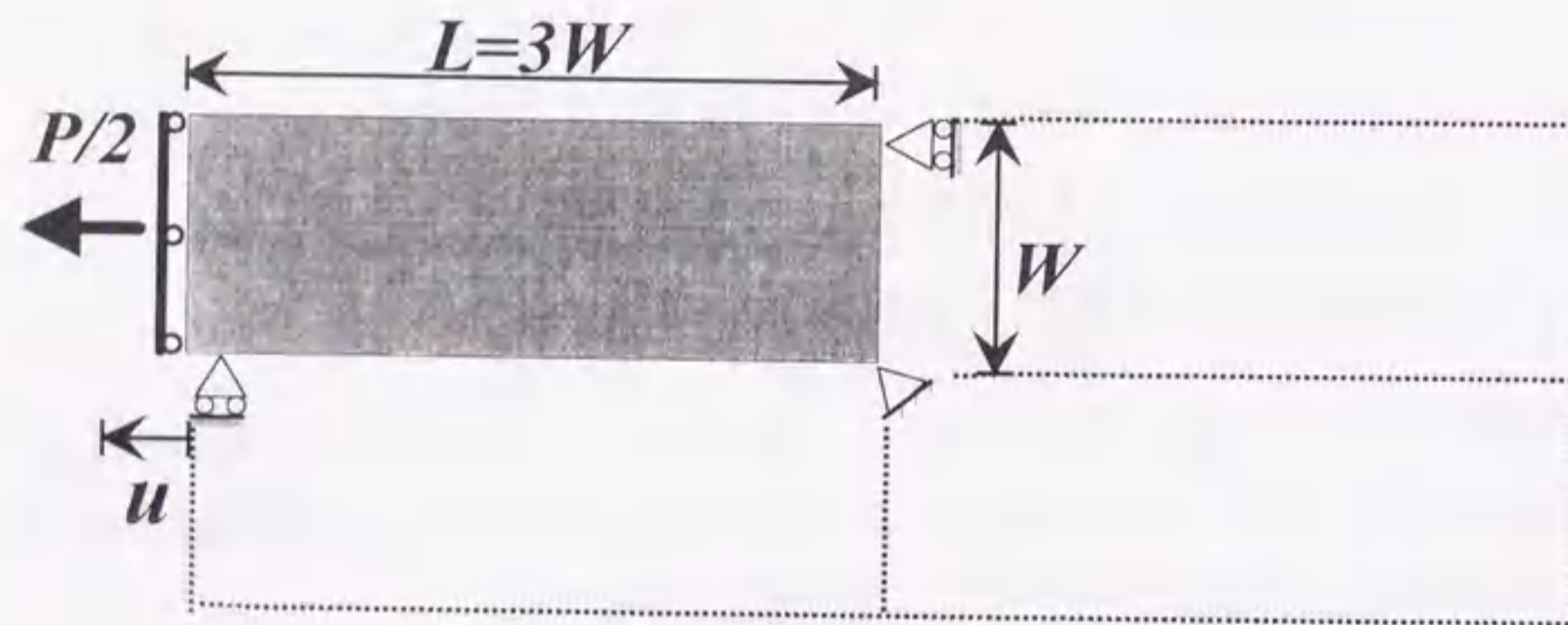


図 7.1 1/4 モデル

平面ひずみ状態における数値積分では、volumetric ロッキングを避けるために選択型低減積分法を用いた。2次元解析においては、今回用いたほどの要素分割でも多大な計算時間を要しないため、主経路、分岐経路の計算とも陽解法を採用して解析を行った。図 7.2 は平面ひずみ状態のつり合い経路である。ここで  $\bar{\sigma}$  は公称応力であり、荷重変数を初期断面積 ( $1.0 \times 2W$ ) で割ることによって得られる。主経路においては試験片全体に渡って変形も応力状態も均一である。そして硬化型の構成方程式を用いているにもかかわらず、荷重極大点が発生する。なぜなら、すでに述べたように断面積の減少が内力の低下をもたらすからである。荷重極大点を越えて分岐点が発生するが、分岐点を越えた後も主経路に沿っては変形は均一のままである。図 7.3 が分岐点付近での Scaled Corrector であり、拡散くびれモードを示していることが分かる。クリティカルな固有ベクトルとして Scaled Corrector を採用し、分岐経路への切り換えを行った。分岐経路上での変形図が図 7.4 である。また図 7.5、図 7.6 はそれぞれ分岐経路上における相当塑性ひずみ分布図と負荷・除荷領域である。図 7.6 から分かるように分岐することによって試験片の端部から除荷が始まり、その除荷領域は中央部へと広がっていく。そして除荷領域での変形の進行はほとんど停止し、図 7.5 に示すように、残った塑性部分のみに塑性ひずみが局所化していく。結果として拡散くびれがシミュレートされるものの、破断の直接的な原因となる局所くびれやせん断帯は発生しない。

平面応力状態においては数値積分法として完全積分を用いた。なぜなら厚さ方向のひずみが存在し、変形によって要素の厚さが変化して volumetric ロッキングを回避するからである[N2]。ここでは平面ひずみの場合と同様に、主経路、分岐経路とも陽解法を用いたが、もし仮に陰解法を用いる場合には注意が必要である。平面応力状態では第4章で述べた応力積分法における陰解法の手法がそのまま適用できないため、別の方法を用いなくてはならない[S10]。図 7.7 が平面応力状態におけるつり合い経路である。平面ひずみ状態と同じように荷重極大点を越えた後に分岐点が発生した。ここでも図 7.8 で示されるような Scaled Corrector によって特に問題なく分岐経路への切り換えに成功した。そして、図 7.9 が分岐経路上での変形図であるが、平面応力状態では×印のせん断帯が発生する。図 7.11 が分岐経路上での負荷・除荷領域である。平面応力の場合では分岐によって除荷が試験片の端部から始まり、その後に試験片中央部から再び除荷が発生する。そして除荷域に挟まれた×状の細い塑性域が残されるとともに、図 7.10 に示すように、その×印状の部分に塑性ひずみが集中してせん断帯を形成する。せん断帯発生後は変形がそこに集中するため、荷重が分岐経路に沿って急激に減少する。

平面応力状態においては、せん断帯が発生しているにもかかわらず、図 7.8 で示される



Scaled Corrector による分岐モードは拡散くびれモードである。よって分岐直後は拡散くびれが発生して、その後に次の段階のせん断帯へと変形が進行したことが分かる。1度分岐経路に切り換えた後は、ただ単にその分岐経路を追跡するだけで拡散くびれからせん断帯へと変形が移行している。また、分岐経路追跡の際に特異点通過の指針となる接線剛性マトリクスの負の固有値の個数に変化は見られなかった。よって均一変形から拡散くびれ、そしてせん断帯へと移行する塑性不安定現象は2回の分岐が発生しているのではない。分岐は1回のみでその分岐現象として拡散くびれが発生する。せん断帯は、1回目の分岐によって引き起こされた除荷域に挟まれる塑性部分に、変形が局所化しているにすぎない。このことは構成式レベルにおける、守時ら[M5][M6][M7][M8][M9]の一連の議論と一致している。

平面ひずみ状態でも平面応力状態においても、塑性不安定現象における分岐は拡散くびれへの分岐1回のみである。そして、すべて負荷域である試験片に1回の分岐によって除荷が始まり、それが拡散くびれを発生させると同時に次の段階の局所化現象をもたらす。つまり、拡散くびれの次の段階に発生する局所化現象は除荷の進展具合に依存するわけであるから、それは同時に試験片の形状に依存していると予測される。ゆえに塑性不安定現象を本質的に捉えるためには2次元解析では不十分で、3次元解析によって拡散くびれ後の除荷域の3次元的な広がりやを考慮することが必要不可欠である。

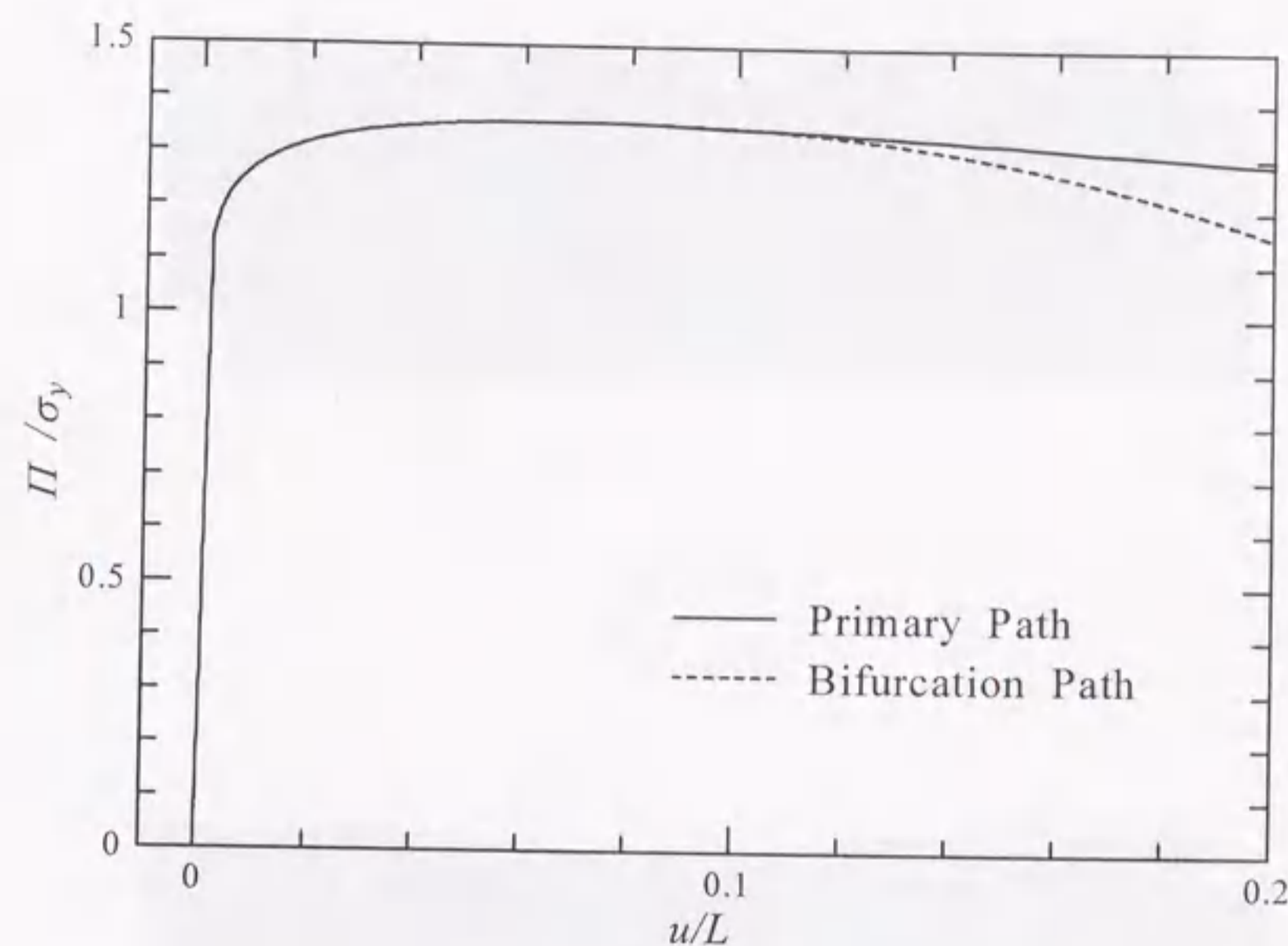


図 7.2 平面ひずみ状態のつり合い経路

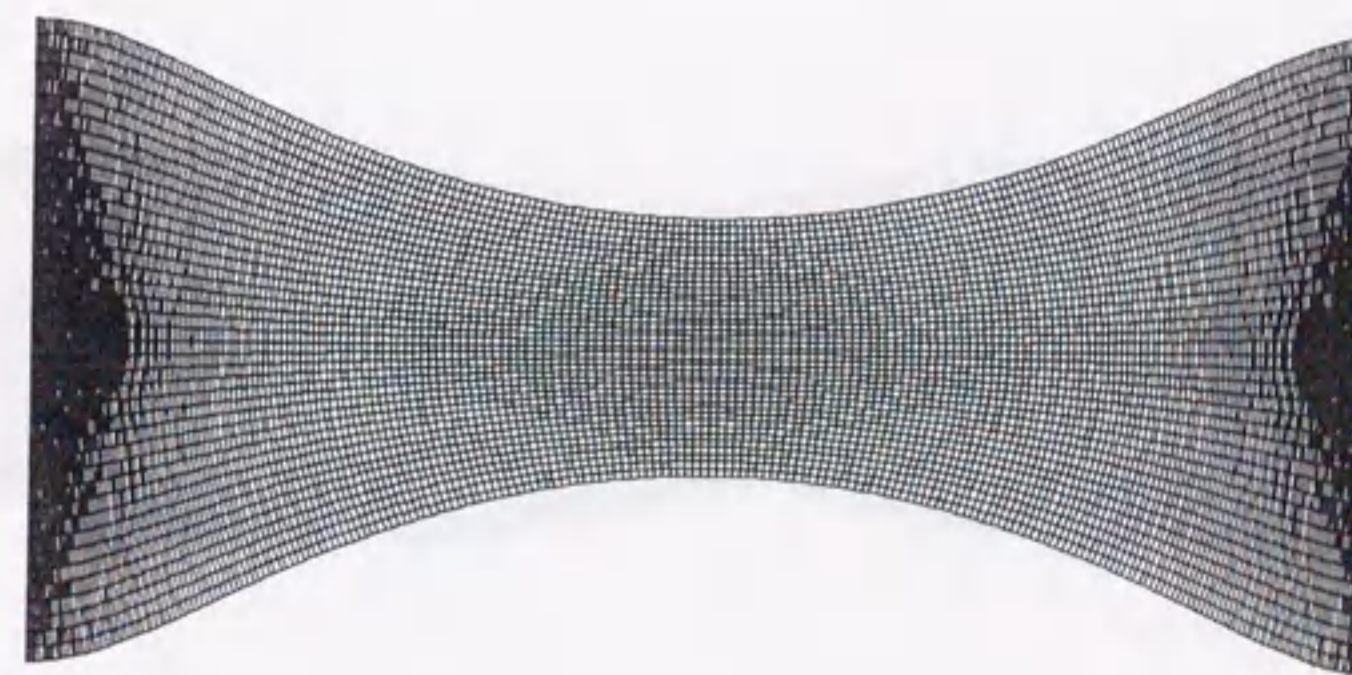
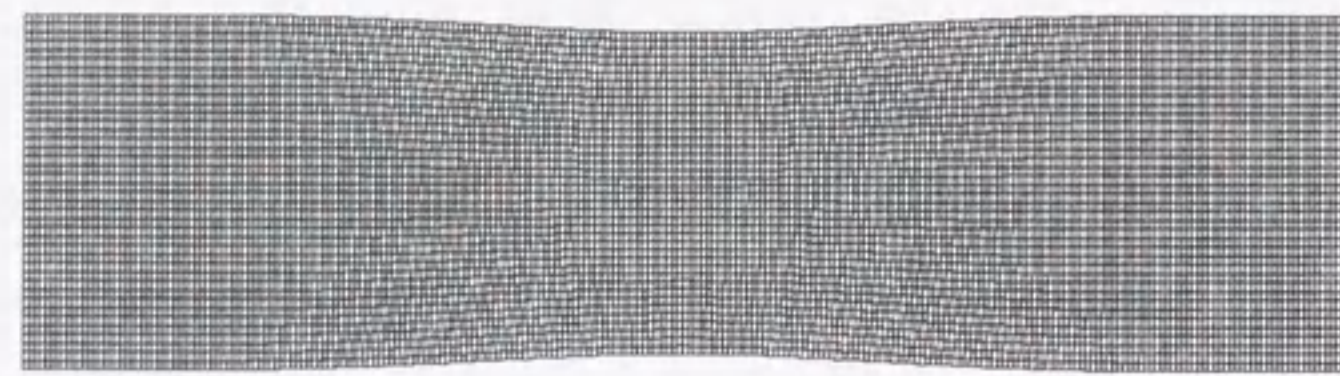


図 7.3 平面ひずみ状態における Scaled Corrector





$u/L=0.133$



$u/L=0.167$

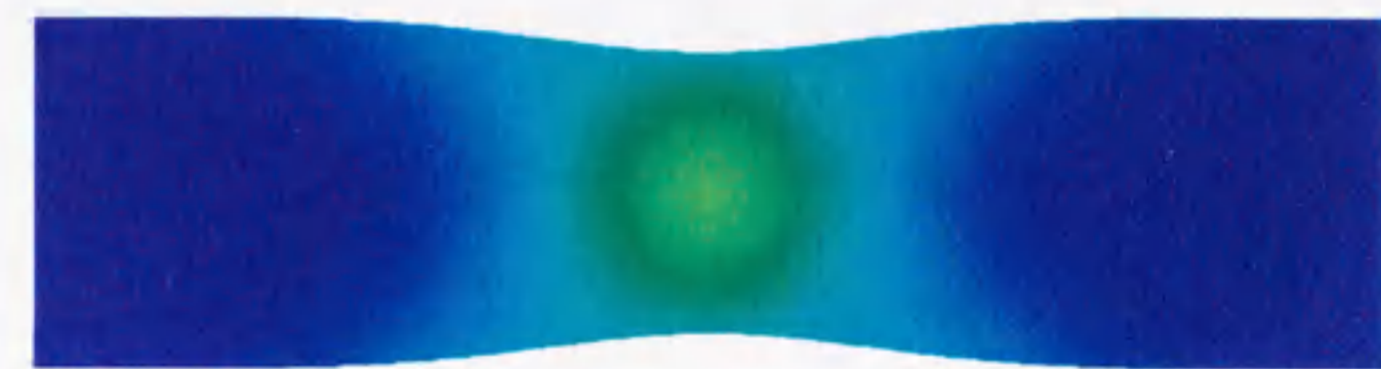


$u/L=0.2$

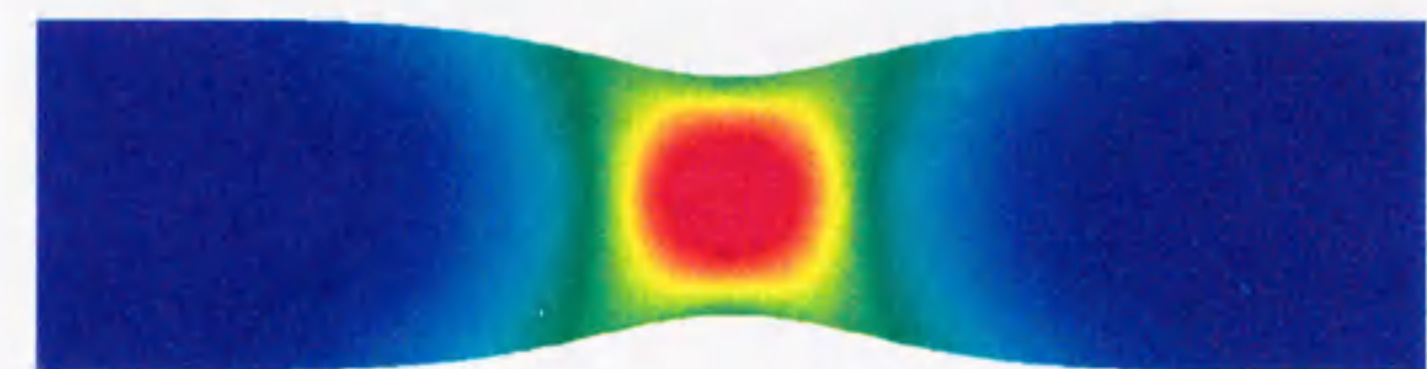
図 7.4 平面ひずみ状態の分岐経路上での変形図



$u/L=0.133$



$u/L=0.167$



$u/L=0.2$

図 7.5 平面ひずみ状態の分岐経路上での相当塑性ひずみ分布図





$u/L=0.133$



$u/L=0.167$



$u/L=0.2$

図 7.6 平面ひずみ状態の分岐経路上での負荷・除荷領域  
(負荷:黒 除荷:灰)



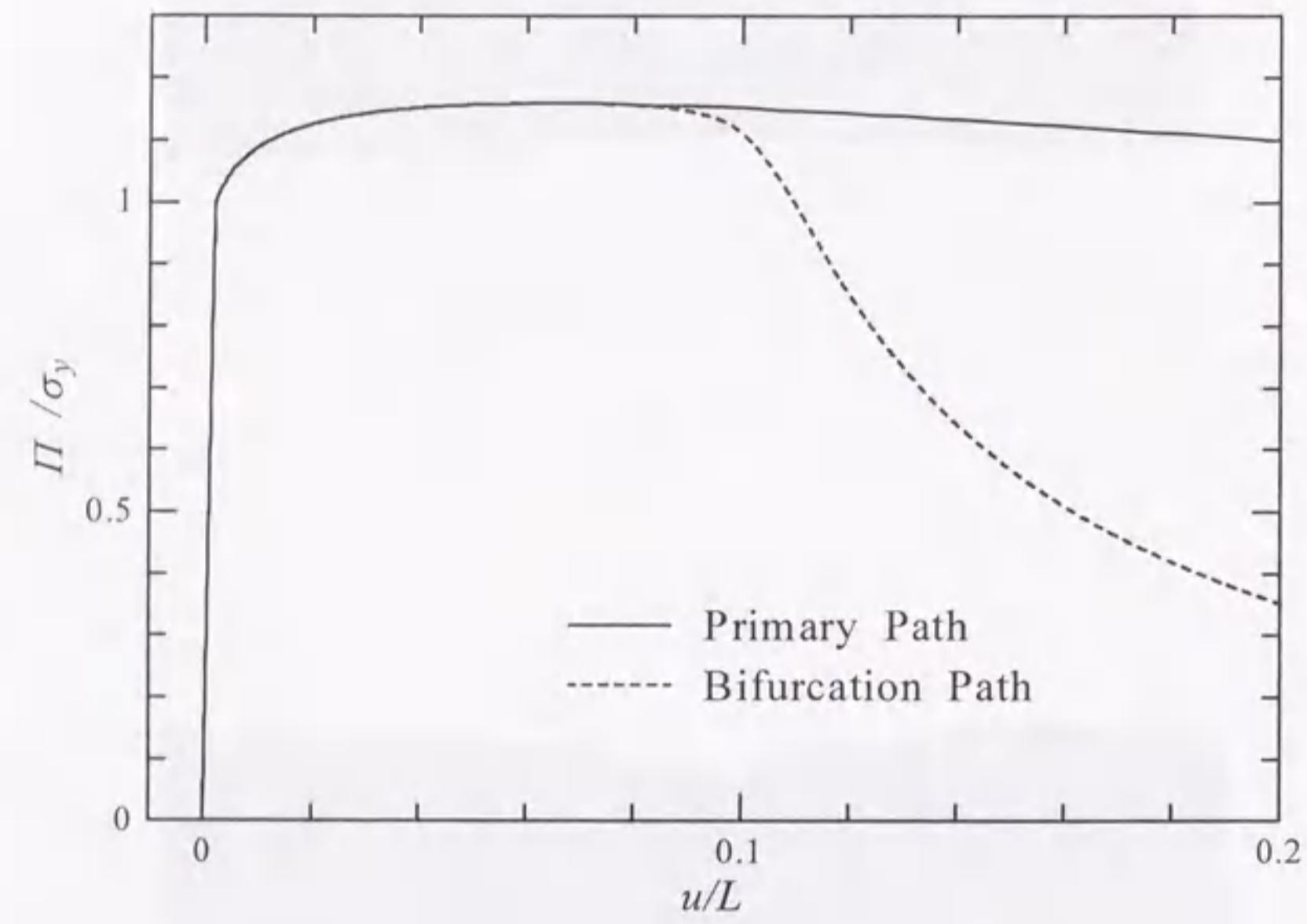


図 7.7 平面応力状態のつり合い経路

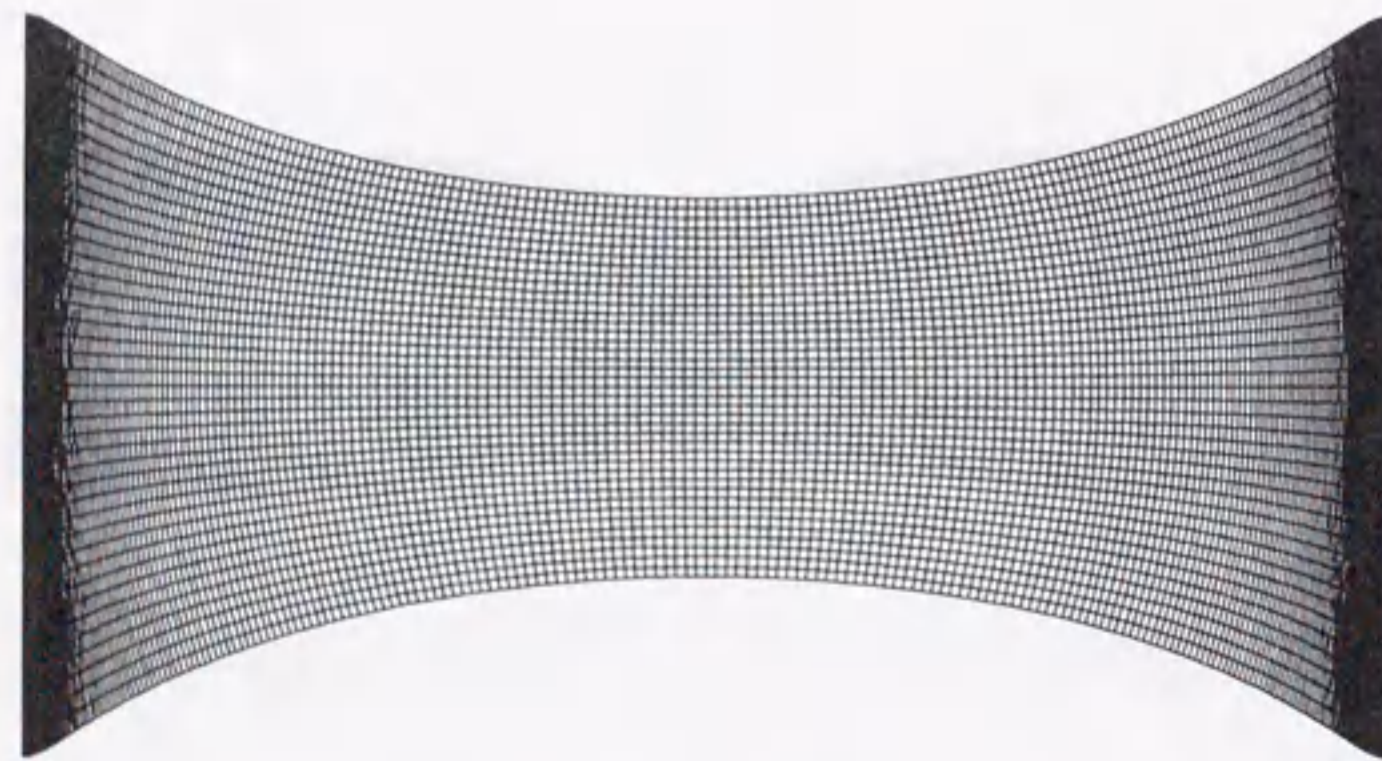


図 7.8 平面応力状態における Scaled Corrector



$u/L=0.133$



$u/L=0.167$



$u/L=0.2$

図 7.9 平面応力状態の分岐経路上での変形図





$u/L=0.133$



$u/L=0.167$



$u/L=0.2$

図 7.10 平面応力状態の分岐経路上での相当塑性ひずみ分布図





$u/L=0.133$



$u/L=0.167$



$u/L=0.2$

図 7.11 平面応力状態の分岐経路上での負荷・除荷領域  
(負荷:黒 除荷:灰)



### 7.3 3次元状態における塑性不安定解析

本節では3次元状態での塑性不安定解析を行う。弾塑性構成方程式としては2次元解析と同様に  $J_2$  流れ則を用いるものとし、材料定数等のパラメーターも2次元解析で用いたものとすべて同一とする。計算対象とした金属試験片は図 7.12 であるが、変形の対称性から 1/8 部分のみを取り出して計算を行った。ただし  $L/W=3.0$  とした。有限要素としては 8 節点のアイソパラメトリック要素を用いて、volumetric ロッキングを回避するために選択型低減積分を用いた。そして表 7.1 に示すような幅厚比の異なる 8 種類を扱った。1/8 モデルの境界条件としては  $(X, Y, Z)$  方向の変位を  $(U, V, W)$  とすると、以下のようである。

$$\begin{aligned} U &= 0 & \text{at } X &= 0 \\ V &= 0 & \text{at } Y &= 0 \\ W &= 0 & \text{at } Z &= 0 \end{aligned} \quad (7.3.1)$$

なお2次元解析の場合と同様に、端部の軸方向変位が一様となるように拘束し、図 7.12 の斜線部分の  $Z$  軸方向に荷重を作用させた。

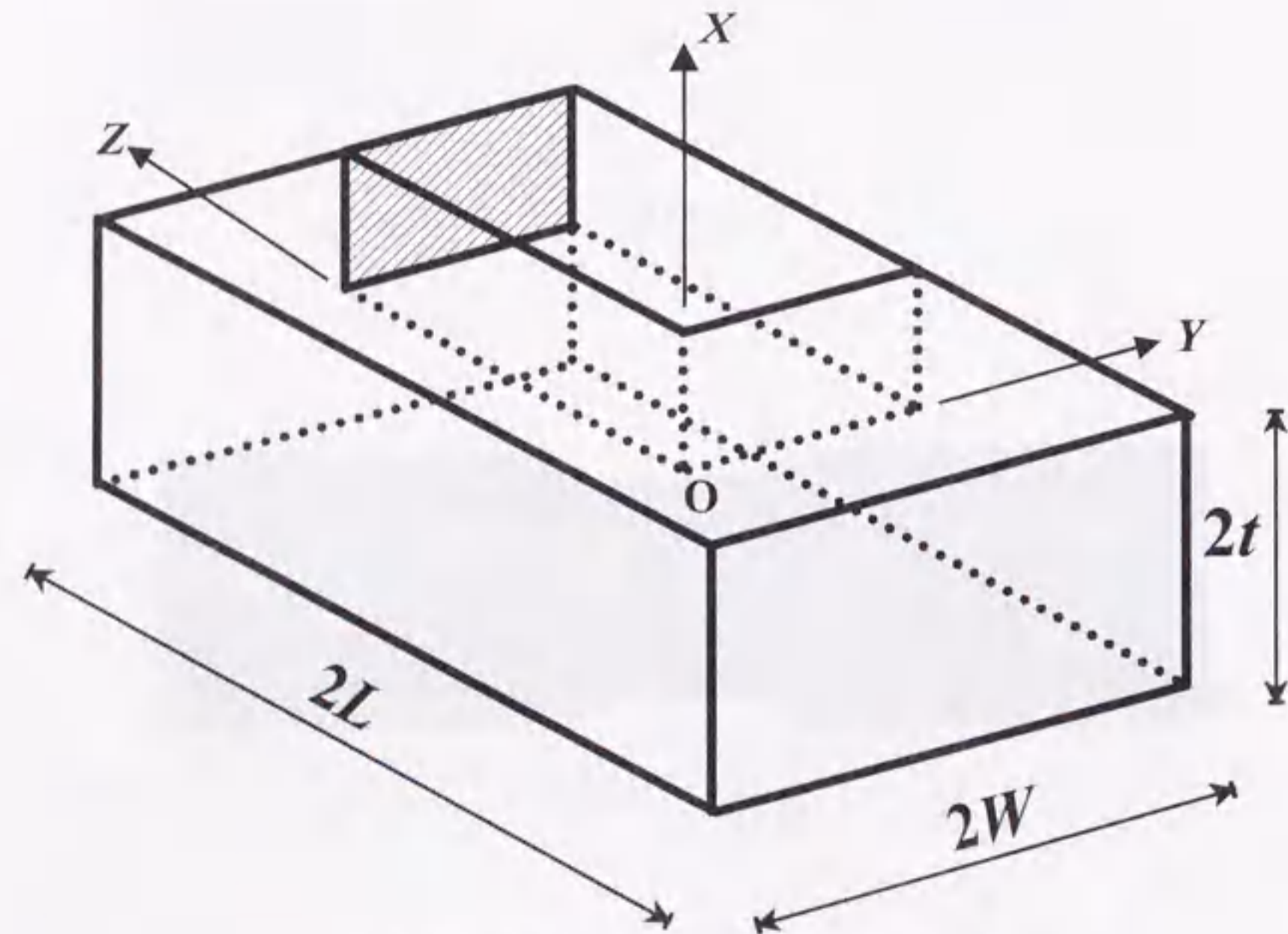


図 7.12 3次元解析における 1/8 モデル

表 7.1 3次元塑性不安定解析モデルの幅厚比

モデル	幅厚比( $W/t$ )
A	20/1 = 20
B	20/2 = 10
C	20/3 = 6.666...
D	20/4 = 5
E	20/5 = 4
F	15/5 = 3
G	15/10 = 1.5
H	10/10 = 1

3次元解析において、主経路については、 $u/L=0.01$  を上限として陰解法でステップサイズをある程度大きくして計算し、分岐経路については陽解法を用いて計算を行った。分岐経路では除荷の進展を忠実に再現するために小さなステップサイズが必要不可欠であるのに対して、主経路においては除荷が一切発生しない均一変形のため、ステップサイズを大きくした陰解法でも特に問題はないと判断したからである。

それぞれのモデルにおけるつり合い経路を、分岐解析に用いた Scaled Corrector と共に示す。さらに分岐経路上での変形状態と相当塑性ひずみ分布図、それに荷重・除荷領域も載せることにする。なお、相当塑性ひずみ分布図と荷重・除荷領域に関しては、それぞれのモデルの中心において長手方向と垂直な断面で切断した図を載せてある。いずれのモデルにおいても共通する挙動としては、まず2次元解析の場合と同様にすべてのモデルについて荷重極大点直後に分岐点が発生しており、Scaled Corrector のモードつまり分岐モードは拡散くびれモードを示していることである。そして分岐は拡散くびれへの1回のみで、その分岐経路上において新たな分岐点の存在は確認されなかった。拡散くびれへの分岐によって発生した除荷域の進展具合により、拡散くびれ後の終局的な局所化現象が違ってくる。終局的挙動においては塑性変形の局所化が著しくなる。よって本節で示す計算結果においても、現実の部材の引張りではすでに破断していると思われるものもあるが、本研究では破断の基準を導入していないので、本来は破断に至るような終局的な挙動をどこまで追跡できるかを調べていることになる。以下にそれぞれのモデルにおける拡散くびれ後の終局的挙動について述べる。

モデル A の塑性不安定解析の計算結果が図 7.13～図 7.17 である。幅厚比が 20 のこのモデルはほぼ平面応力状態であり、図 7.15 に示すように、平面応力状態での2次元解析と



極めて似通ったせん断帯が発生している。また図 7.17 における除荷の進展具合も平面応力状態での2次元解析と同様である。つまり除荷が端部から始まって中心部に進展した後に、今度は中心部から再び除荷が発生して塑性部分が挟まれる格好となる。そして残された×状の塑性部分のみに変形が集中してせん断帯を形成する。そして図 7.18～図 7.22 がモデル B の計算結果である。この場合の破断直前の終局的な挙動として、図 7.20 のようにモデル A とほとんど大差のないせん断帯が発生するが、ここでのせん断帯の幅はモデル A に比べて大きい。つまり幅厚比の大きな薄い金属試験片での塑性不安定現象は、拡散くびれのあとにせん断帯が発生するという形態で終局的な破断に至る。そして試験片サイズが同じである場合、せん断帯の幅はその厚さに比例し、厚い試験片であるほどせん断帯の幅は大きい。

写真 7.1 はモデル B と同じ幅厚比の鋼材において、塑性不安定現象により発生した×状のせん断帯である。この写真では図 7.20 とほぼ同じ角度のせん断帯が発生している。そして写真 7.2 は破断直前の変形状態であるが、×状の片一方のせん断帯が消滅し、もう片一方のせん断帯のみが残っている。実際の金属試験片では材料的または幾何学的な初期不整を有しており、その影響で最初に発生した×状のうちの片一方のせん断帯が先行したものと考えられる[S13]。

図 7.23～図 7.27 で示されるモデル C での計算結果になると、せん断帯の発生の度合いは衰えて、試験片中心部で試験片が局所的に板厚方向に陥没するモードが目立つようになってくる。そして、図 7.28～図 7.32 で示されるモデル D での計算結果からは、もはやせん断帯を観察することはできなくなる。その代わりに試験片の長手方向とは垂直に板厚方向の狭い領域がくびれる、局所くびれが発生する。幅厚比の大きな試験片で発生するせん断帯に対して、ここでせん断帯に代わる局所くびれが発生する理由は、分岐経路上での除荷域の進展具合にある。図 7.32 からも分かるように端部から除荷が発生することはモデル A, B と大差はないが、次の段階で、モデル A やモデル B のように試験片中心部から除荷が始まるのではなく、端部からの除荷領域がさらに広がり試験片中央の塑性域を包み込む。そして、残された塑性域に変形が集中することによって局所くびれが発生する。その局所くびれが発生するという終局的な挙動は図 7.33～図 7.37 が示すように、モデル E においてもほぼ同じである。写真 7.3 は、モデル E と同じ幅厚比を有する鋼材の破断直前の状態である[S13]。この写真からは図 7.35 の計算結果と似通った局所くびれモードが観察できる。このように局所くびれは実際の引張試験において観察されているにもかかわらず、2次元解析においては全くシミュレート不可能な塑性不安定現象である。そして、モデル F において

も図 7.38～図 7.42 のように局所くびれが観察される。

モデル G ぐらいの幅厚比の試験片になると、図 7.43～図 7.47 のように側面にも局所くびれが発生するようになる。そして幅厚比が 1 のモデル H においては、図 7.48～図 7.52 のように正方形断面において2軸対称な局所くびれを観察することができる。

写真 7.4, 写真 7.5 はそれぞれモデル G, モデル H と同じ幅厚比の鋼材の塑性不安定現象における破断直前の状態である[S13]。ここでの計算結果が実際の実験結果に極めてよく一致していることが分かる。ここで、実験で用いた鋼種は JIS 規格の SM490 である。

拡散くびれの次の段階の終局的挙動において、せん断帯が発生するか局所くびれが発生するかは、拡散くびれによって引き起こされる除荷域に挟まれた最終的な塑性域の形状に依存する。そしてその除荷域の進展具合は計算対象とする金属試験片の3次元的な形態に関与してくる。ゆえに塑性不安定現象を本質的に捉えるためには3次元解析が必要不可欠である。



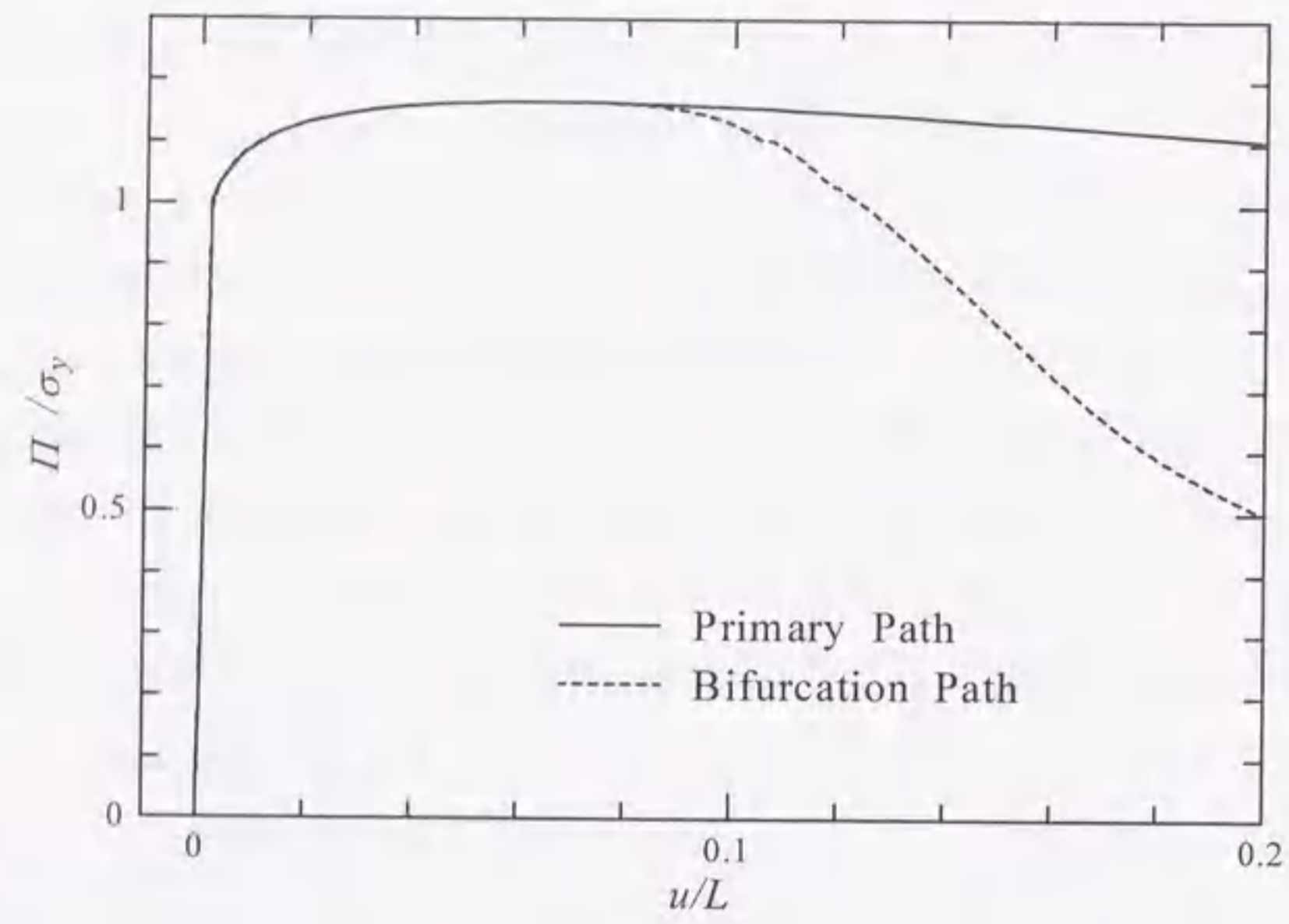


図 7.13 モデル A のつり合い経路

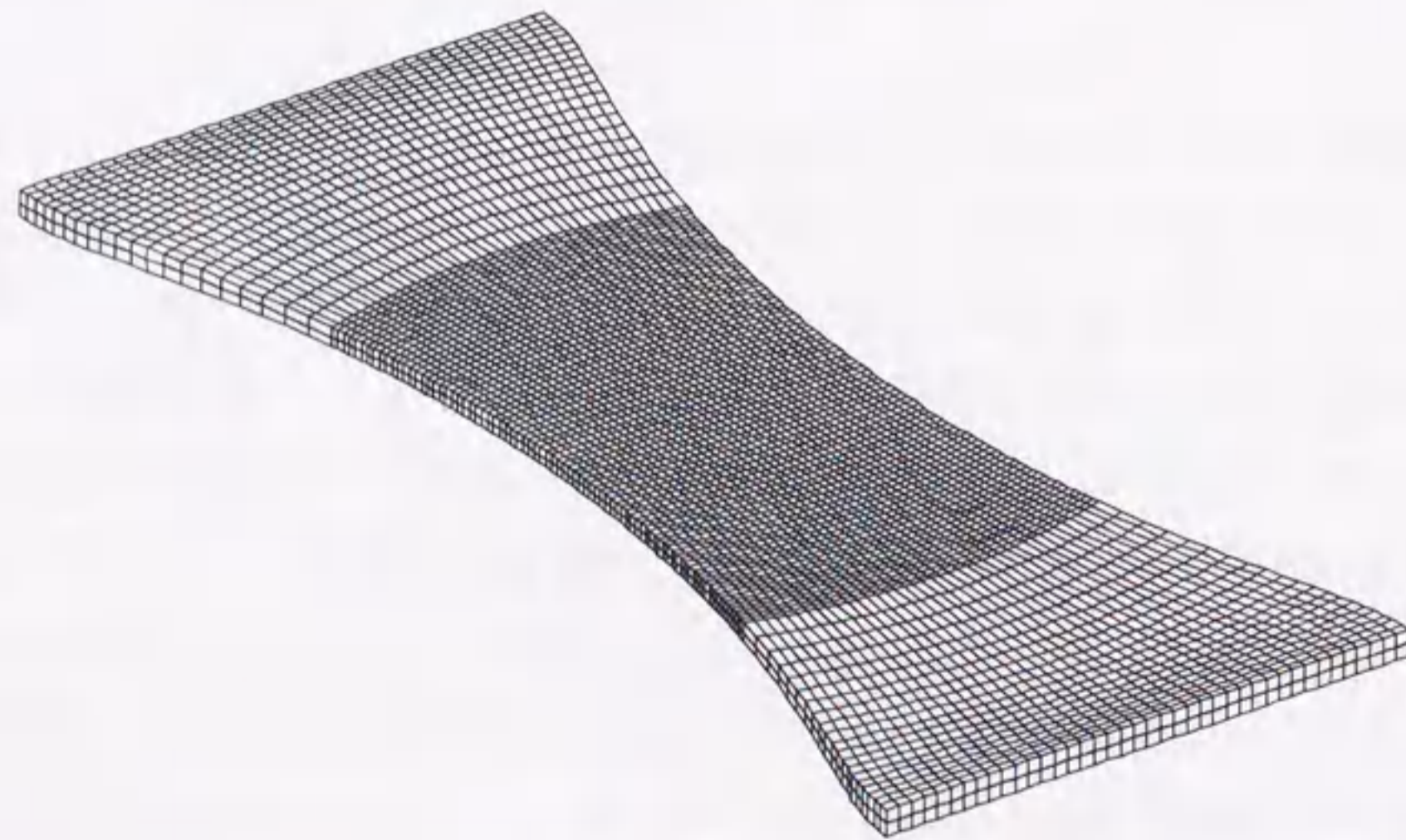
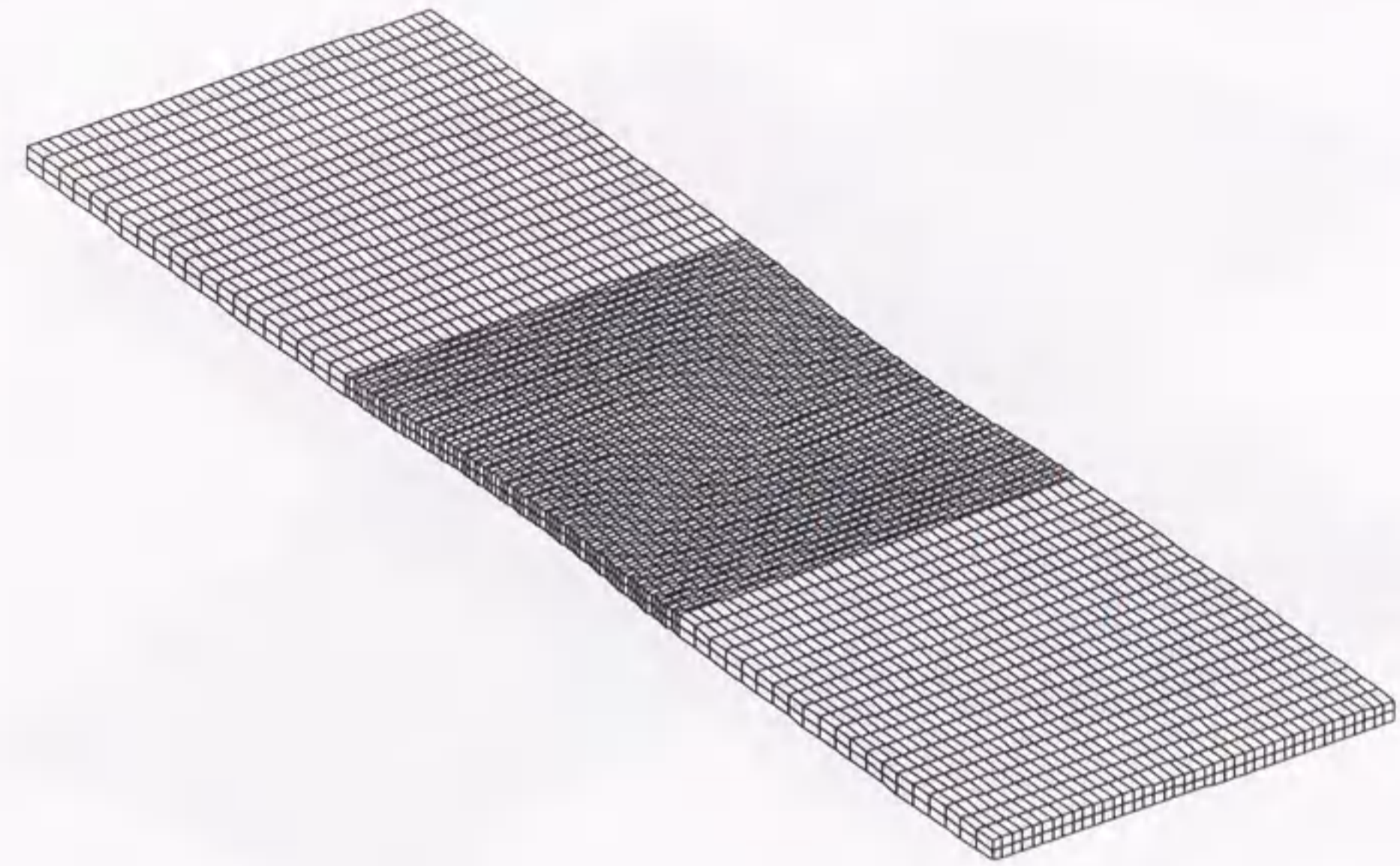
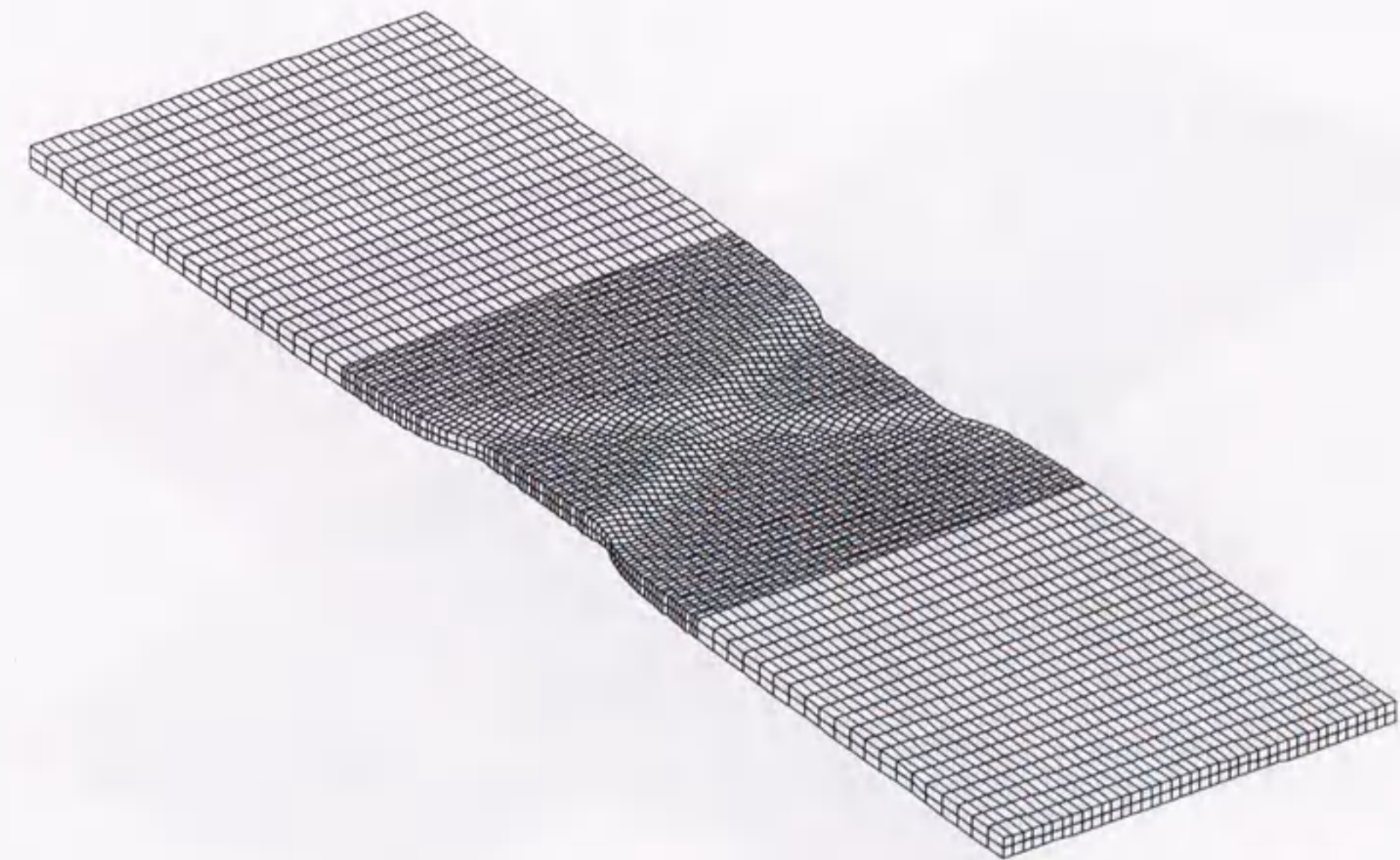


図 7.14 モデル A における Scaled Corrector



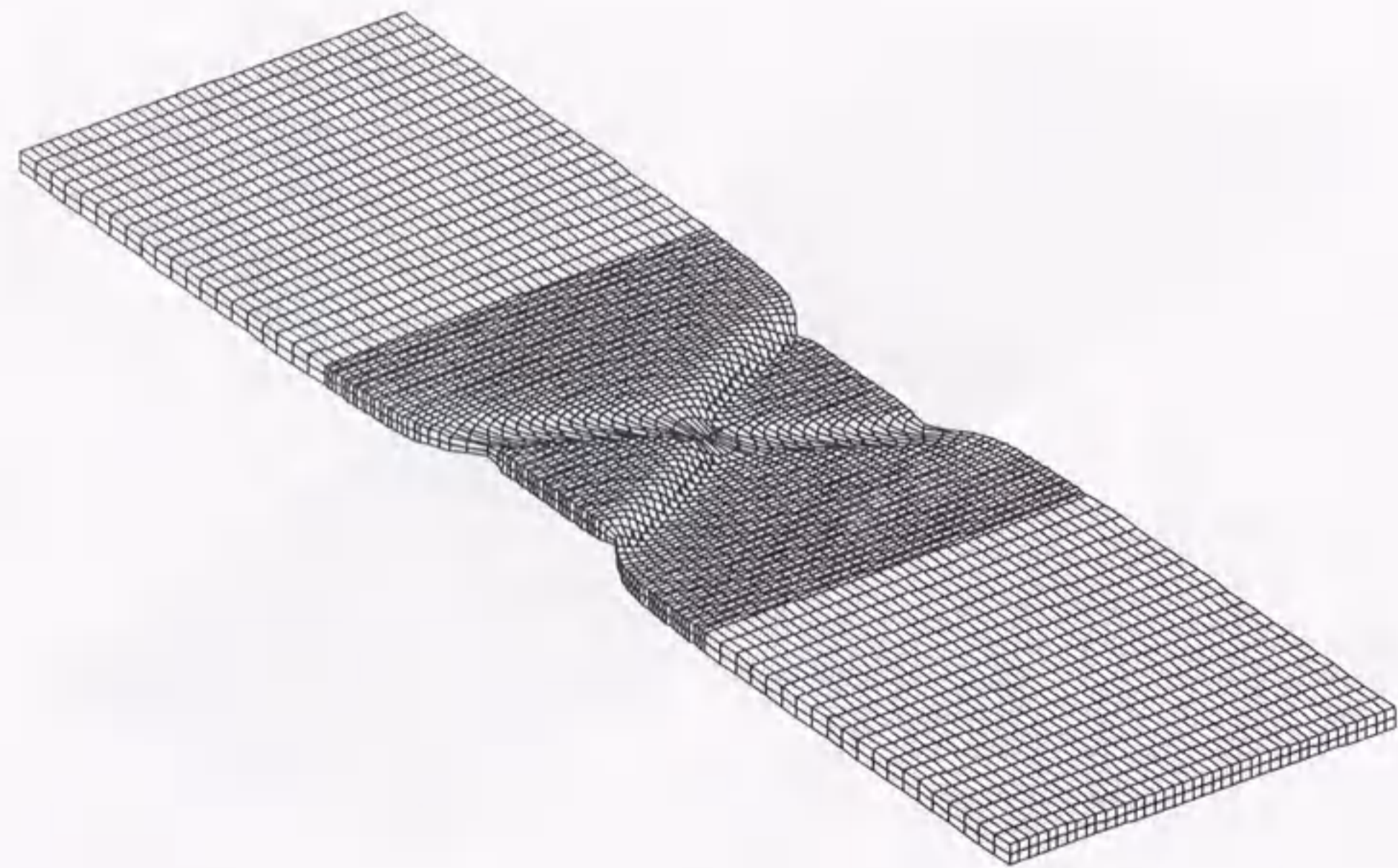
$u/L=0.1$



$u/L=0.133$

図 7.15 モデル A の分岐経路上での変形図



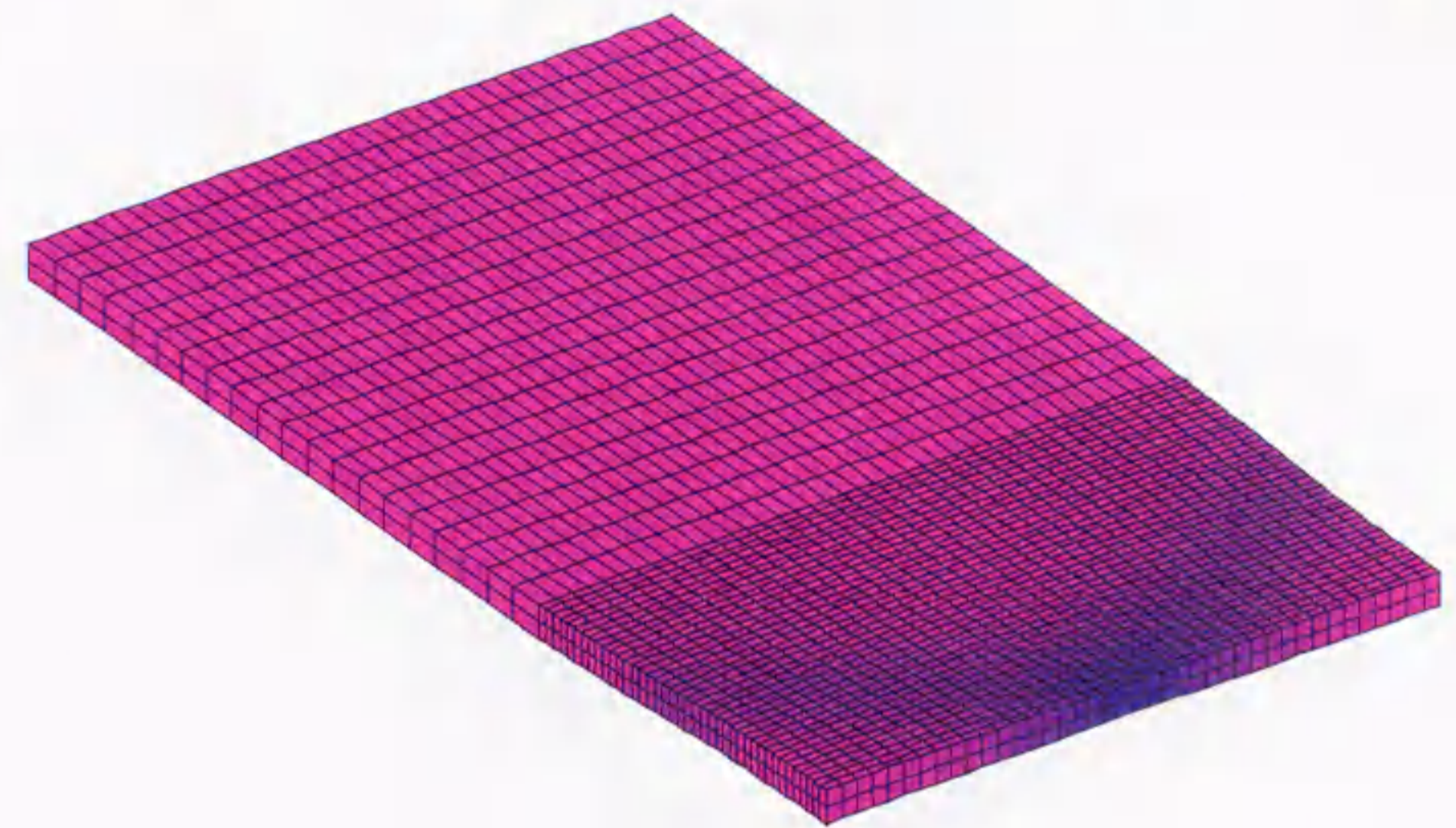


$u/L = 0.167$

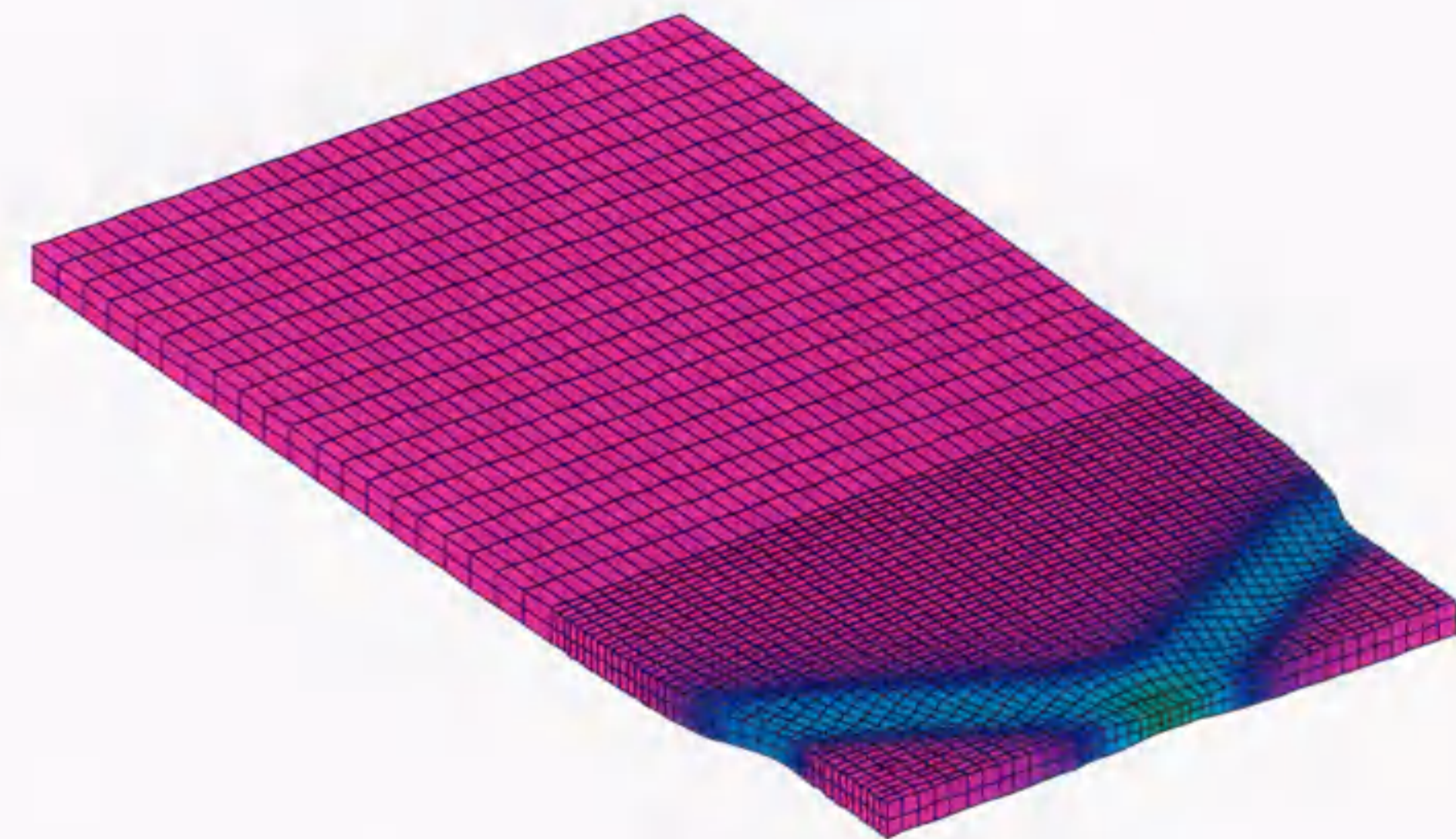


$u/L = 0.2$

図 7.15 モデル A の分岐経路上での変形図



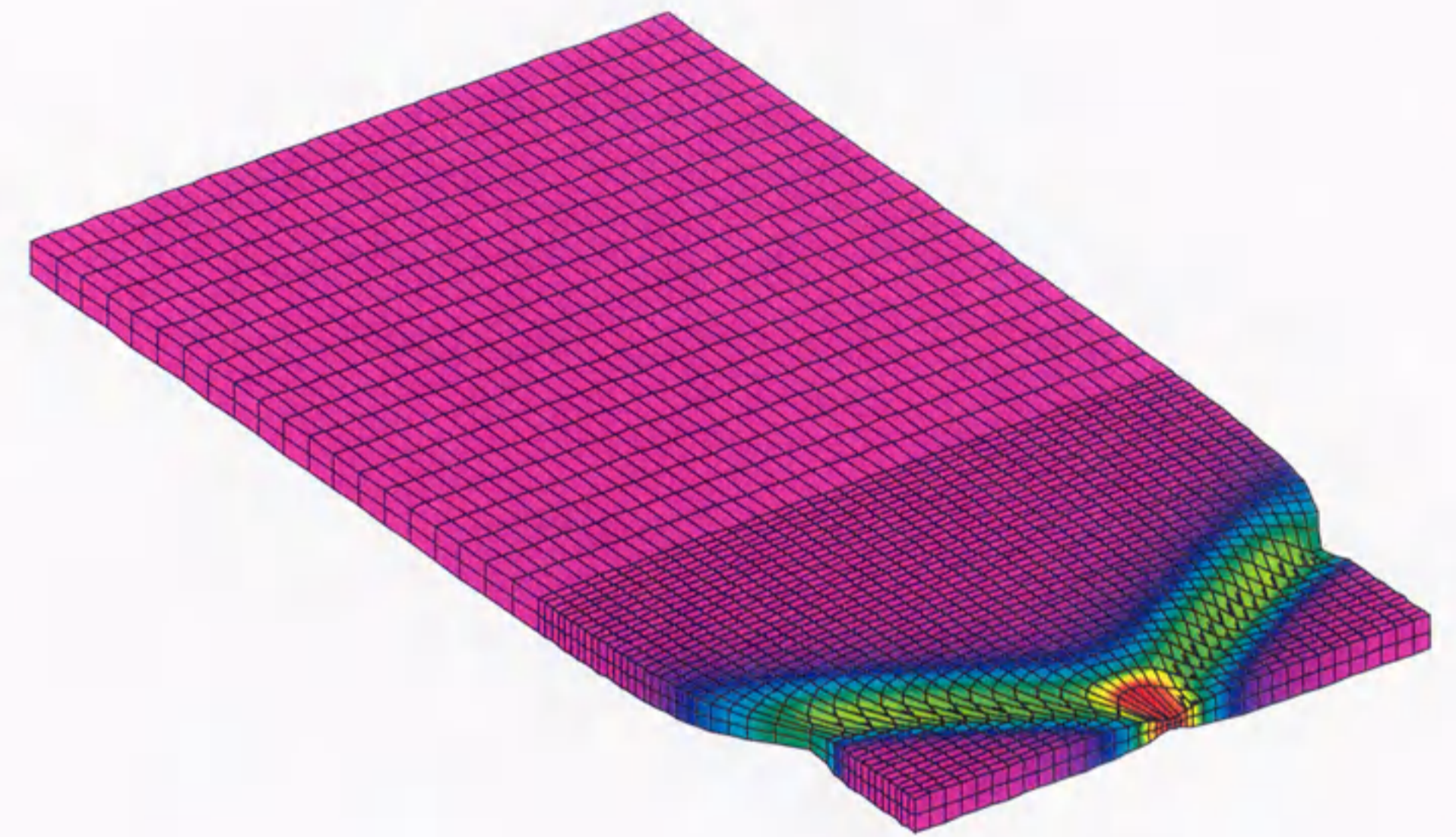
$u/L = 0.1$



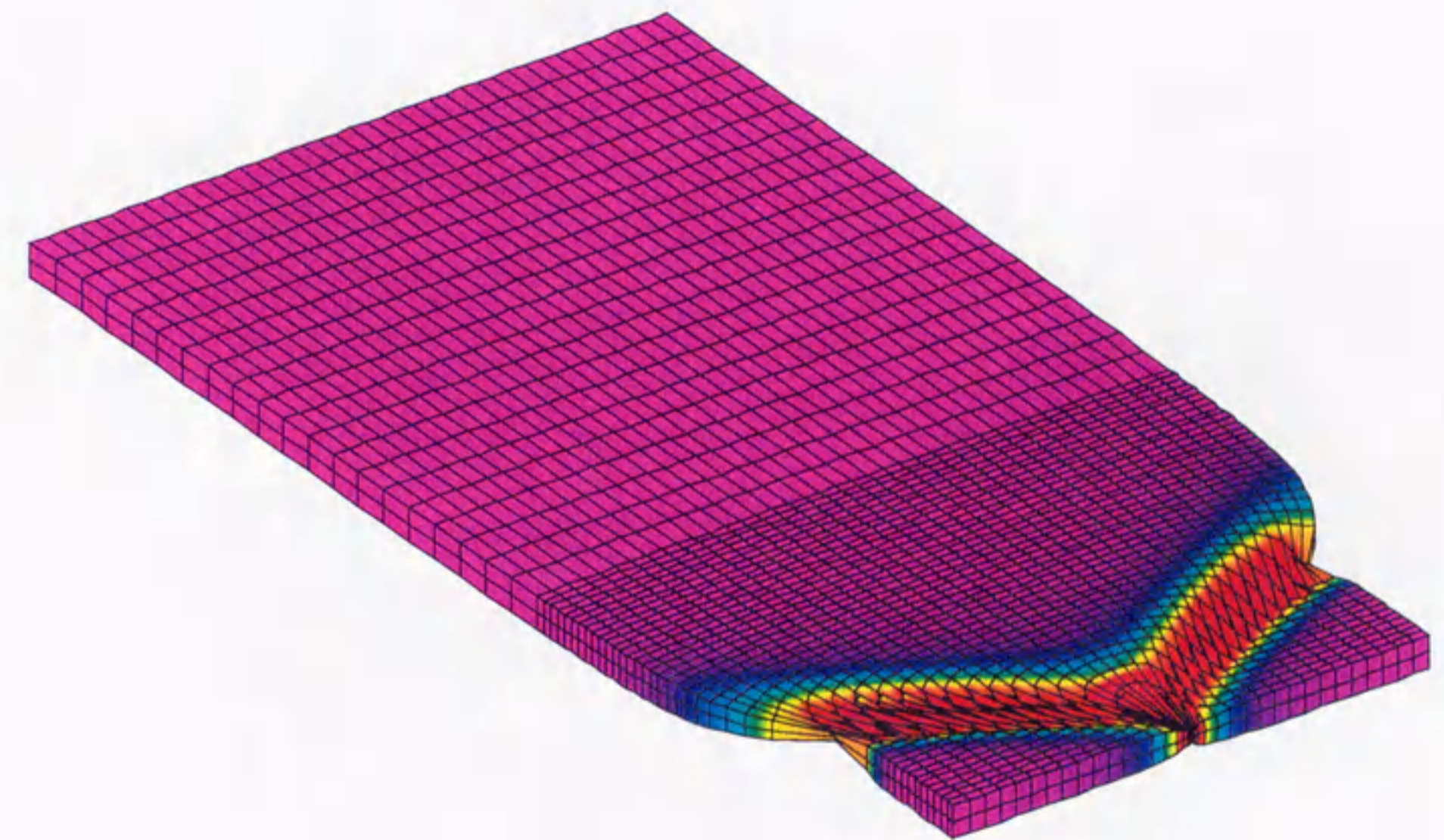
$u/L = 0.133$

図 7.16 モデル A の分岐経路上での相当塑性ひずみ分布図





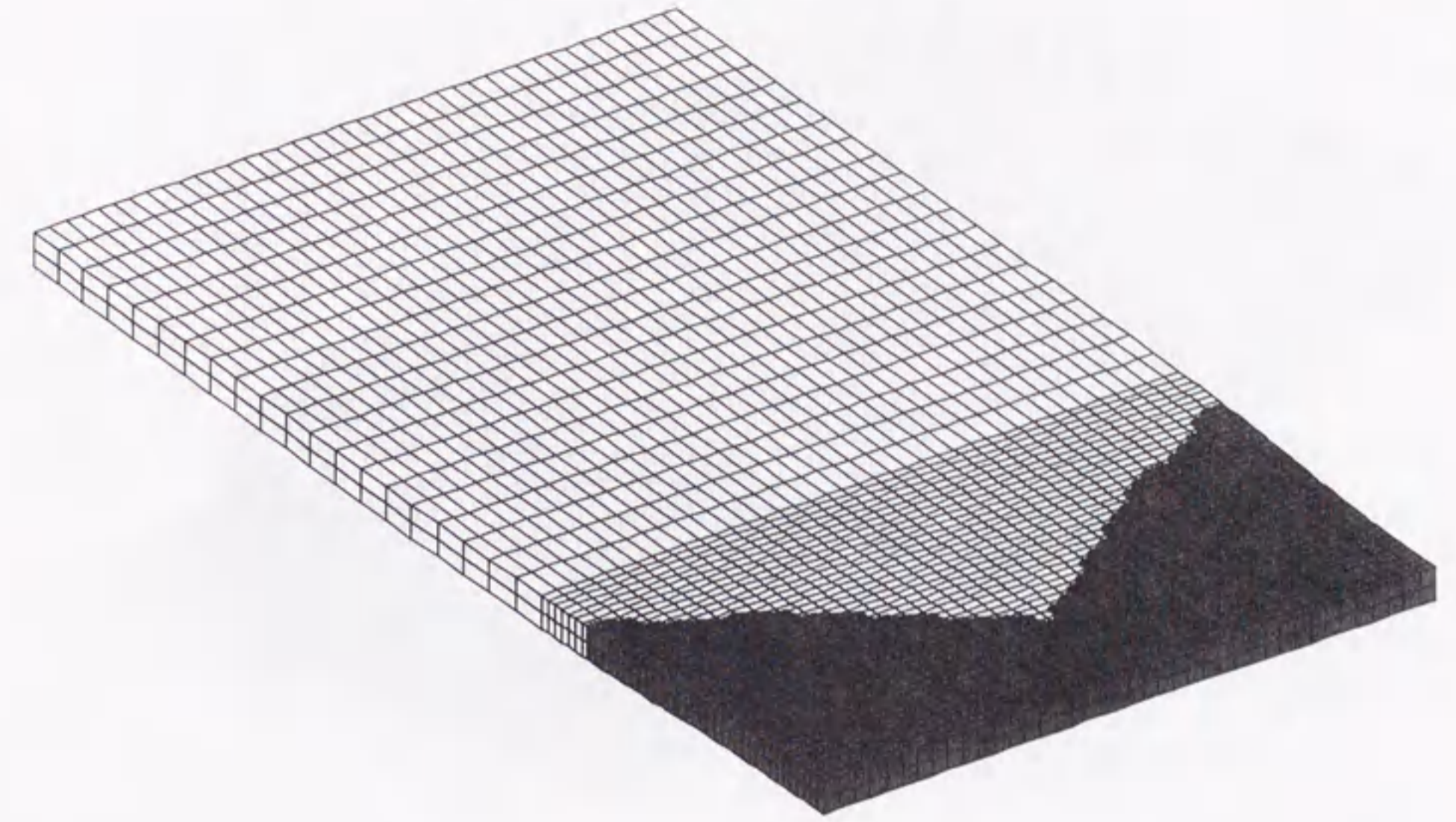
$u/L = 0.167$



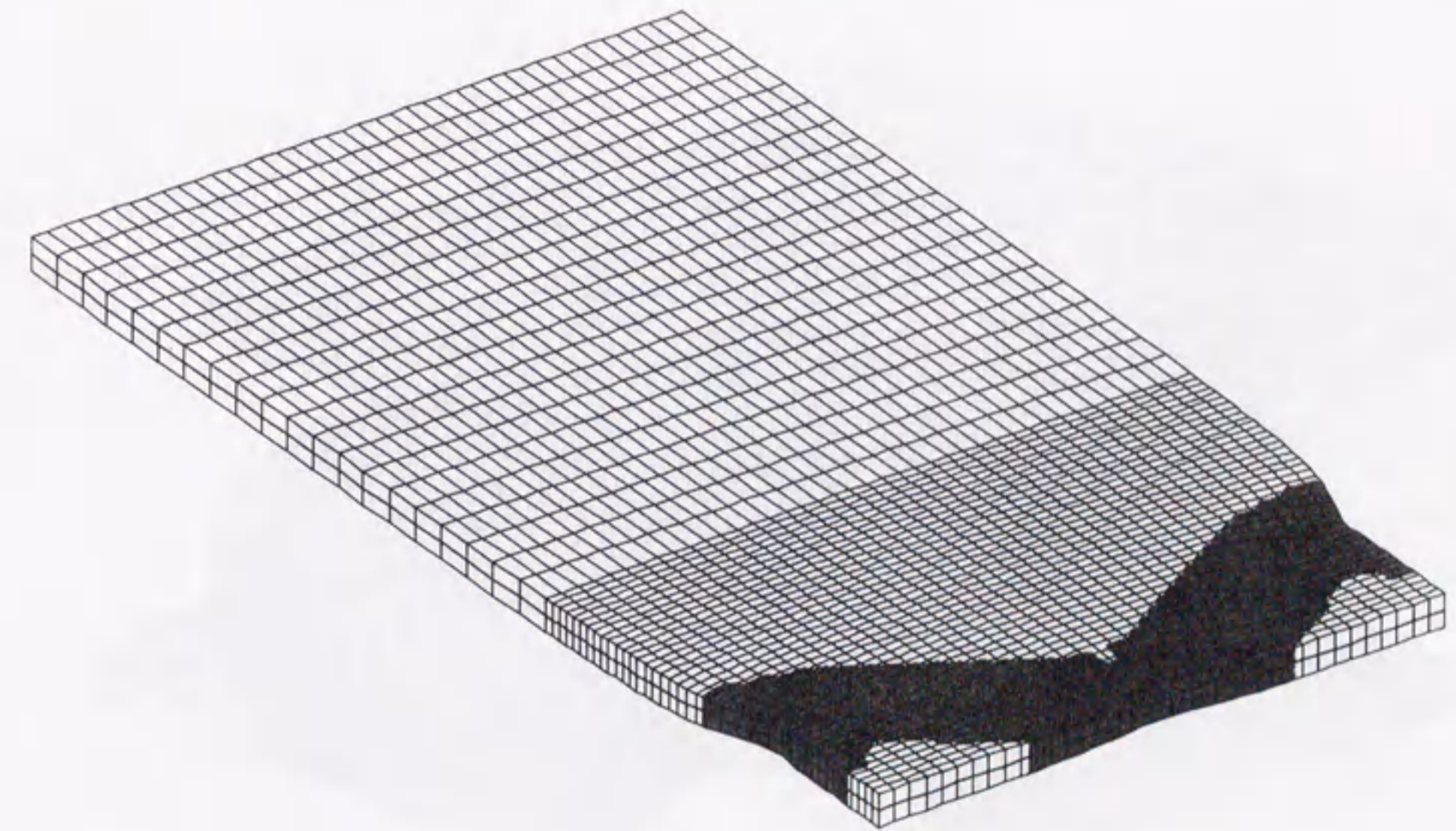
$u/L = 0.2$

図 7.16 モデル A の分岐経路上での相当塑性ひずみ分布図





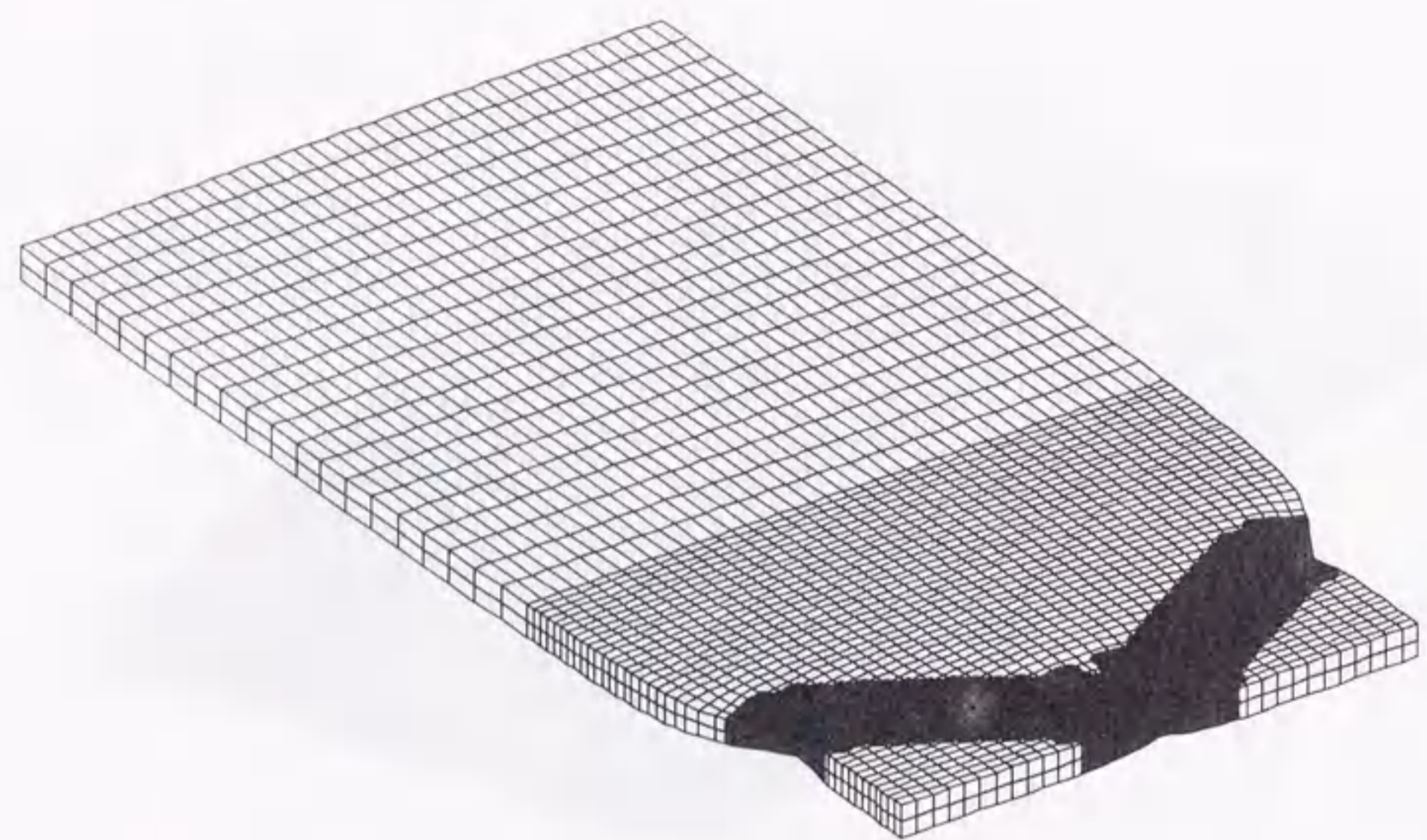
$u/L = 0.1$



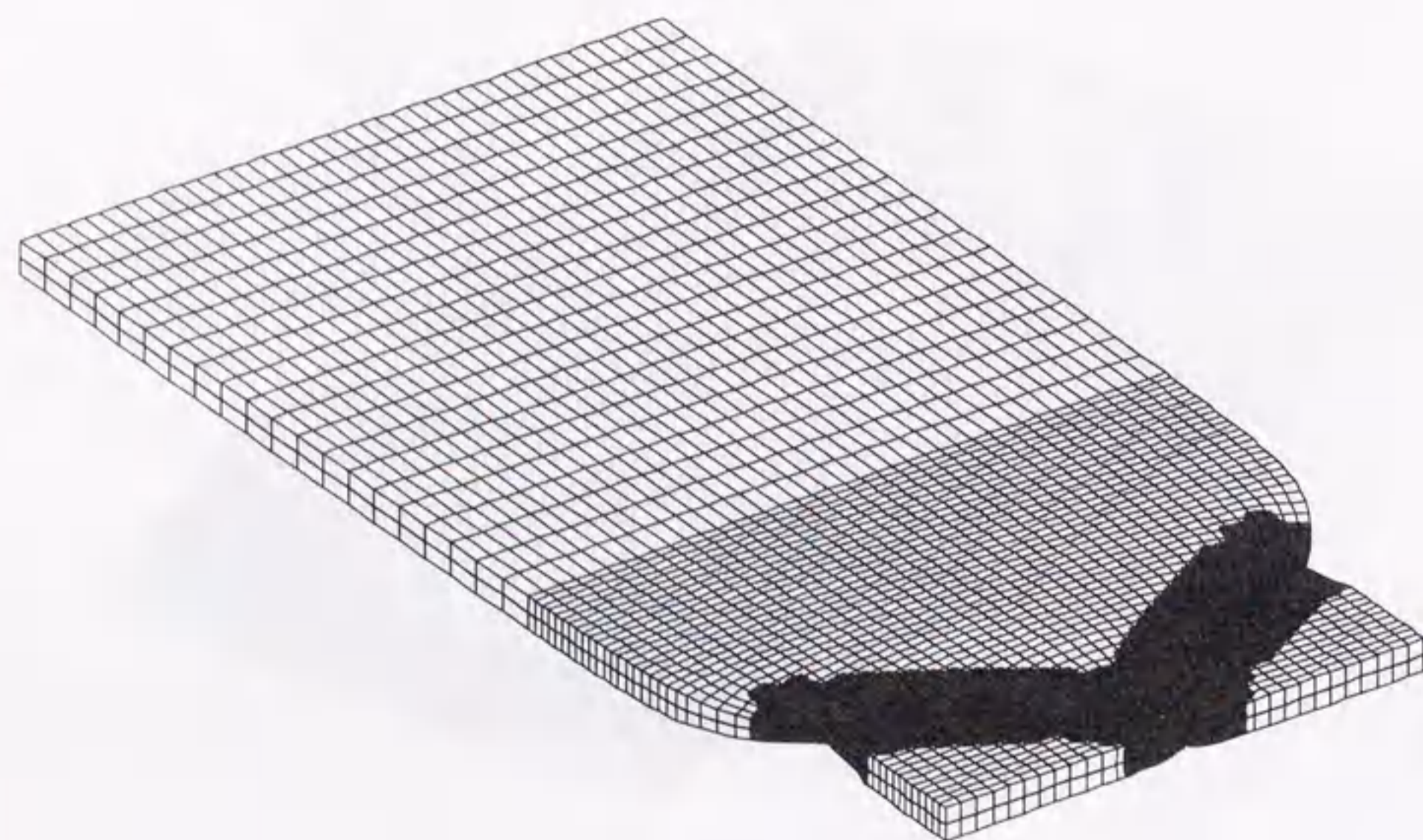
$u/L = 0.133$

図 7.17 モデル A の分岐経路上での負荷・除荷領域 (負荷:黒 除荷:白)





$u/L = 0.167$



$u/L = 0.2$

図 7.17 モデル A の分岐経路上での負荷・除荷領域 (負荷:黒 除荷:白)

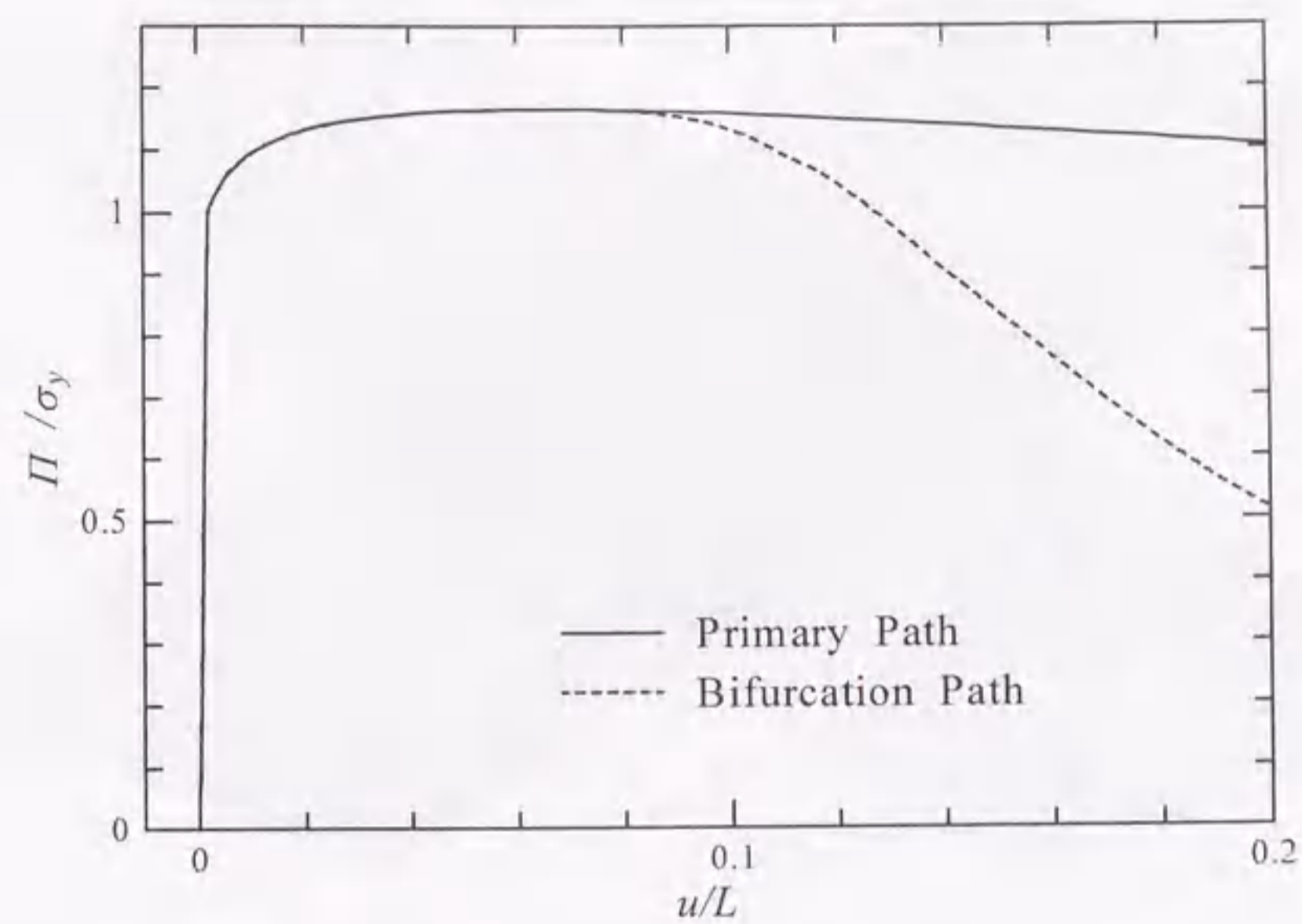


図 7.18 モデル B のつり合い経路

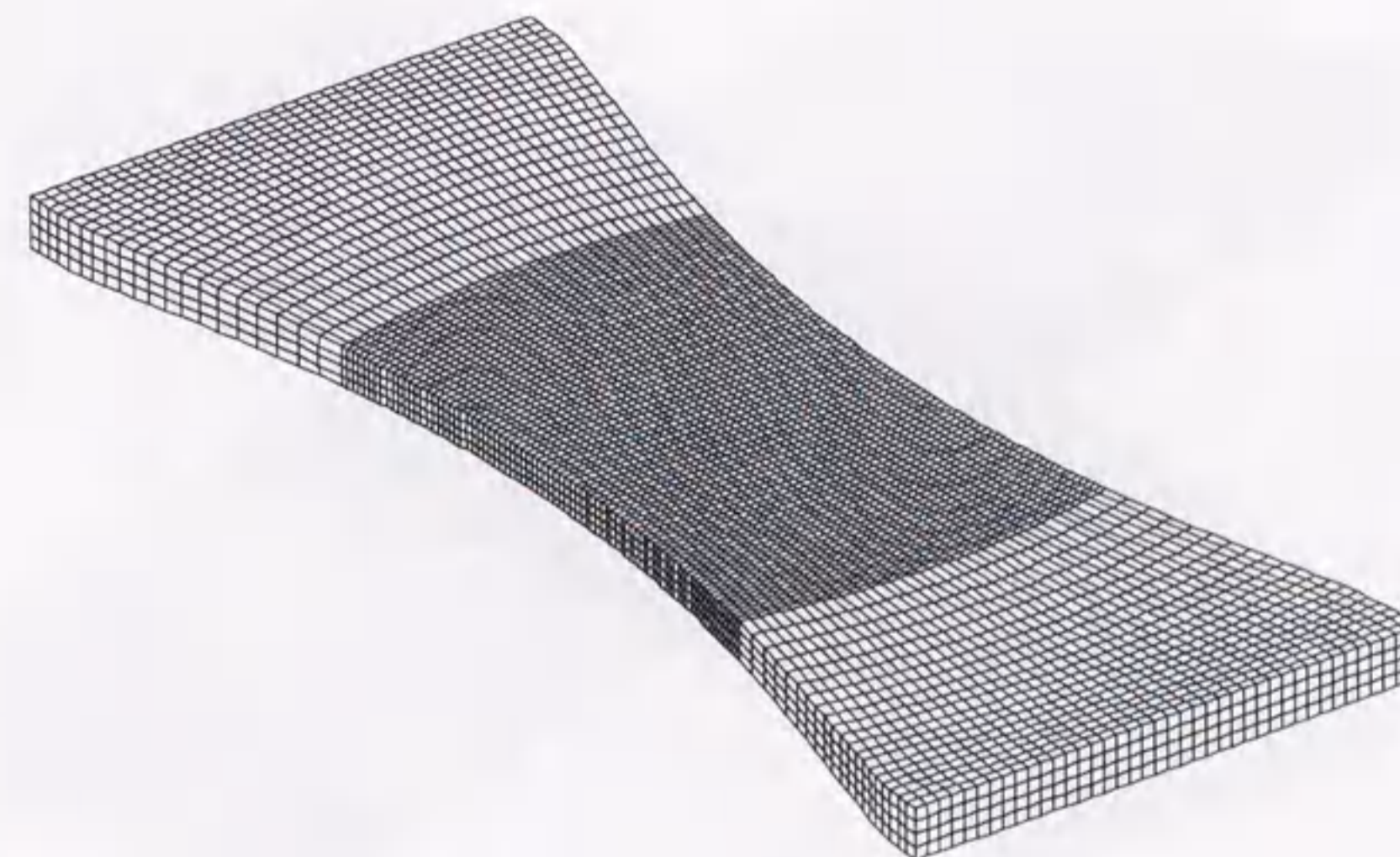
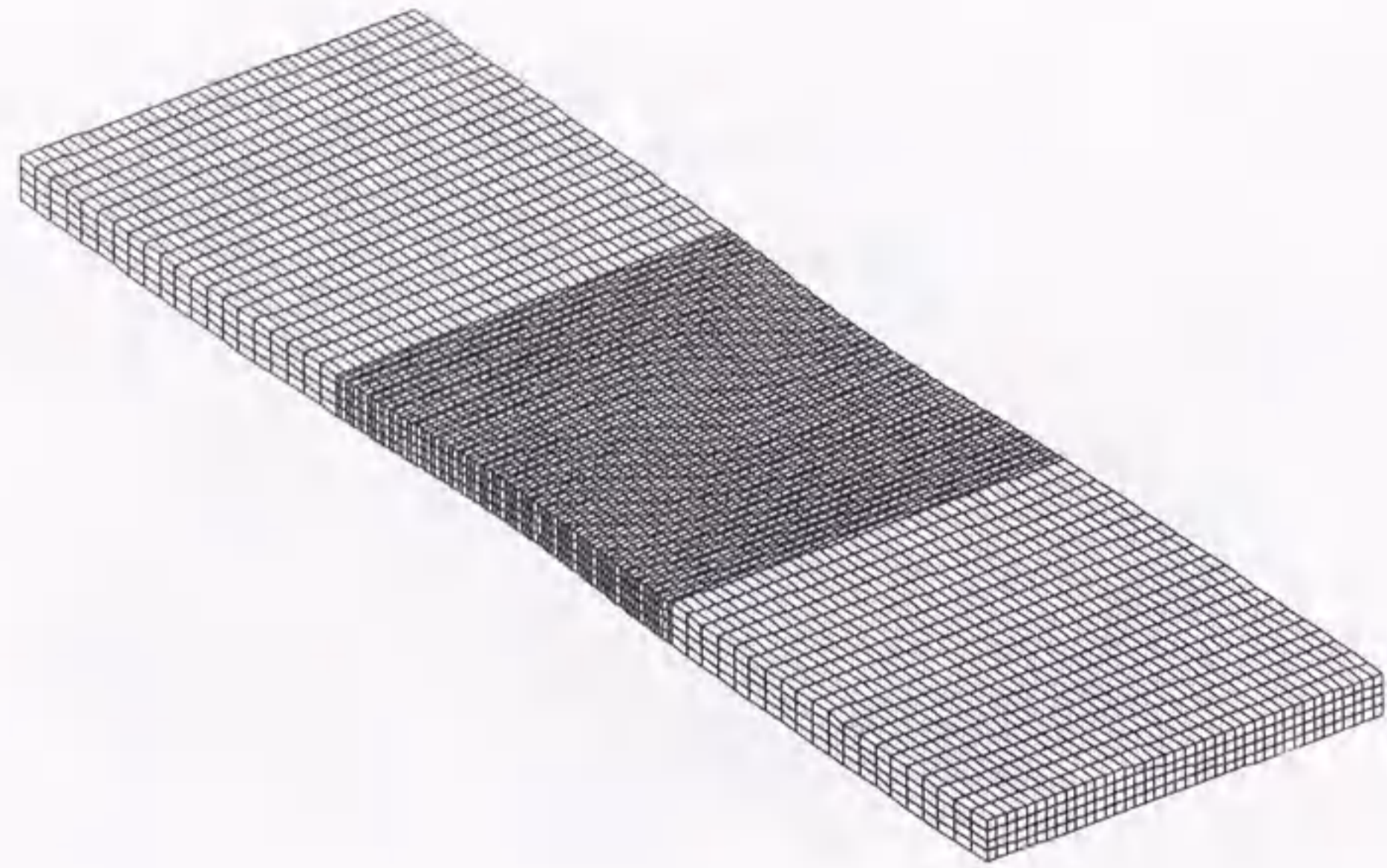
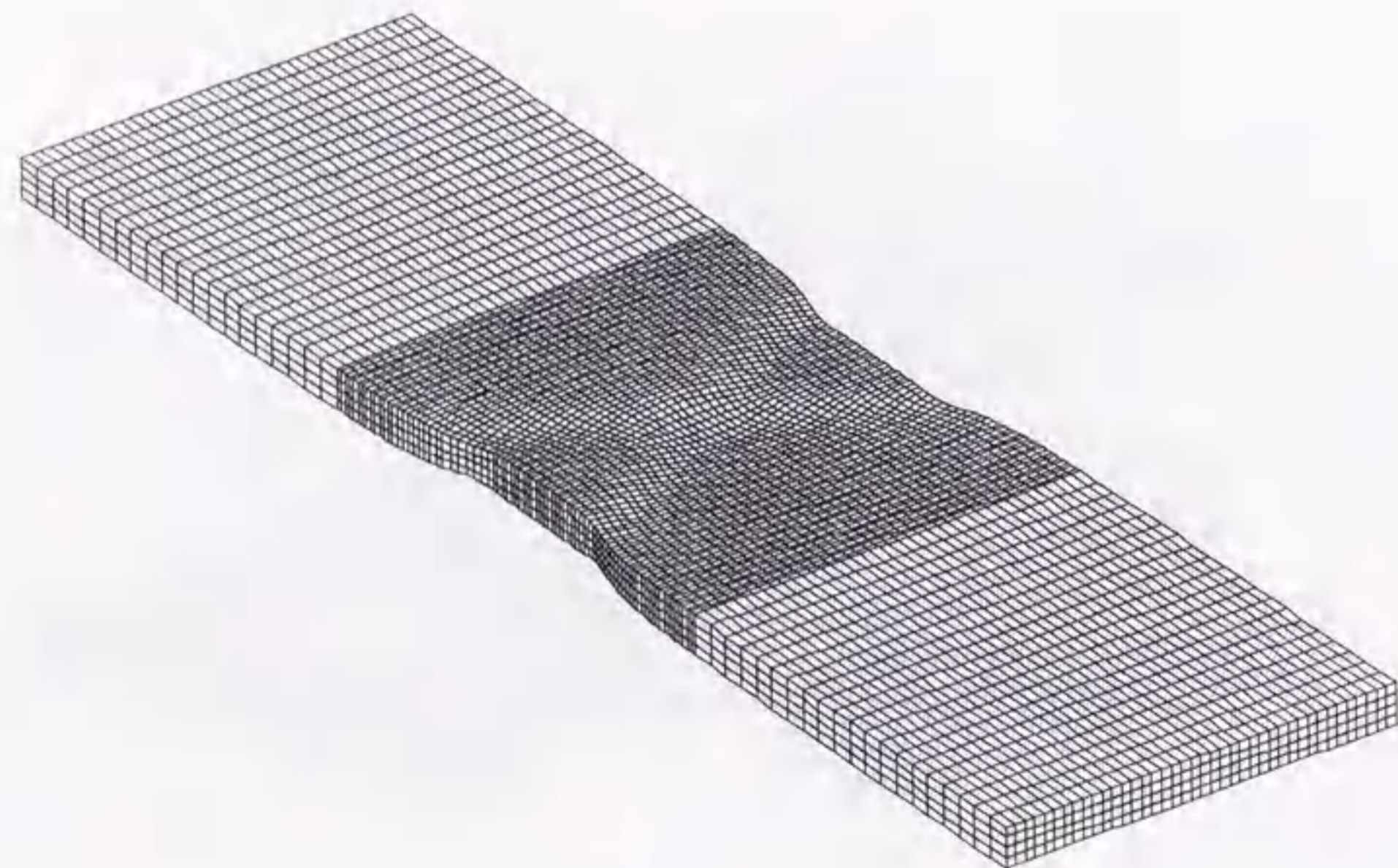


図 7.19 モデル B における Scaled Corrector



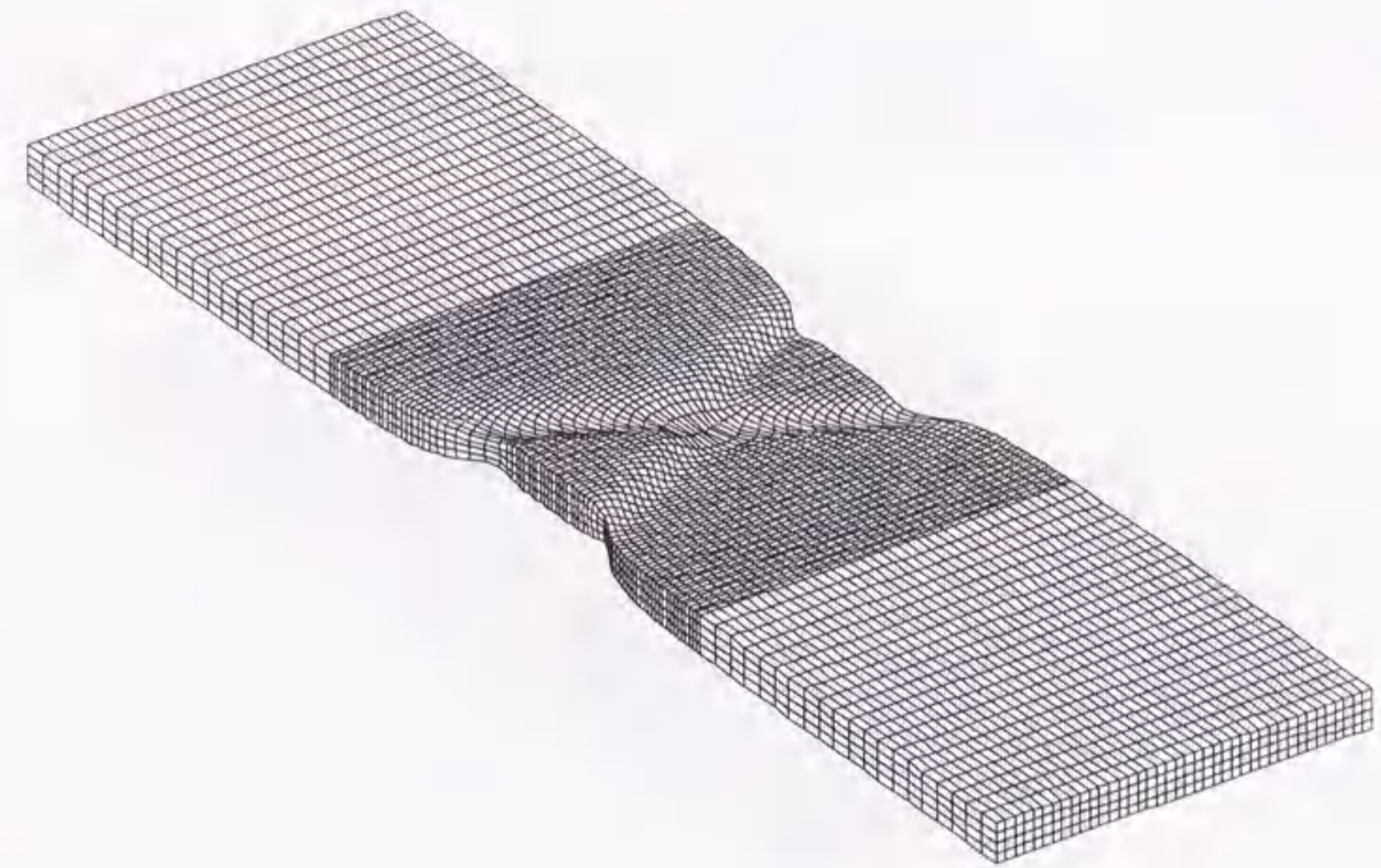


$u/L=0.1$

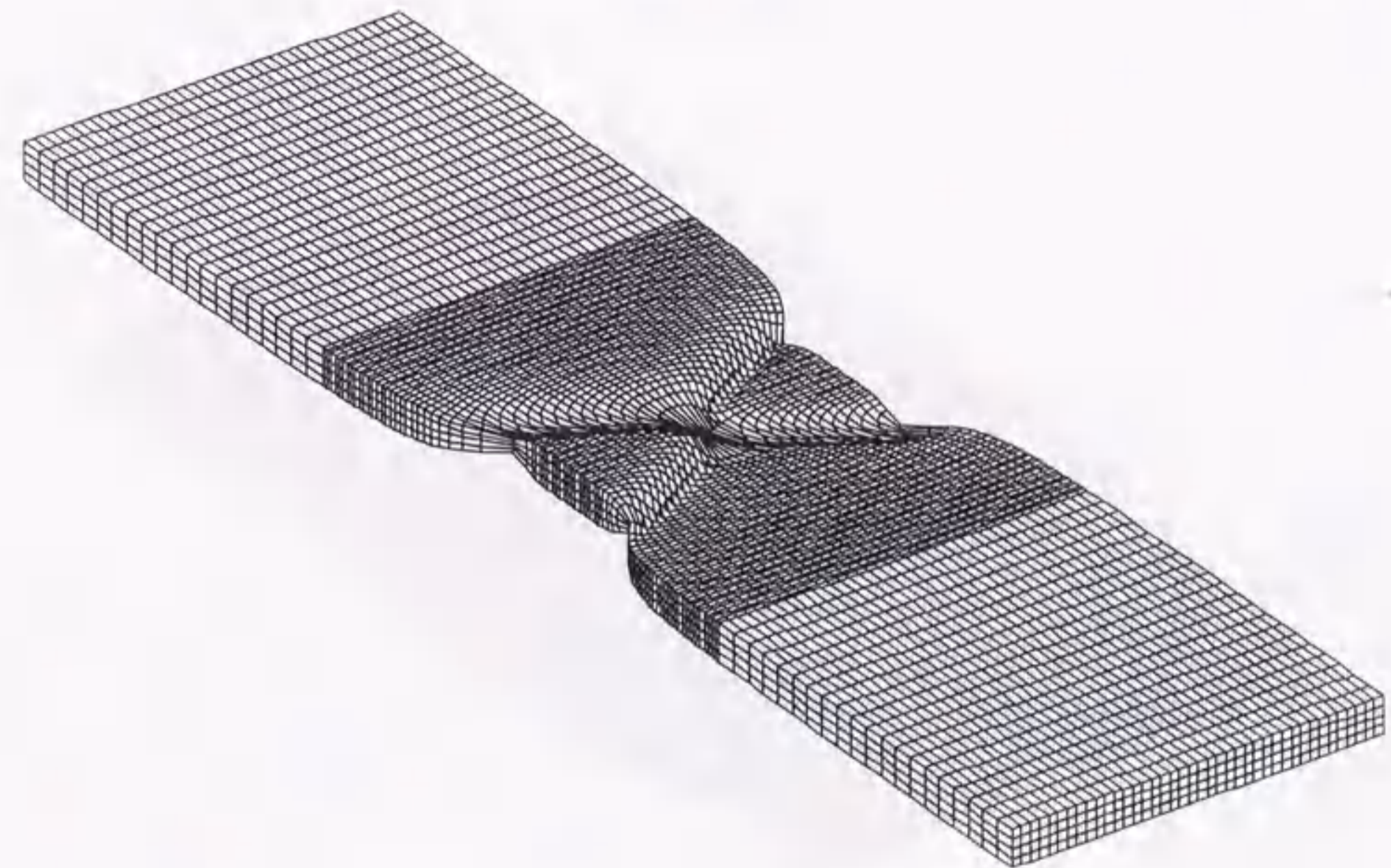


$u/L=0.133$

図 7.20 モデル B の分岐経路上での変形図



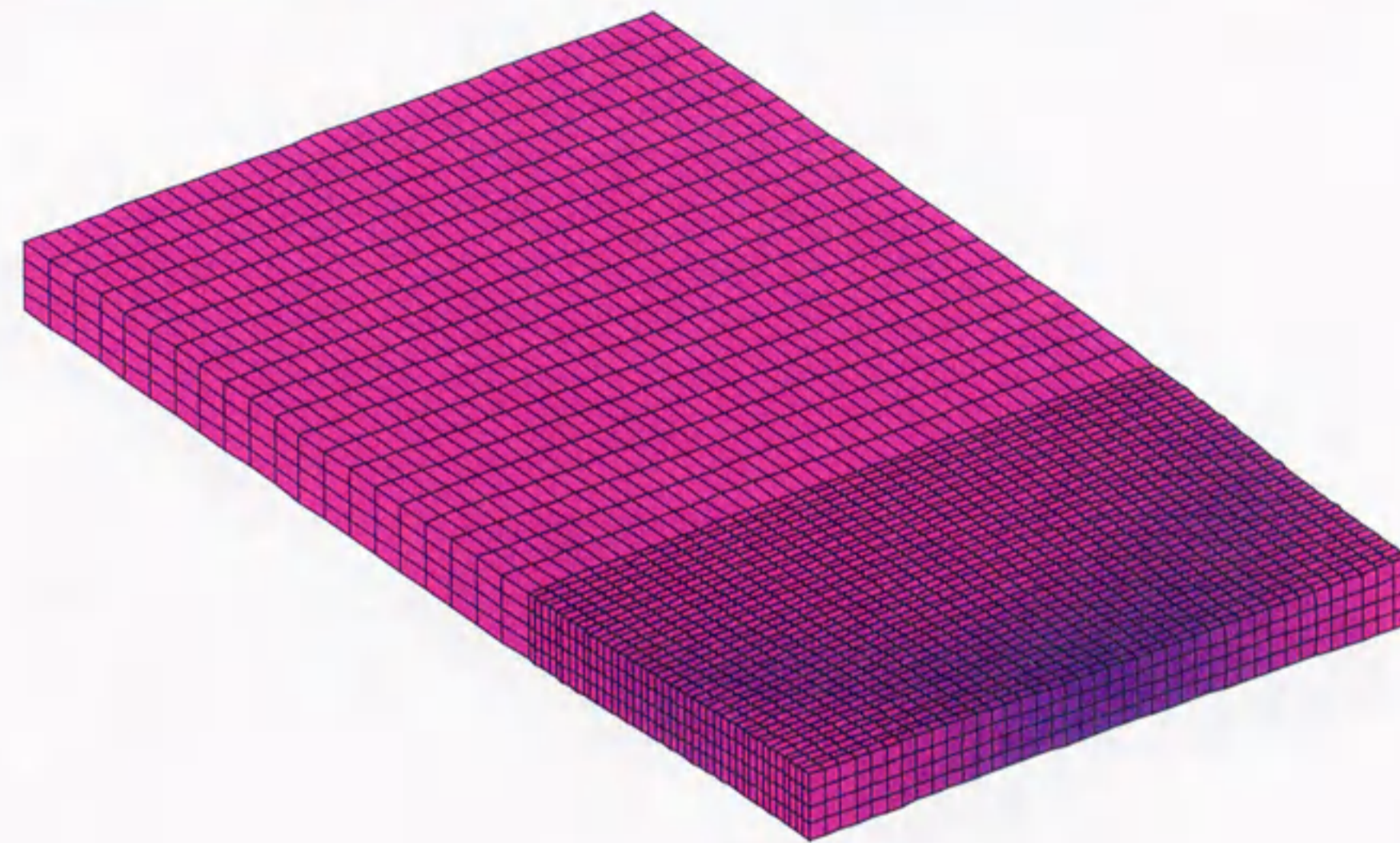
$u/L=0.167$



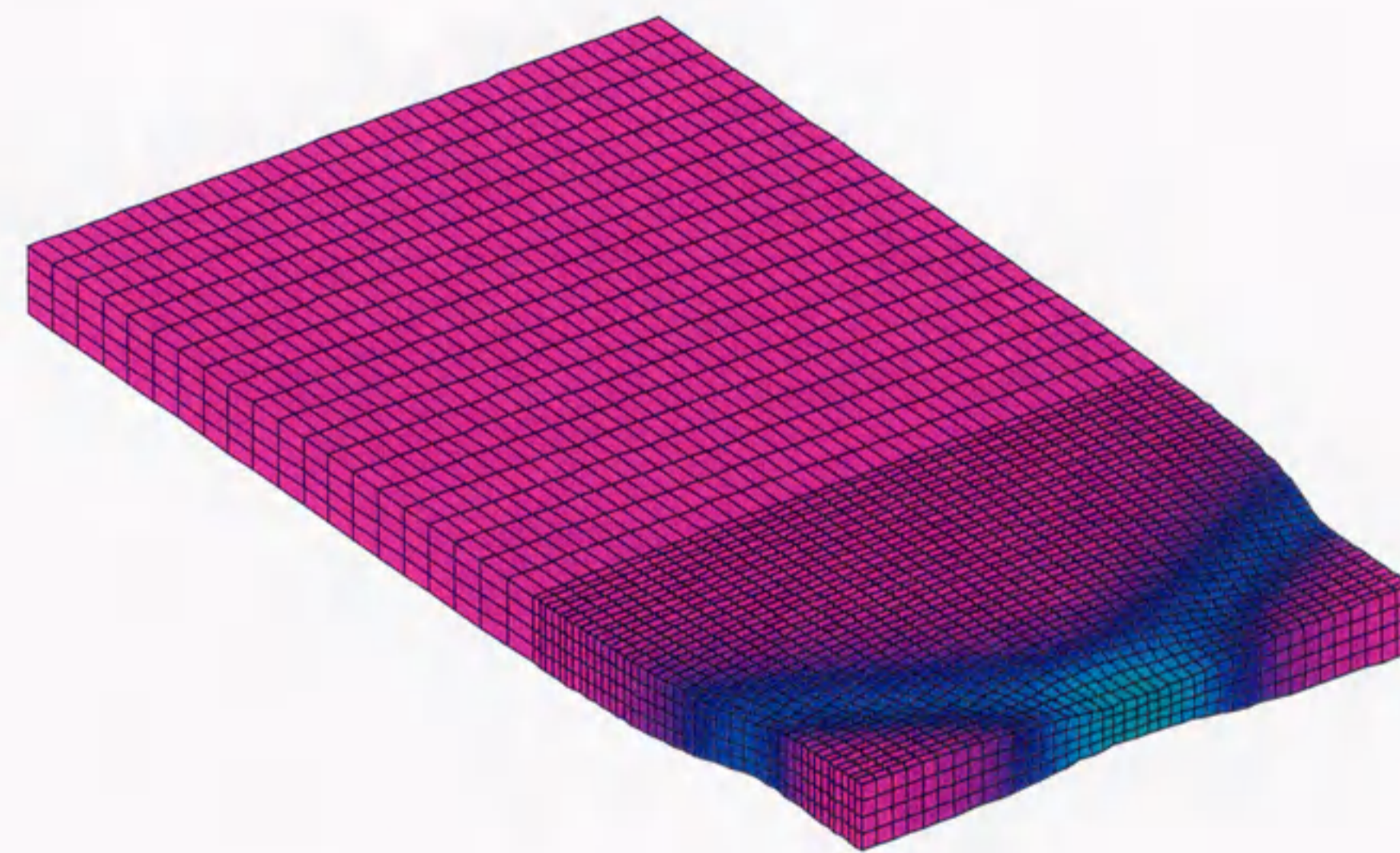
$u/L=0.2$

図 7.20 モデル B の分岐経路上での変形図





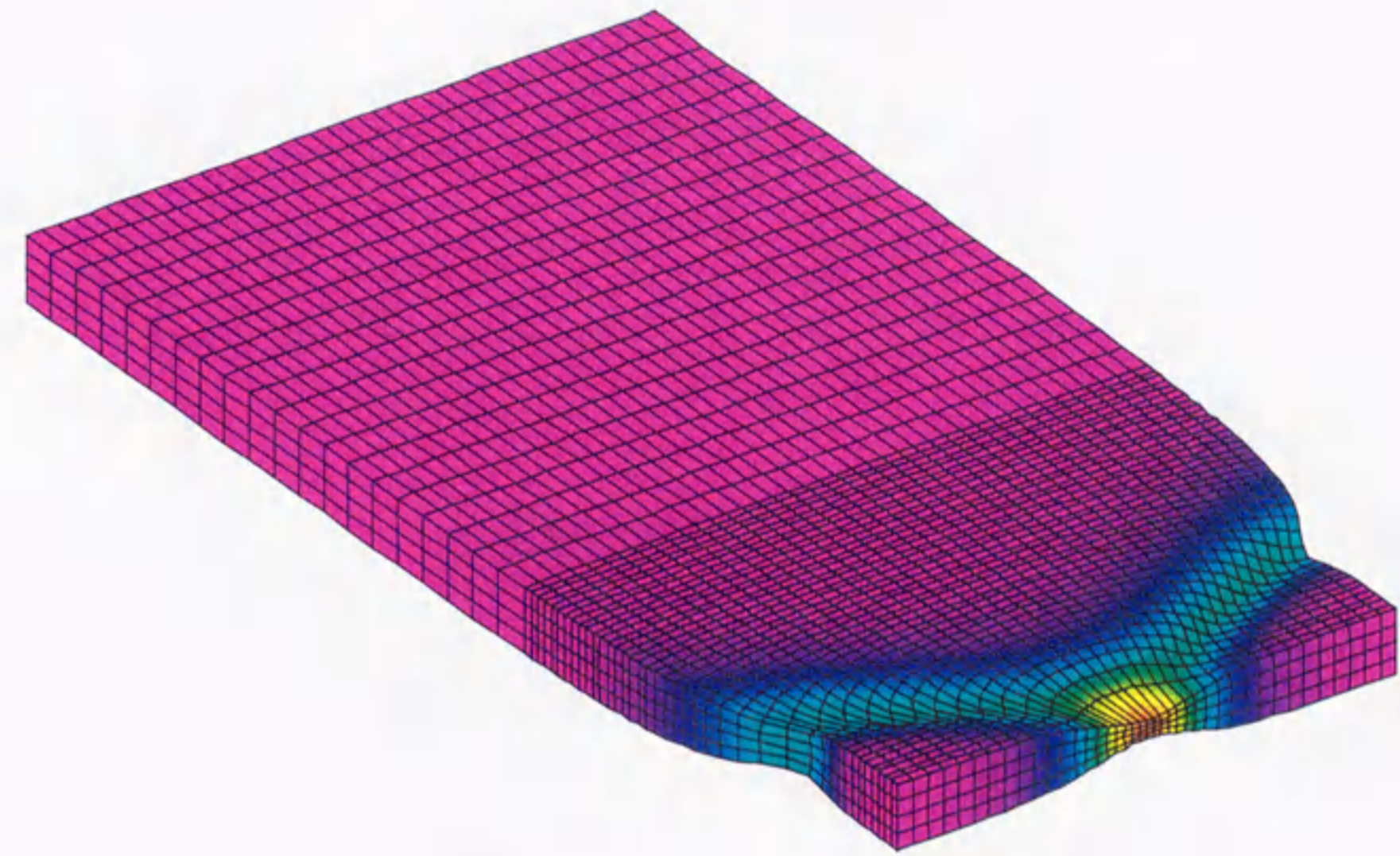
$u/L = 0.1$



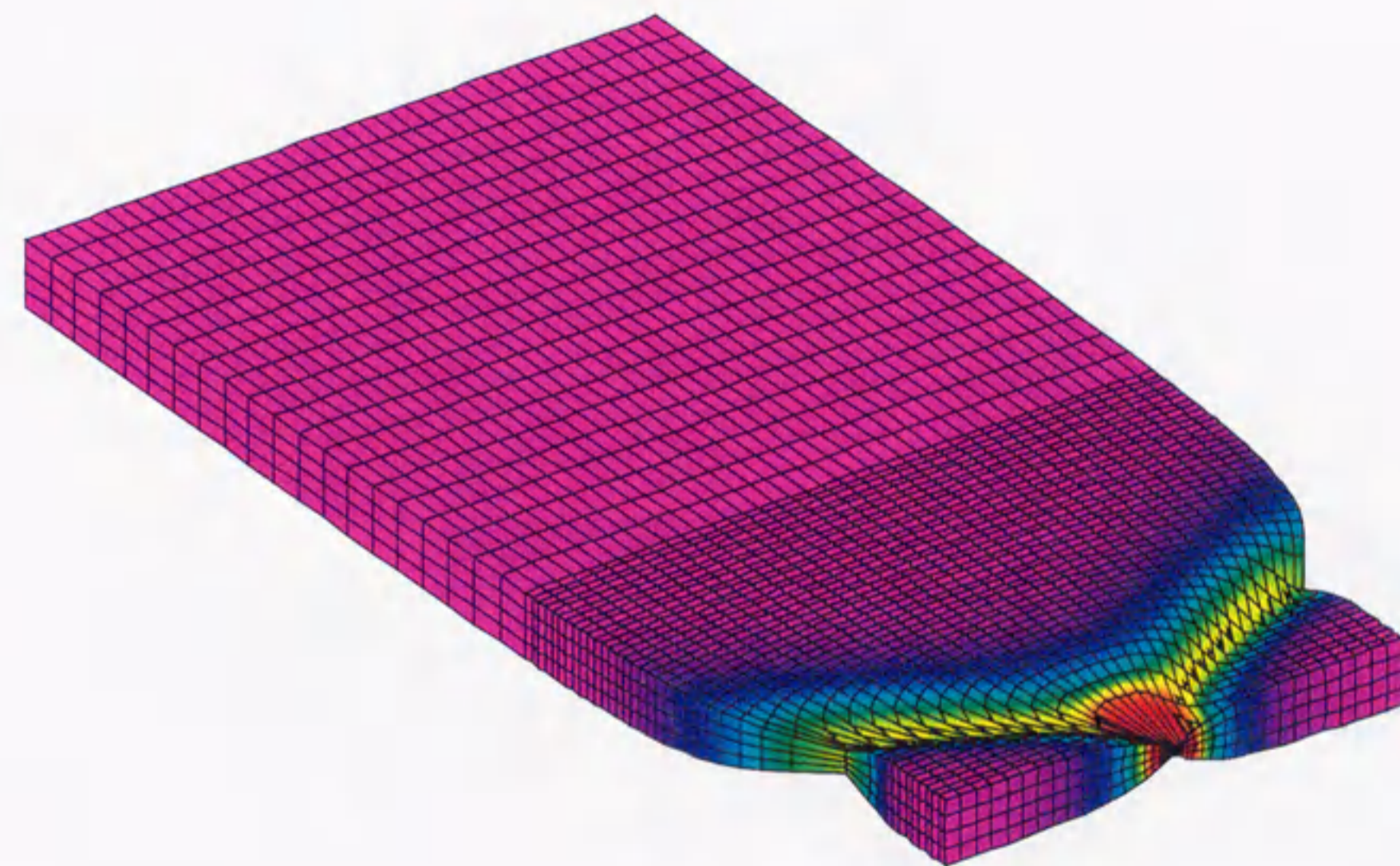
$u/L = 0.133$

図 7.21 モデル B の分岐経路上での相当塑性ひずみ分布図





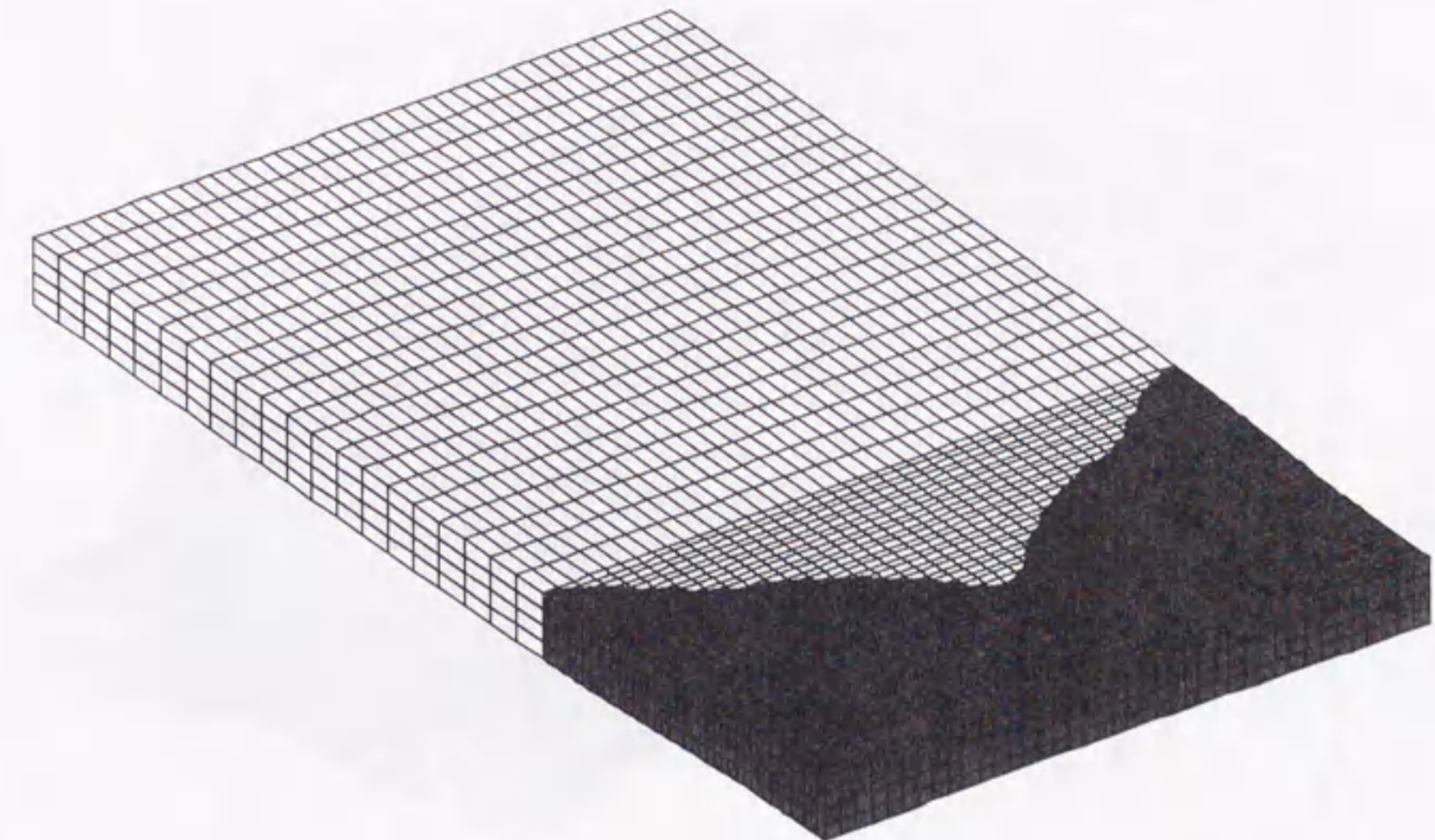
$u/L = 0.167$



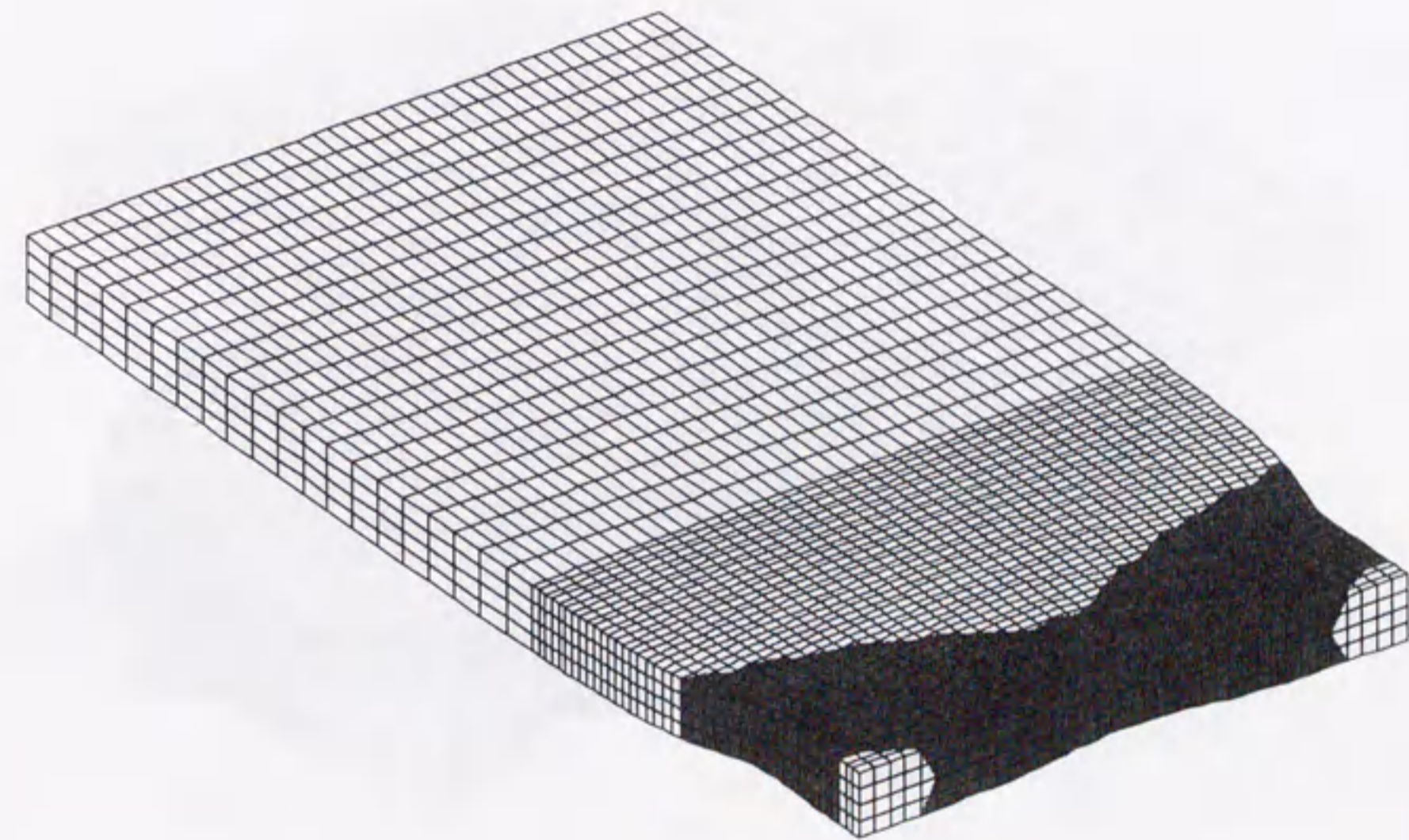
$u/L = 0.2$

図 7.21 モデル B の分岐経路上での相当塑性ひずみ分布図





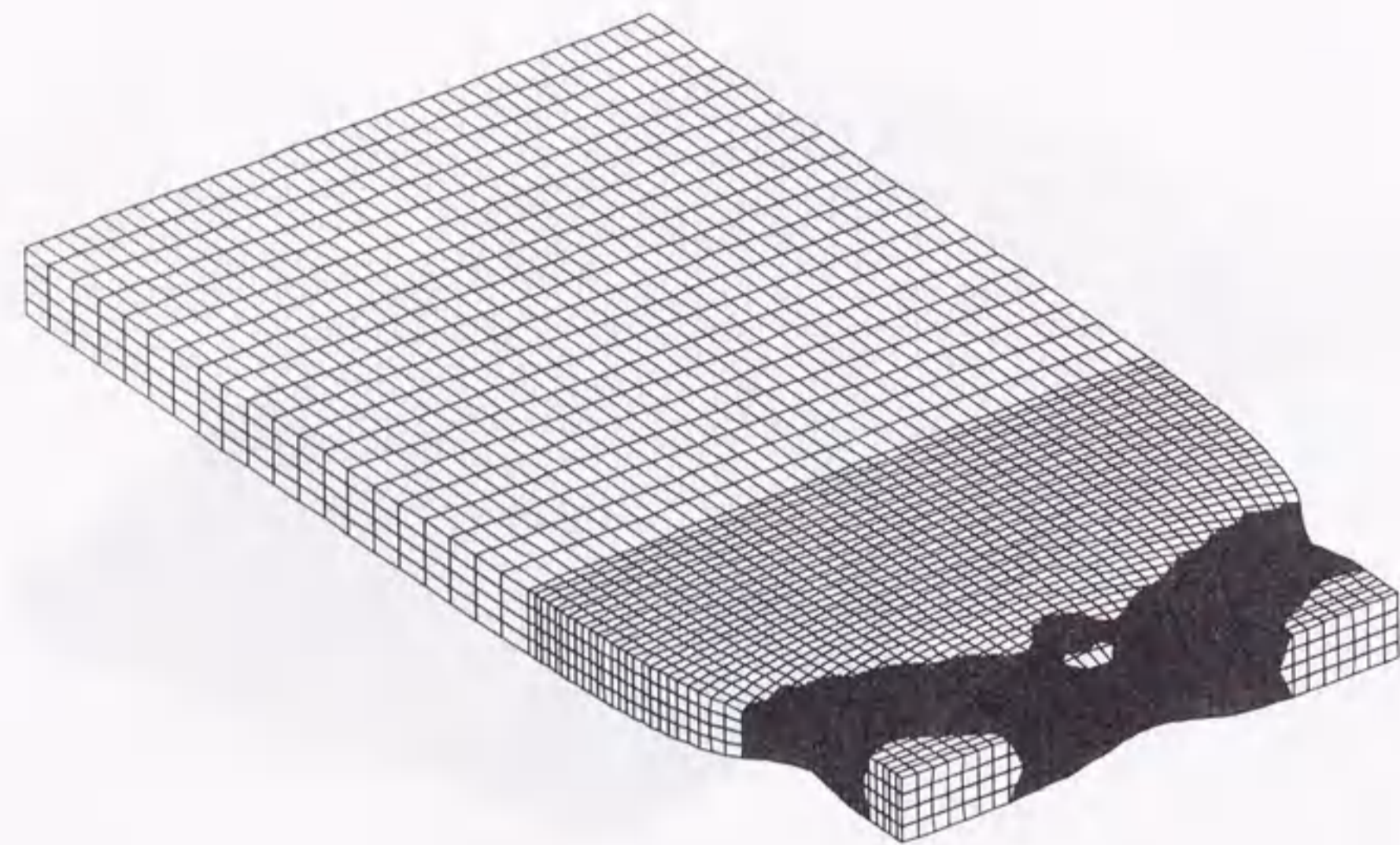
$u/L = 0.1$



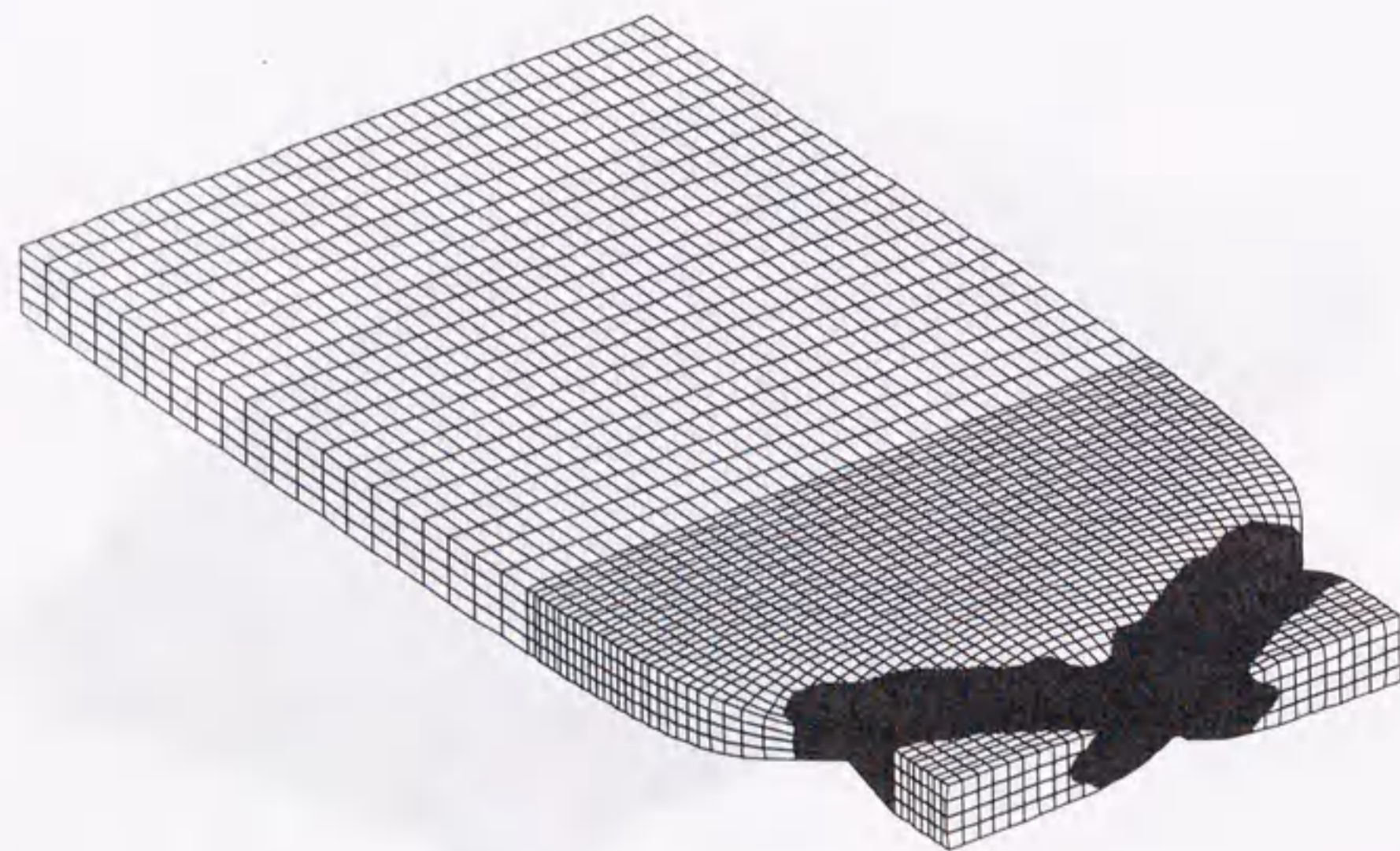
$u/L = 0.133$

図 7.22 モデル B の分岐経路上での負荷・除荷領域 (負荷:黒 除荷:白)





$u/L = 0.167$



$u/L = 0.2$

図 7.22 モデル B の分岐経路上での負荷・除荷領域 (負荷:黒 除荷:白)

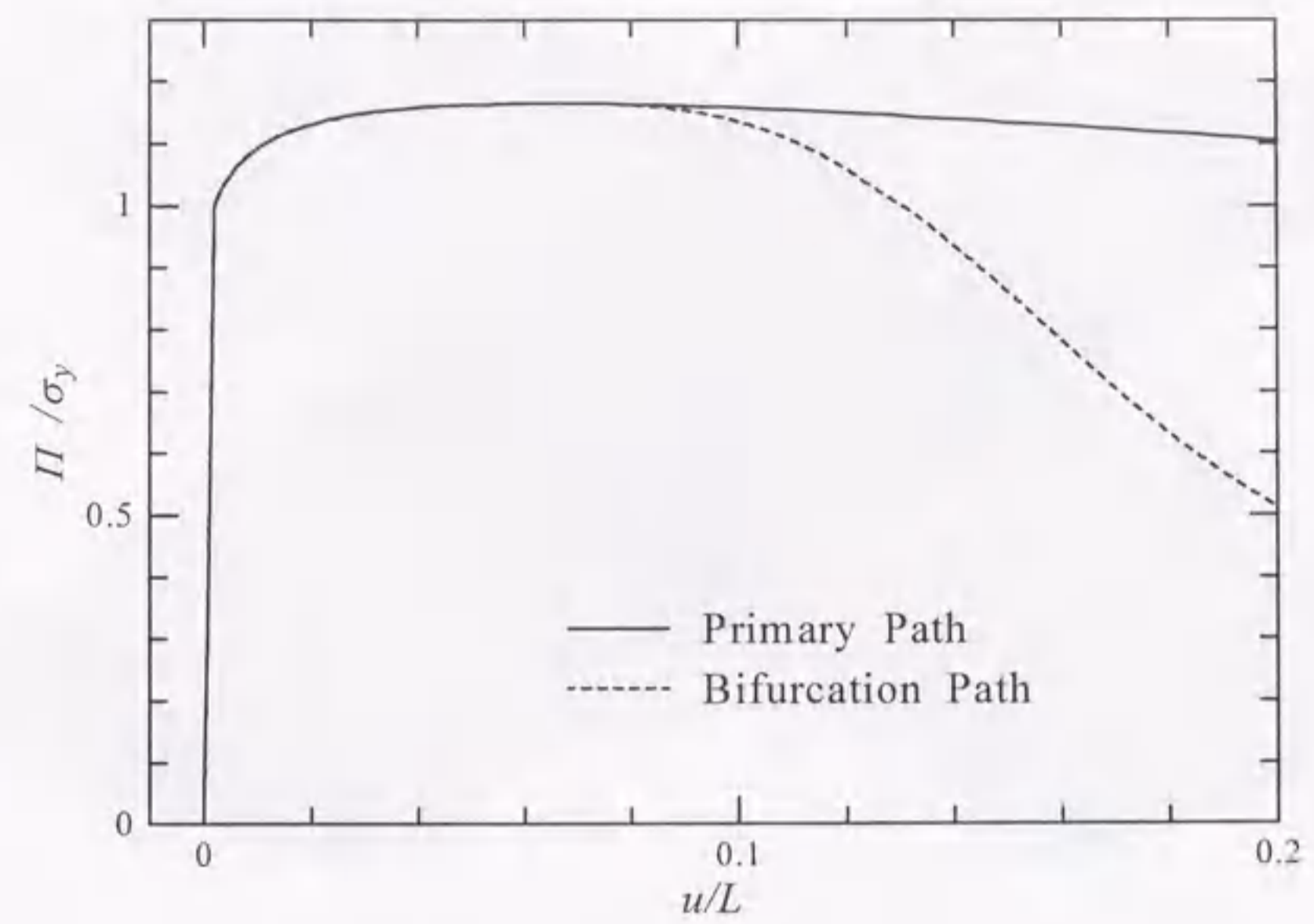


図 7.23 モデル C のつり合い経路

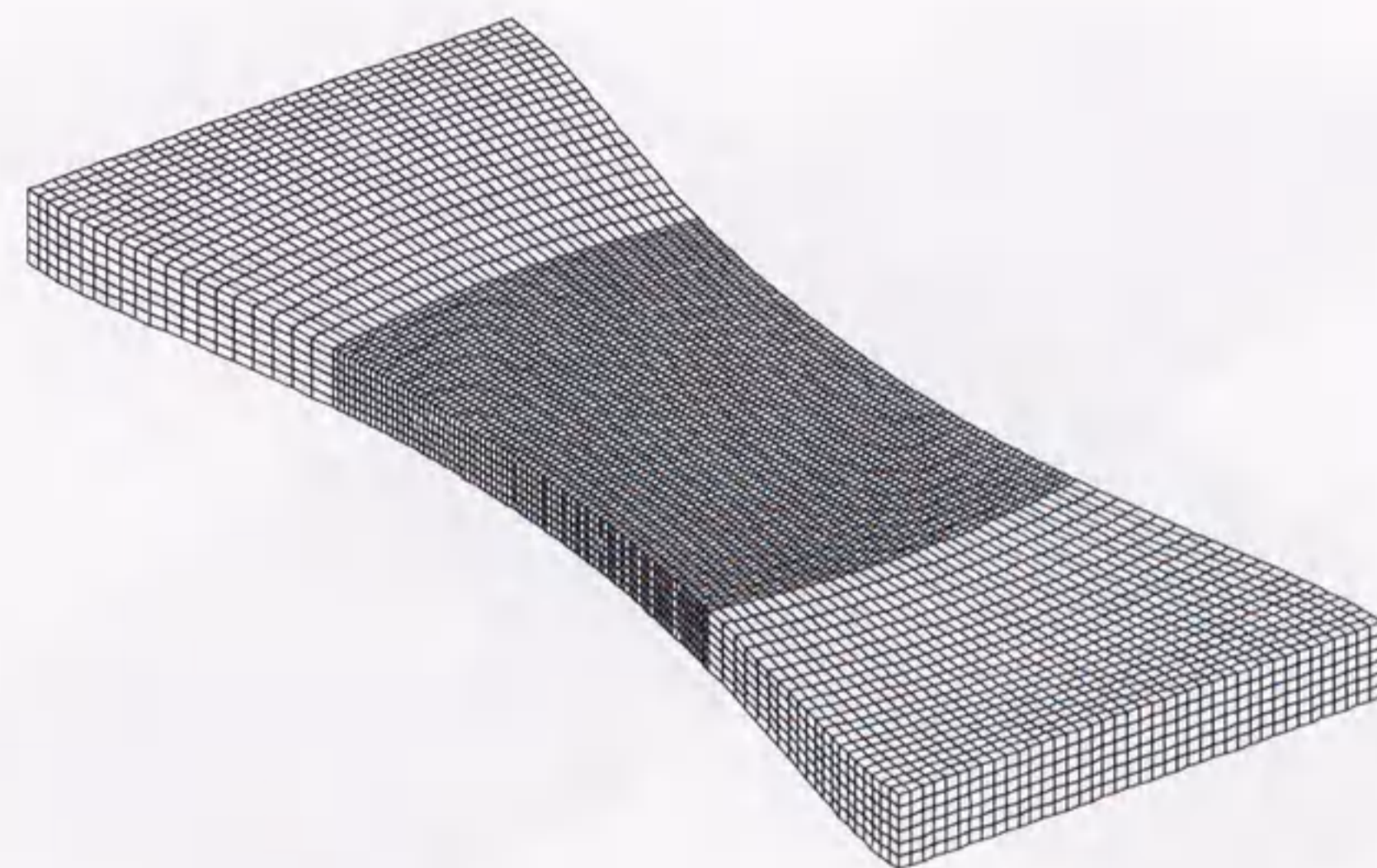
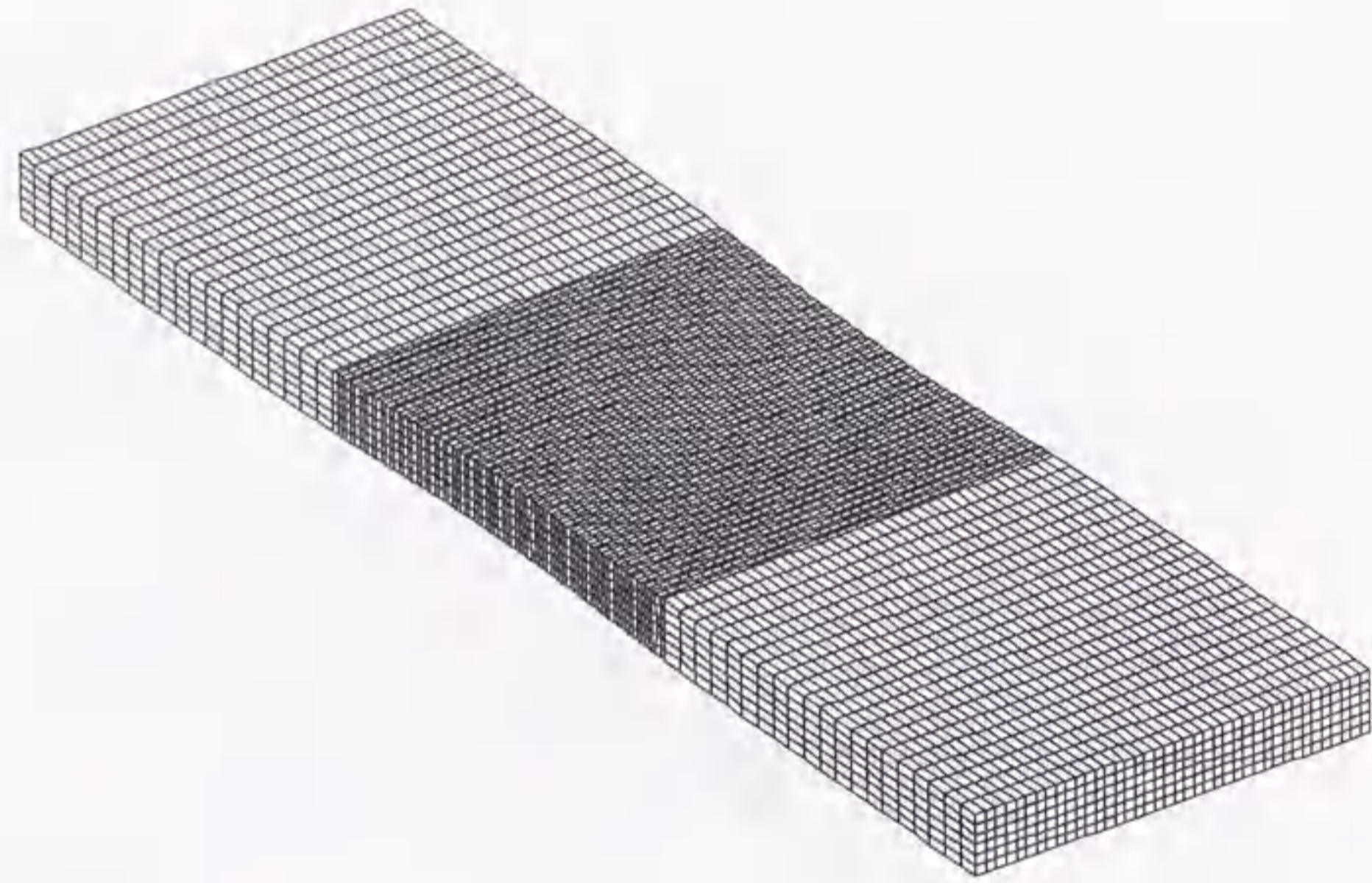
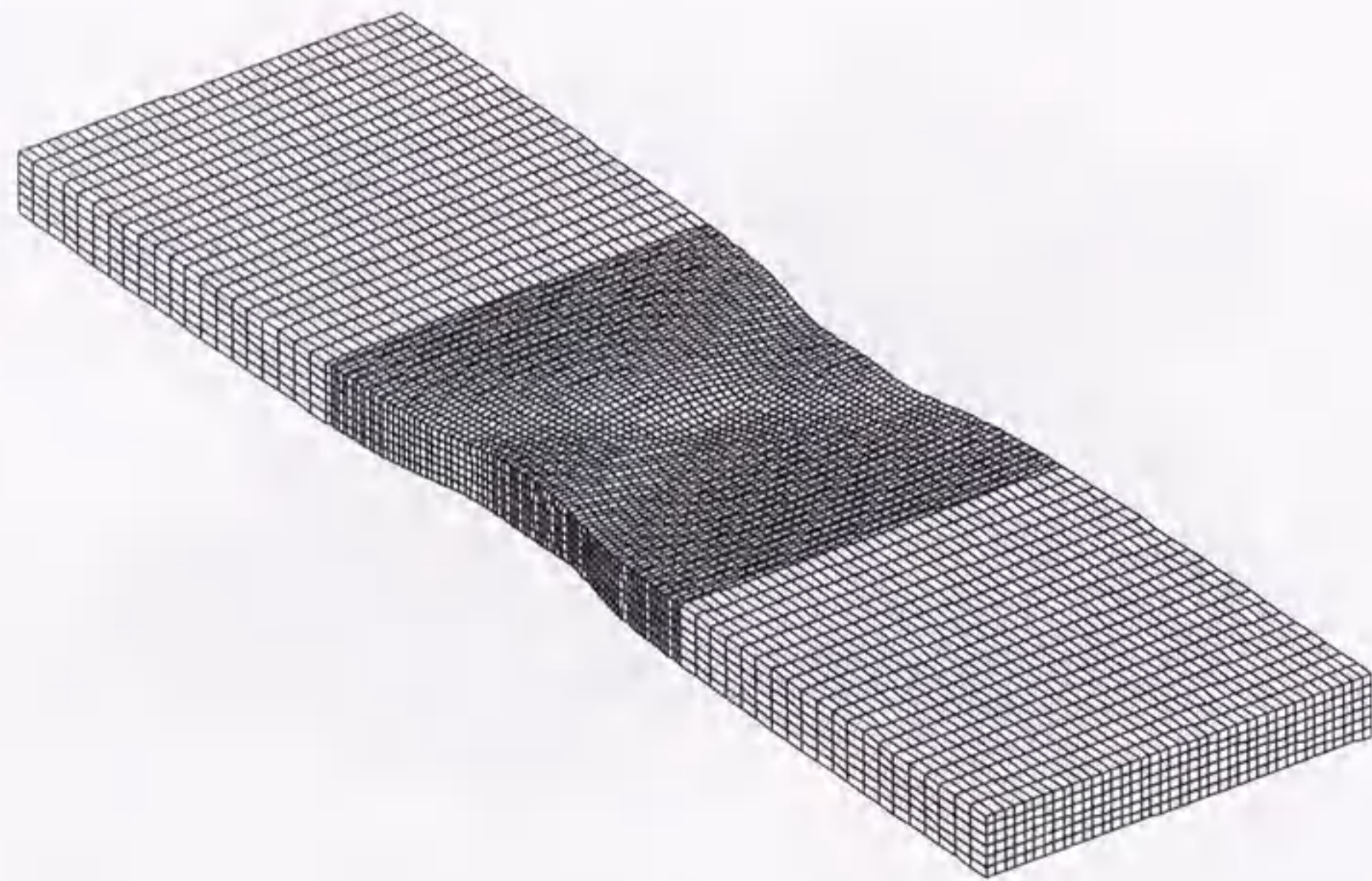


図 7.24 モデル C における Scaled Corrector



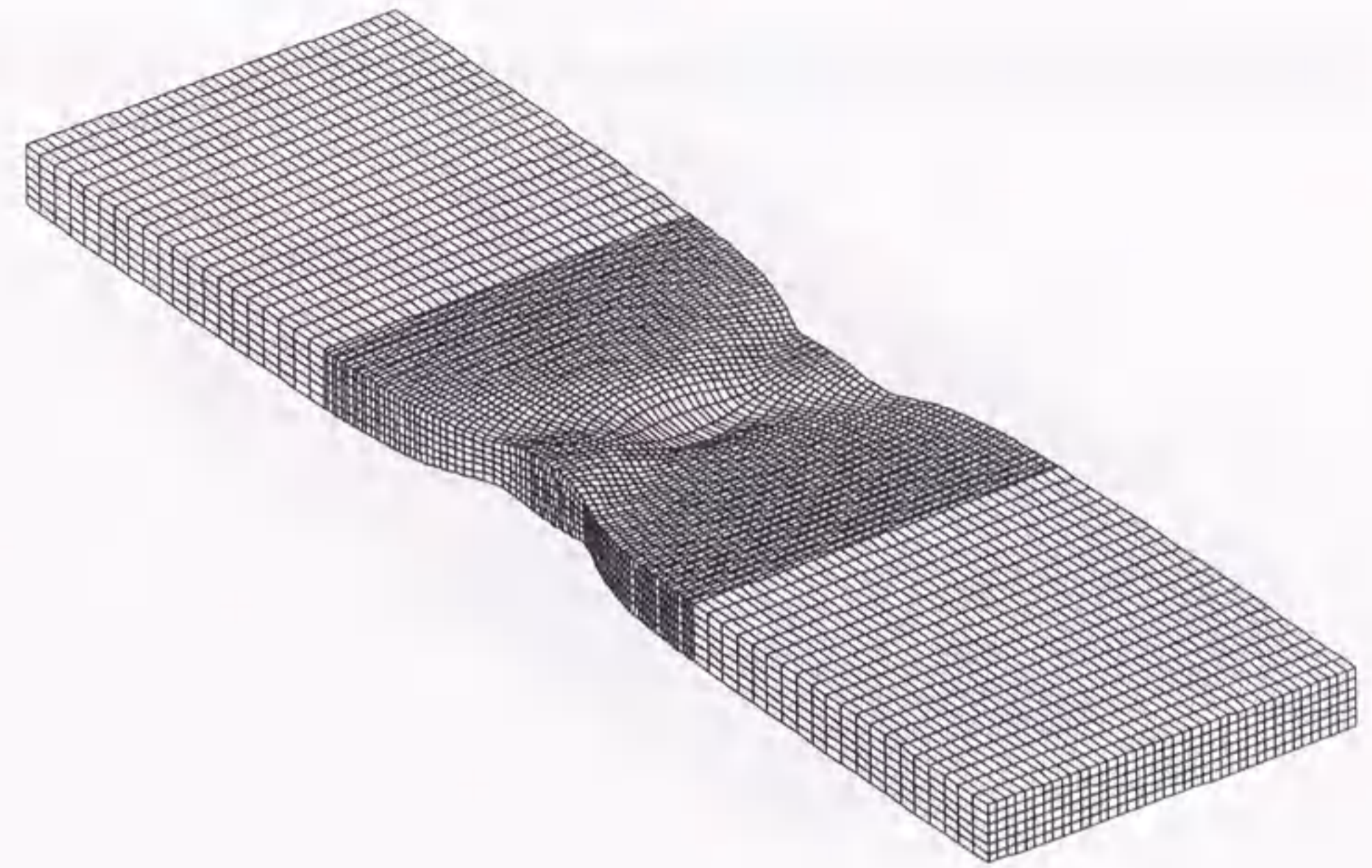


$u/L=0.1$

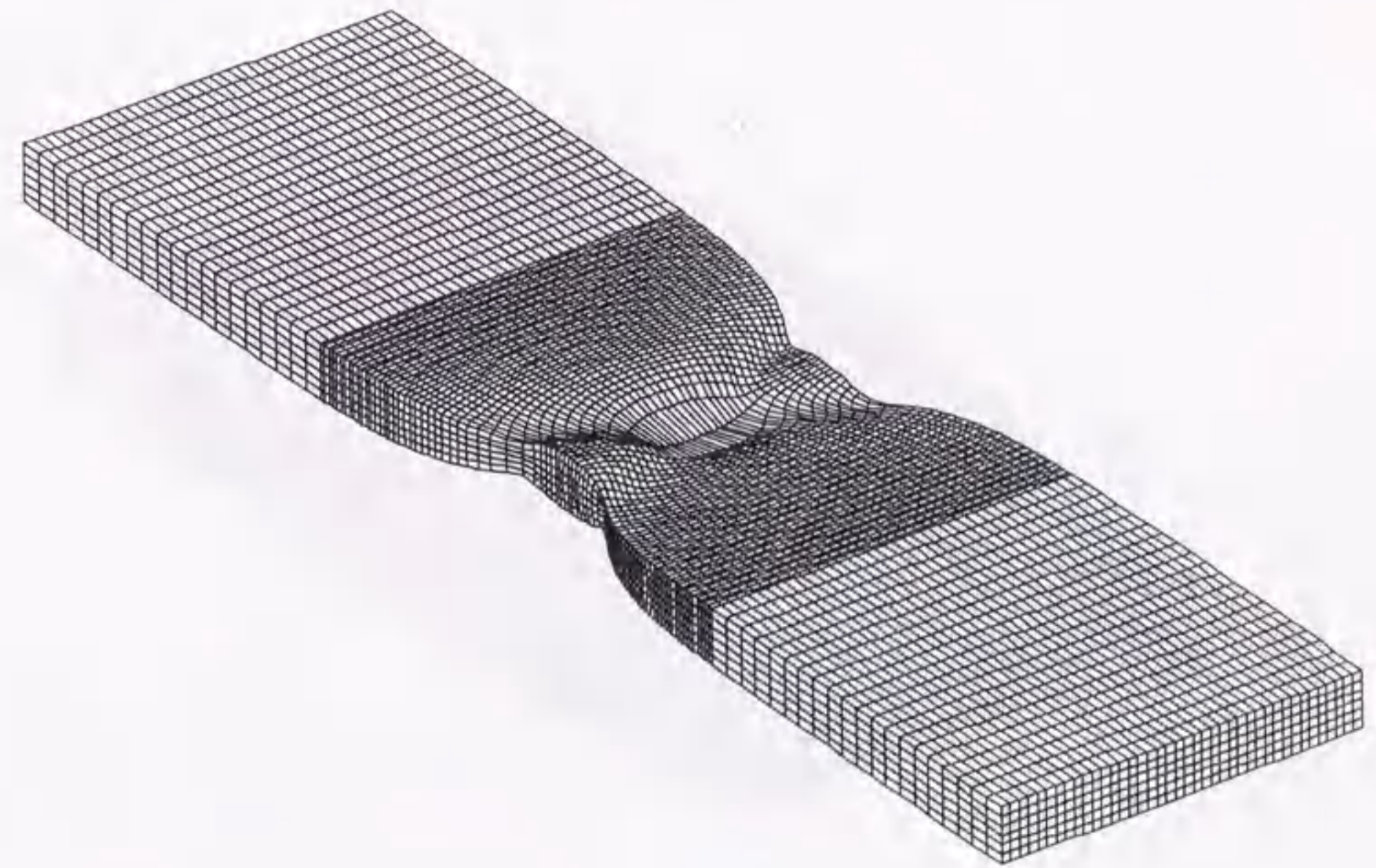


$u/L=0.133$

図 7.25 モデル C の分岐経路上での変形図



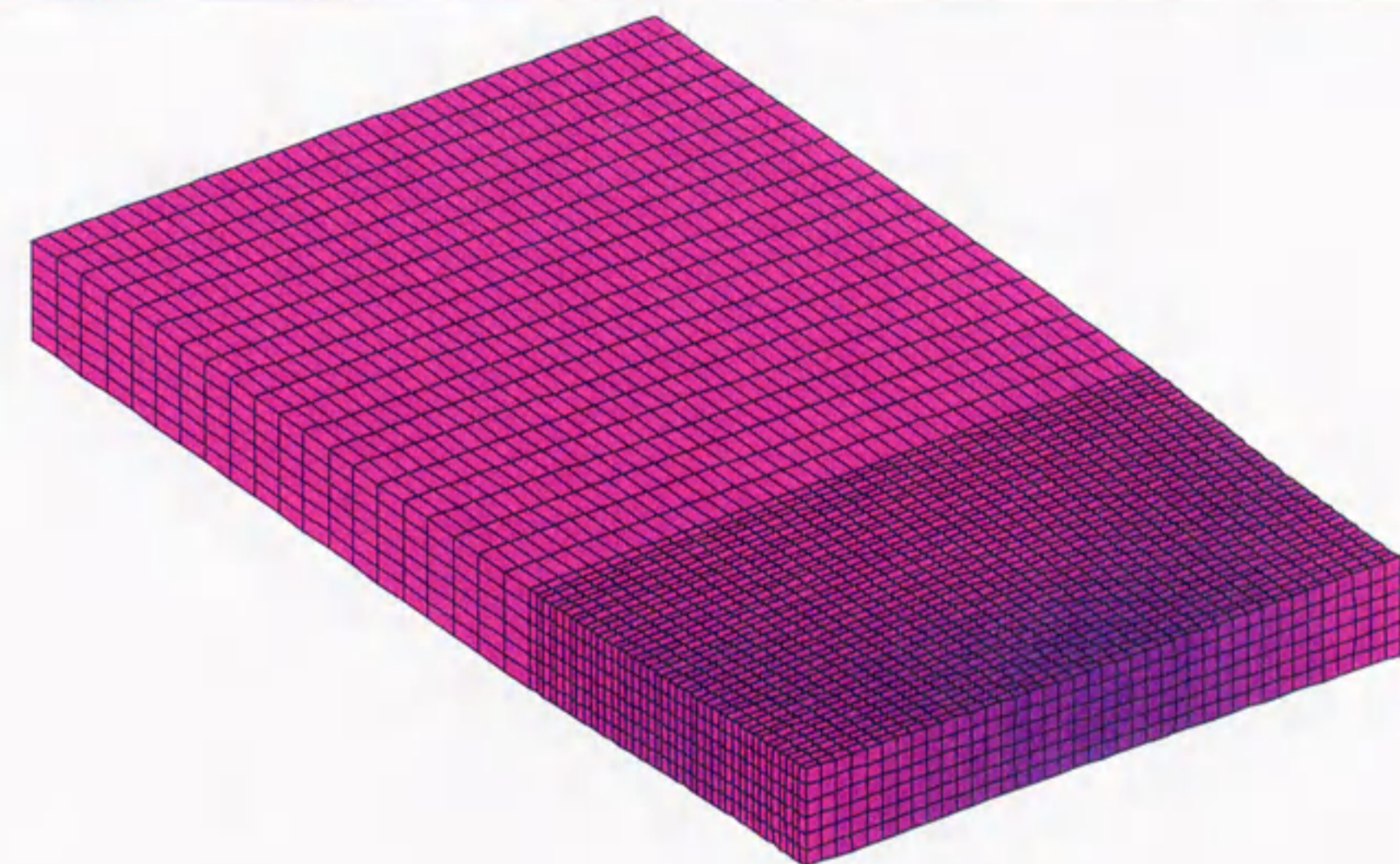
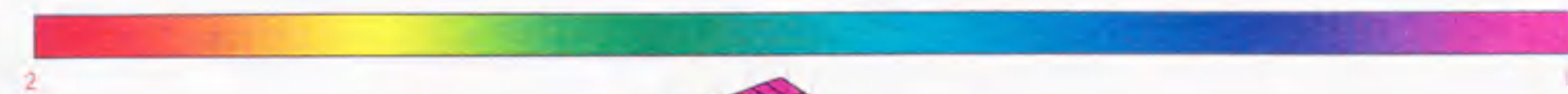
$u/L=0.167$



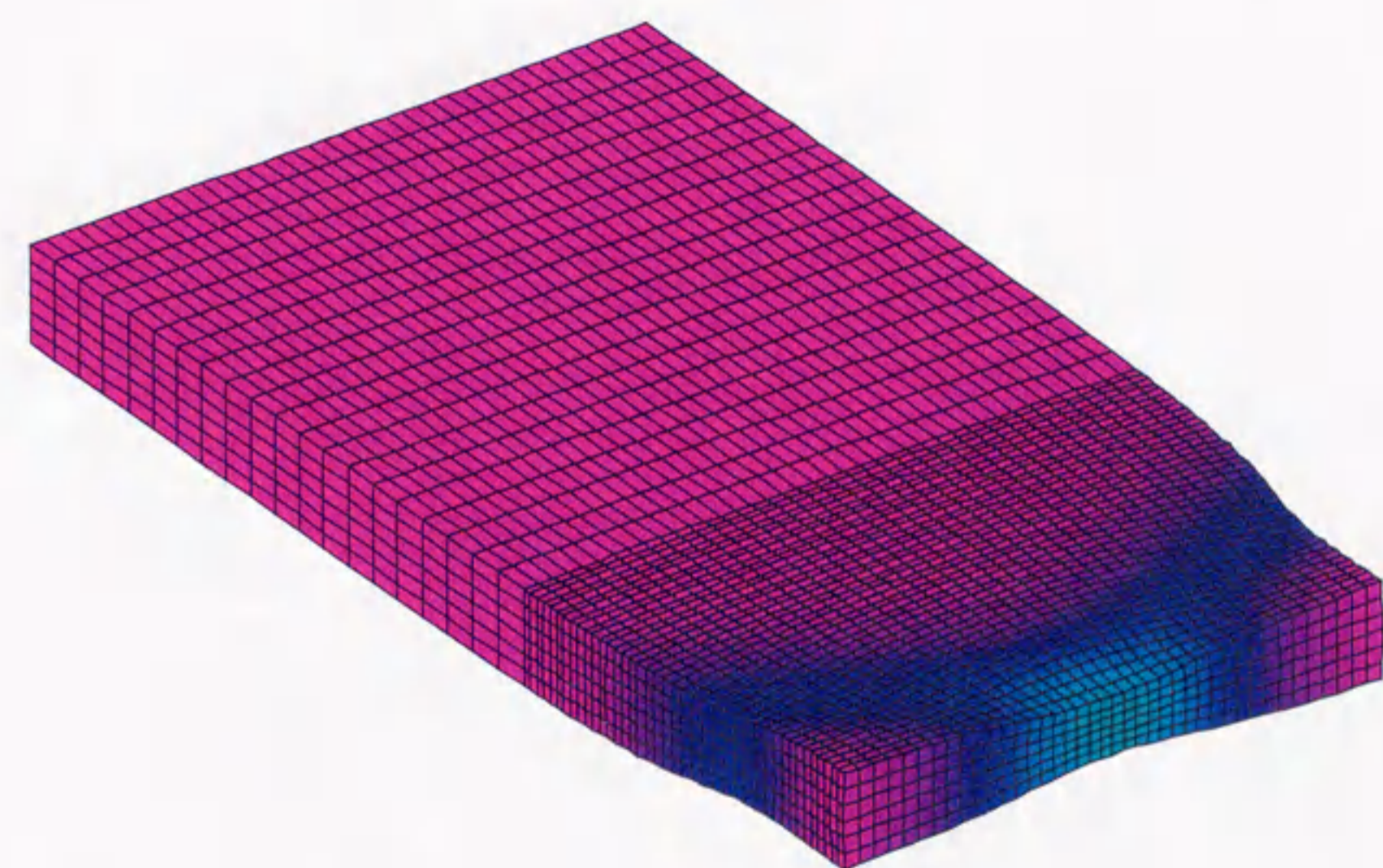
$u/L=0.2$

図 7.25 モデル C の分岐経路上での変形図





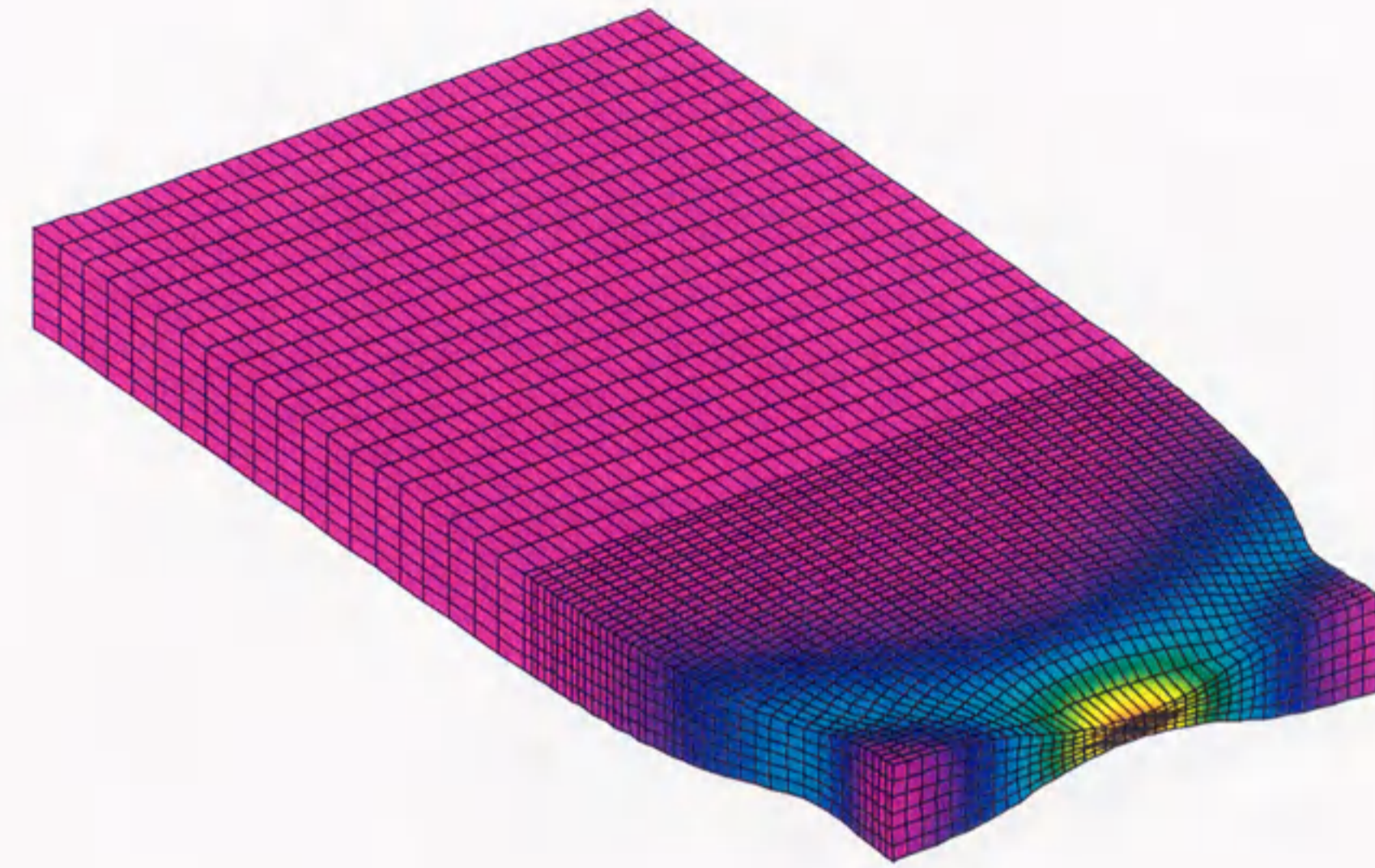
$u/L = 0.1$



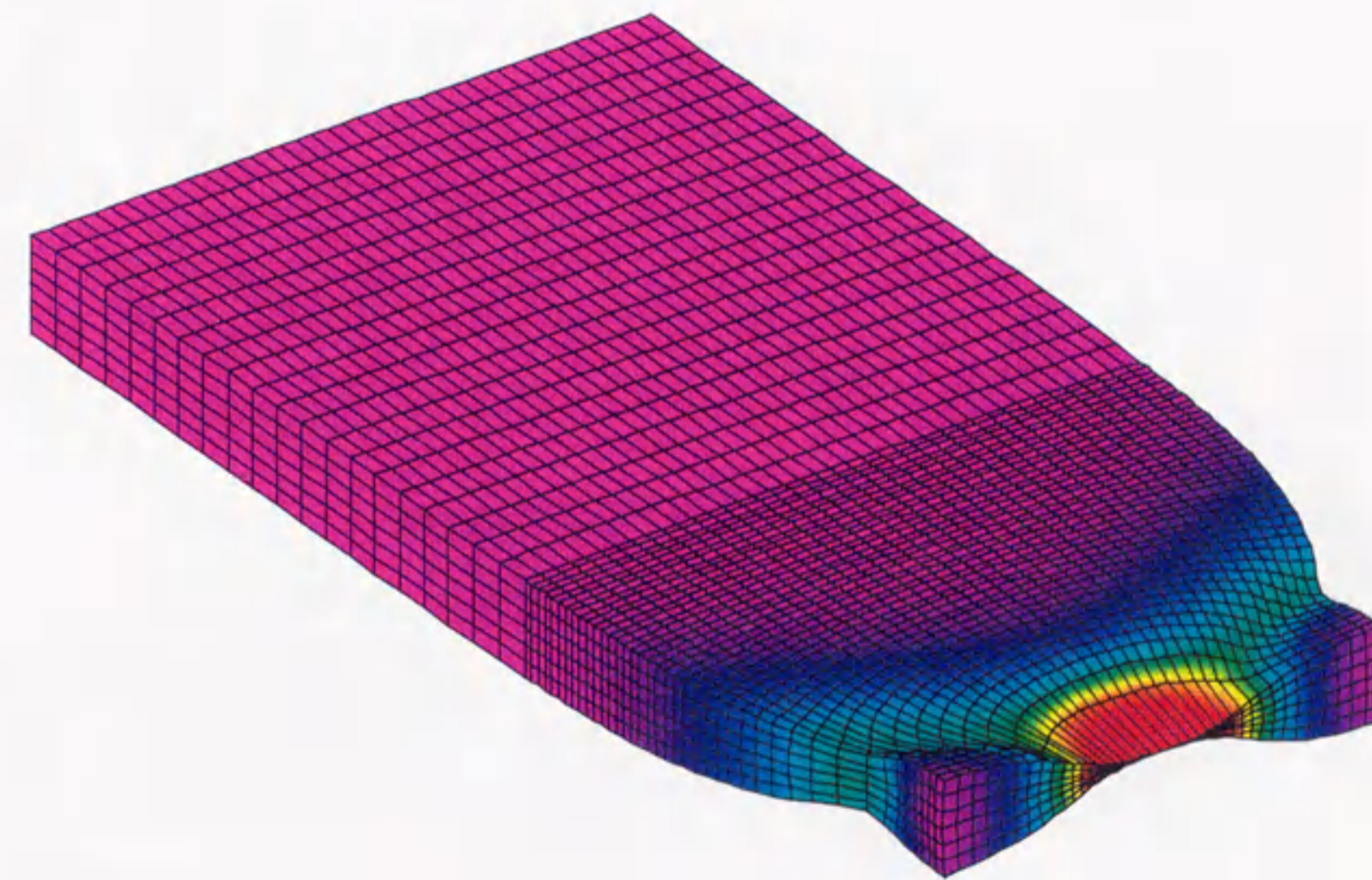
$u/L = 0.133$

図 7.26 モデル C の分岐経路上での相当塑性ひずみ分布図





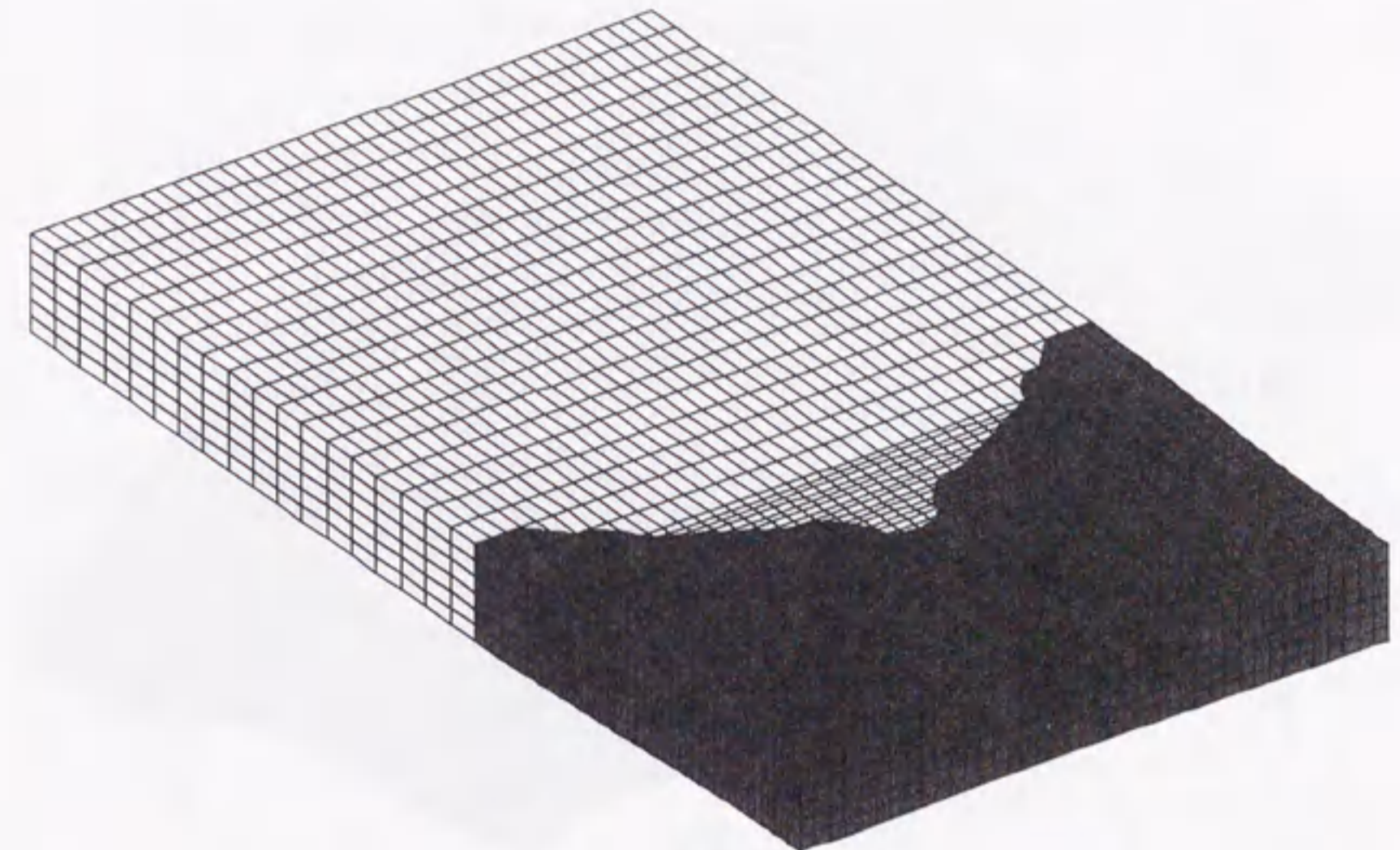
$u/L = 0.167$



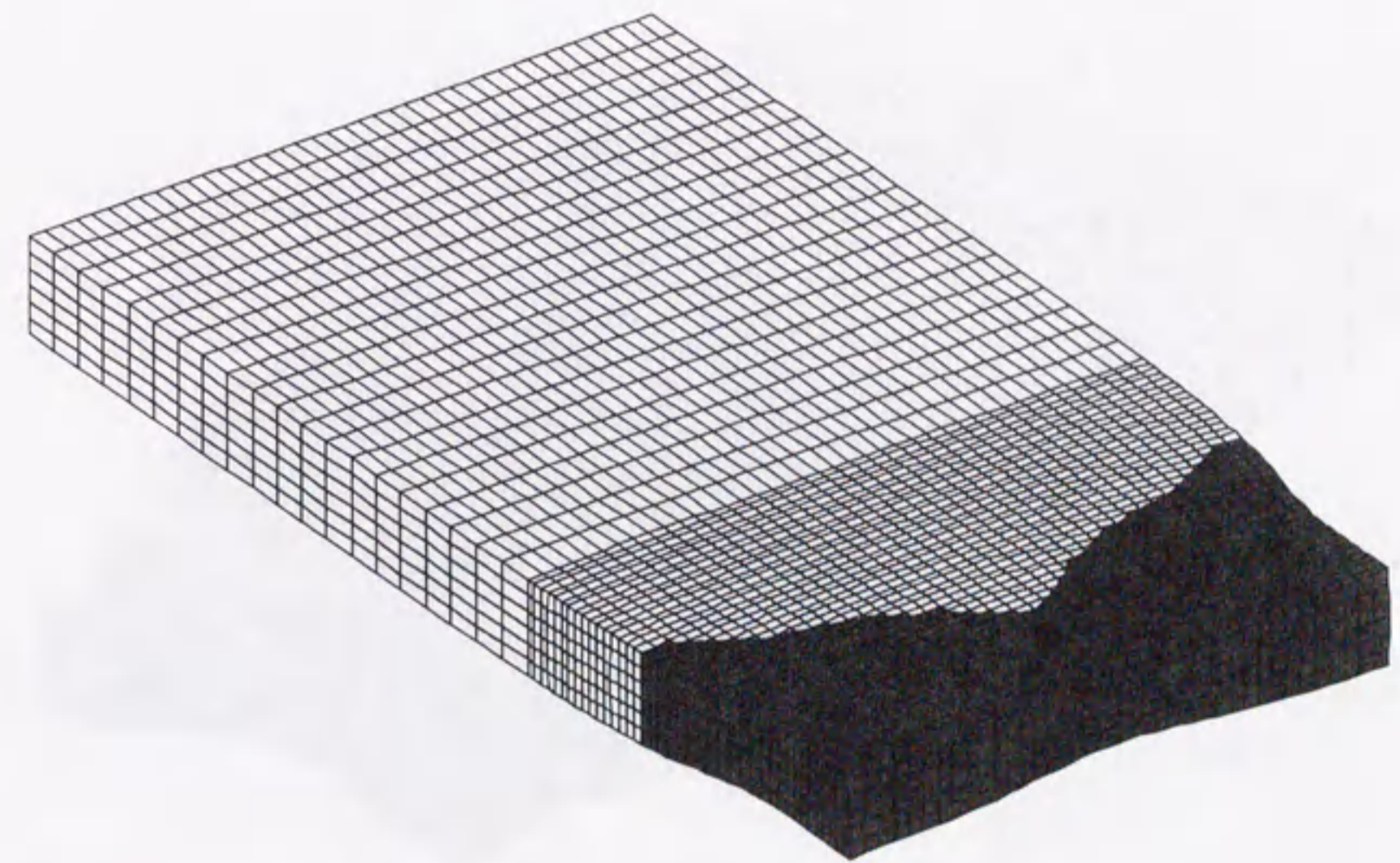
$u/L = 0.2$

図 7.26 モデル C の分岐経路上での相当塑性ひずみ分布図





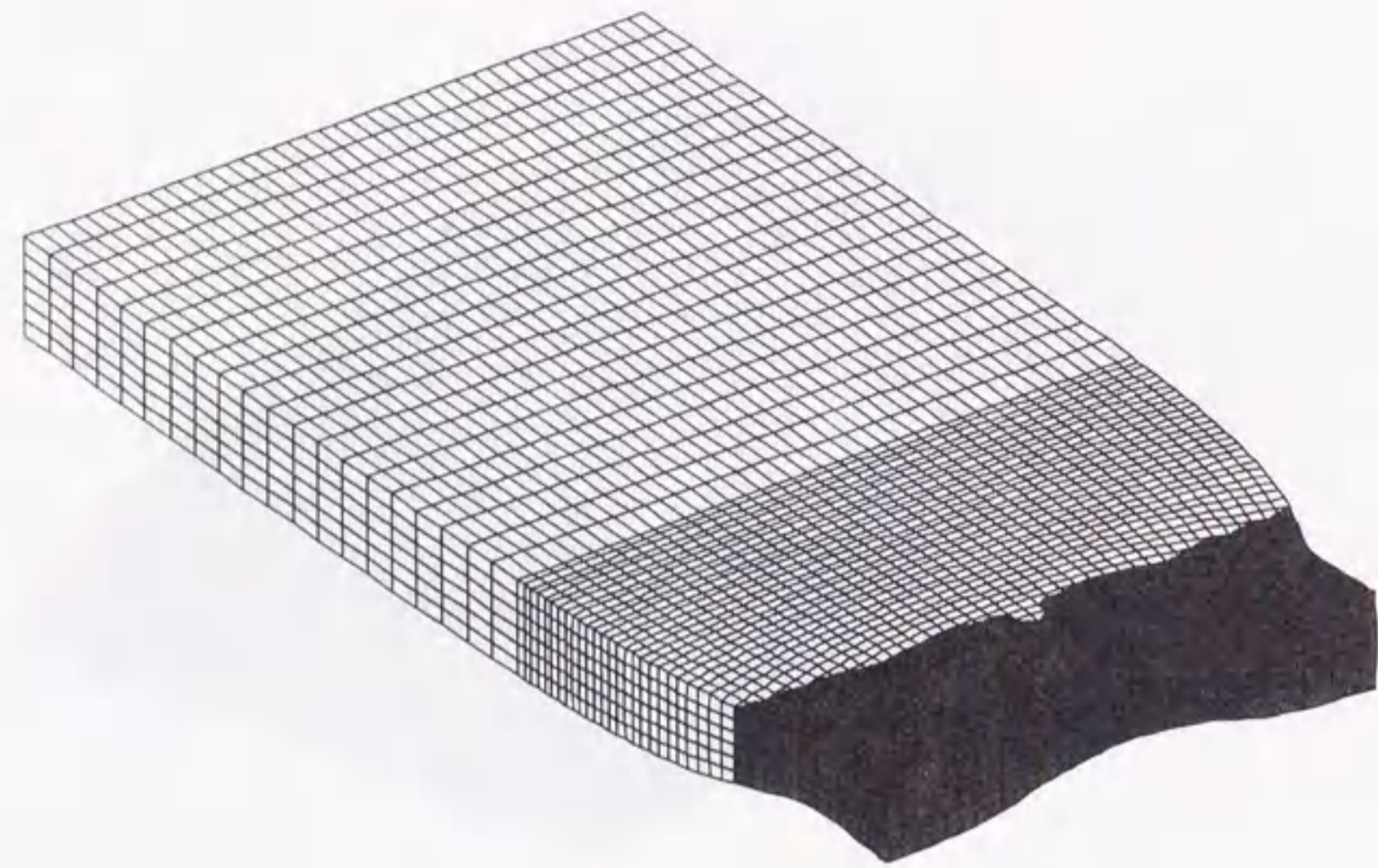
$u/L = 0.1$



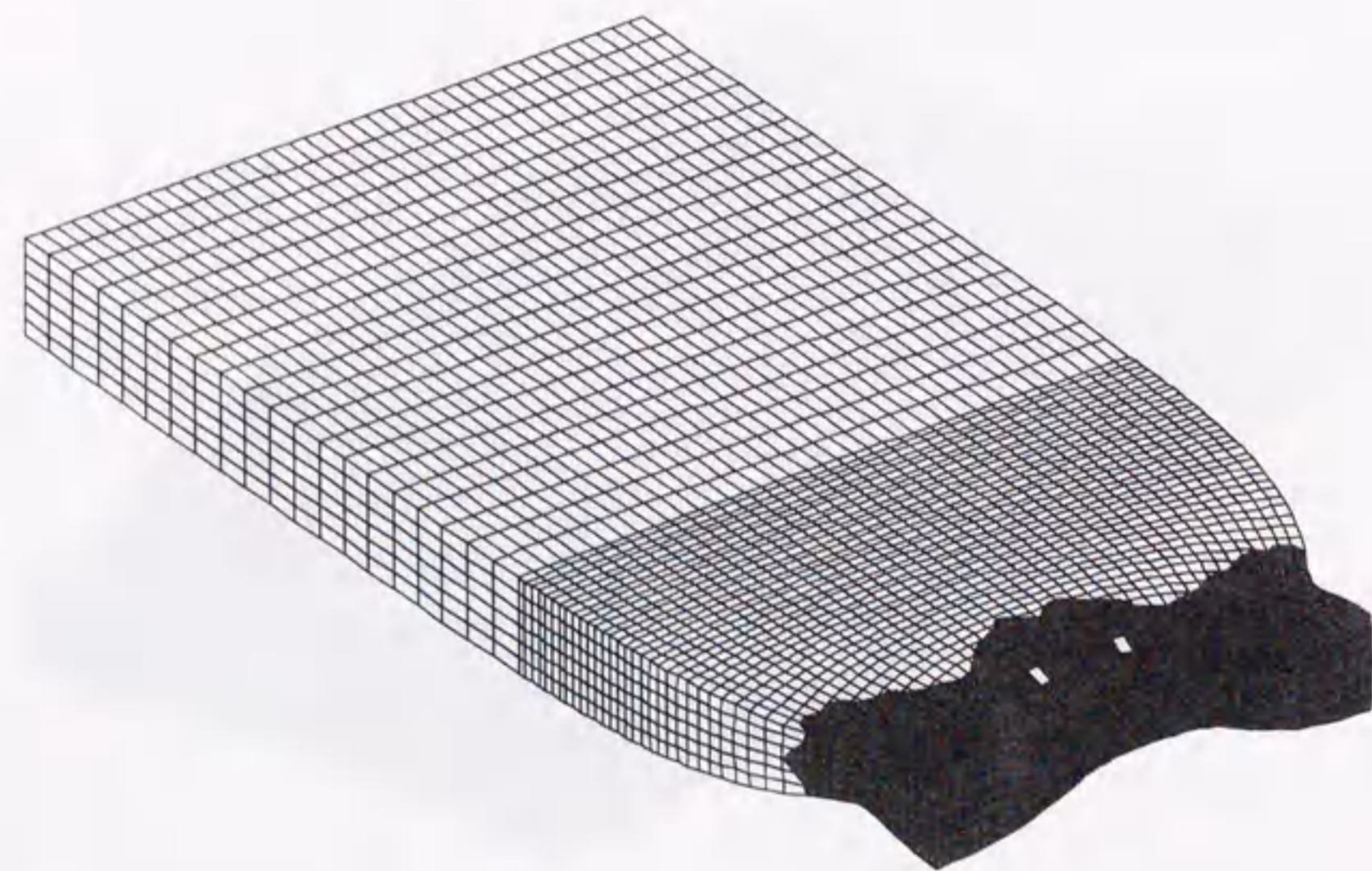
$u/L = 0.133$

図 7.27 モデル C の分岐経路上での負荷・除荷領域 (負荷:黒 除荷:白)





$u/L = 0.167$



$u/L = 0.2$

図 7.27 モデル C の分岐経路上での負荷・除荷領域 (負荷:黒 除荷:白)

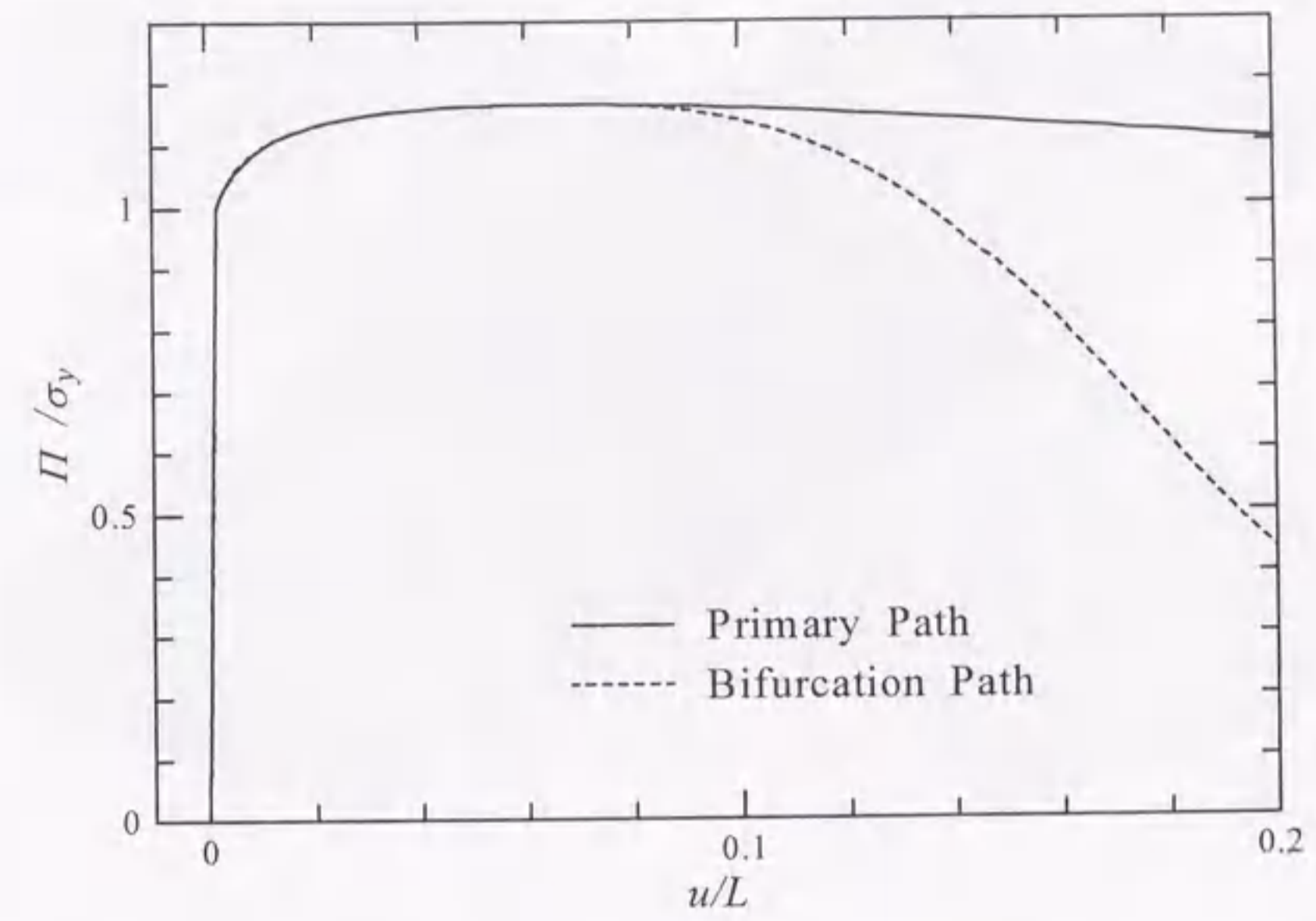


図 7.28 モデル D のつり合い経路

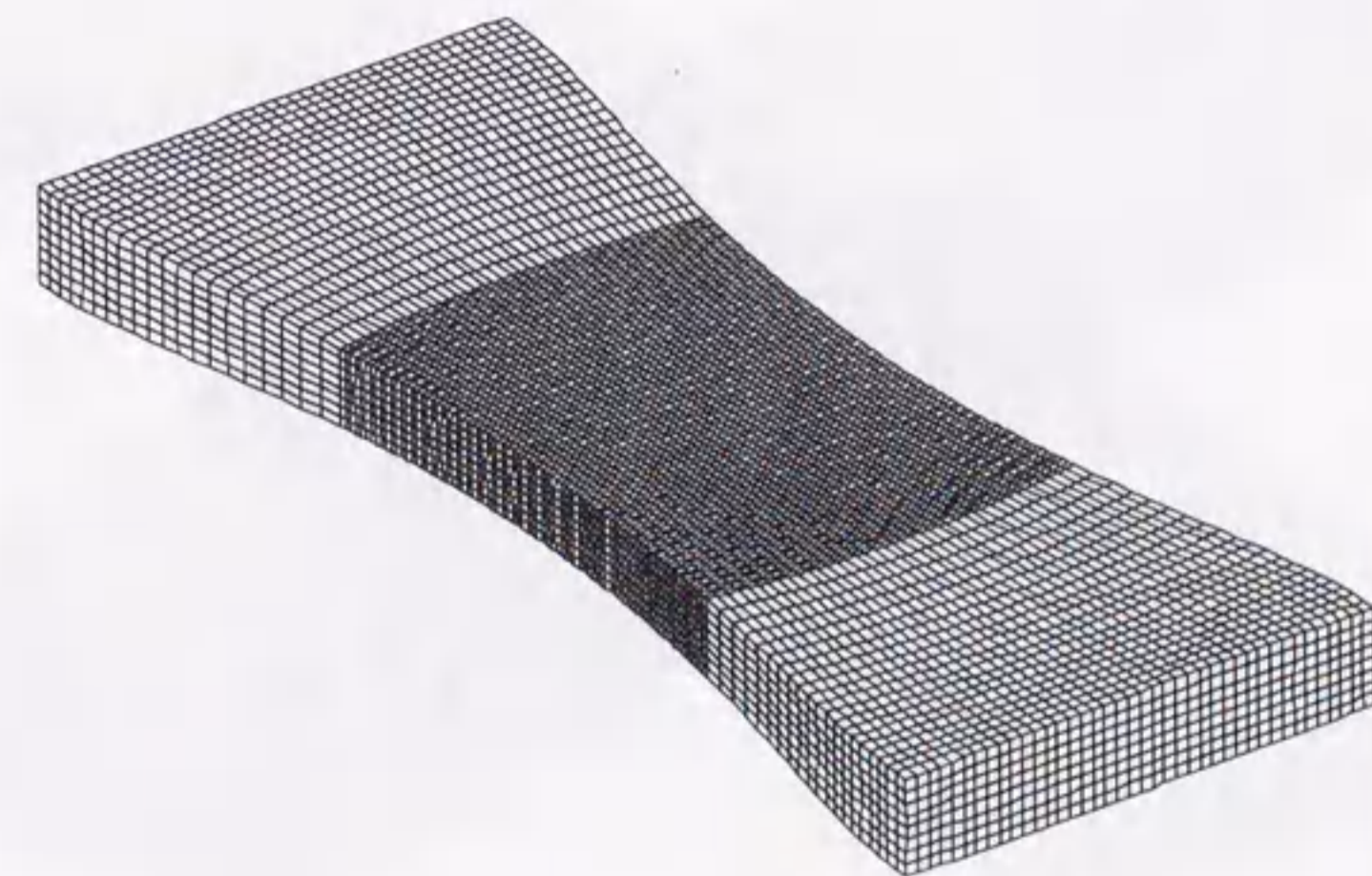
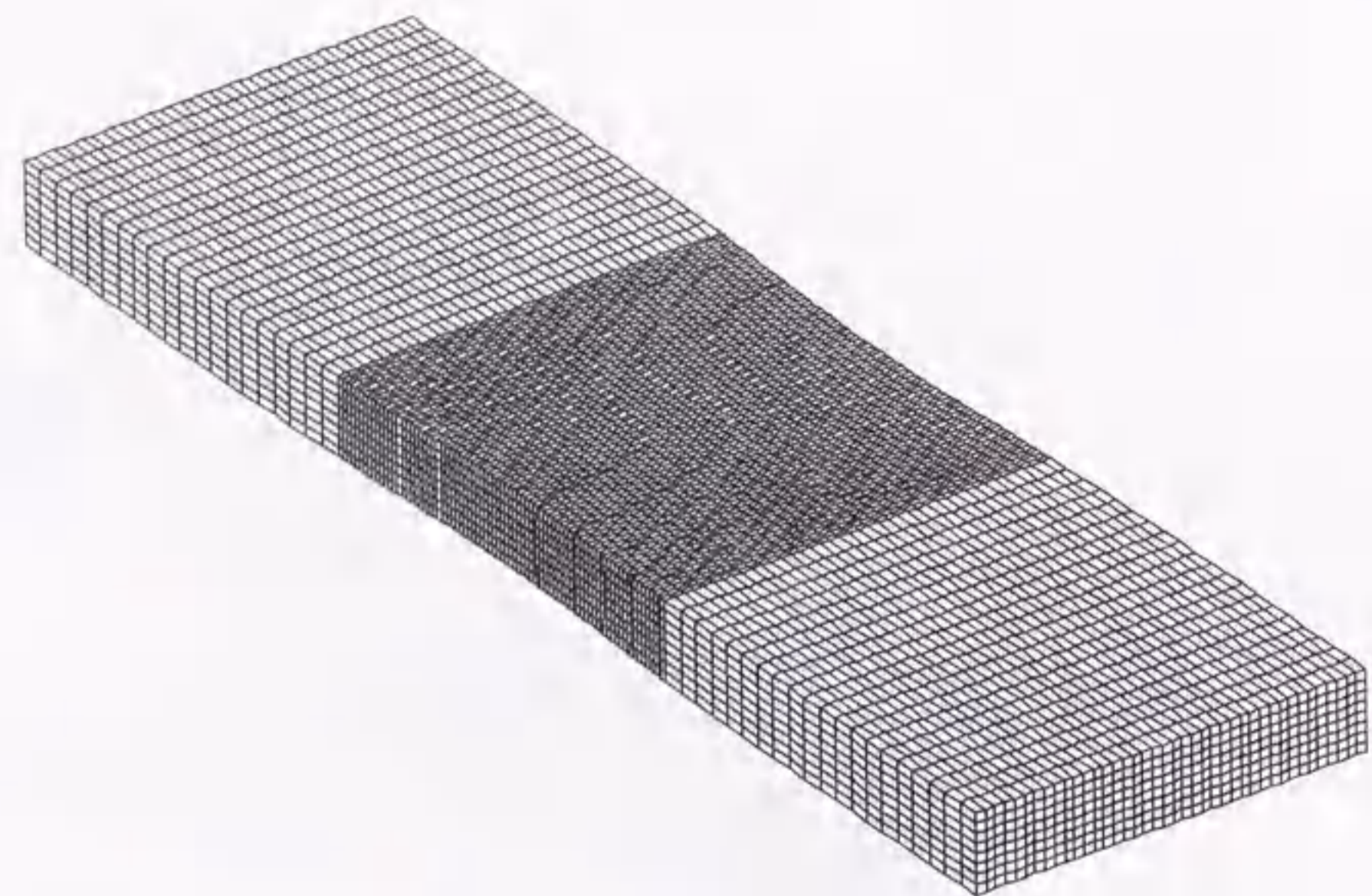
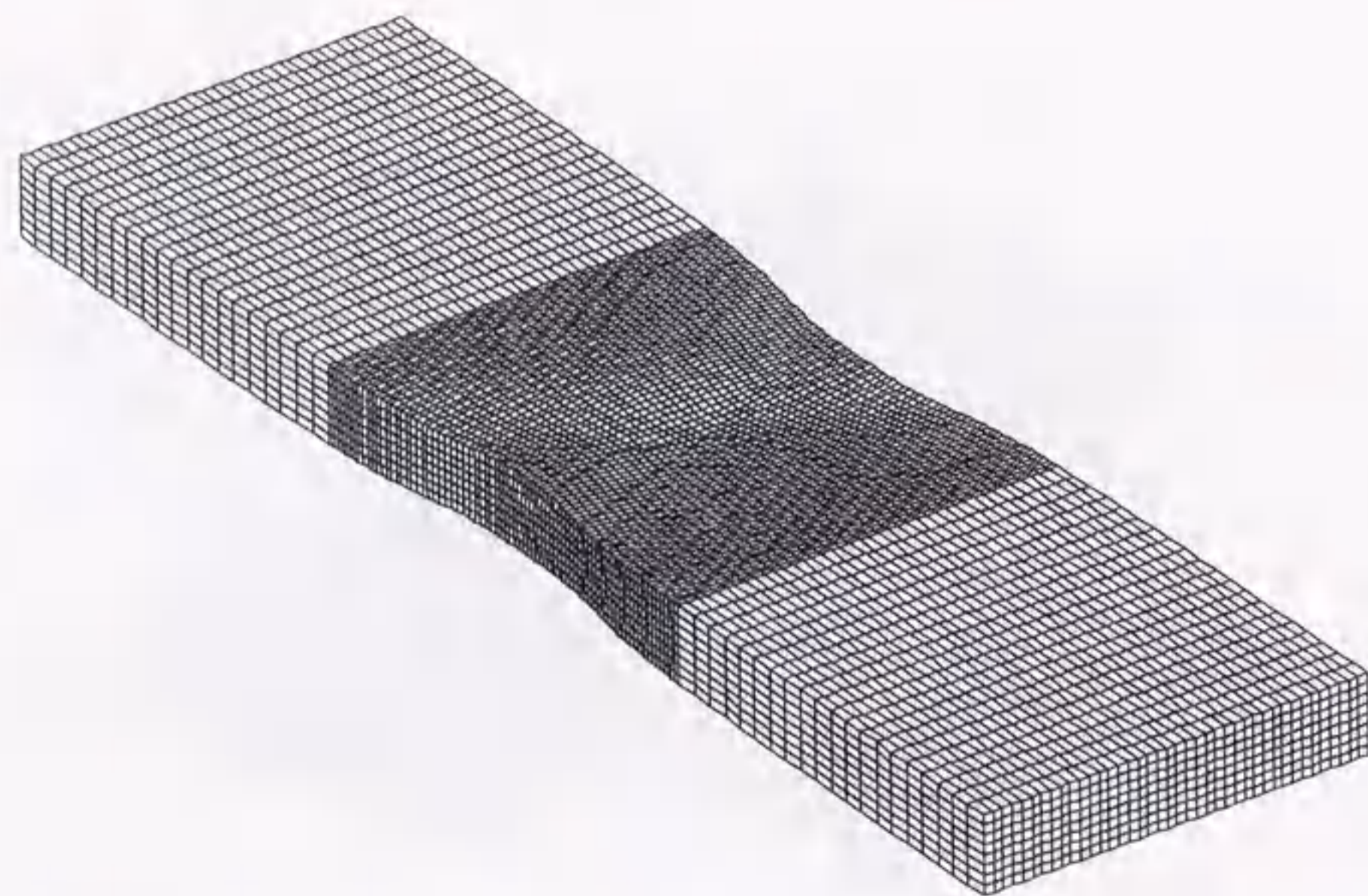


図 7.29 モデル D における Scaled Corrector



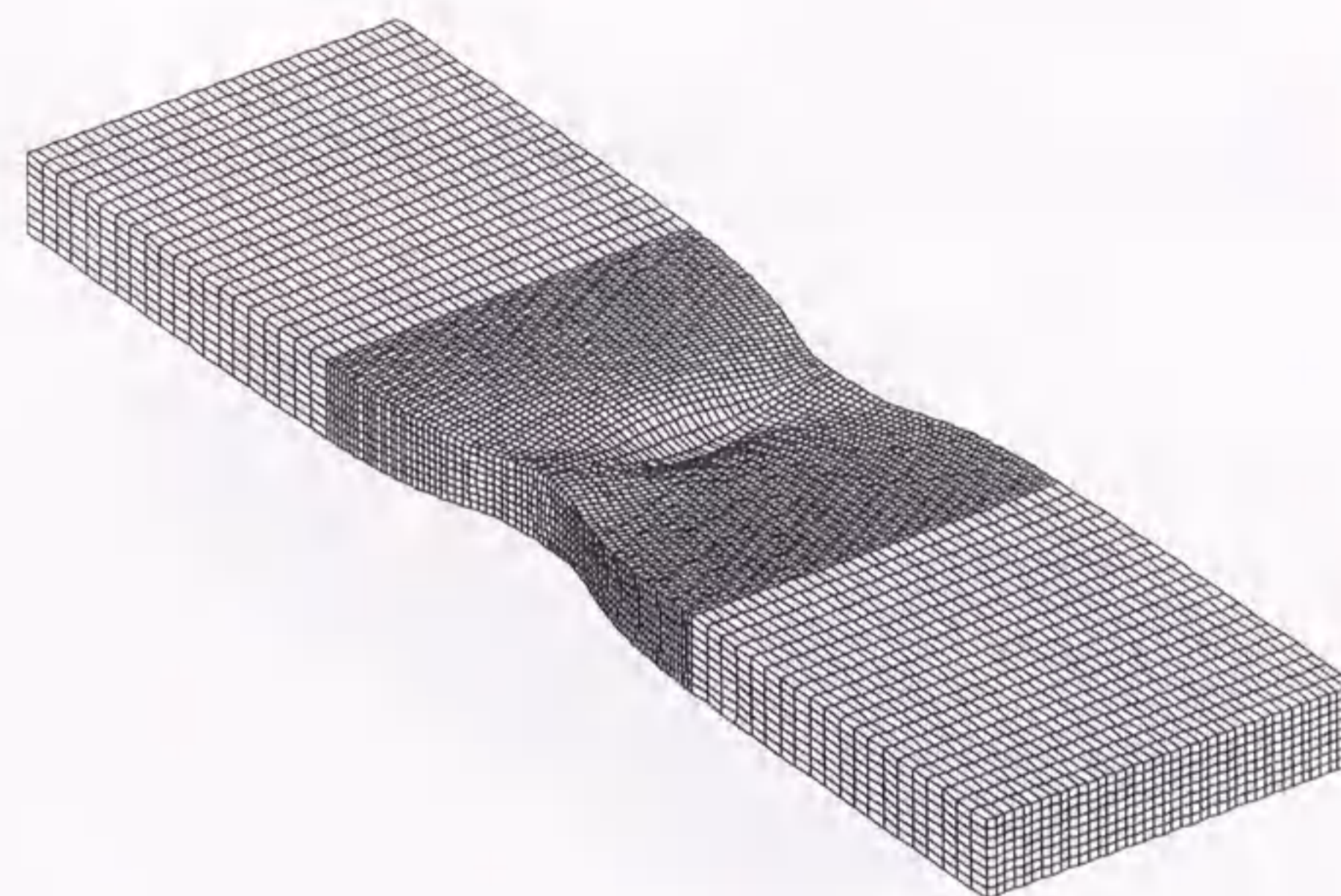


$u/L=0.1$

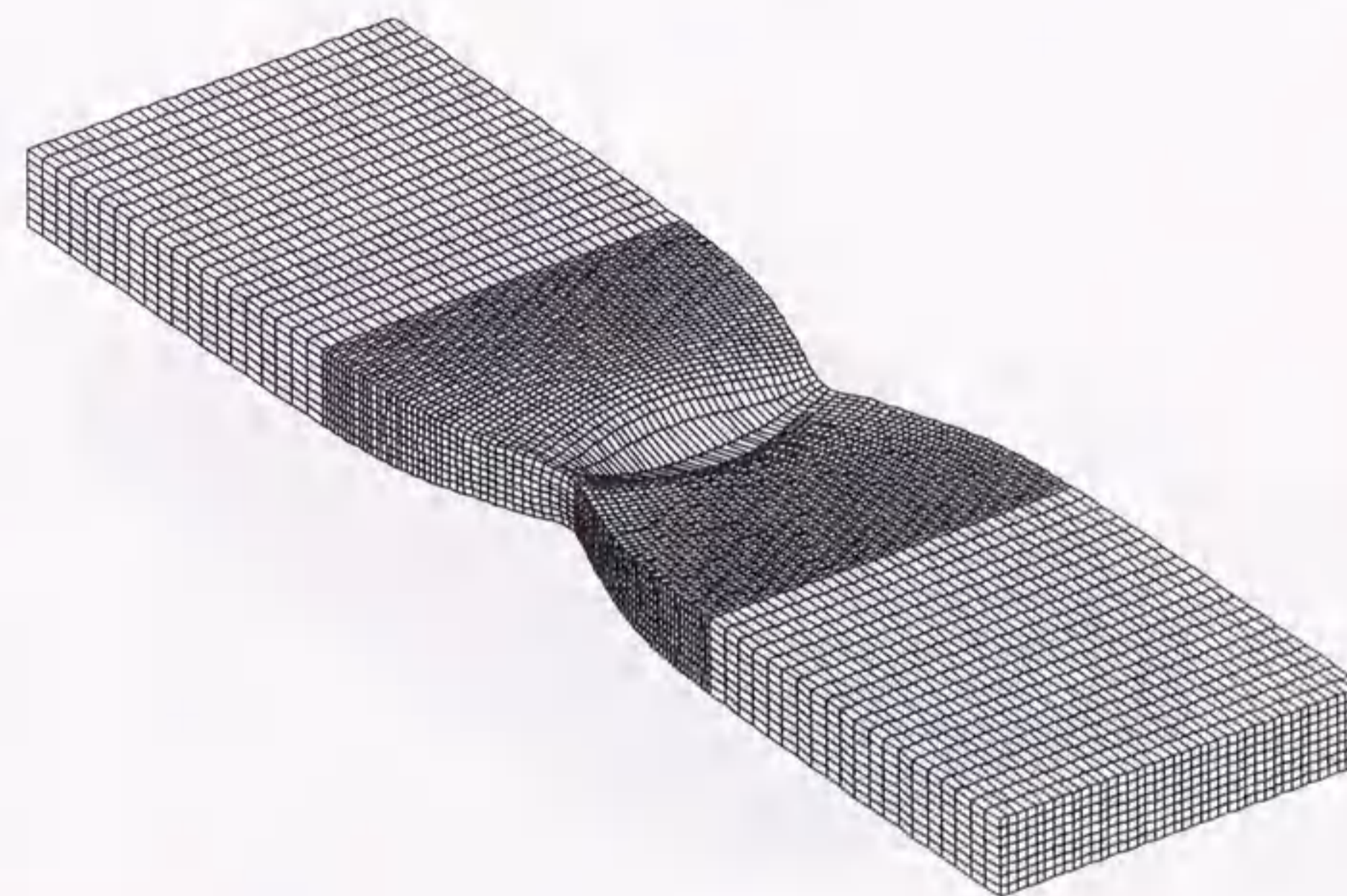


$u/L=0.133$

図 7.30 モデル D の分岐経路上での変形図



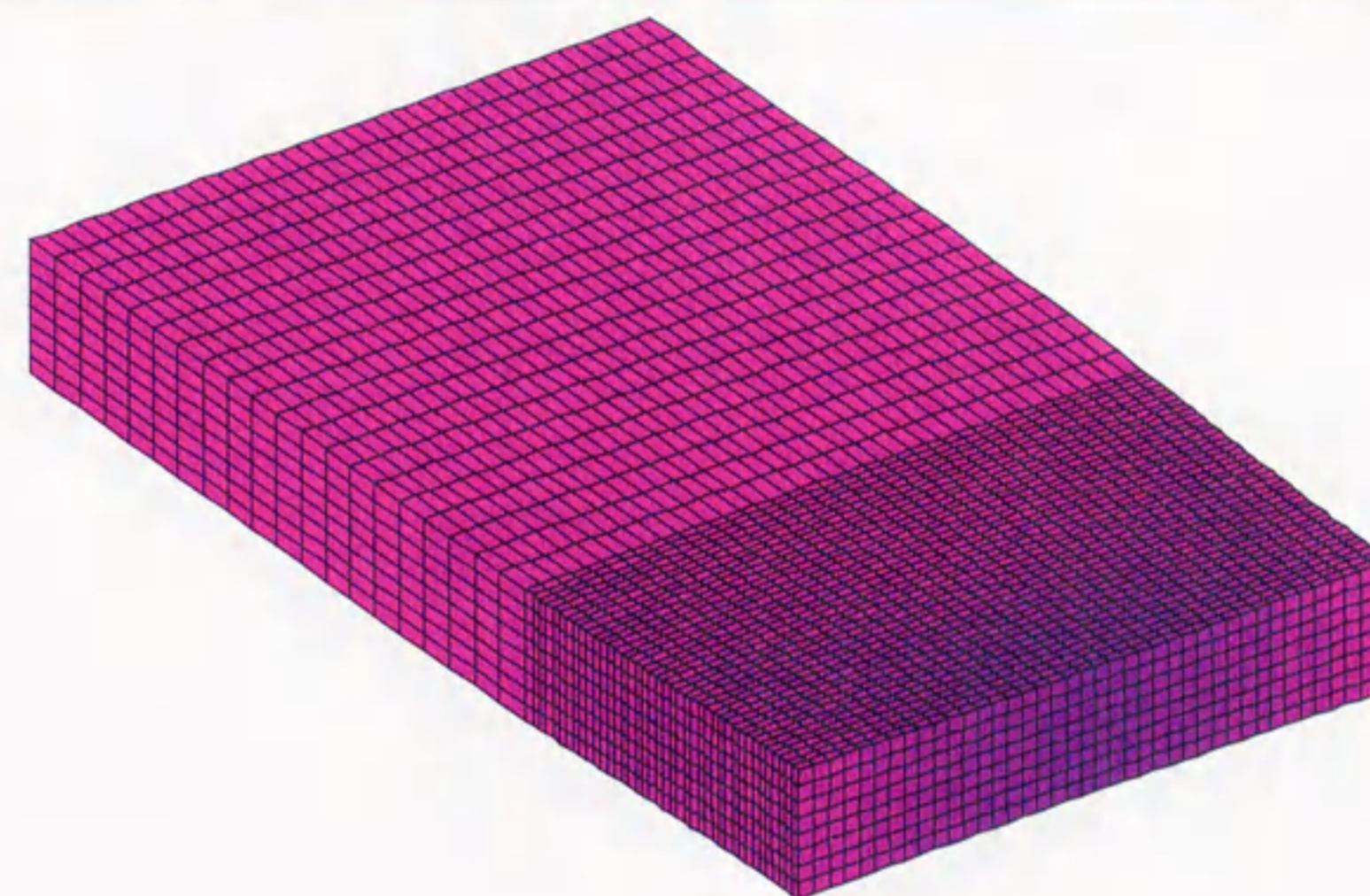
$u/L=0.167$



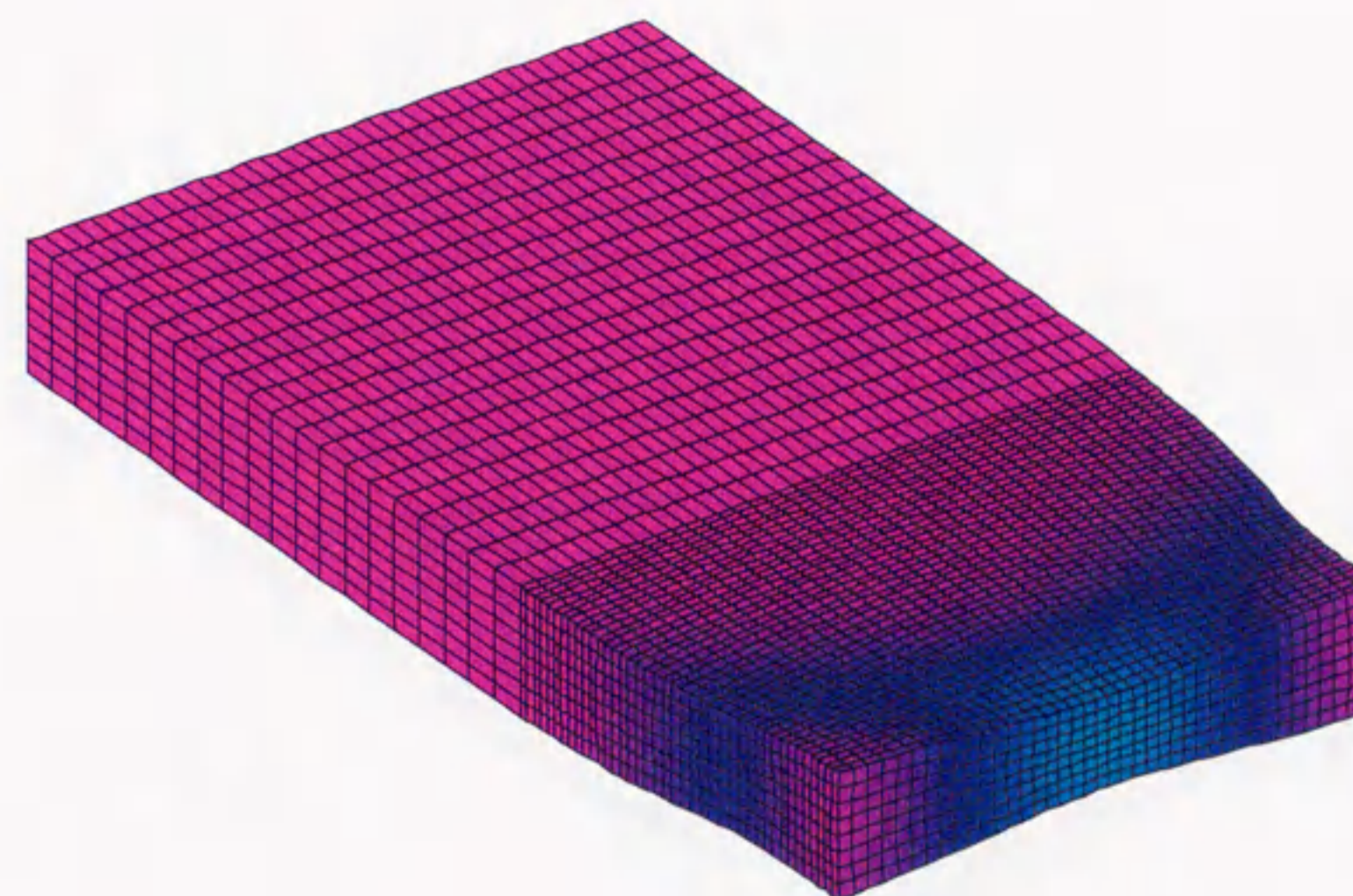
$u/L=0.2$

図 7.30 モデル D の分岐経路上での変形図





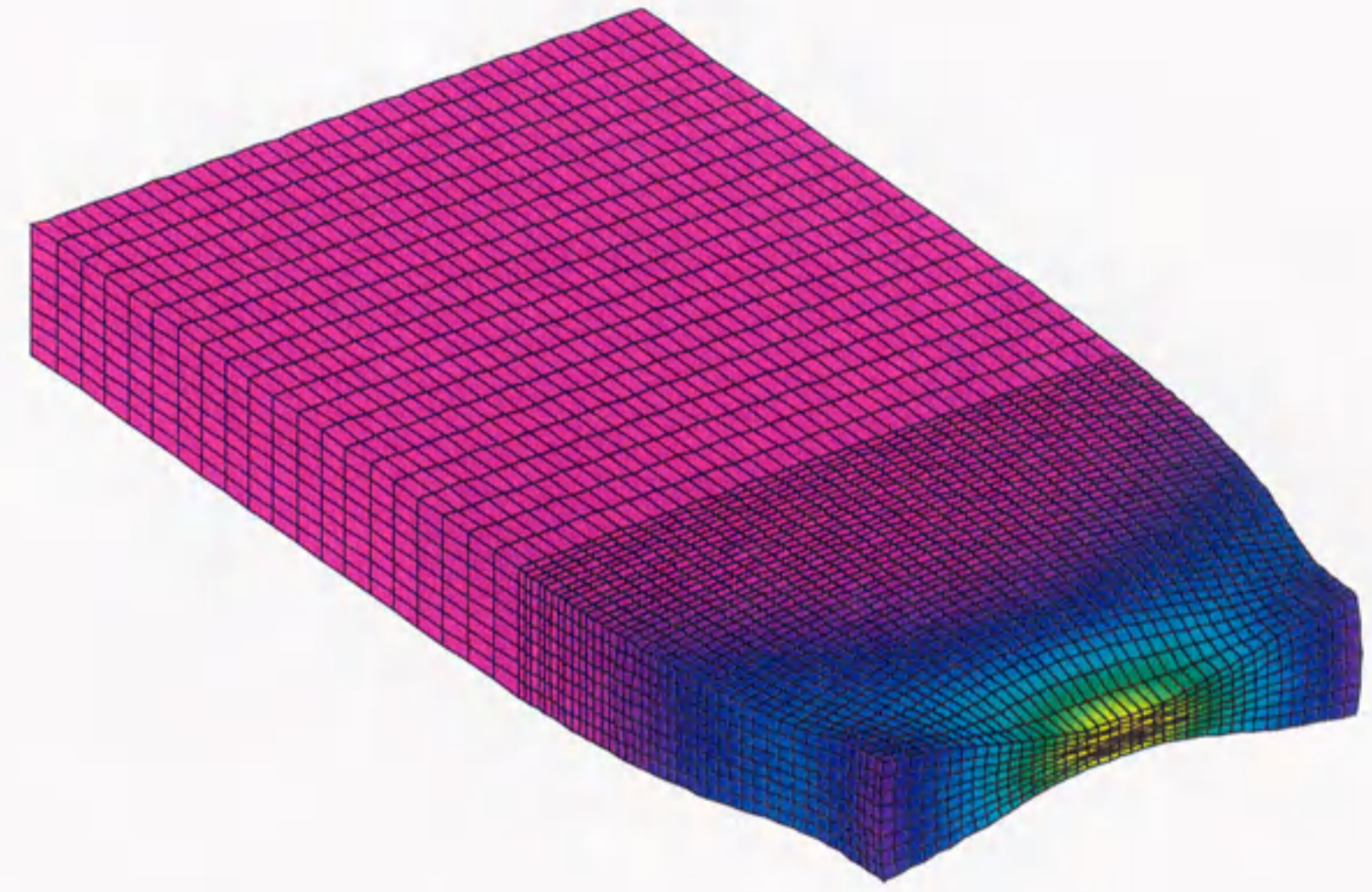
$u/L = 0.1$



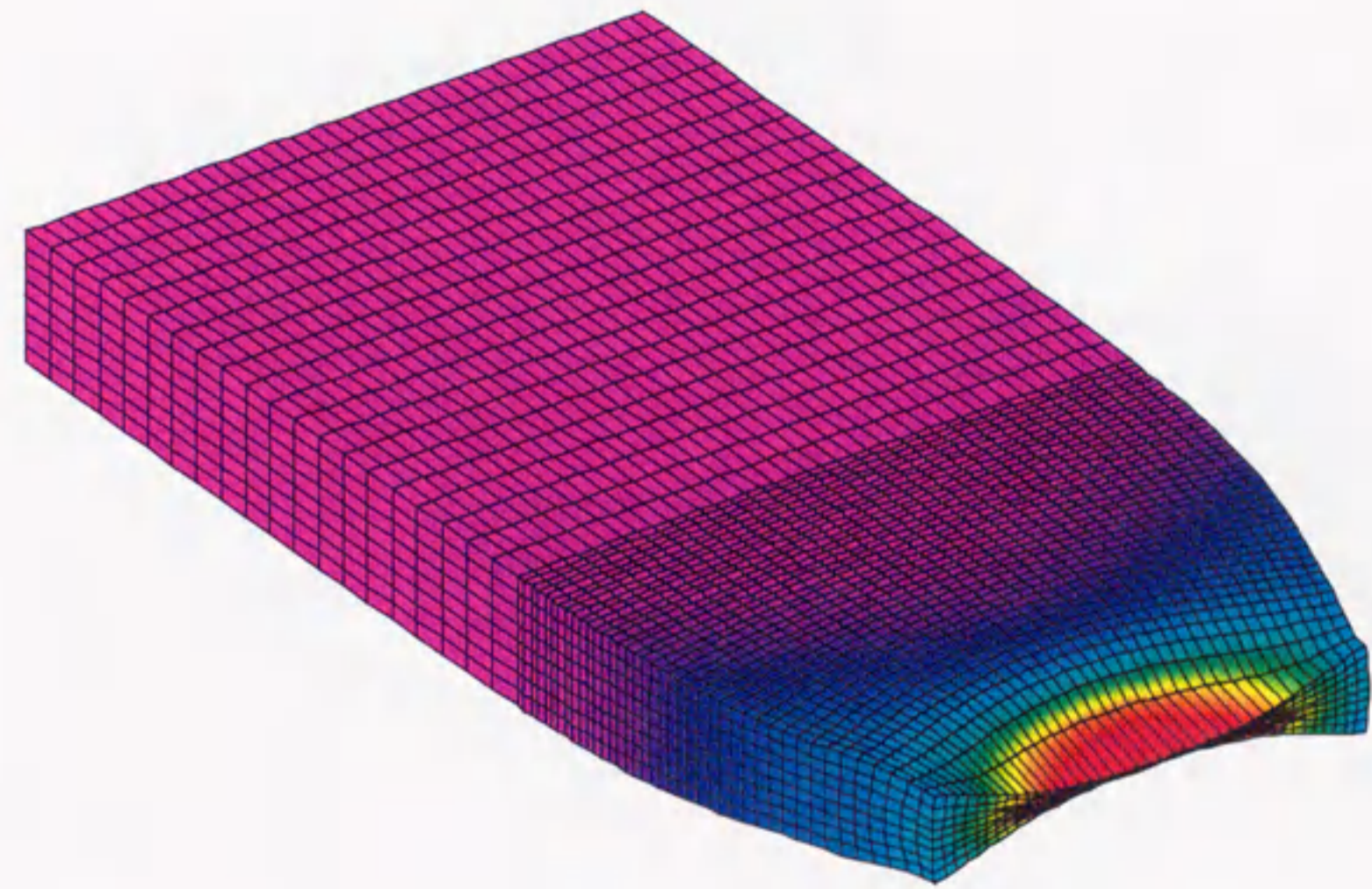
$u/L = 0.133$

図 7.31 モデル D の分岐経路上での相当塑性ひずみ分布図





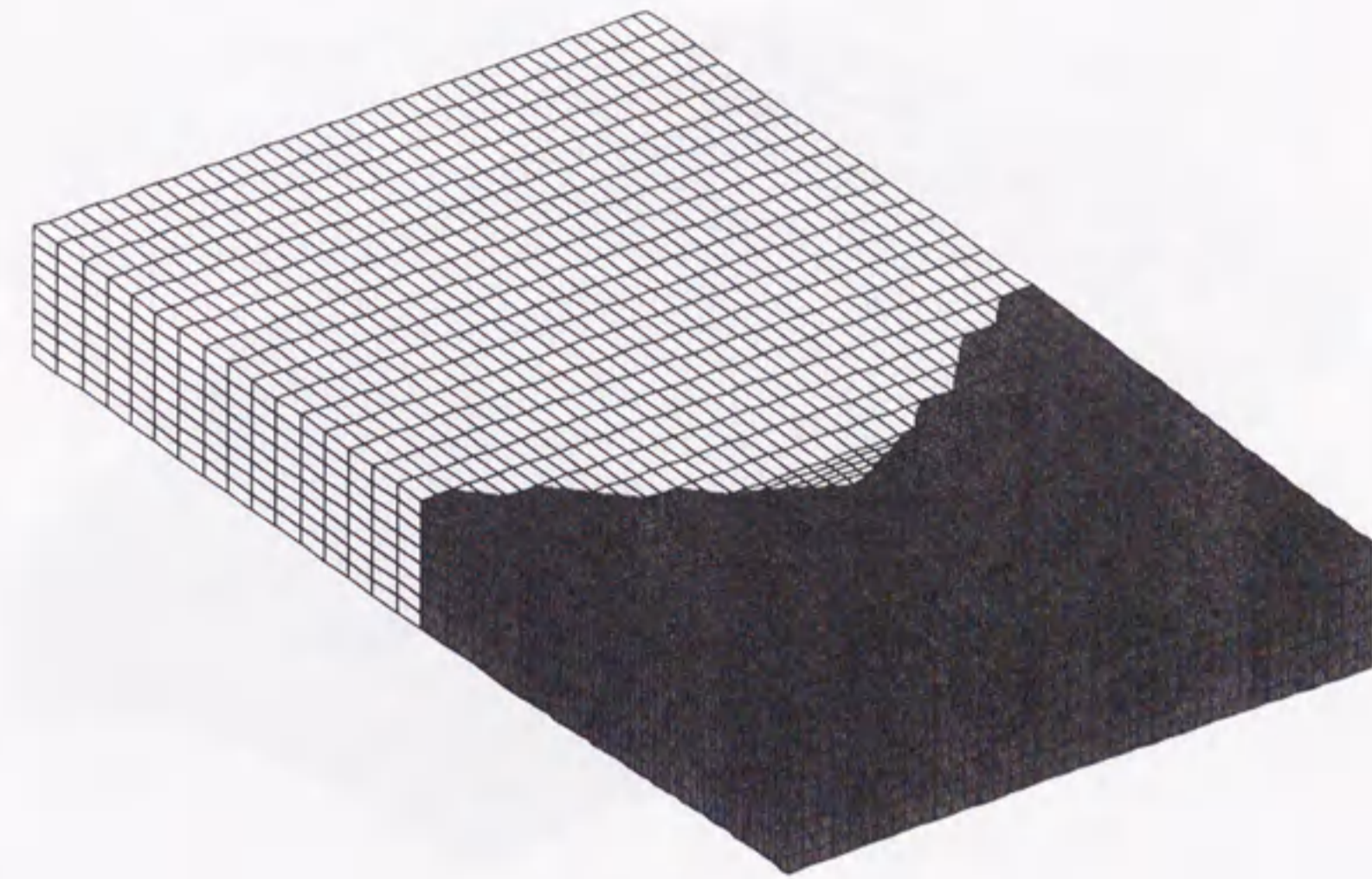
$u/L = 0.167$



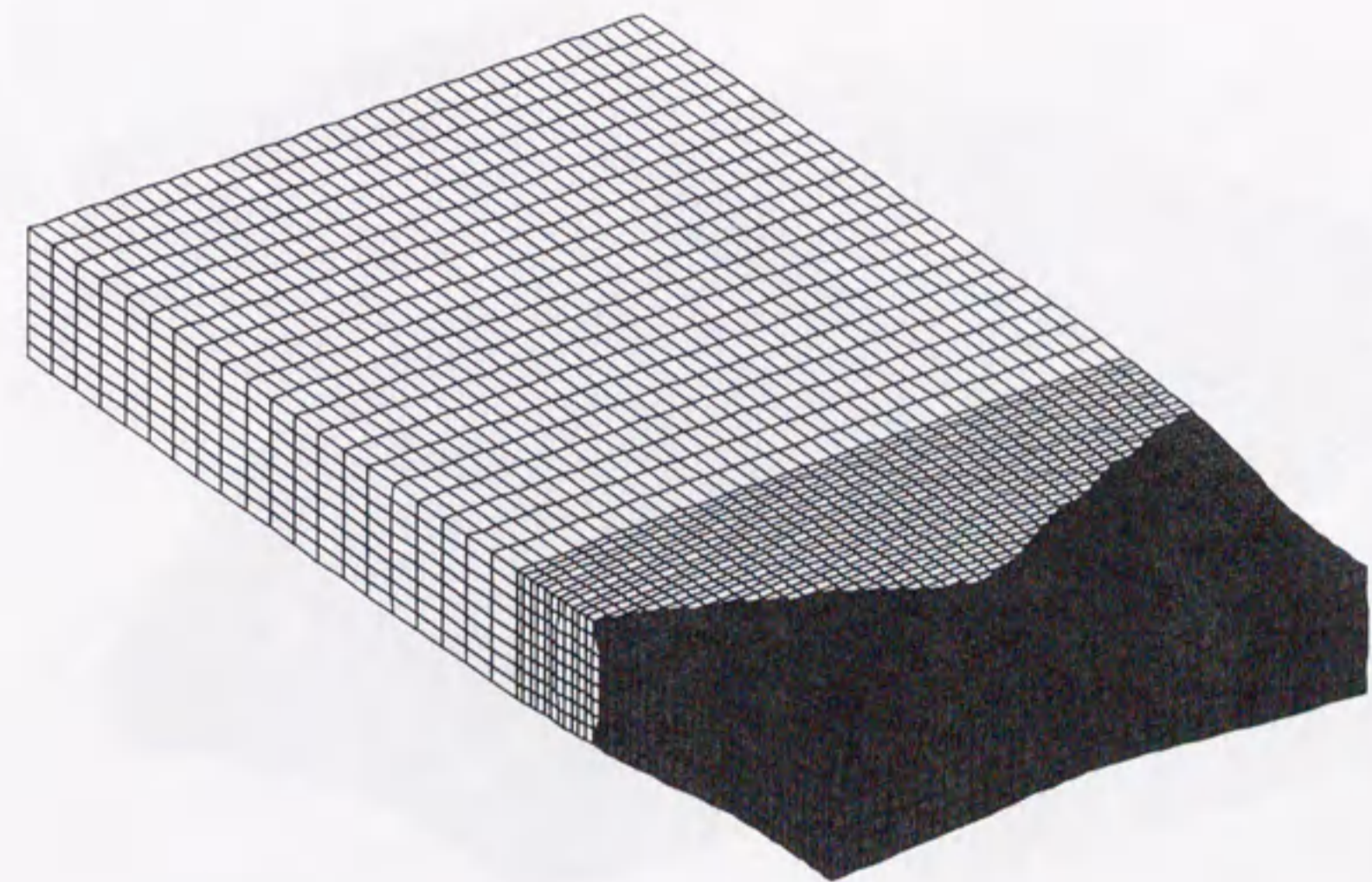
$u/L = 0.2$

図 7.31 モデル D の分岐経路上での相当塑性ひずみ分布図





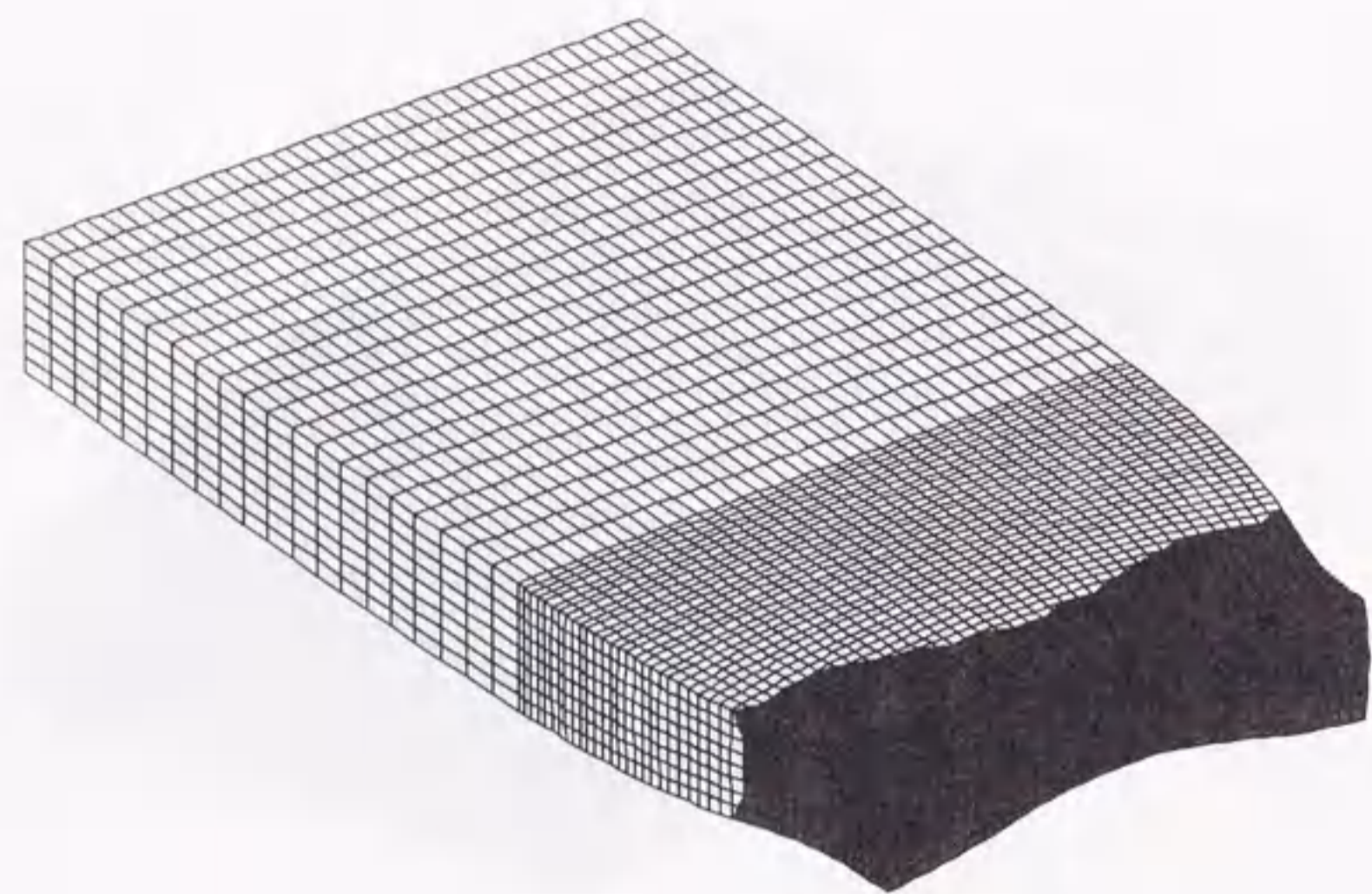
$u/L = 0.1$



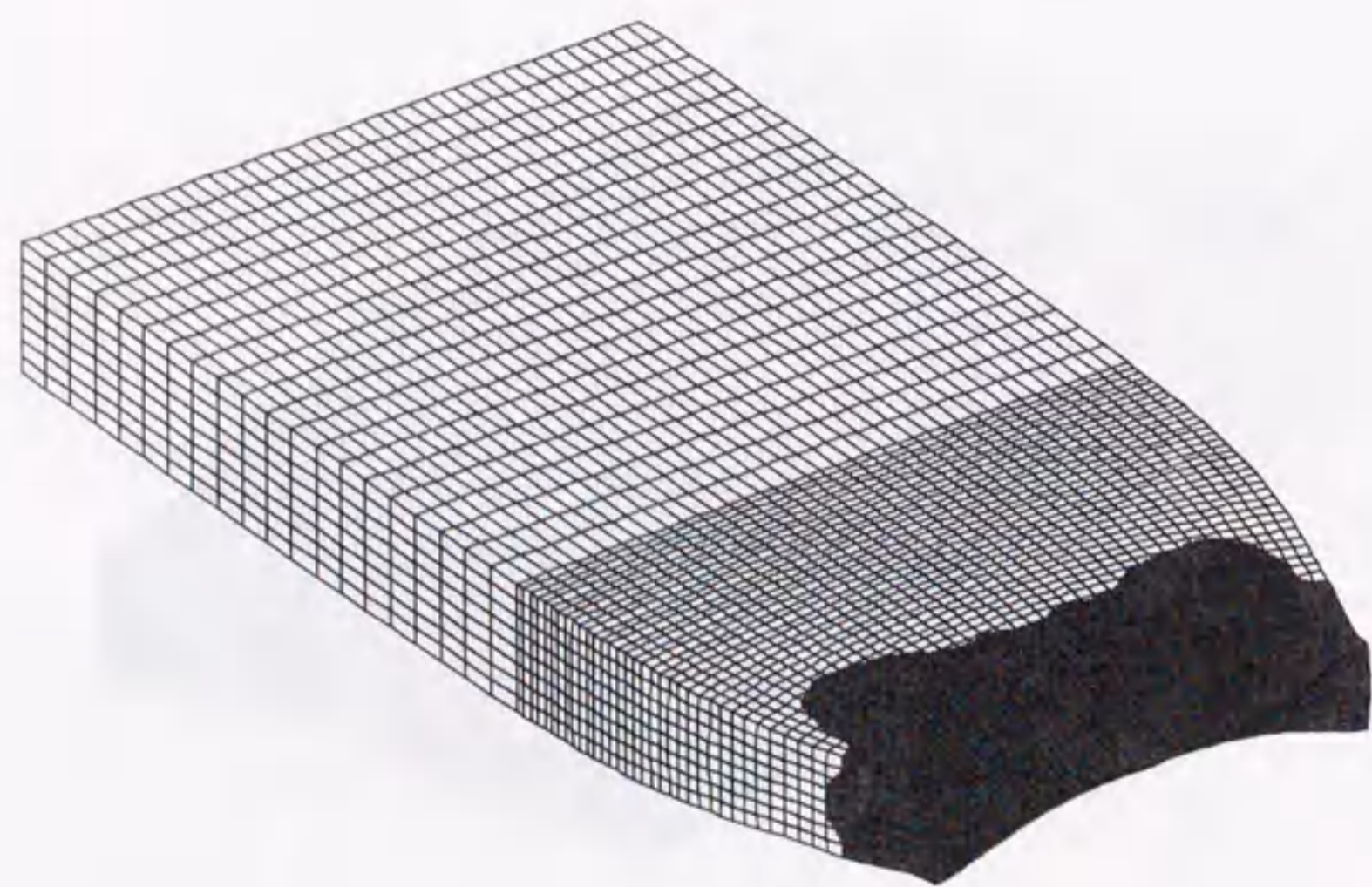
$u/L = 0.133$

図 7.32 モデル D の分岐経路上での負荷・除荷領域 (負荷:黒 除荷:白)





$u/L = 0.167$



$u/L = 0.2$

図 7.32 モデル D の分岐経路上での負荷・除荷領域 (負荷:黒 除荷:白)

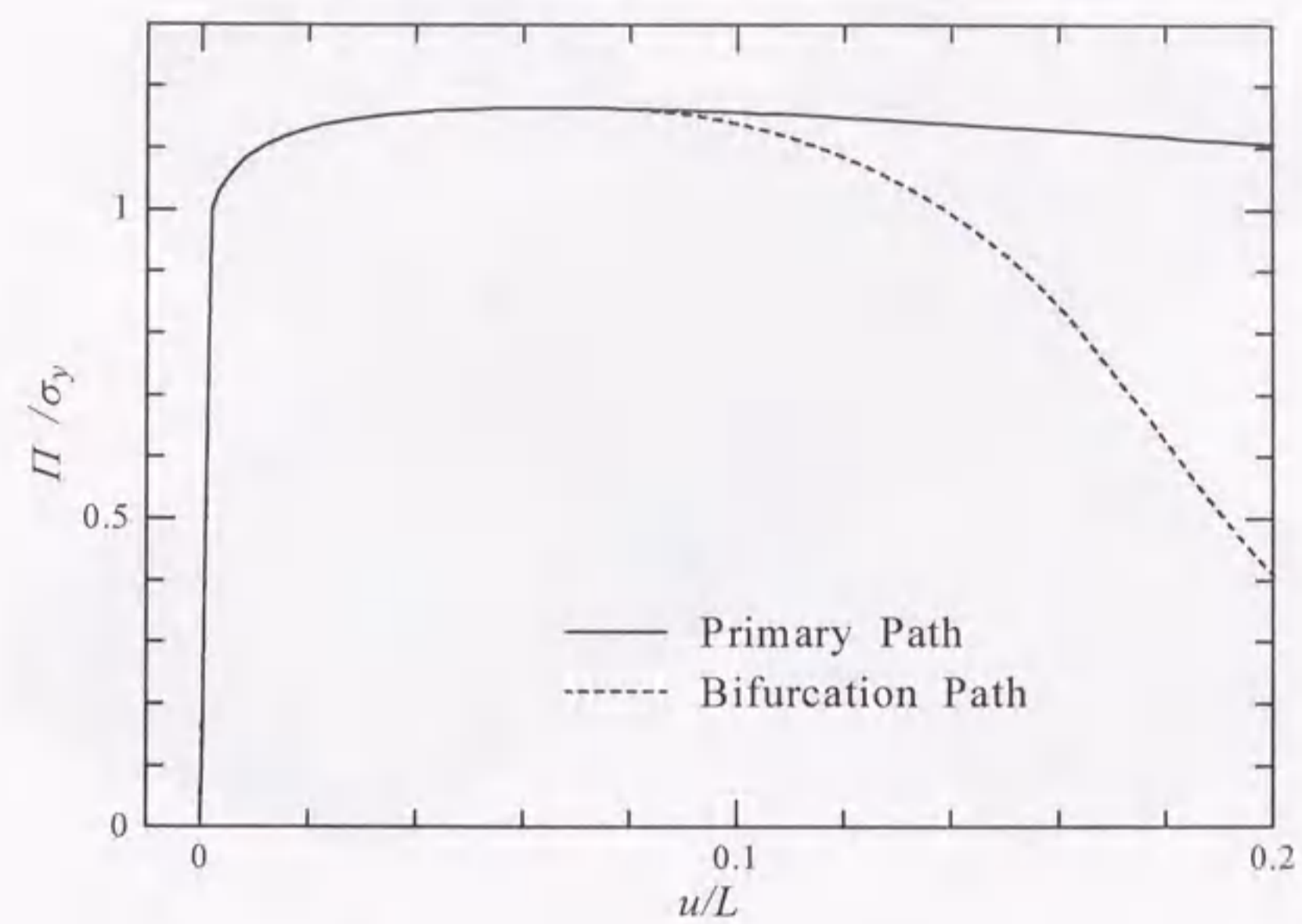


図 7.33 モデル E のつり合い経路

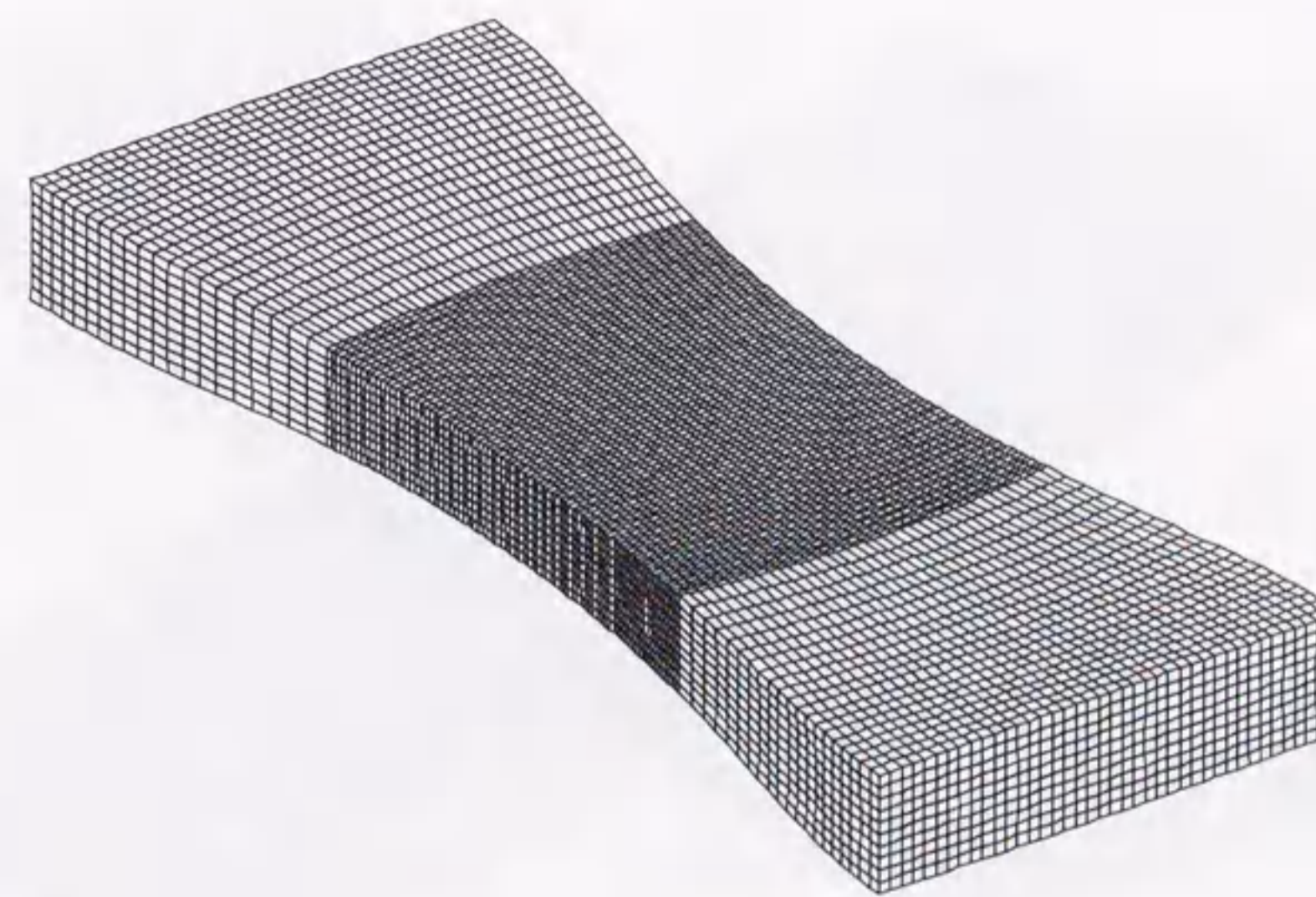
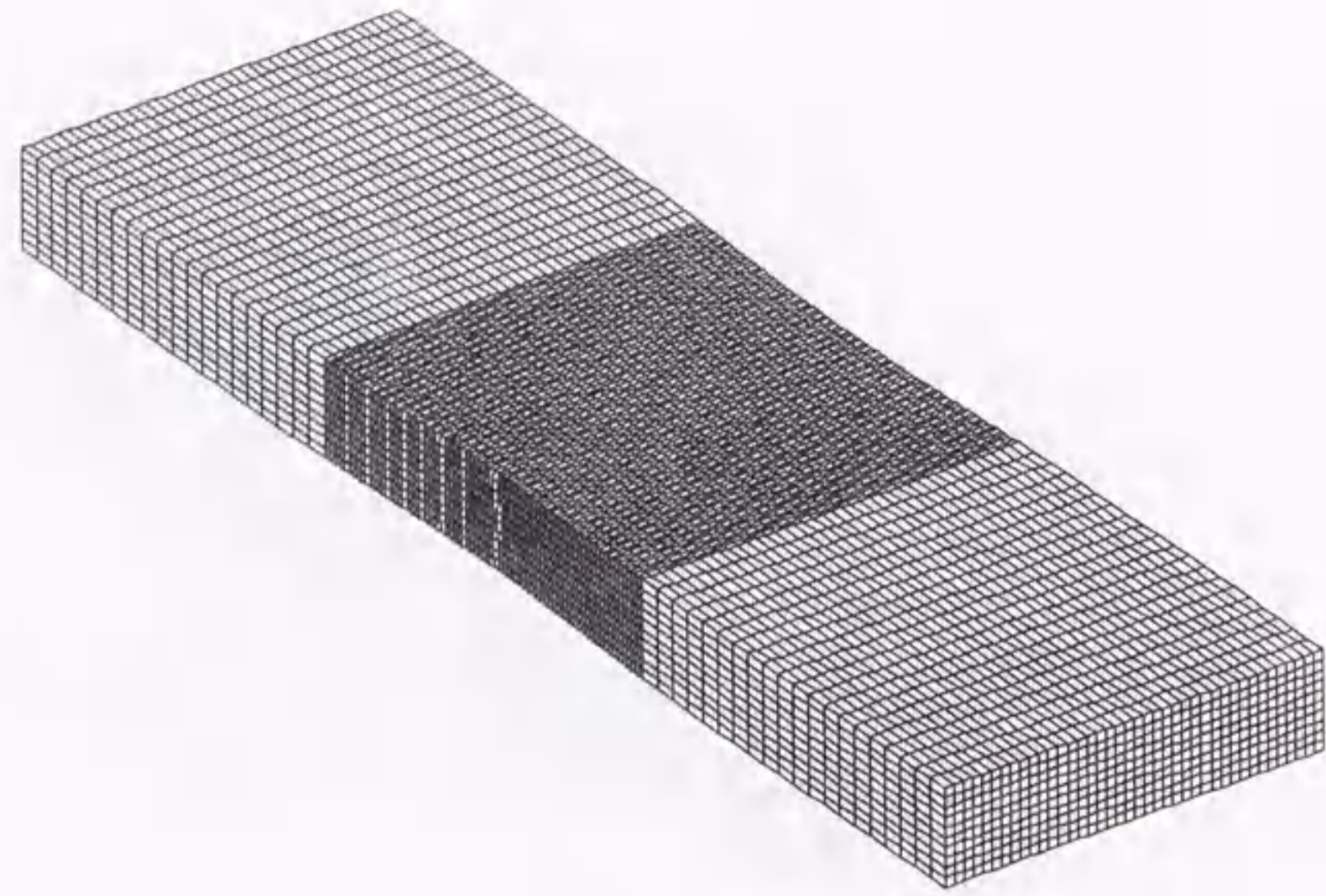
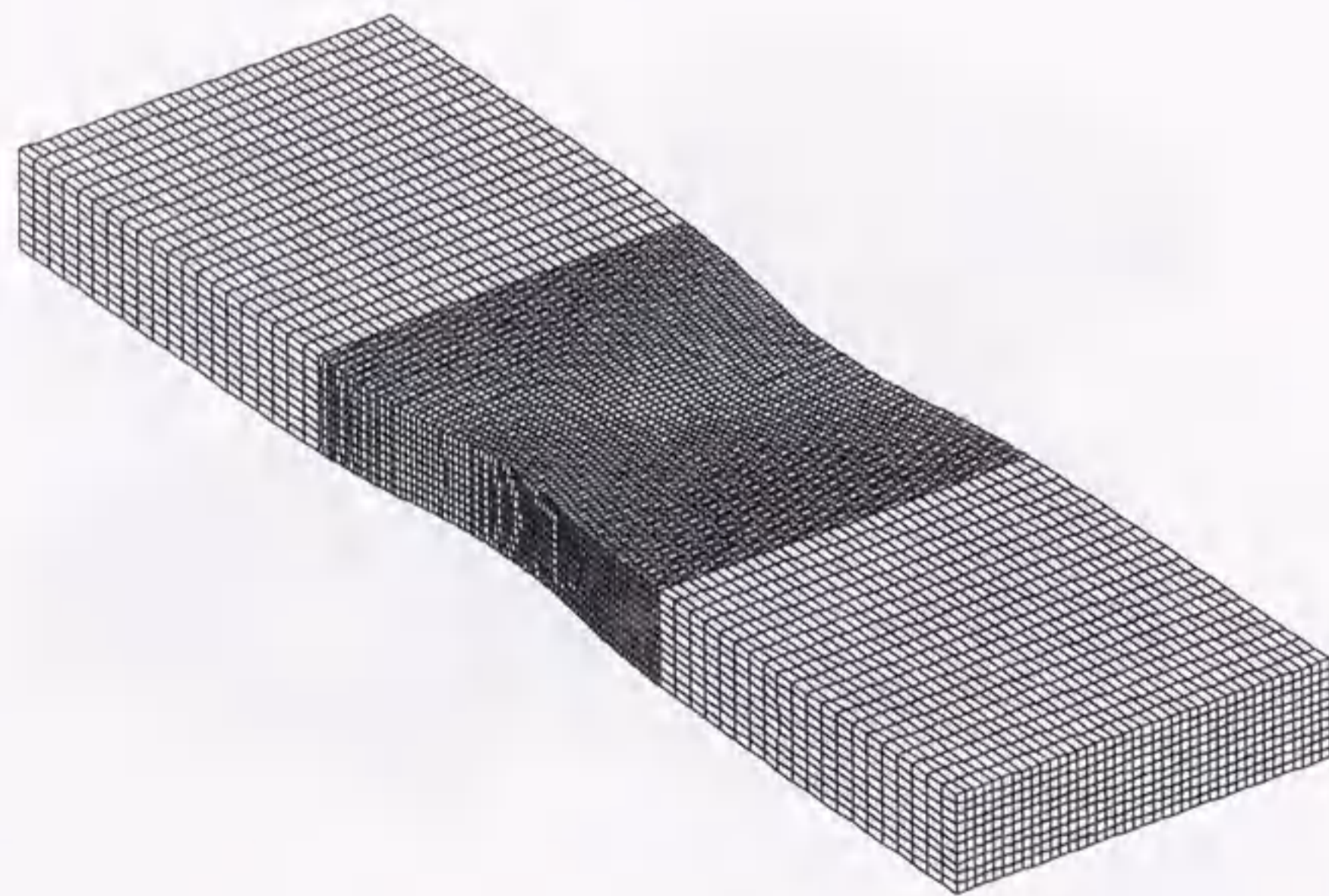


図 7.34 モデル E における Scaled Corrector



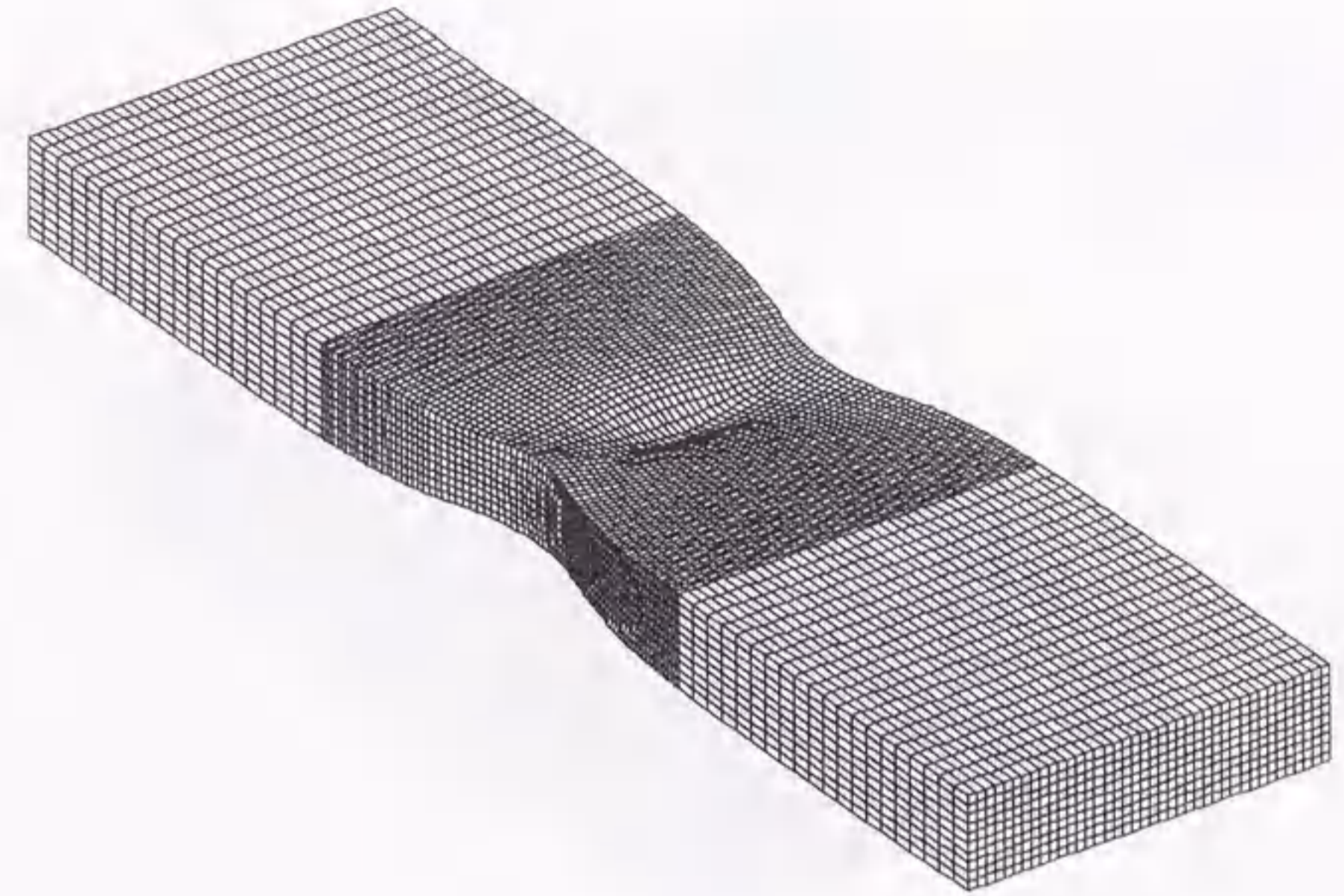


$u/L=0.1$

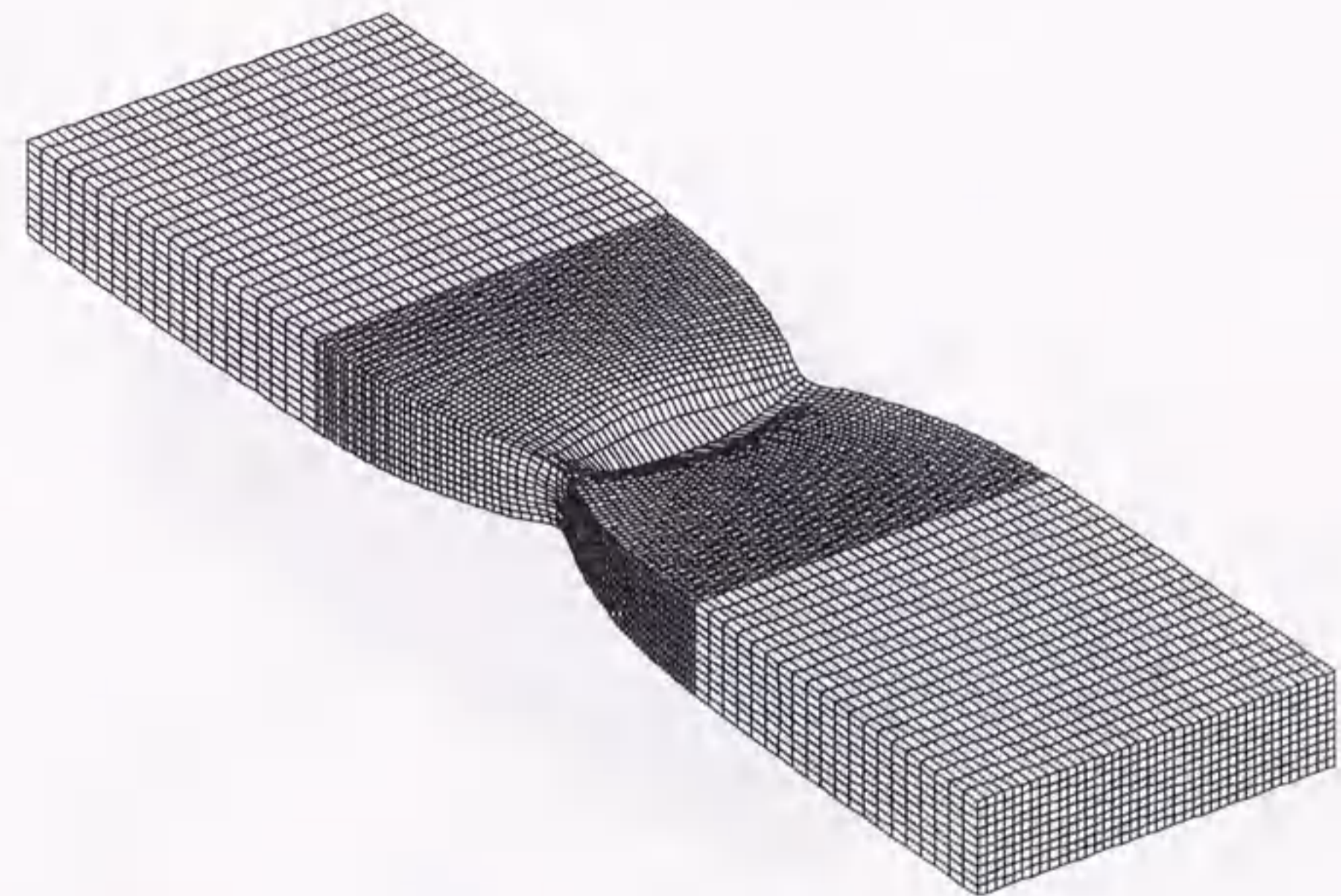


$u/L=0.133$

図 7.35 モデル E の分岐経路上での変形図



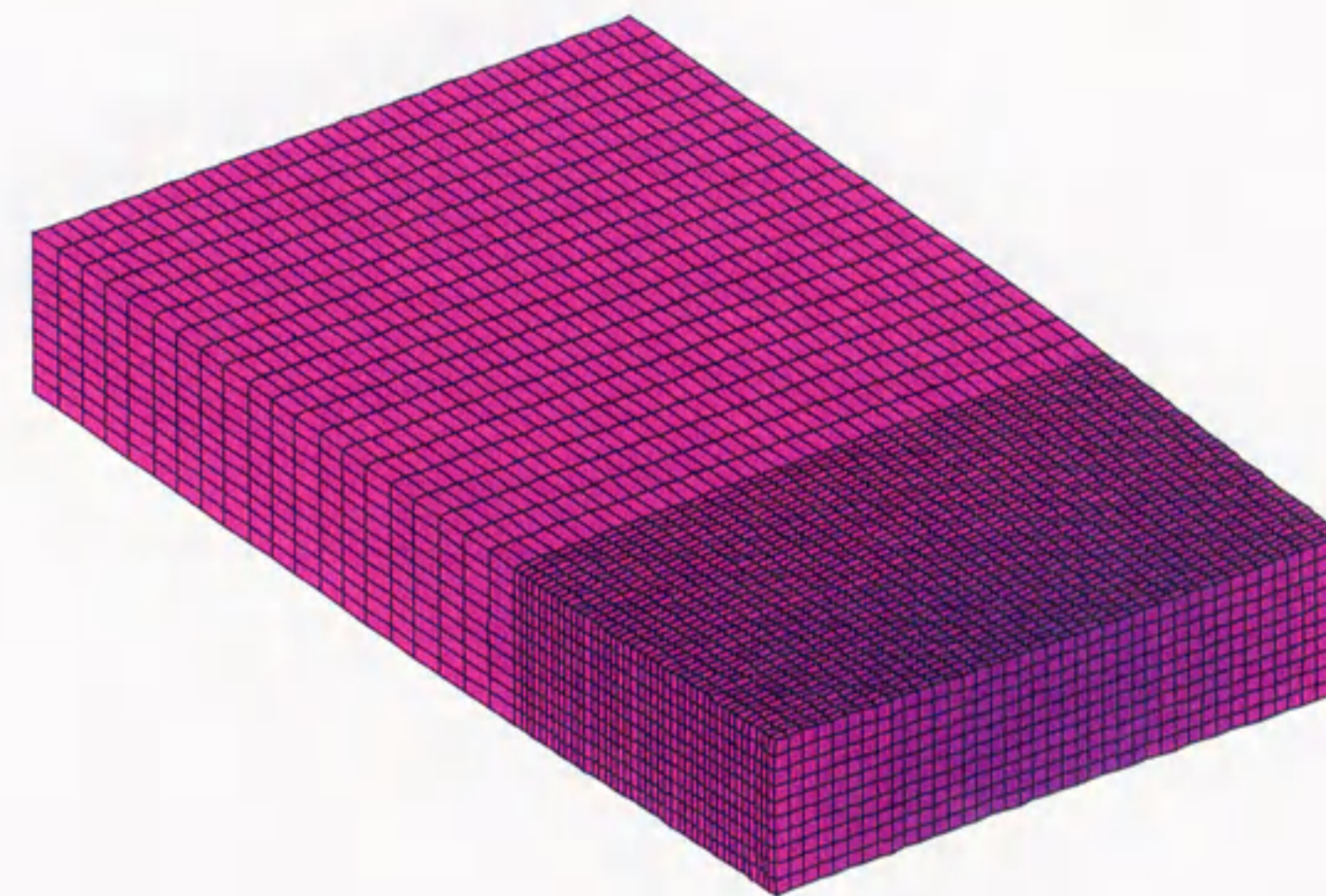
$u/L=0.167$



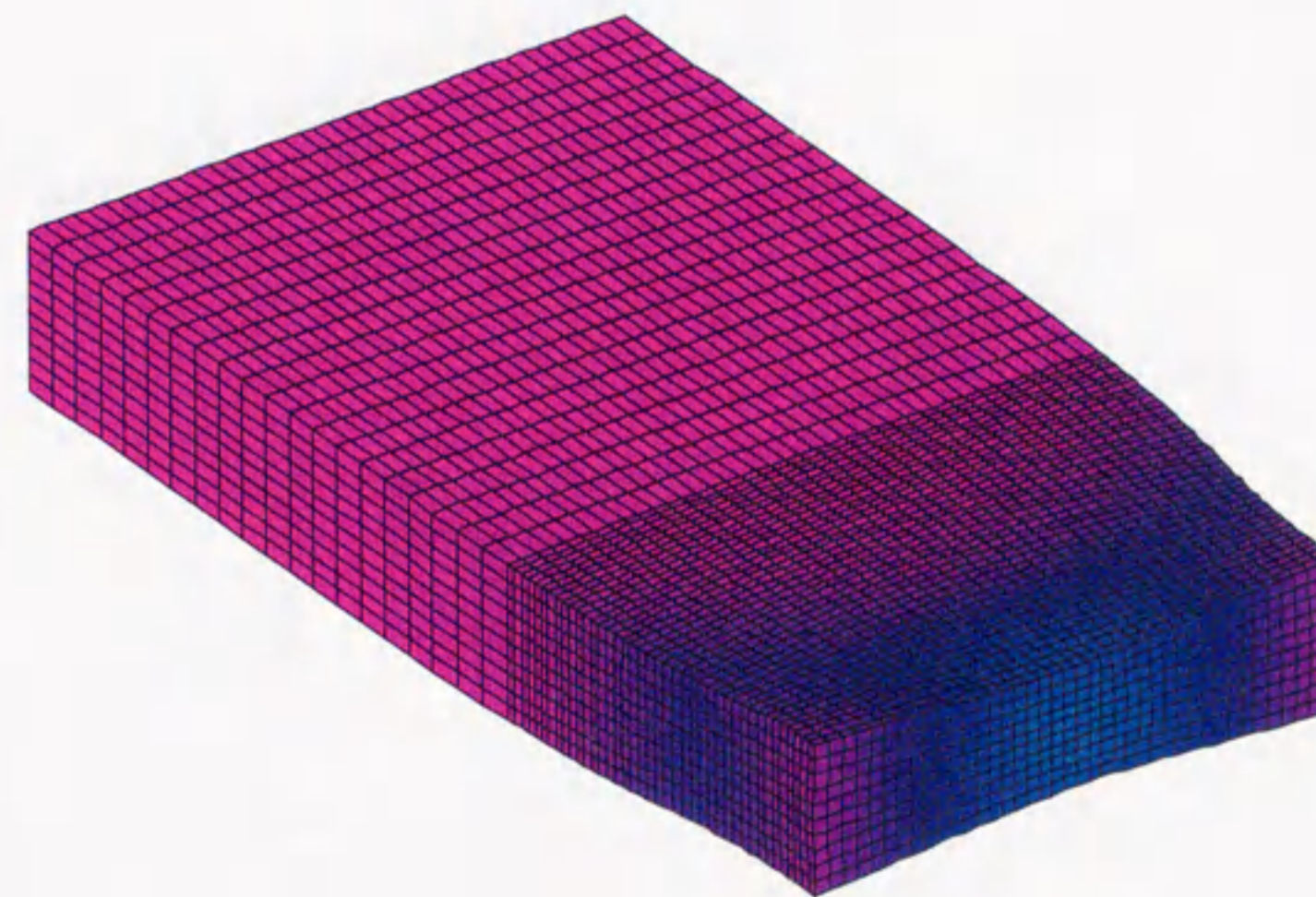
$u/L=0.2$

図 7.35 モデル E の分岐経路上での変形図





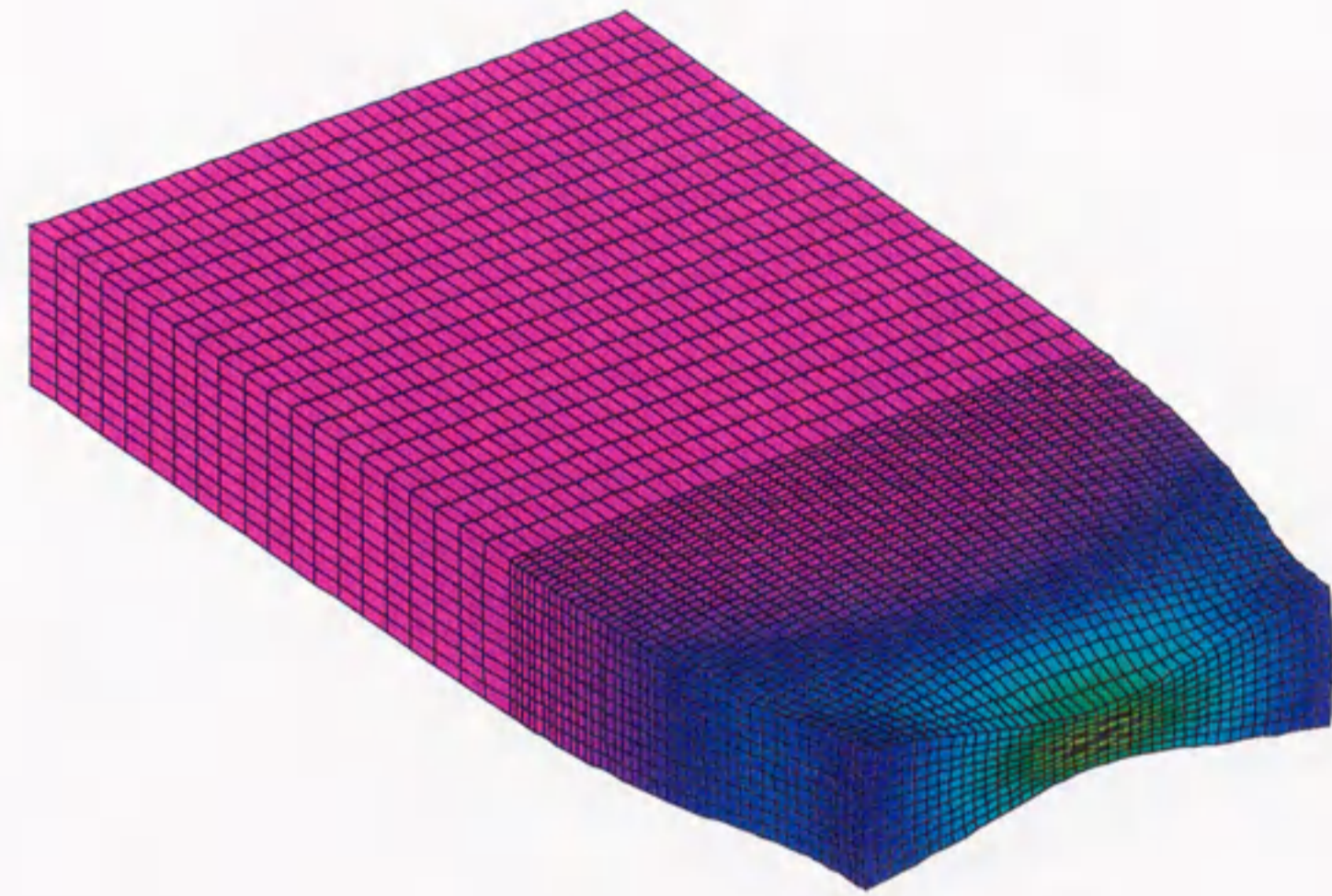
$u/L = 0.1$



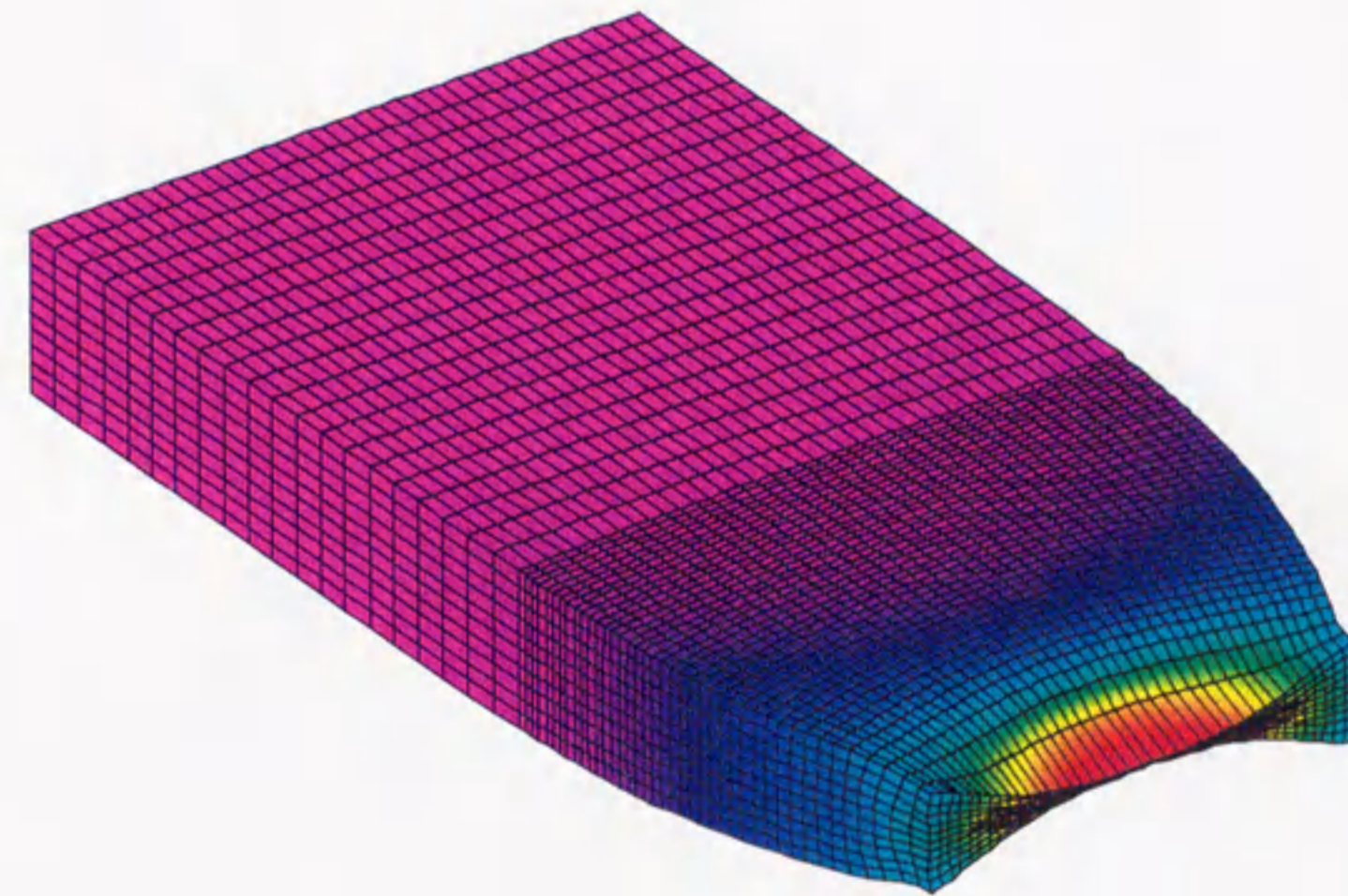
$u/L = 0.133$

図 7.36 モデル E の分岐経路上での相当塑性ひずみ分布図





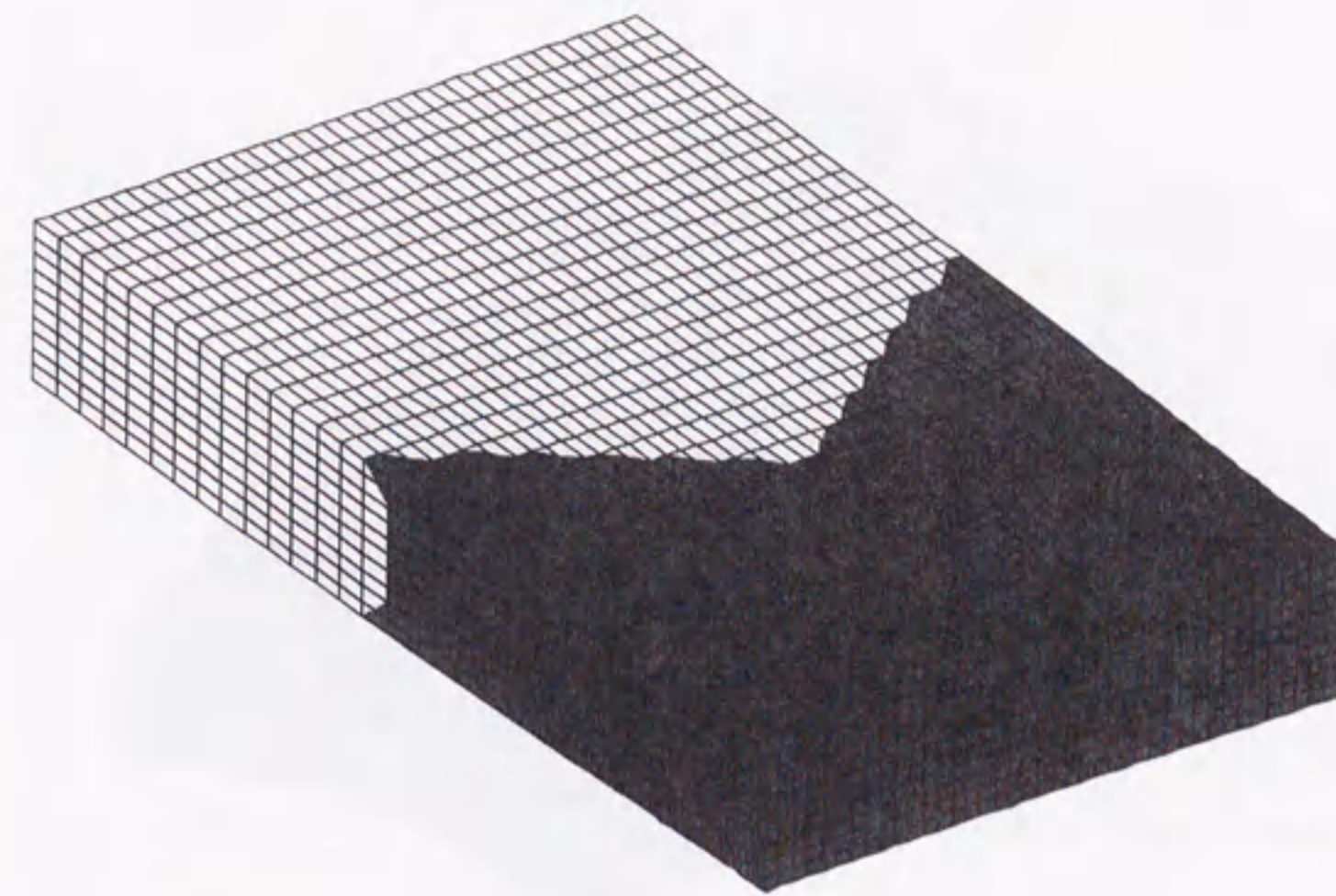
$u/L = 0.167$



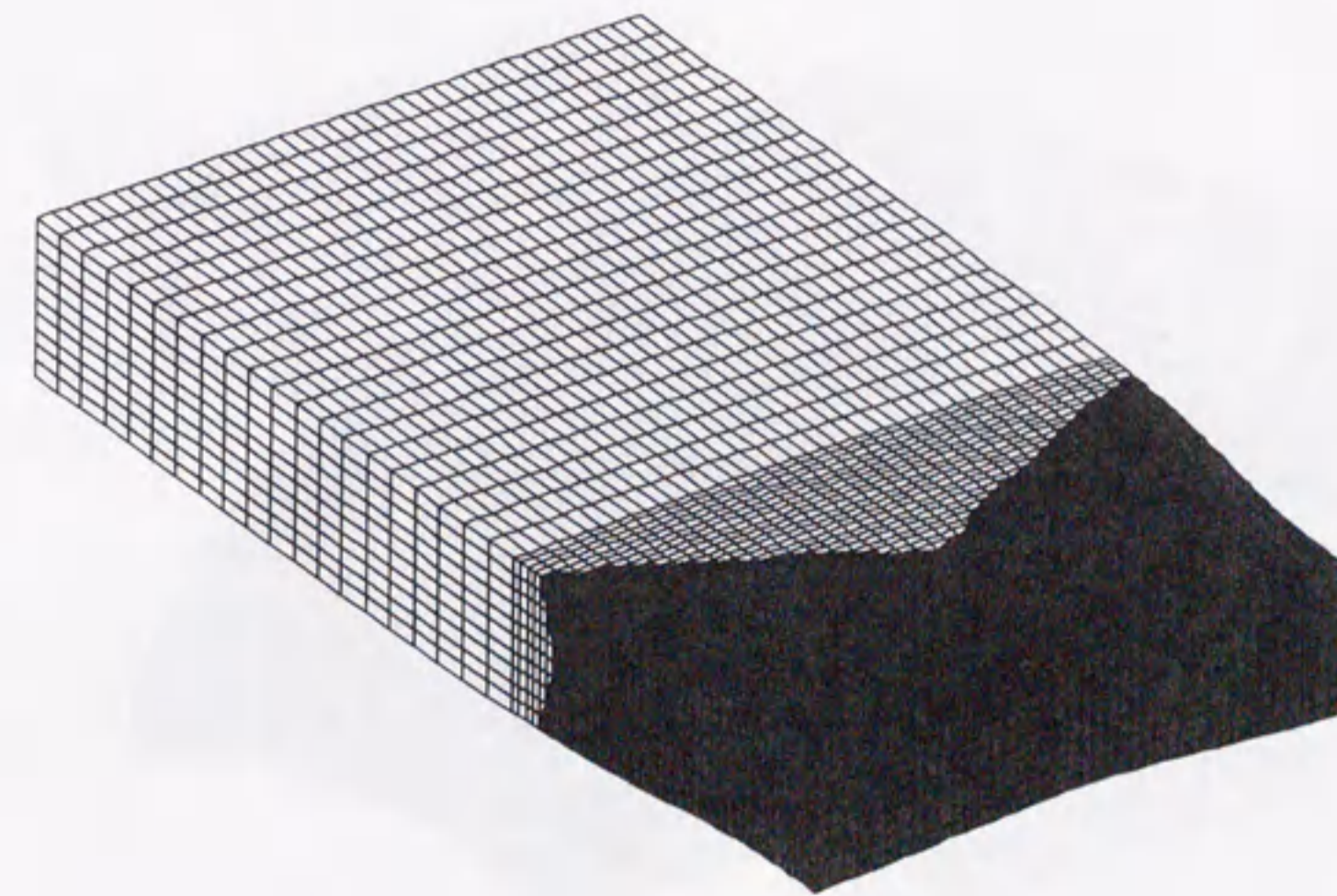
$u/L = 0.2$

図 7.36 モデル E の分岐経路上での相当塑性ひずみ分布図





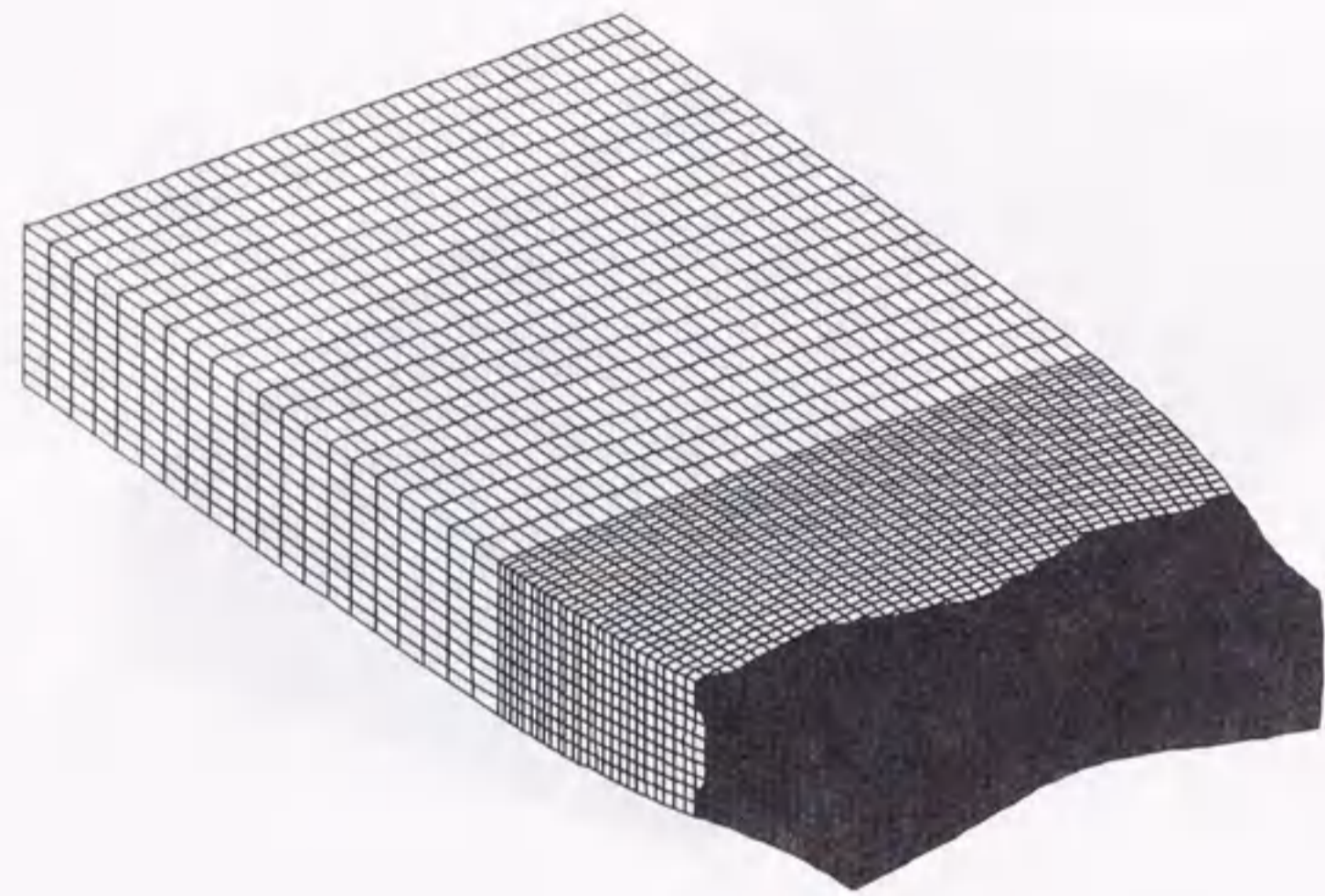
$u/L = 0.1$



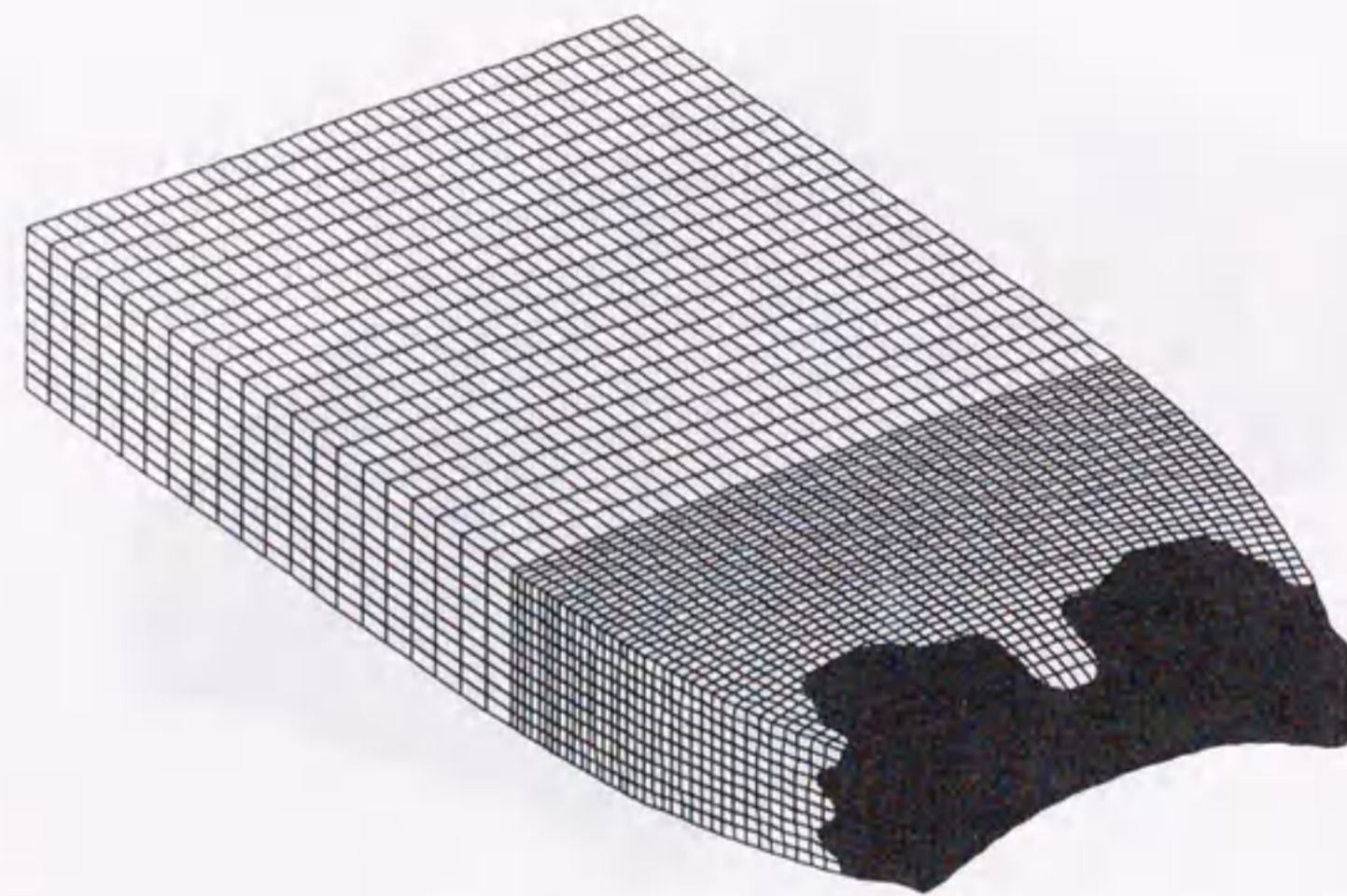
$u/L = 0.133$

図 7.37 モデル E の分岐経路上での負荷・除荷領域 (負荷:黒 除荷:白)





$u/L = 0.167$



$u/L = 0.2$

図 7.37 モデル E の分岐経路上での負荷・除荷領域 (負荷:黒 除荷:白)

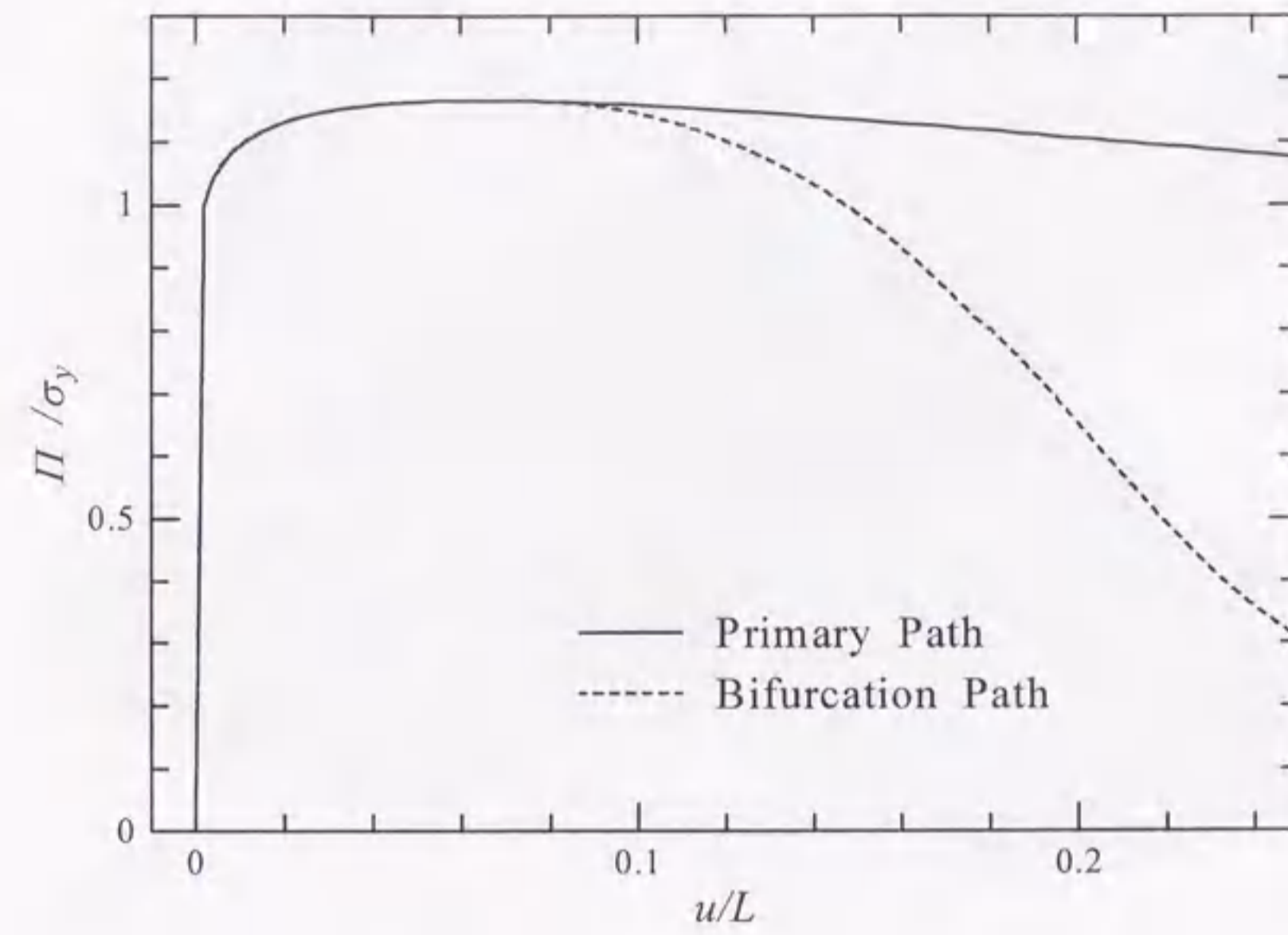


図 7.38 モデル F のつり合い経路

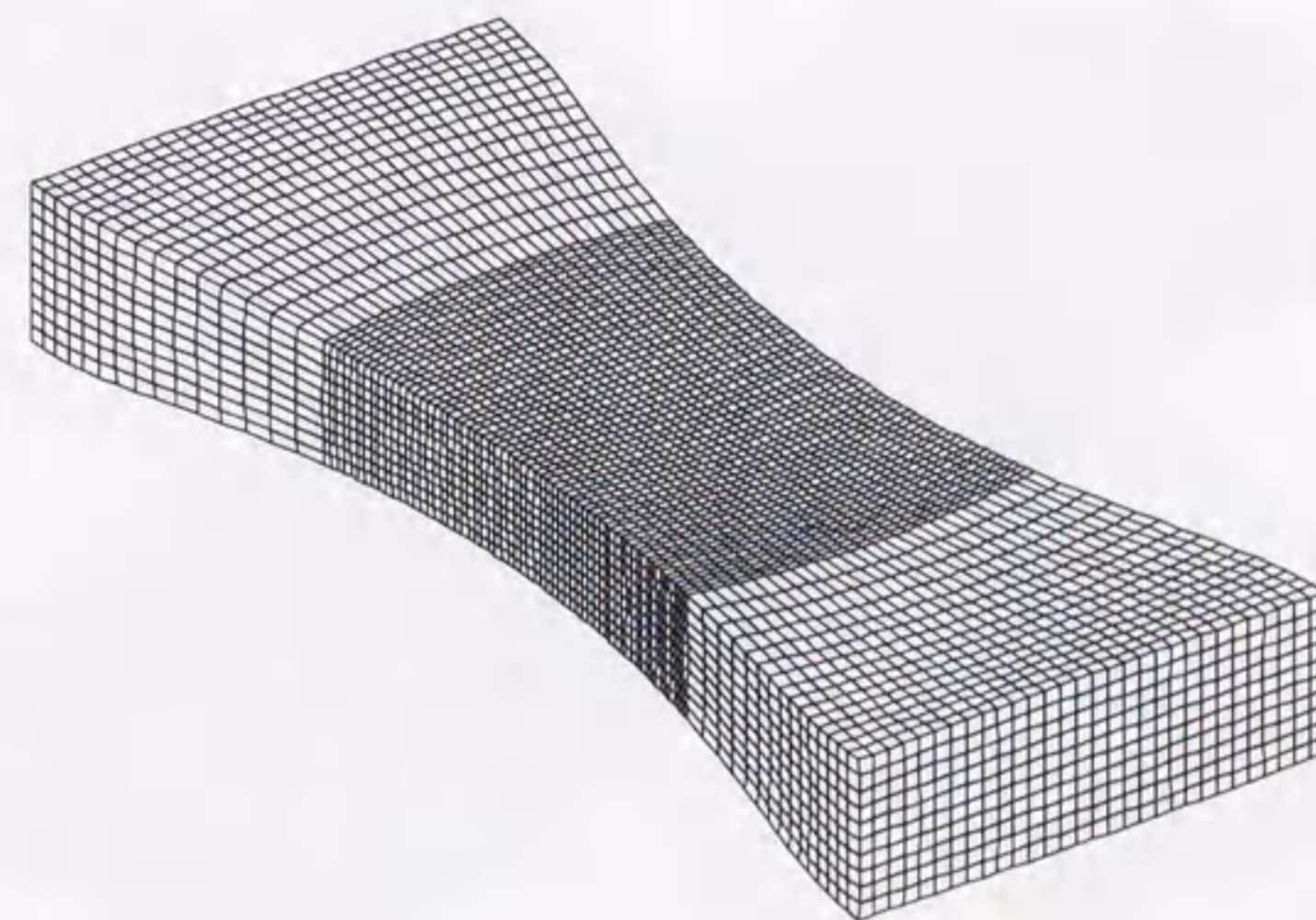
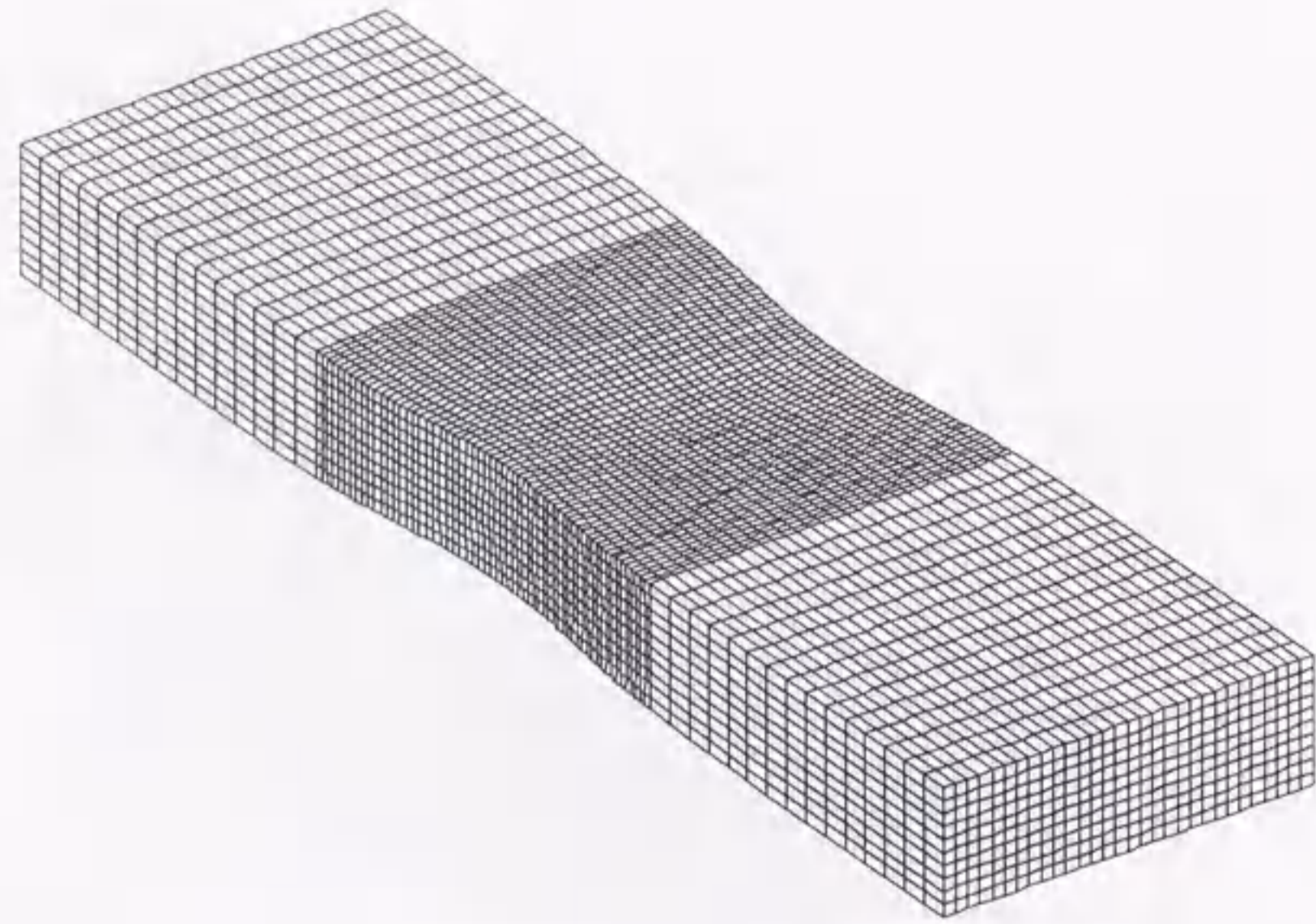
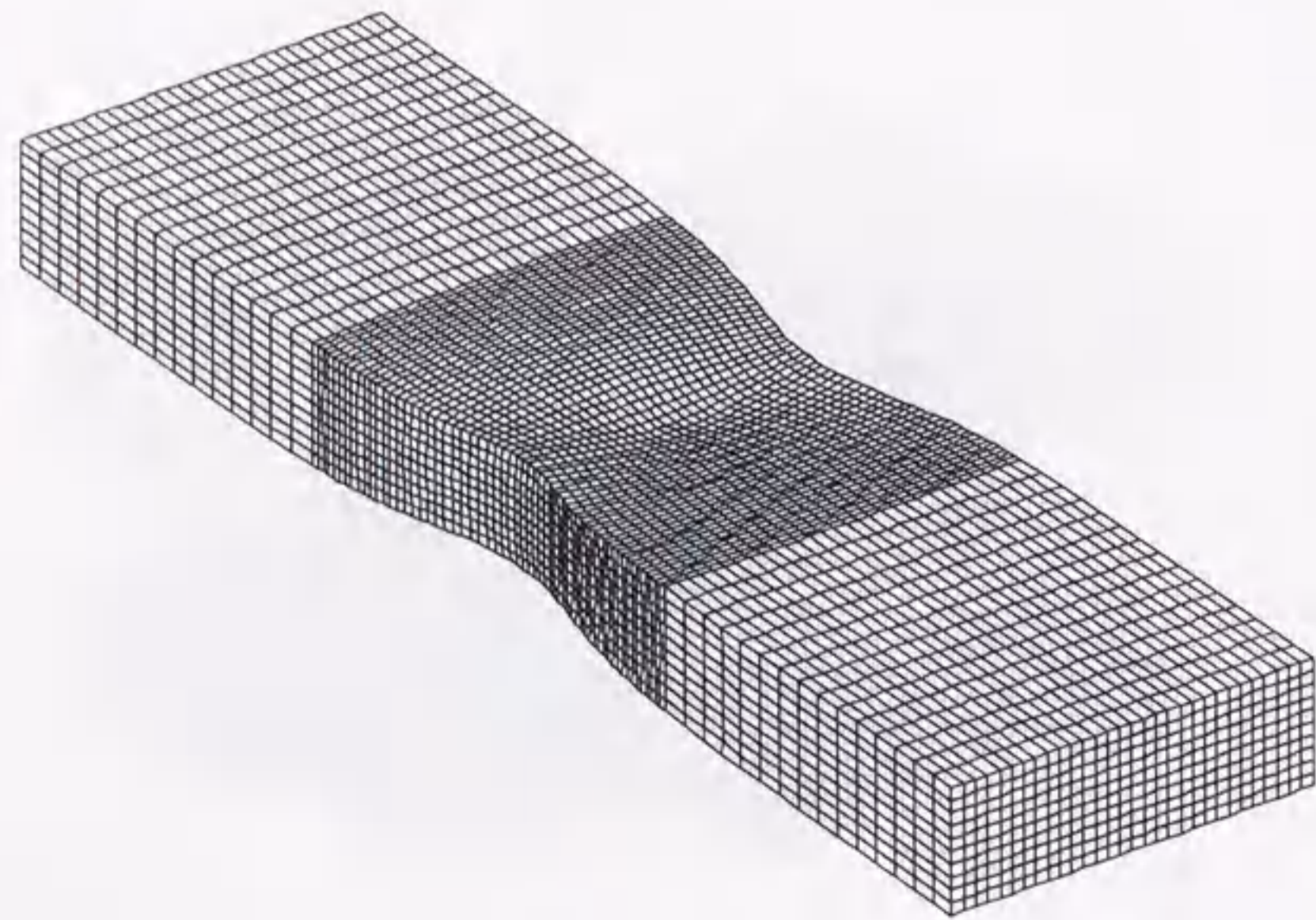


図 7.39 モデル F における Scaled Corrector



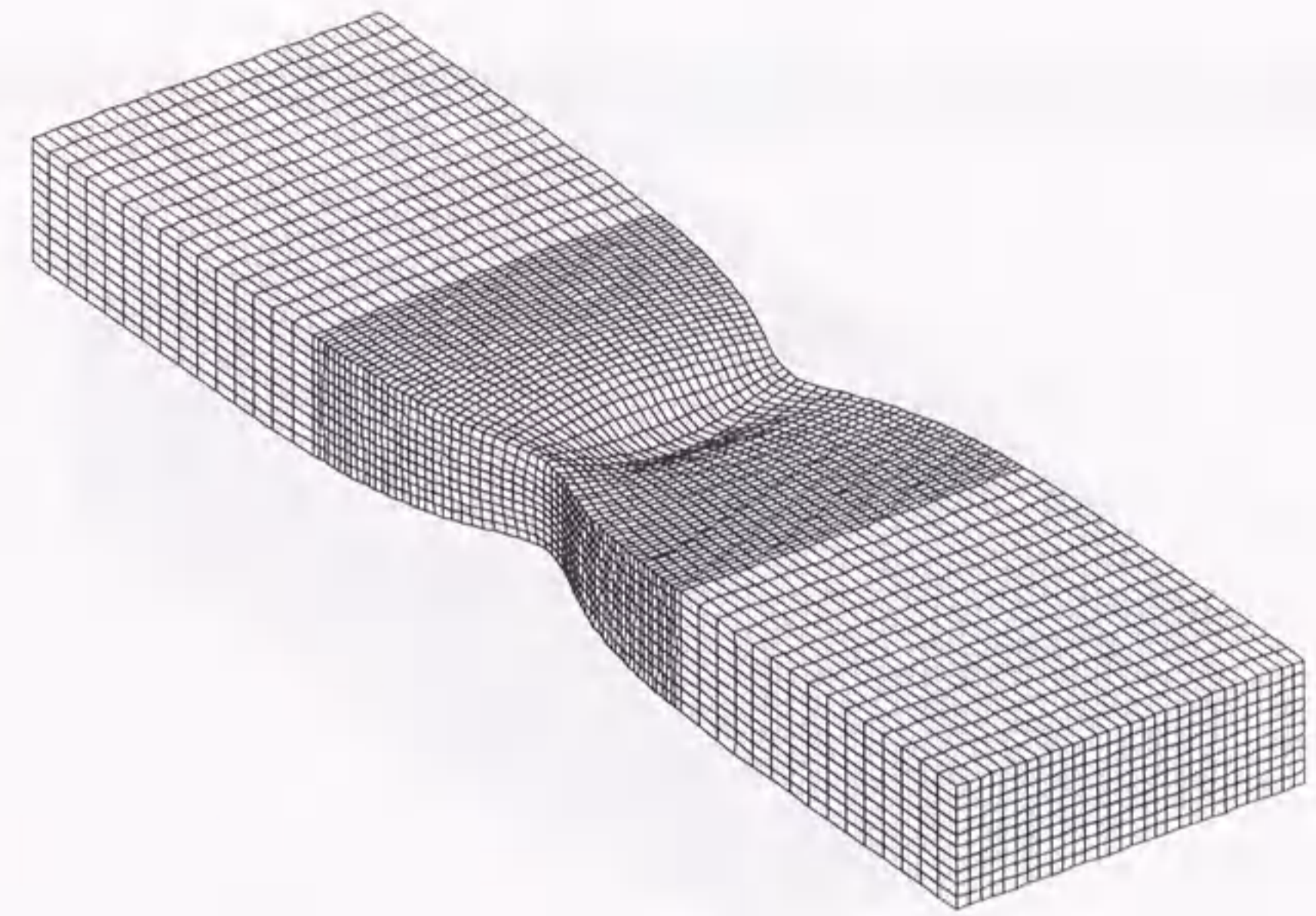


$u/L=0.133$

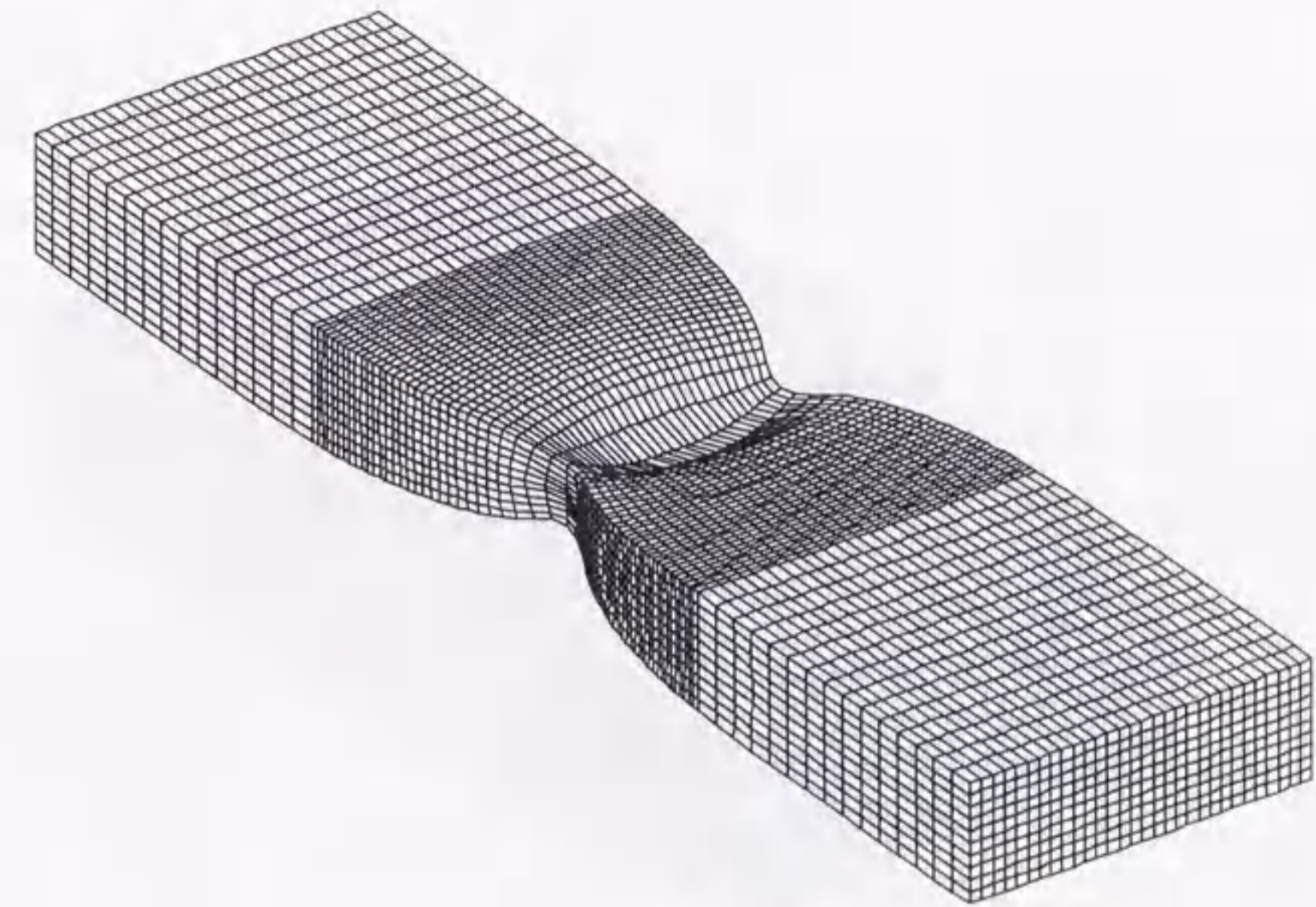


$u/L=0.167$

図 7.40 モデル F の分岐経路上での変形図



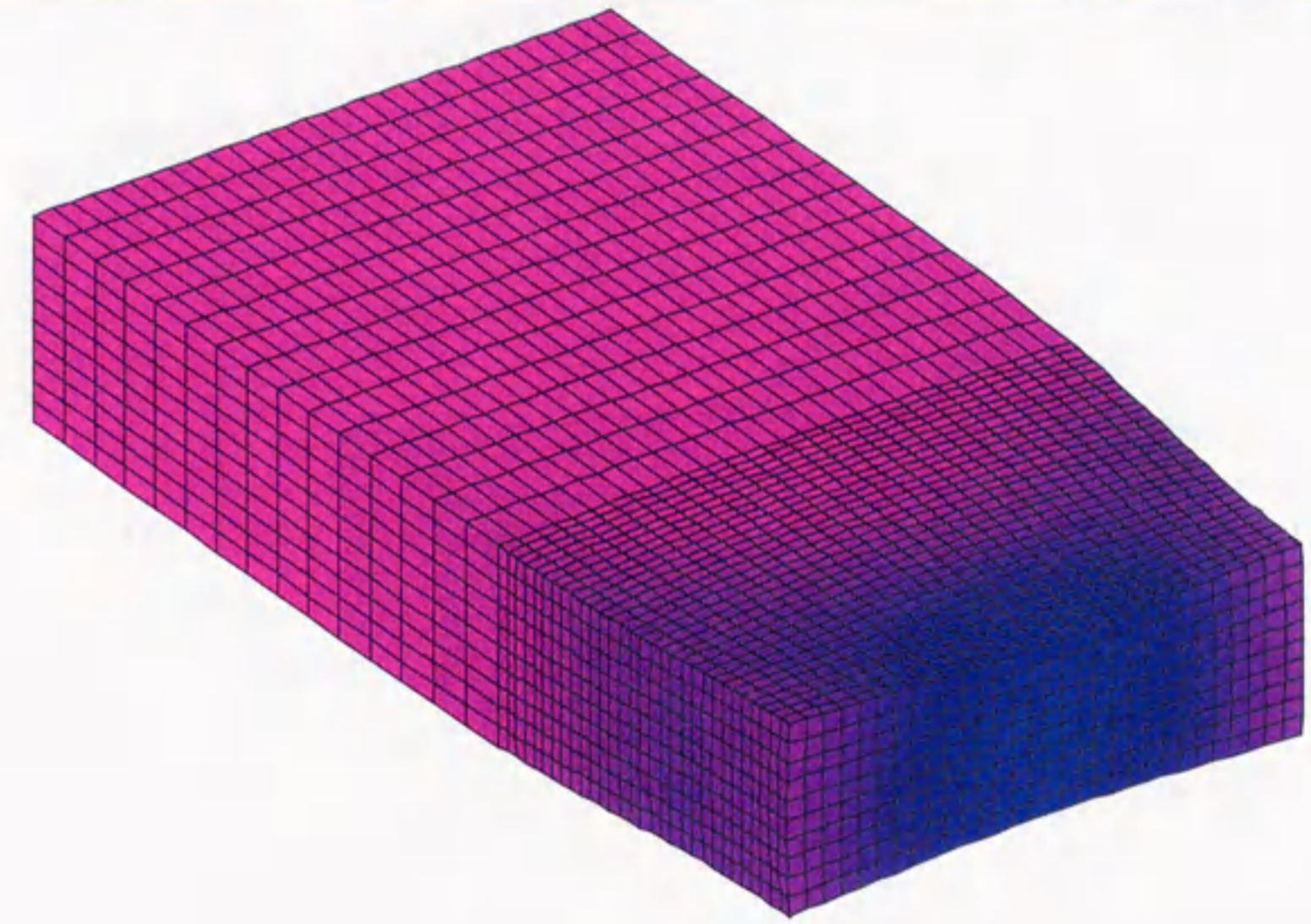
$u/L=0.2$



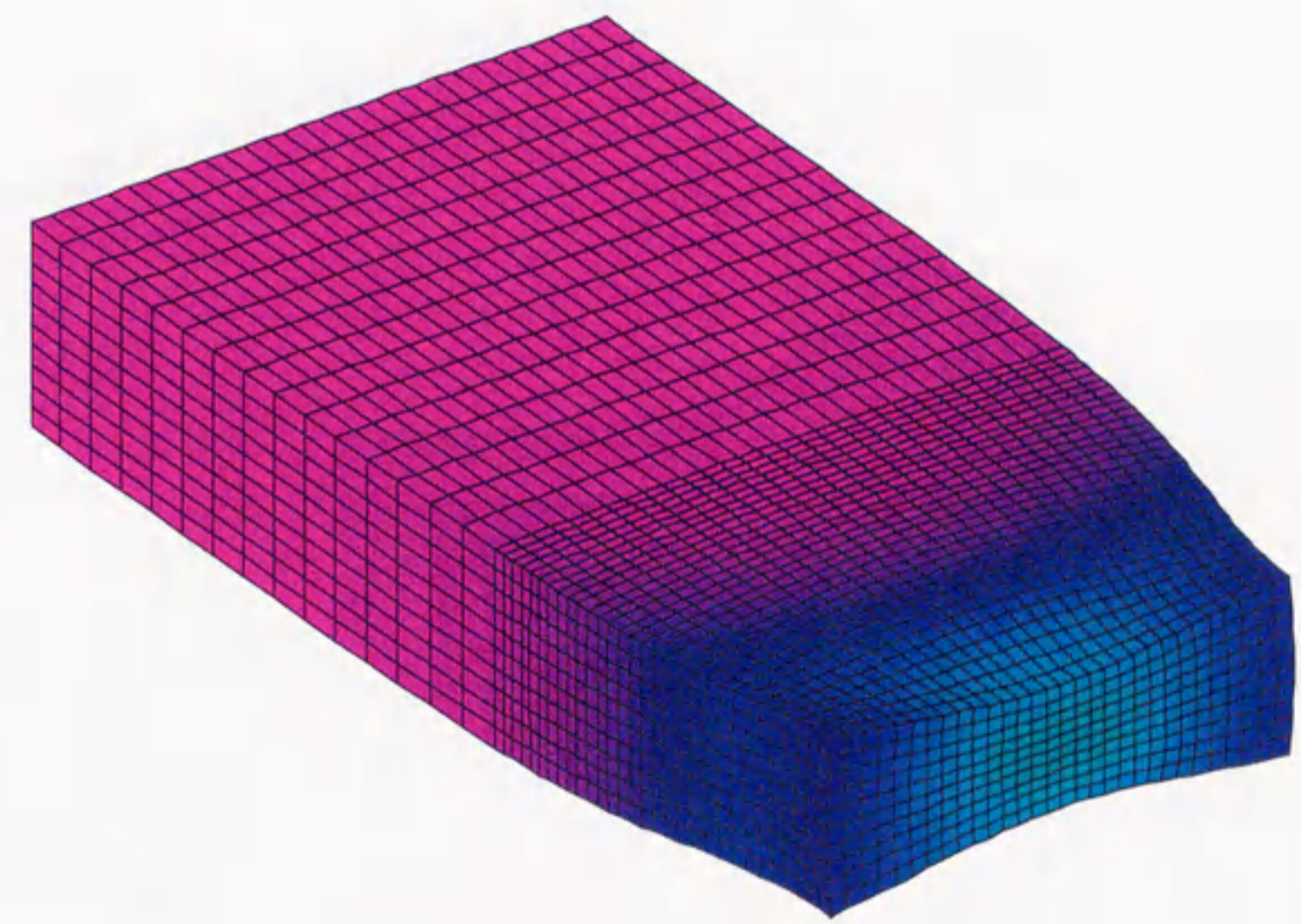
$u/L=0.233$

図 7.40 モデル F の分岐経路上での変形図





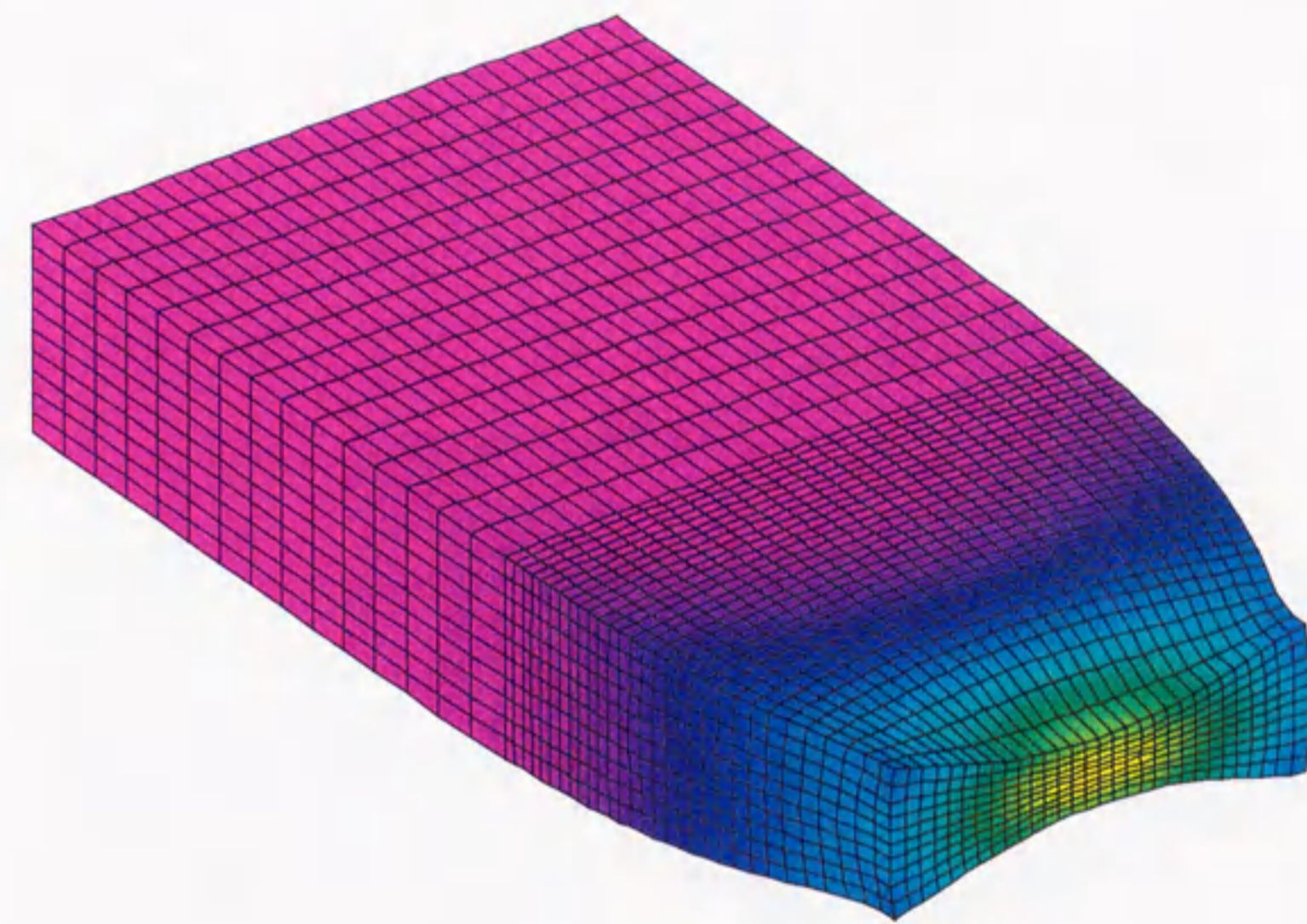
$u/L = 0.133$



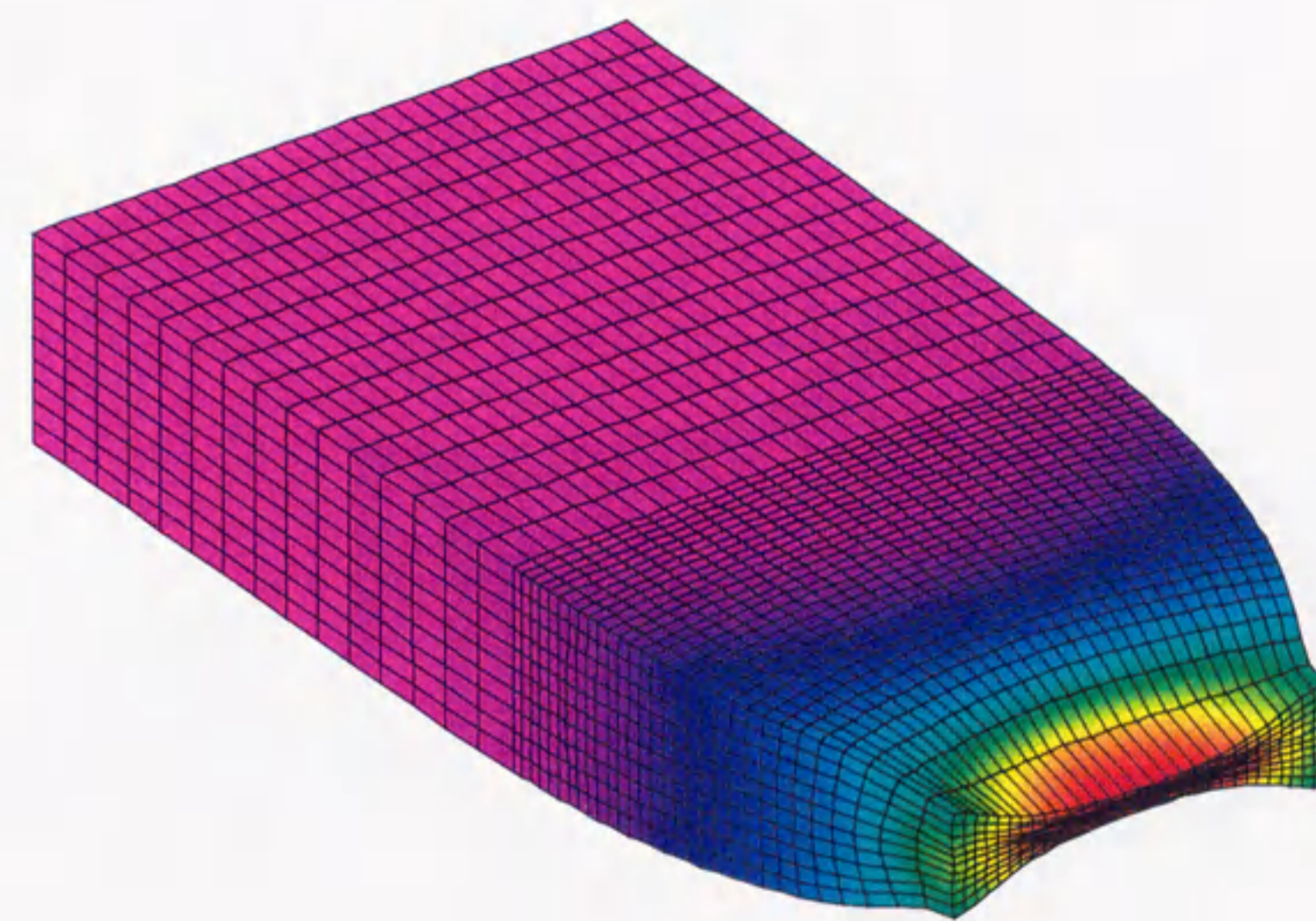
$u/L = 0.167$

図 7.41 モデル F の分岐経路上での相当塑性ひずみ分布図





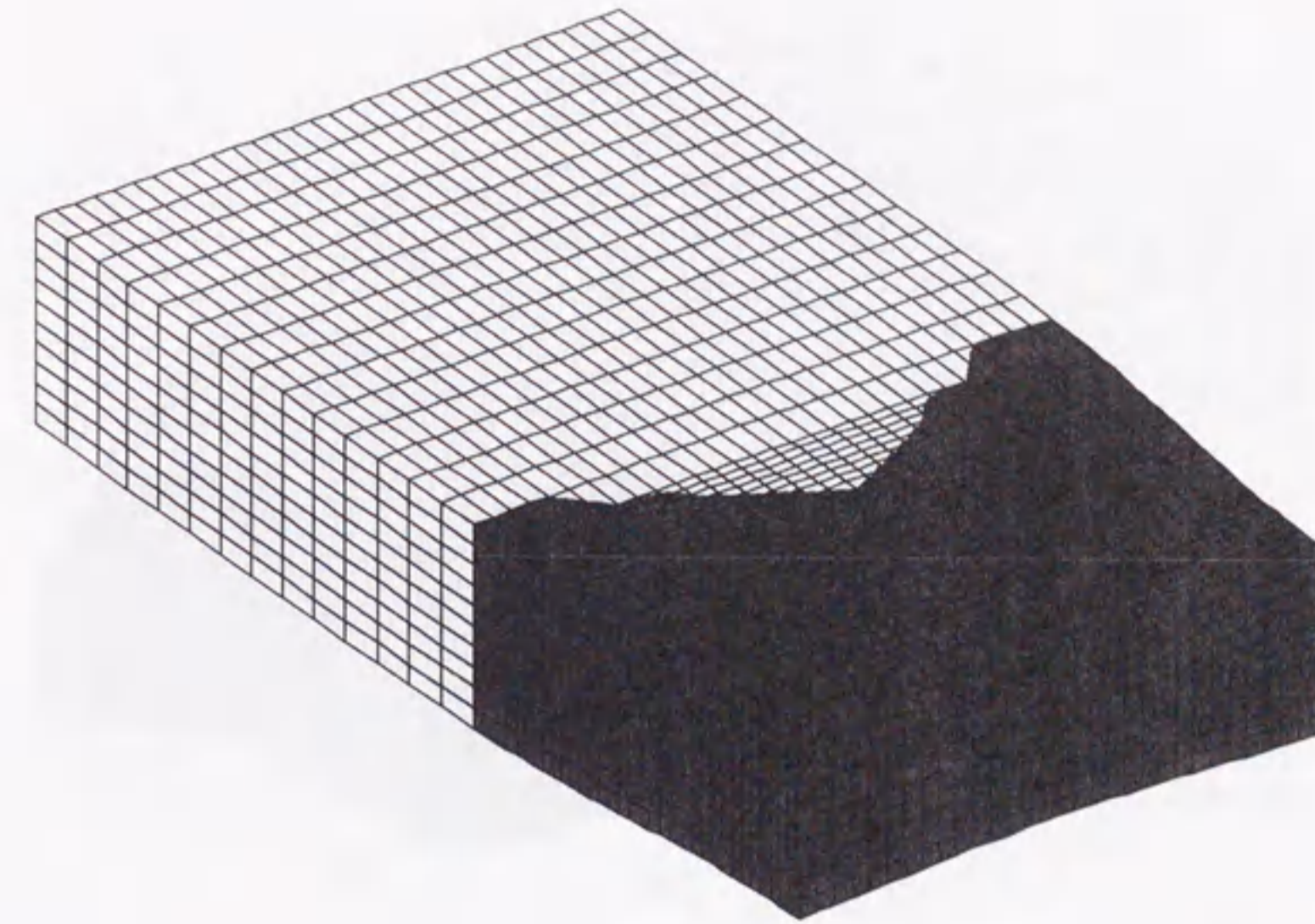
$u/L = 0.2$



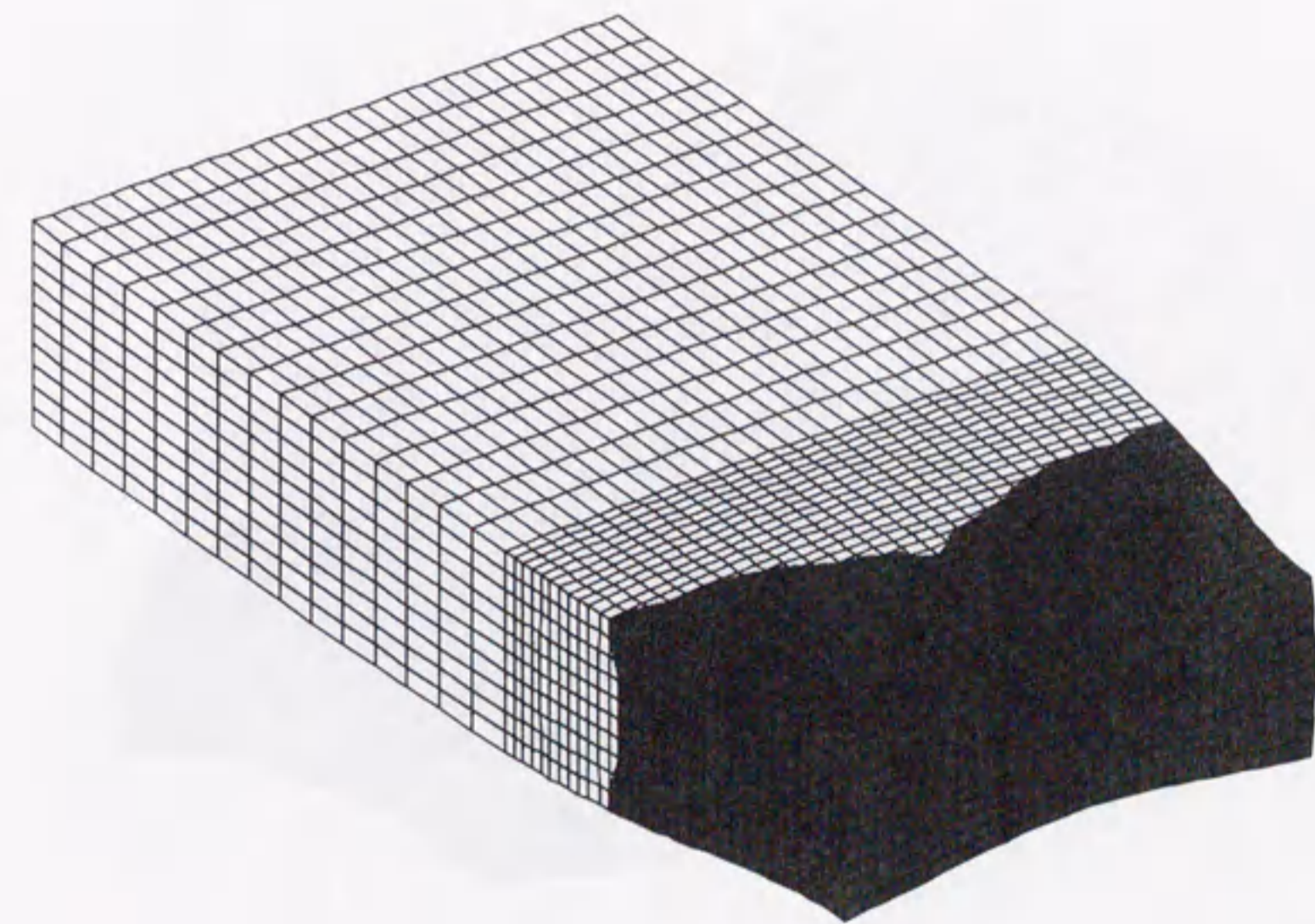
$u/L = 0.233$

図 7.41 モデル F の分岐経路上での相当塑性ひずみ分布図





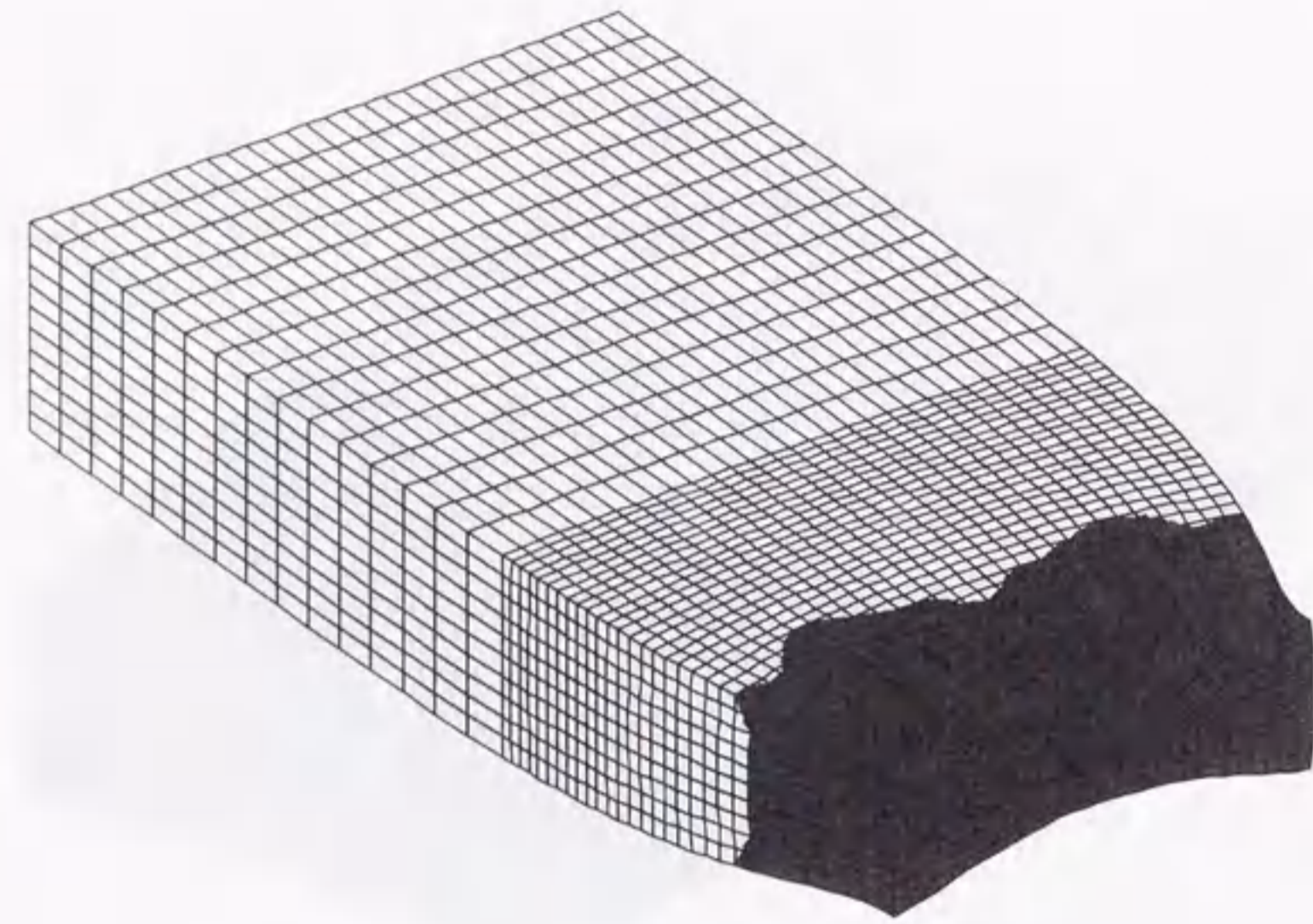
$u/L = 0.133$



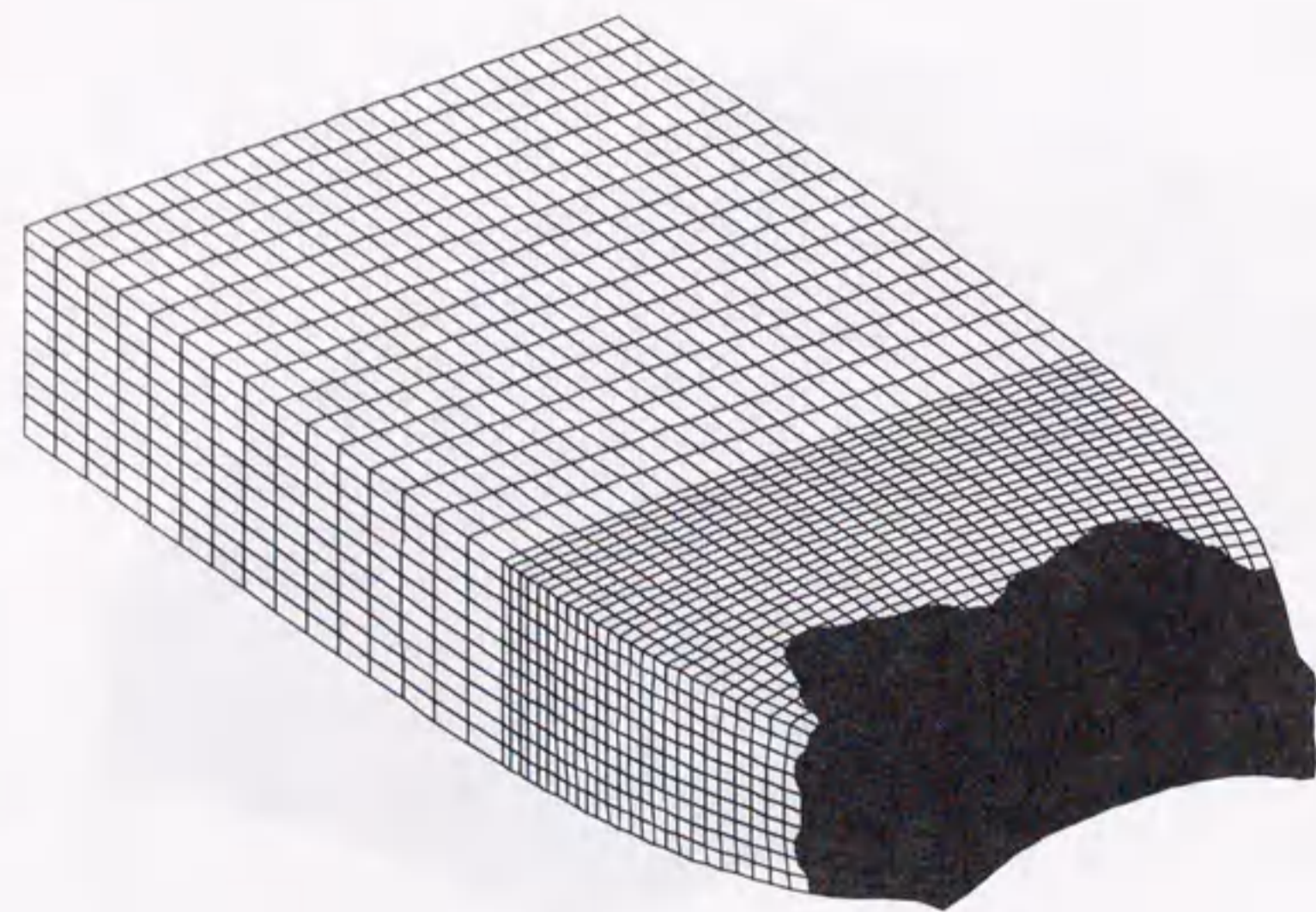
$u/L = 0.167$

図 7.42 モデル F の分岐経路上での負荷・除荷領域 (負荷:黒 除荷:白)





$u/L = 0.2$



$u/L = 0.233$

図 7.42 モデル F の分岐経路上での負荷・除荷領域 (負荷:黒 除荷:白)

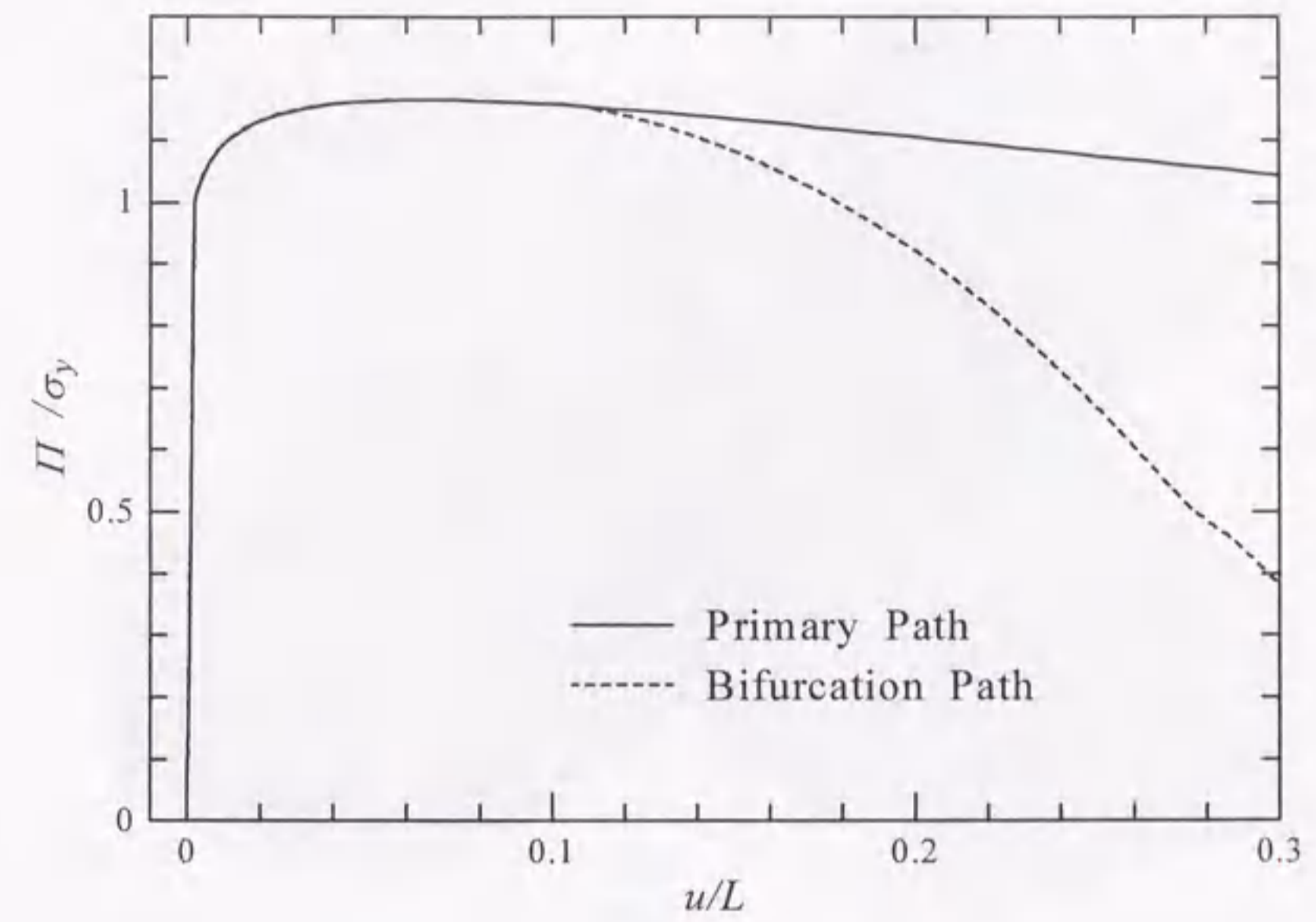


図 7.43 モデル G のつり合い経路

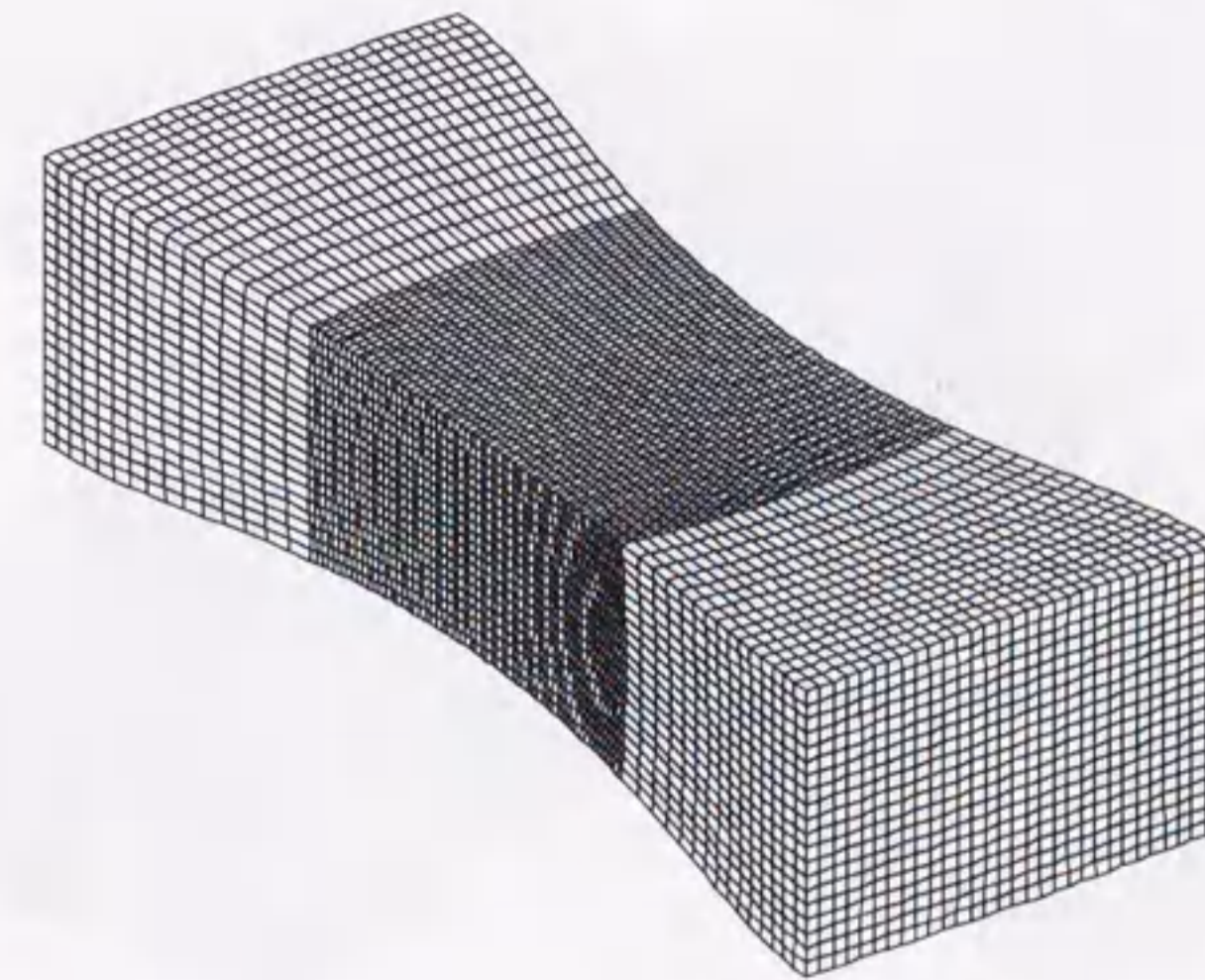
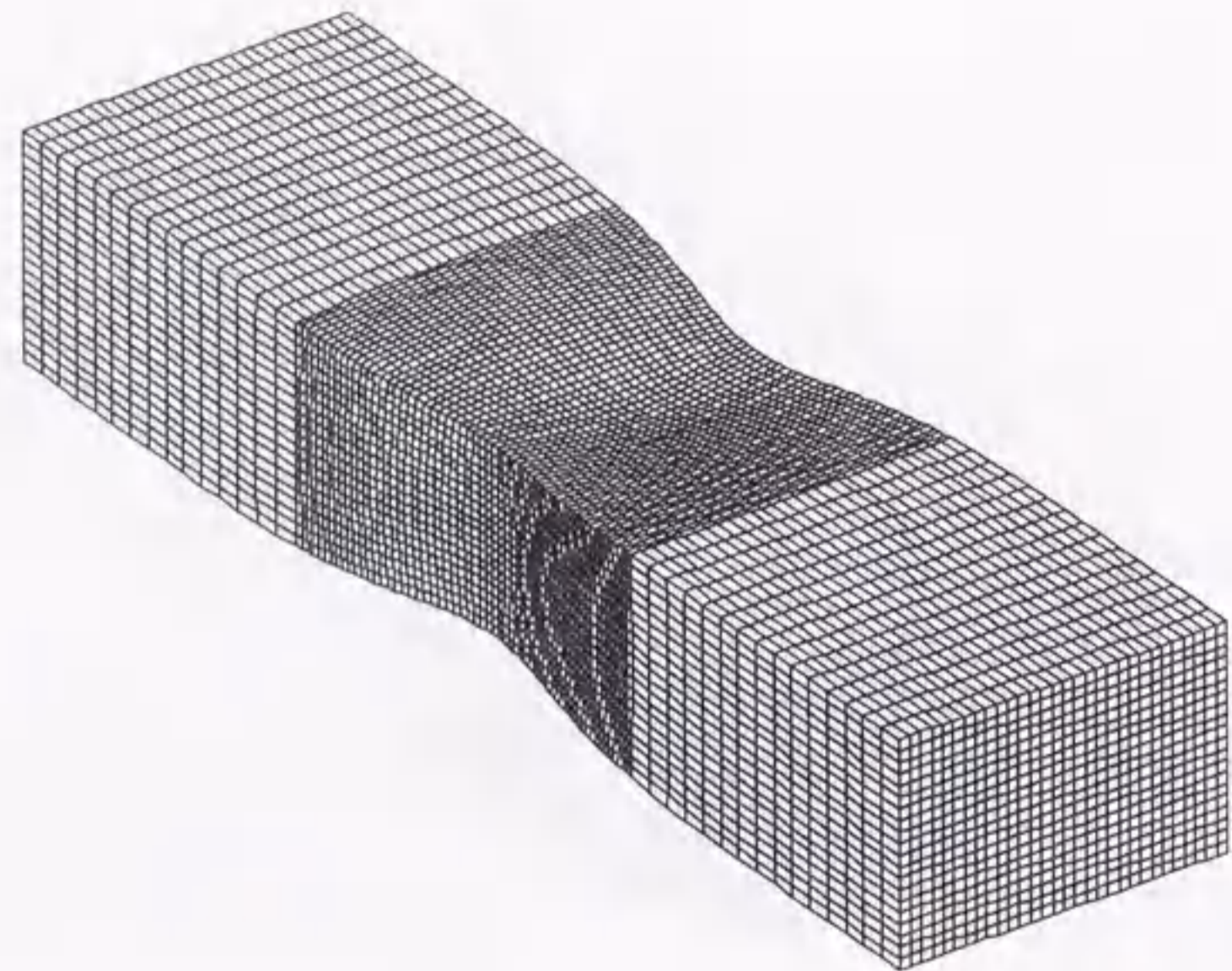
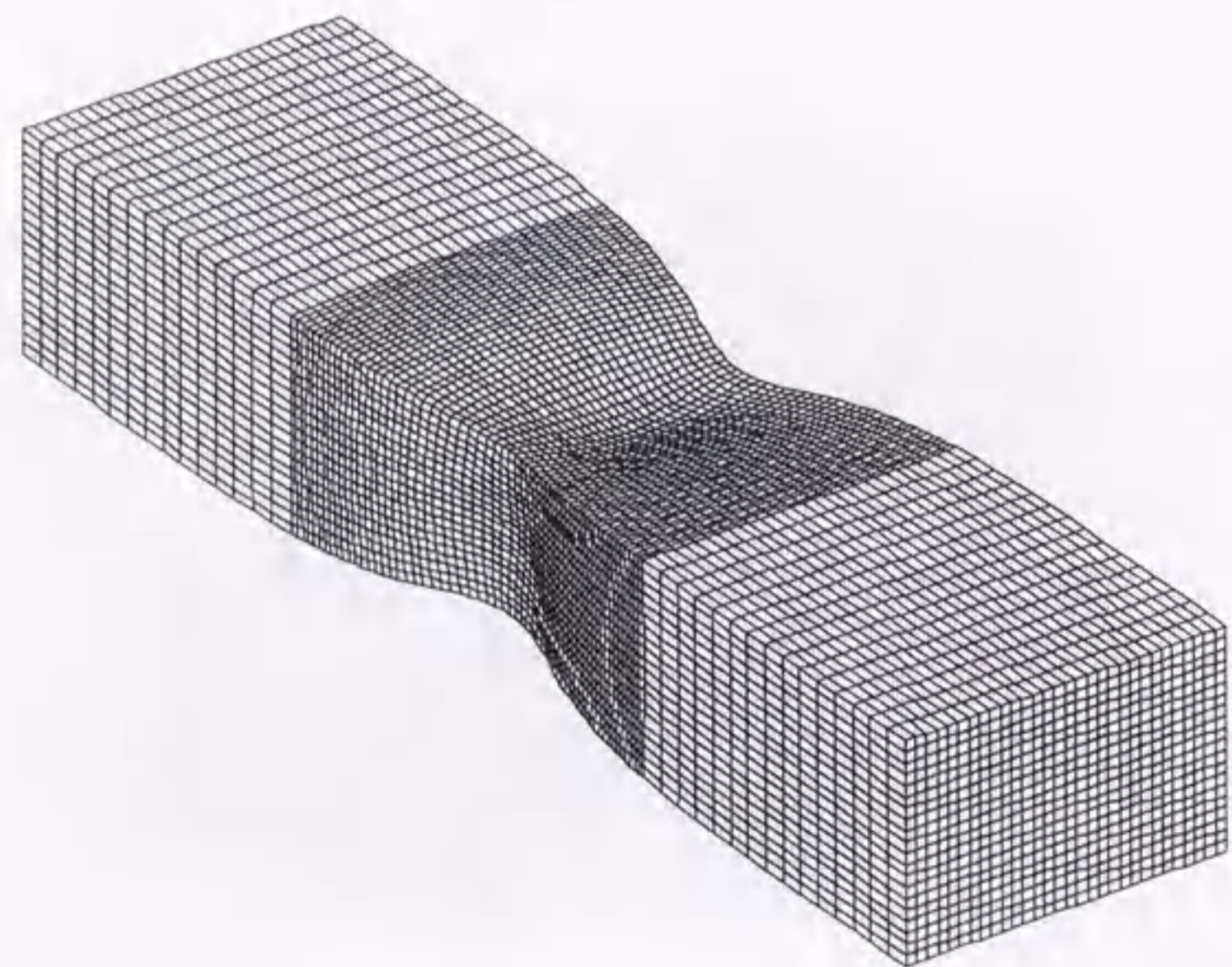


図 7.44 モデル G における Scaled Corrector



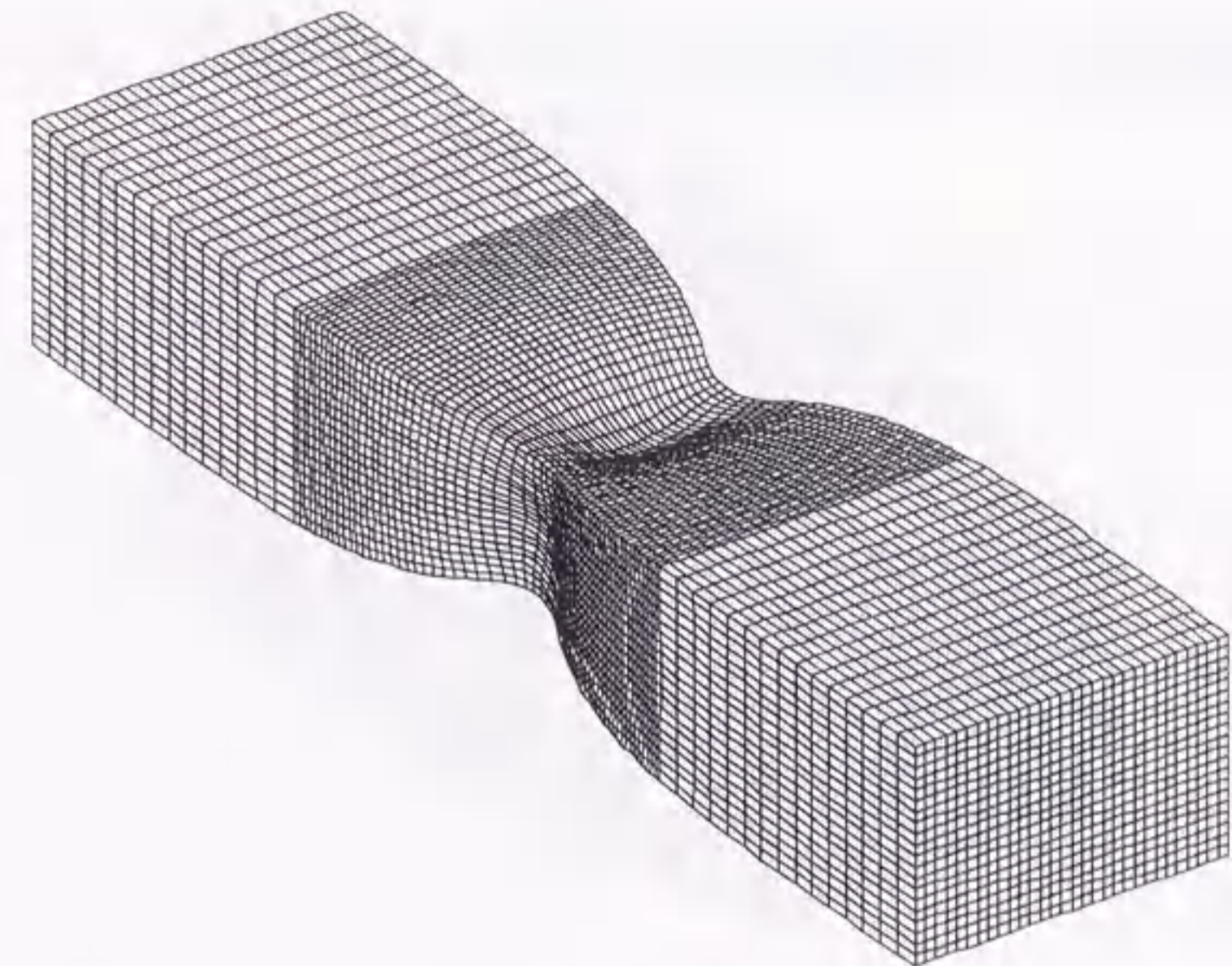


$u/L=0.2$

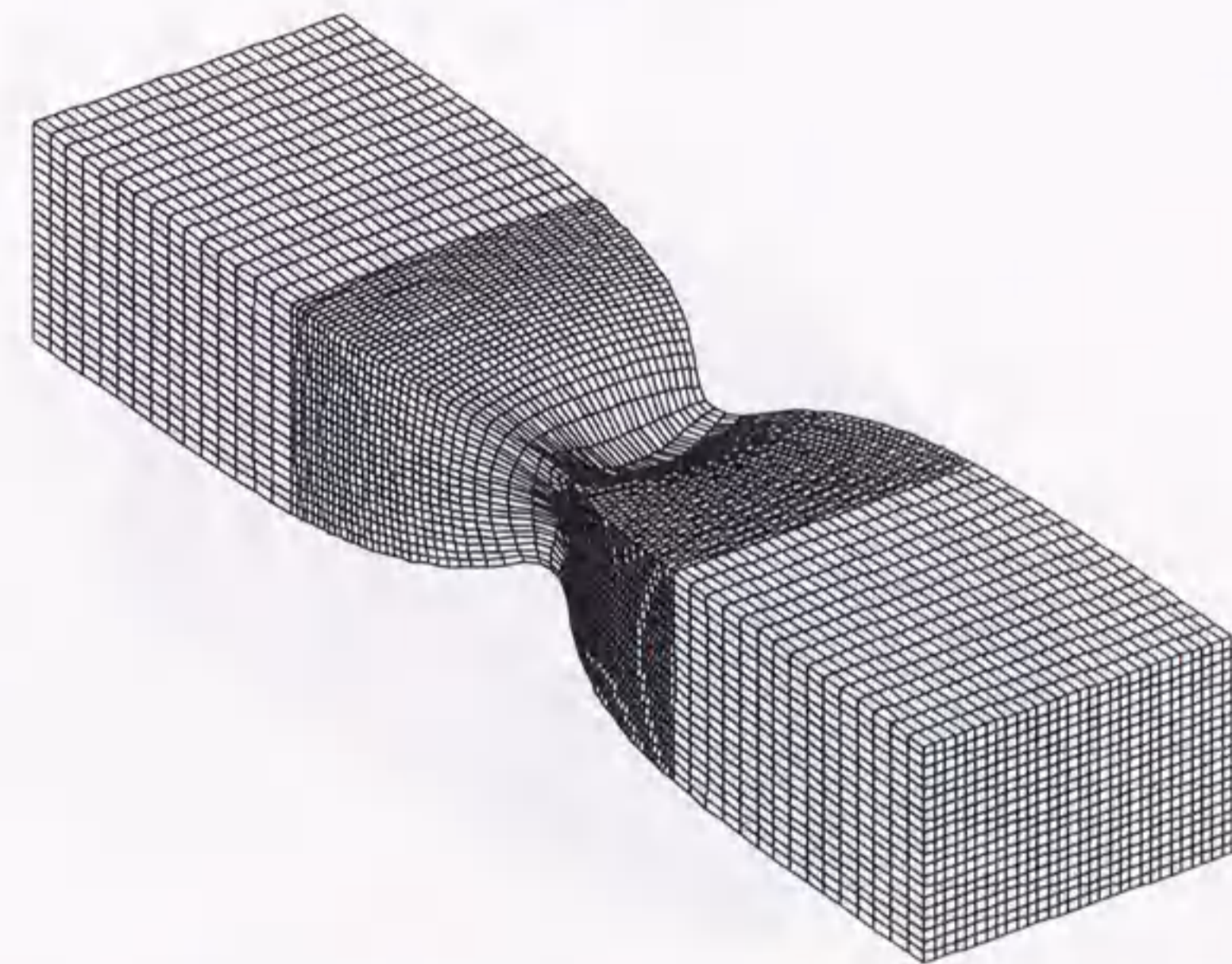


$u/L=0.233$

図 7.45 モデル G の分岐経路上での変形図



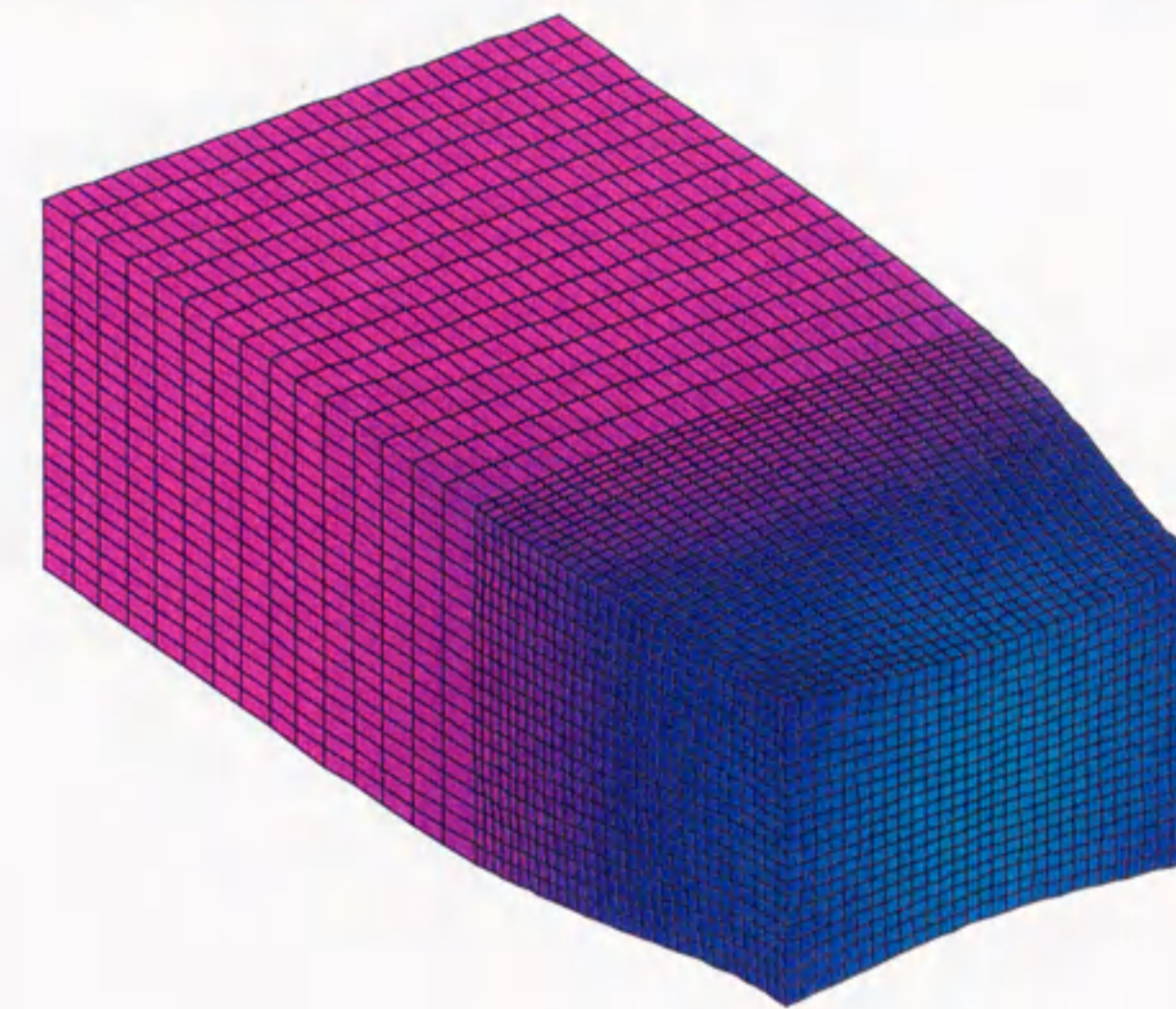
$u/L=0.267$



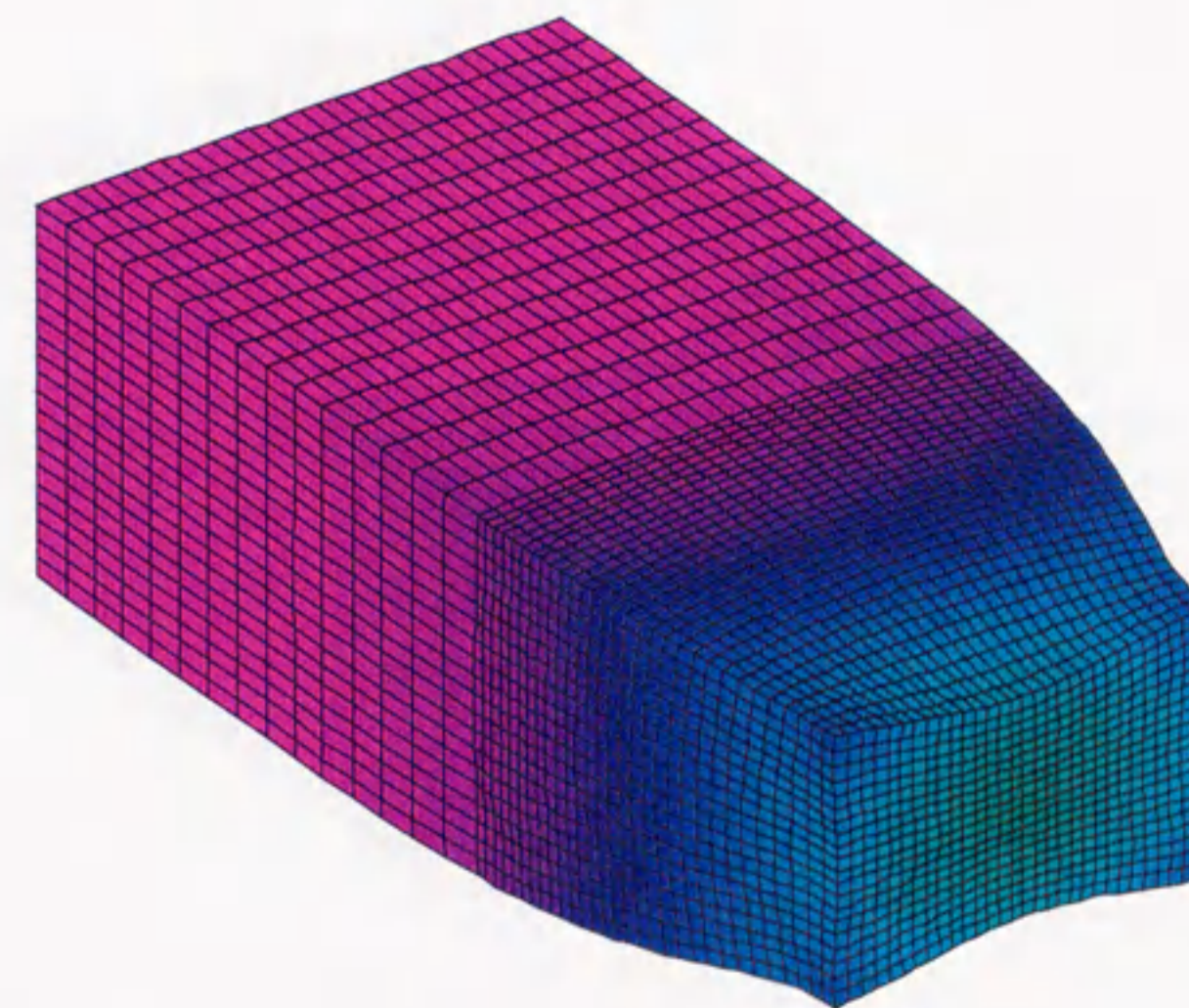
$u/L=0.3$

図 7.45 モデル G の分岐経路上での変形図





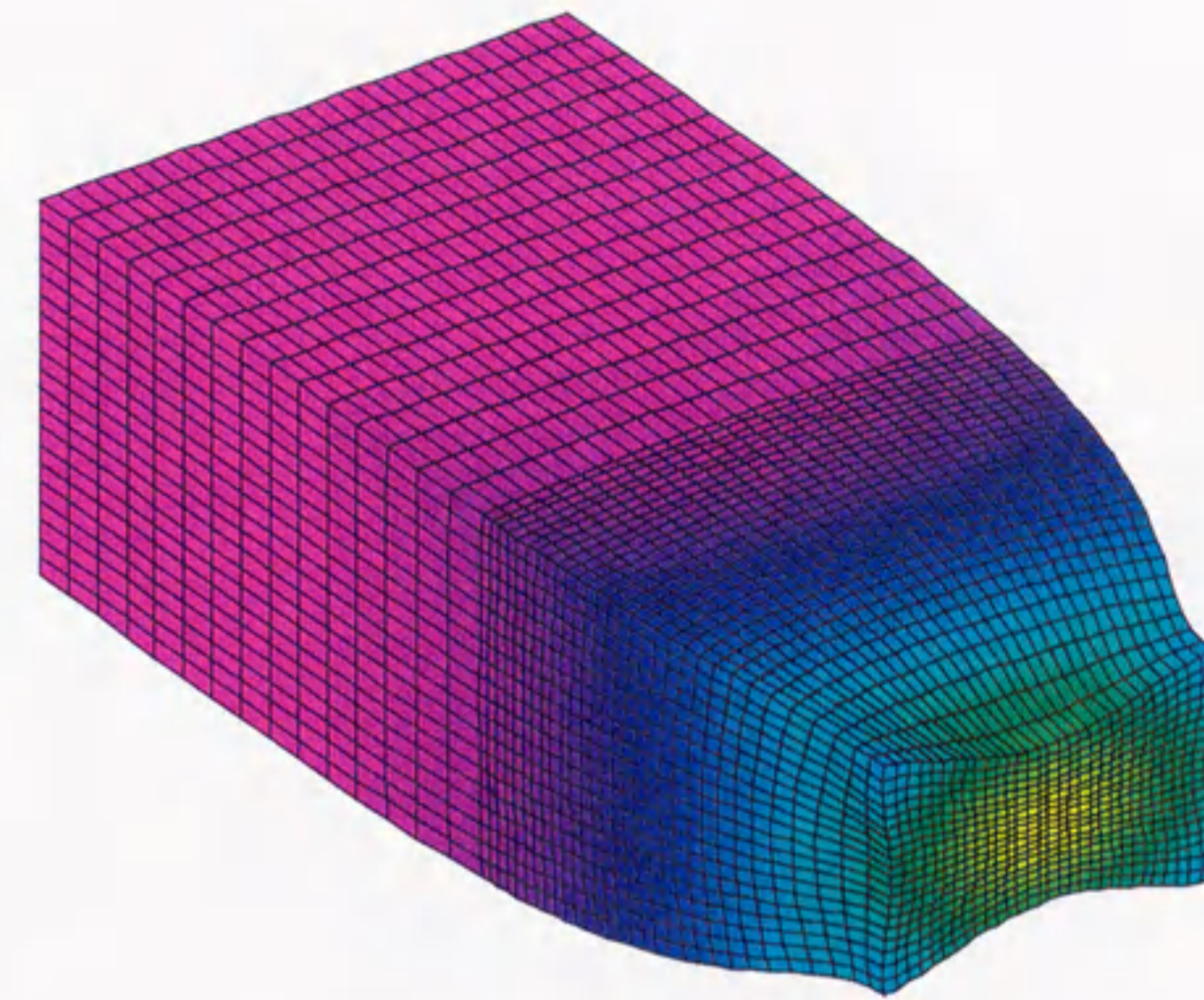
$u/L = 0.2$



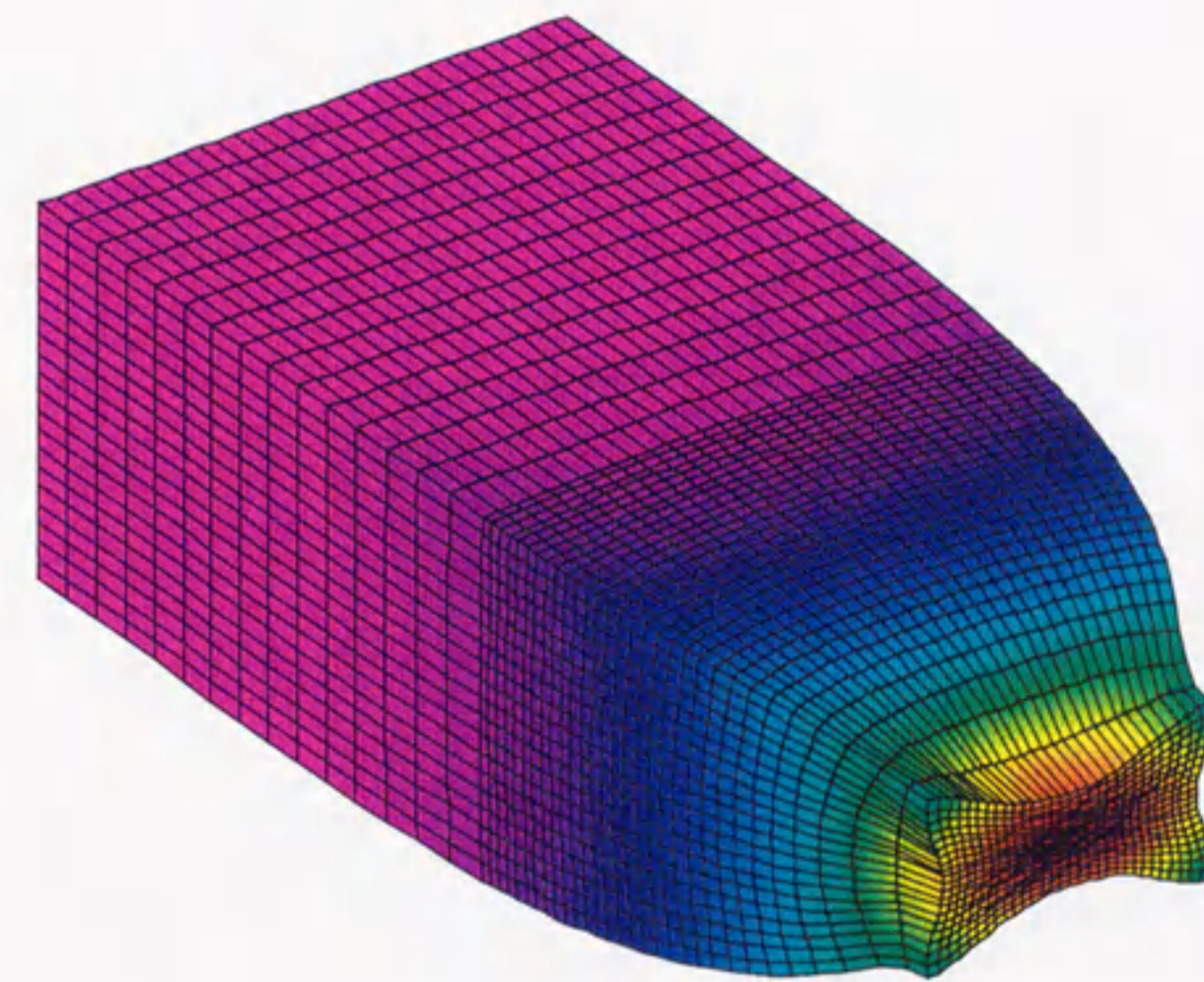
$u/L = 0.233$

図 7.46 モデル G の分岐経路上での相当塑性ひずみ分布図





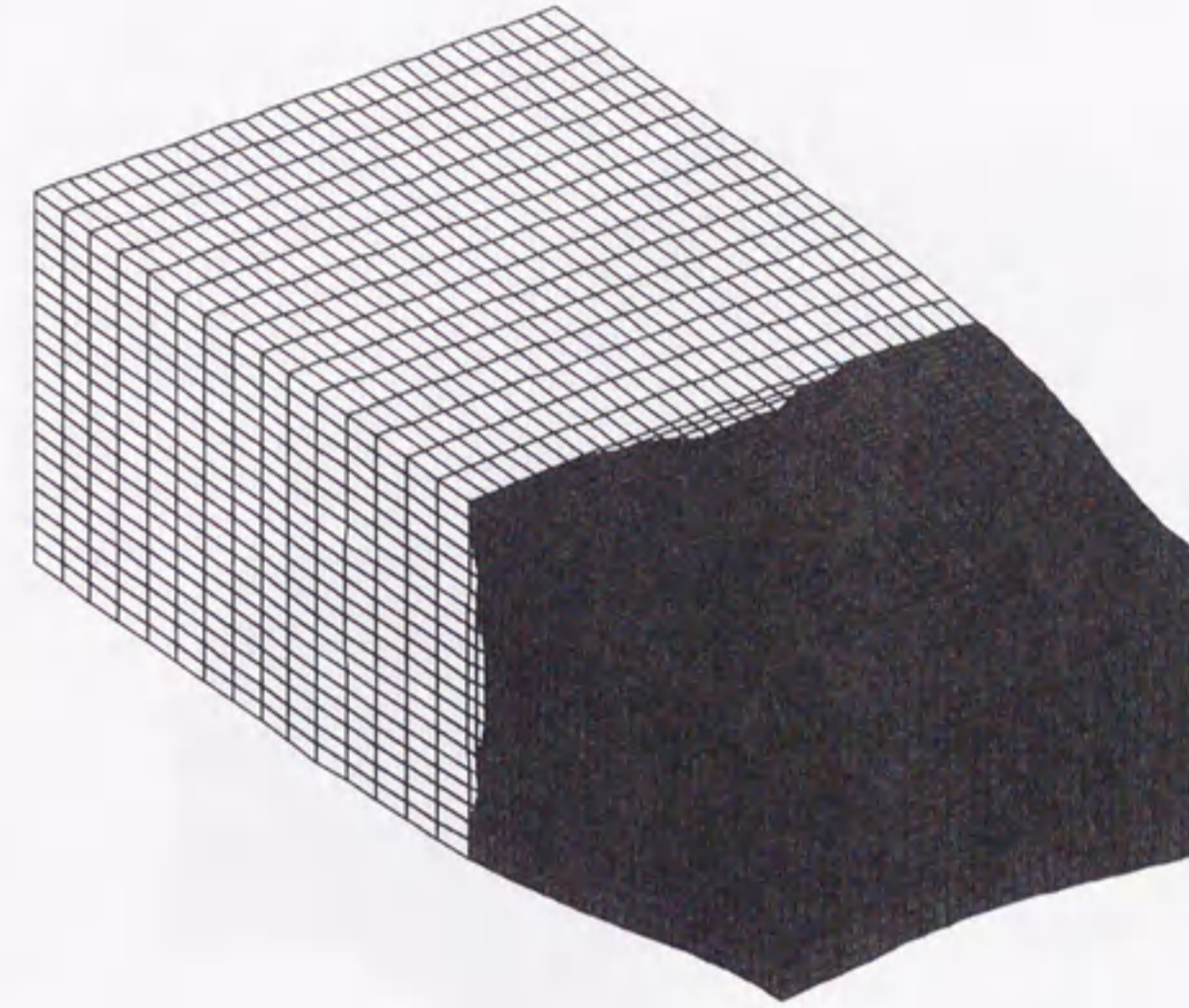
$u/L = 0.267$



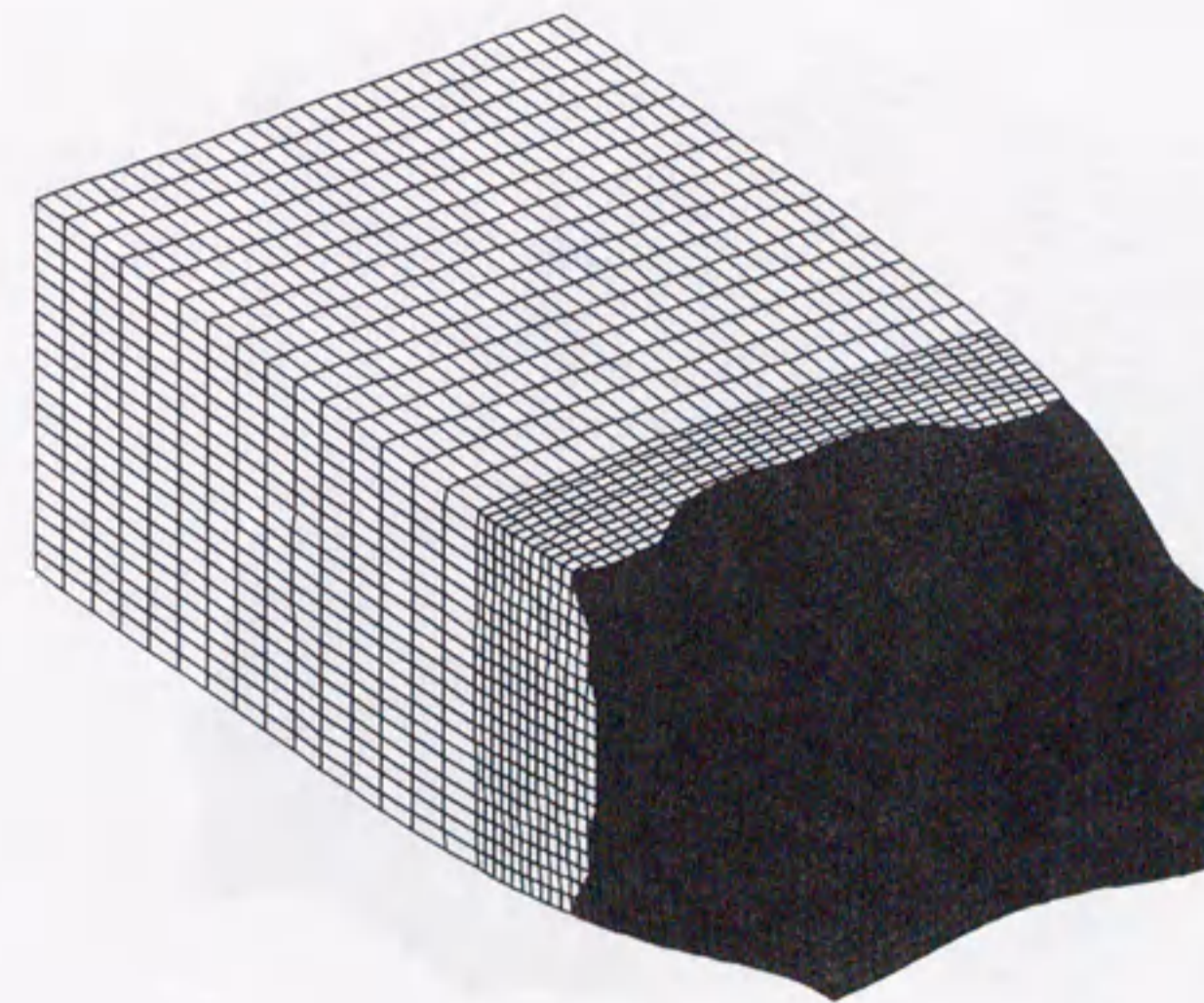
$u/L = 0.3$

図 7.46 モデル G の分岐経路上での相当塑性ひずみ分布図





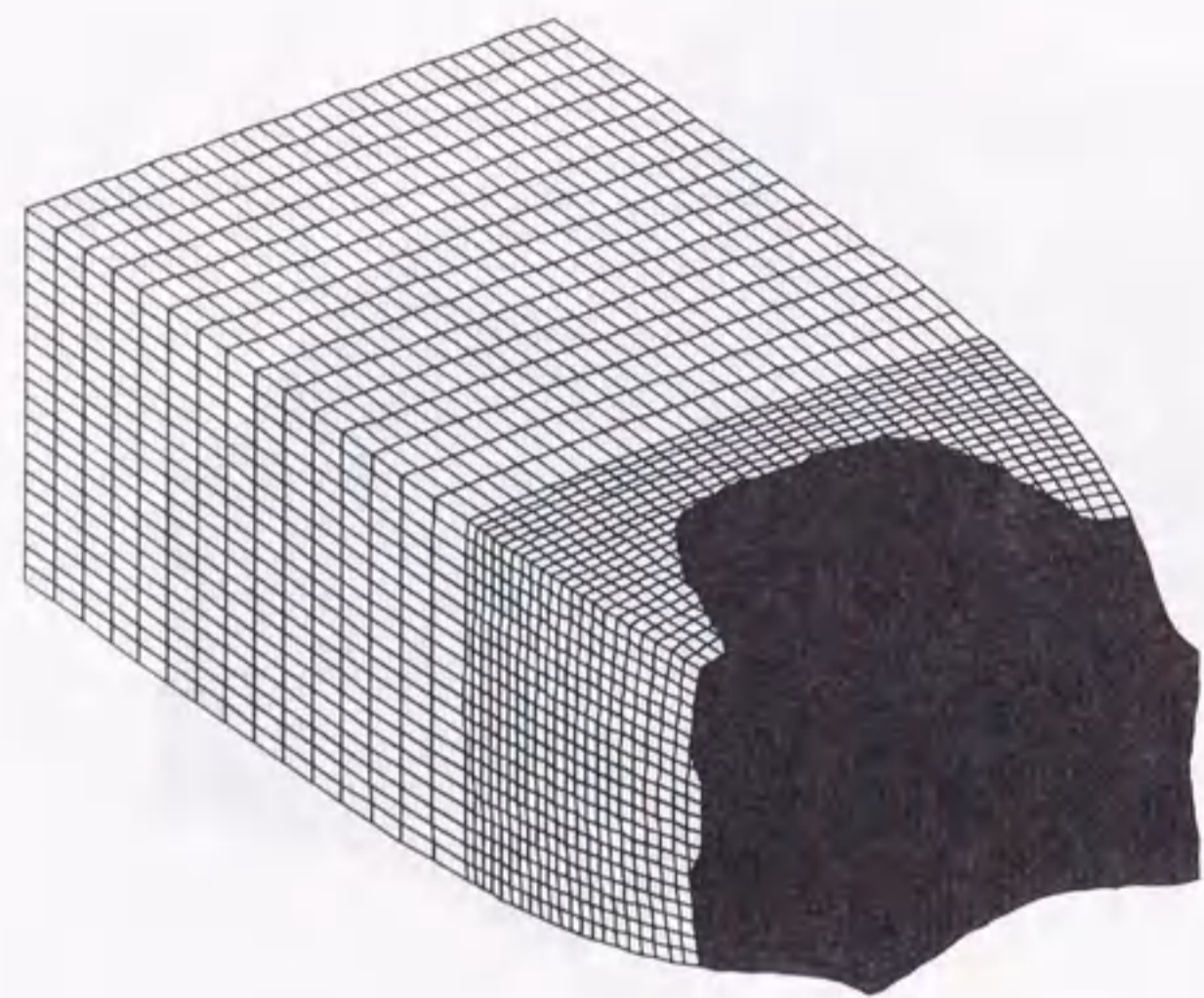
$u/L = 0.2$



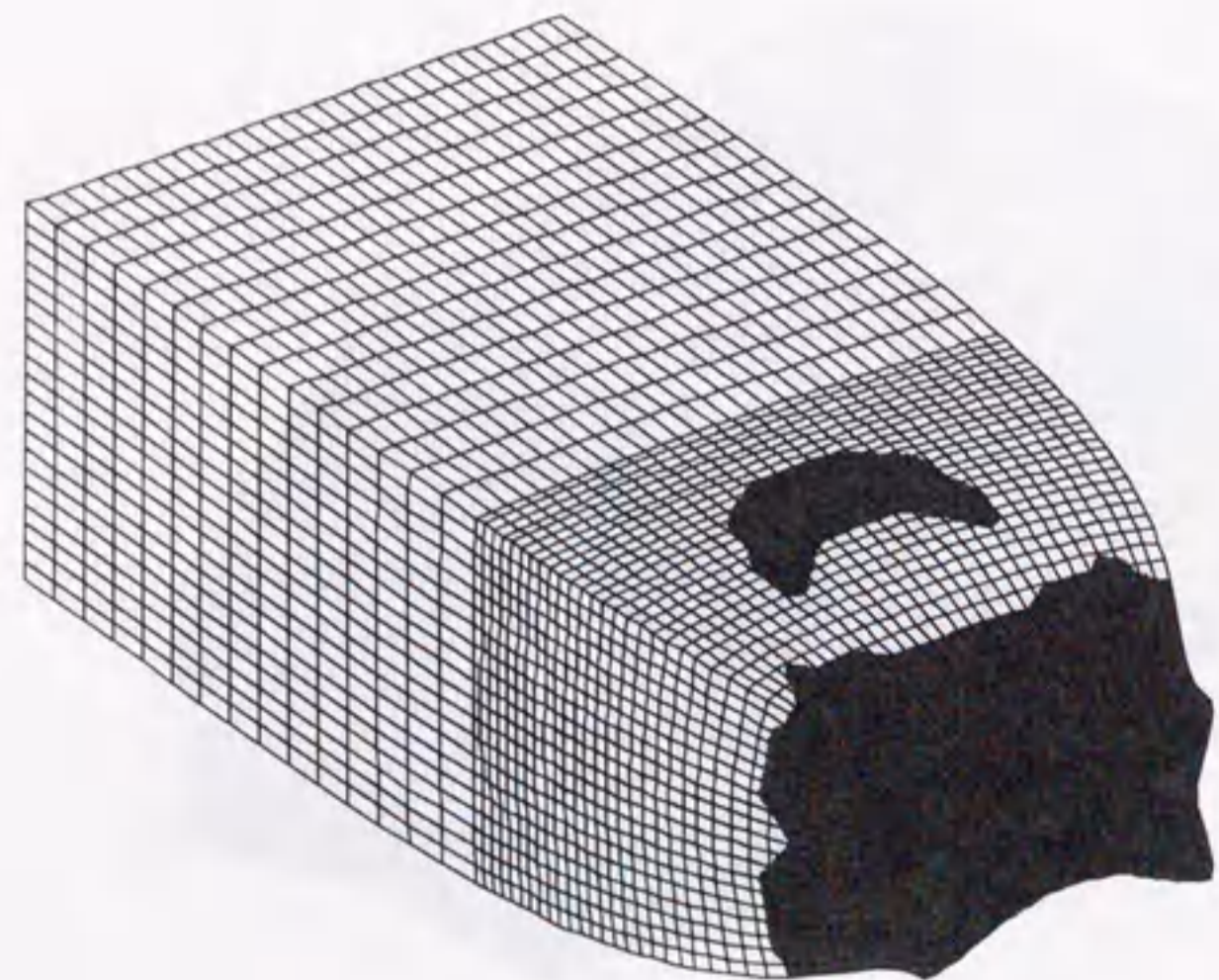
$u/L = 0.233$

図 7.47 モデル G の分岐経路上での負荷・除荷領域 (負荷:黒 除荷:白)





$u/L = 0.267$



$u/L = 0.3$

図 7.47 モデル G の分岐経路上での負荷・除荷領域 (負荷:黒 除荷:白)

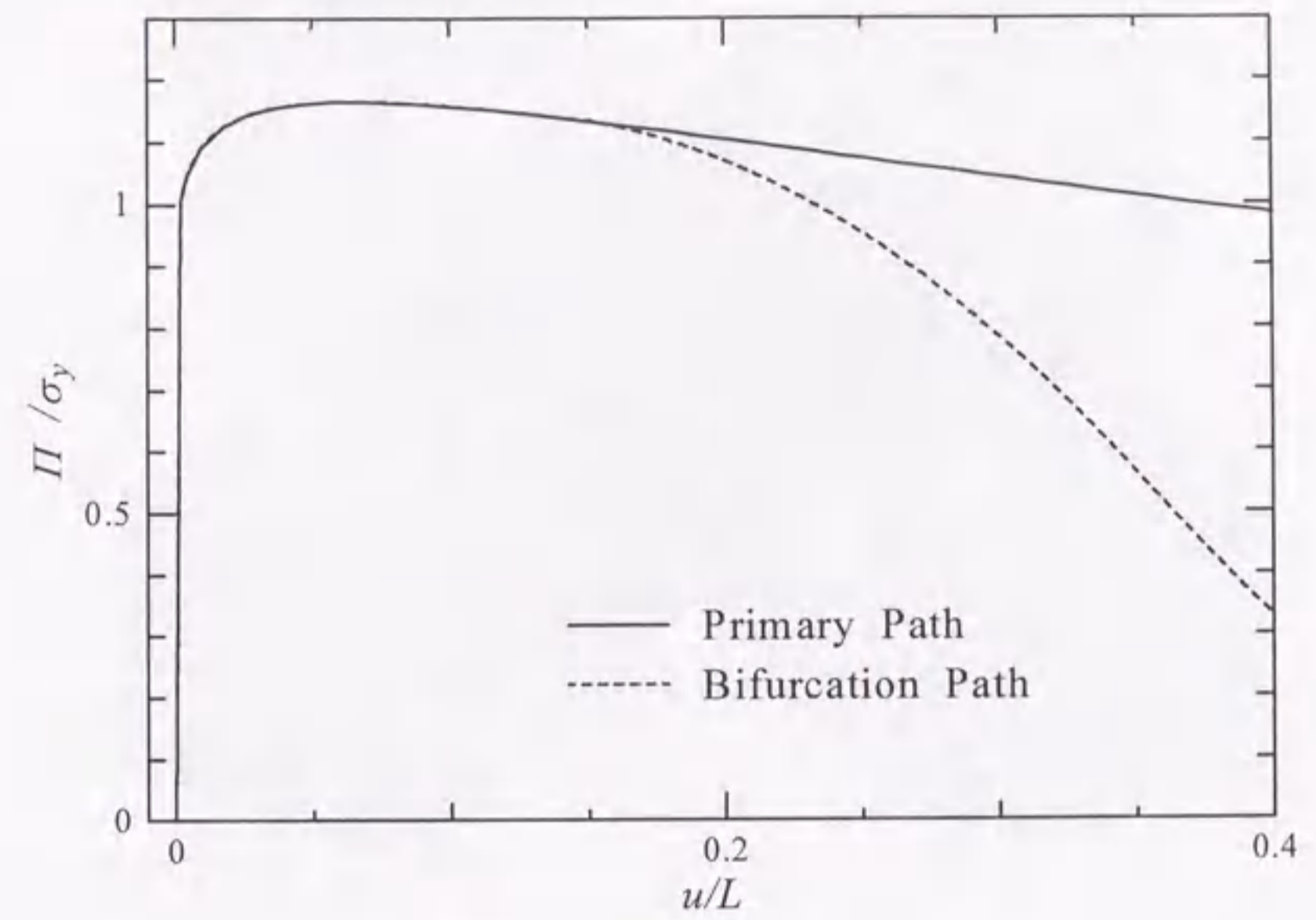


図 7.48 モデル H のつり合い経路

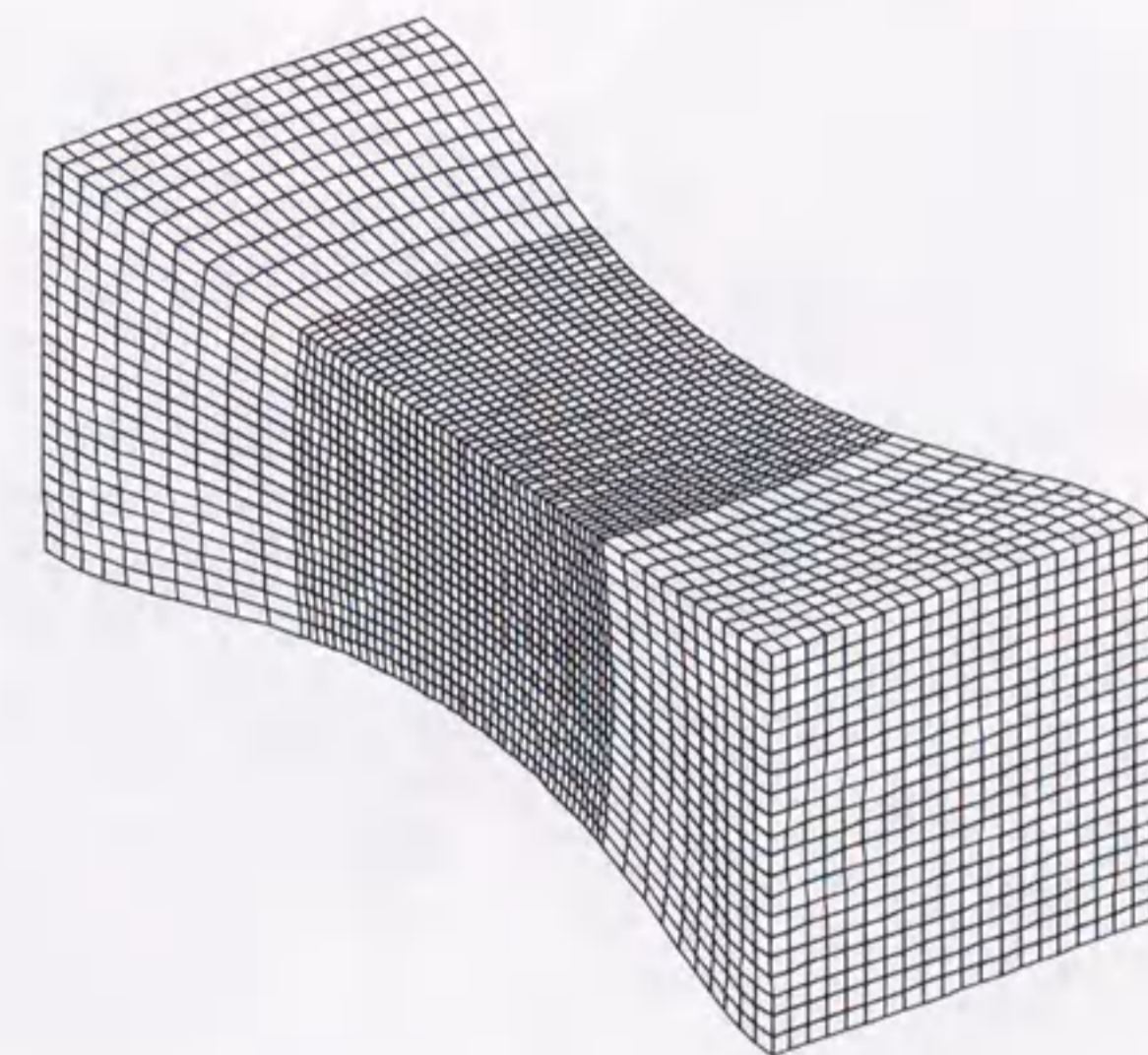
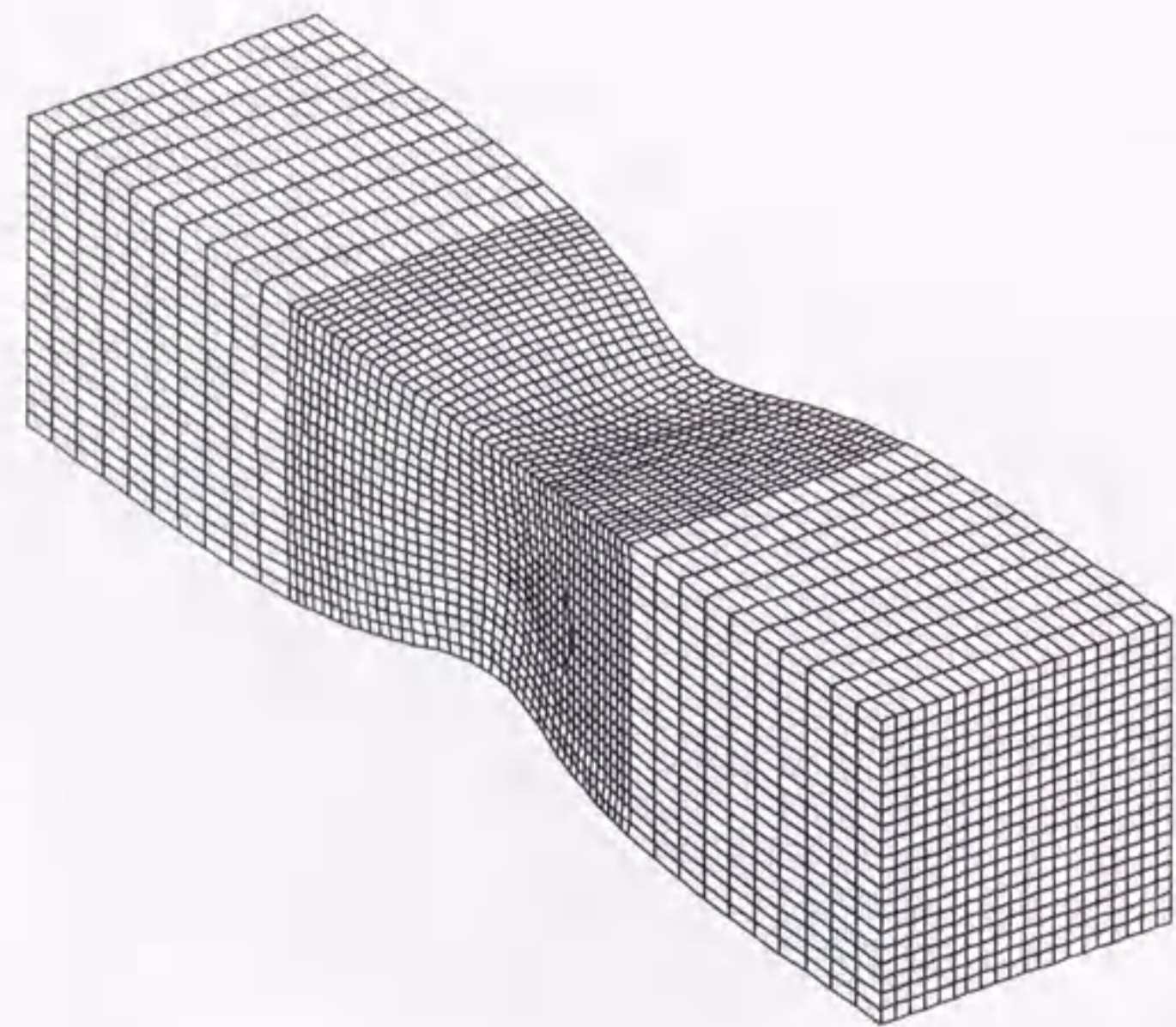
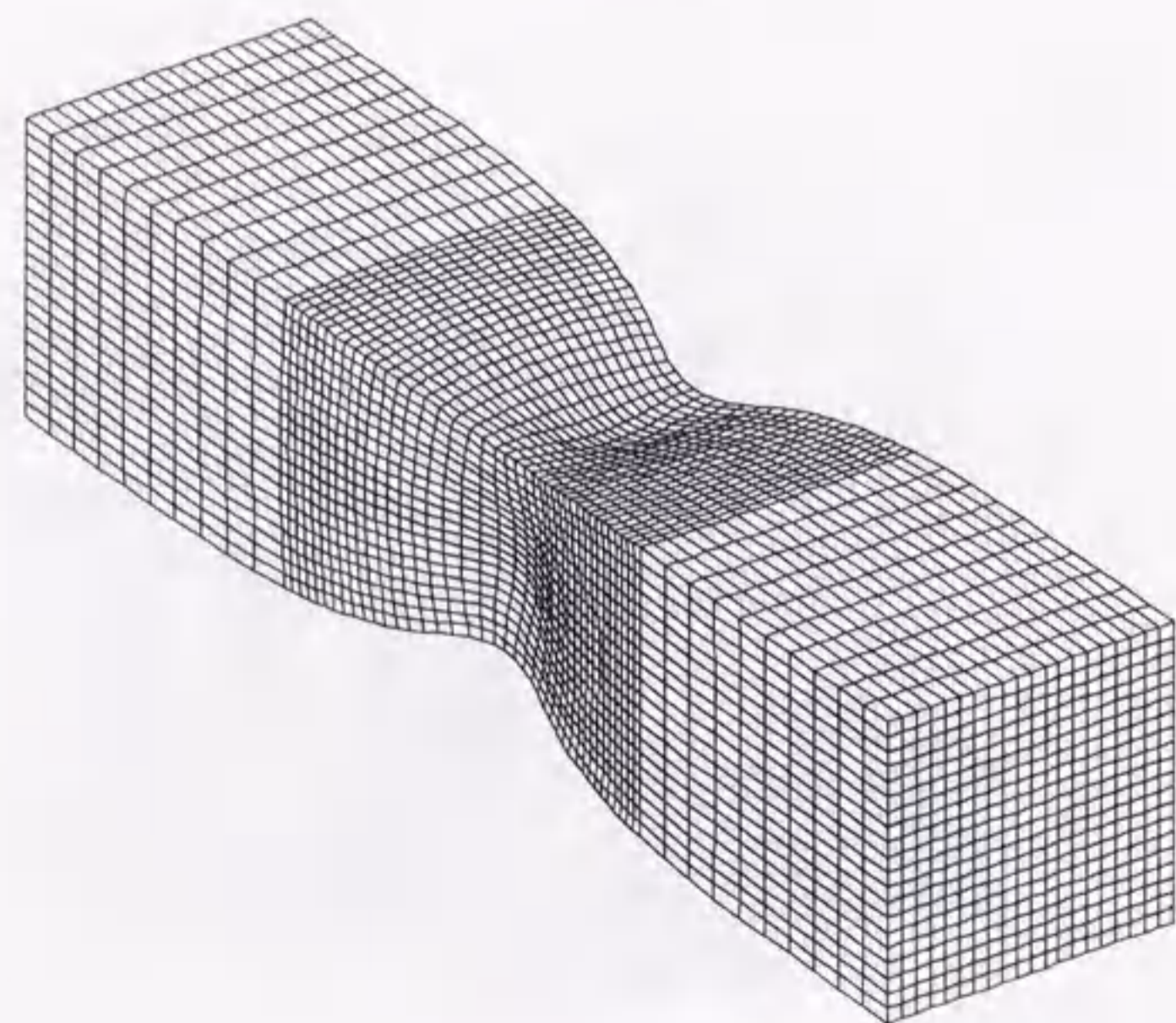


図 7.49 モデル H における Scaled Corrector



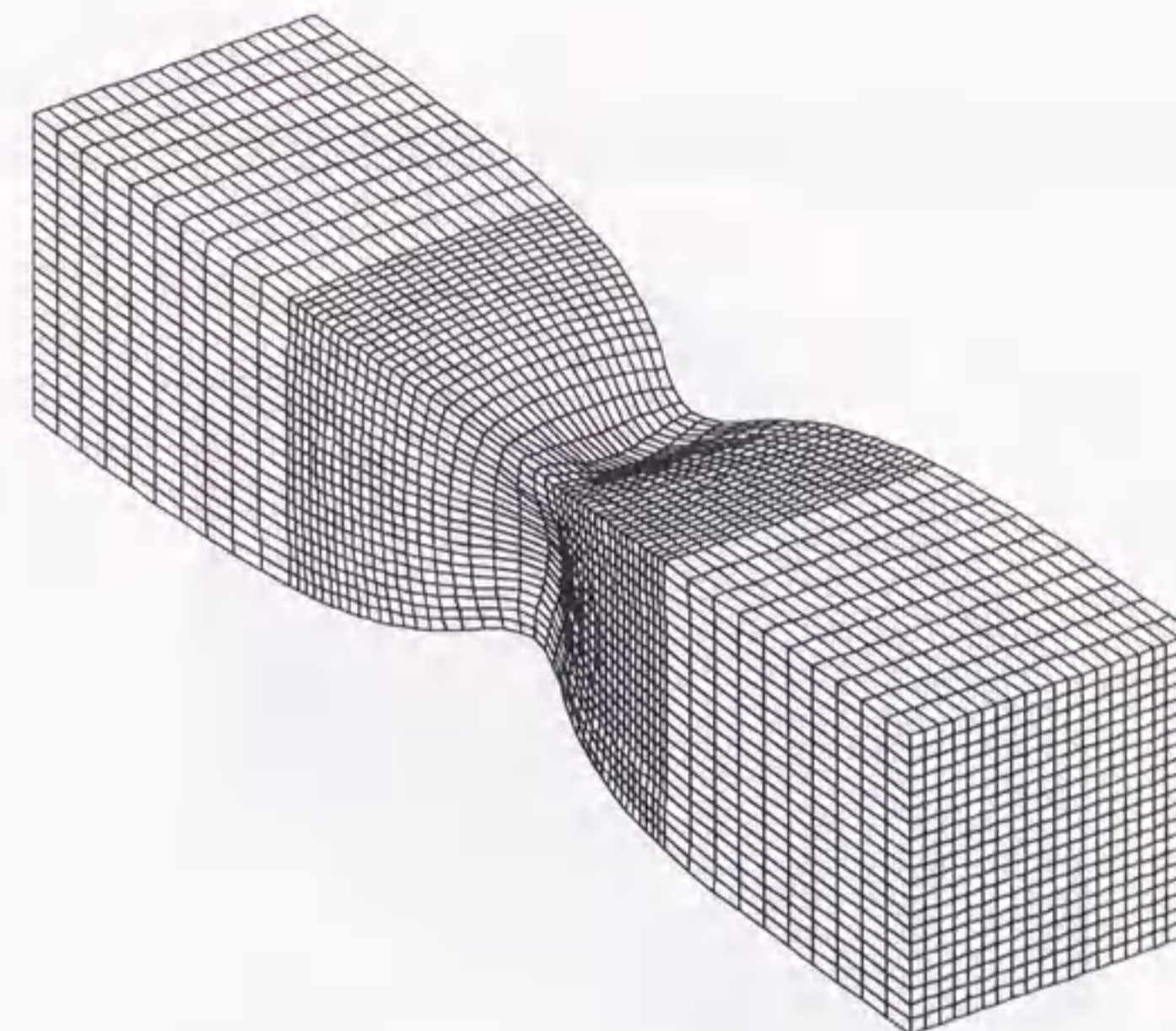


$u/L=0.3$

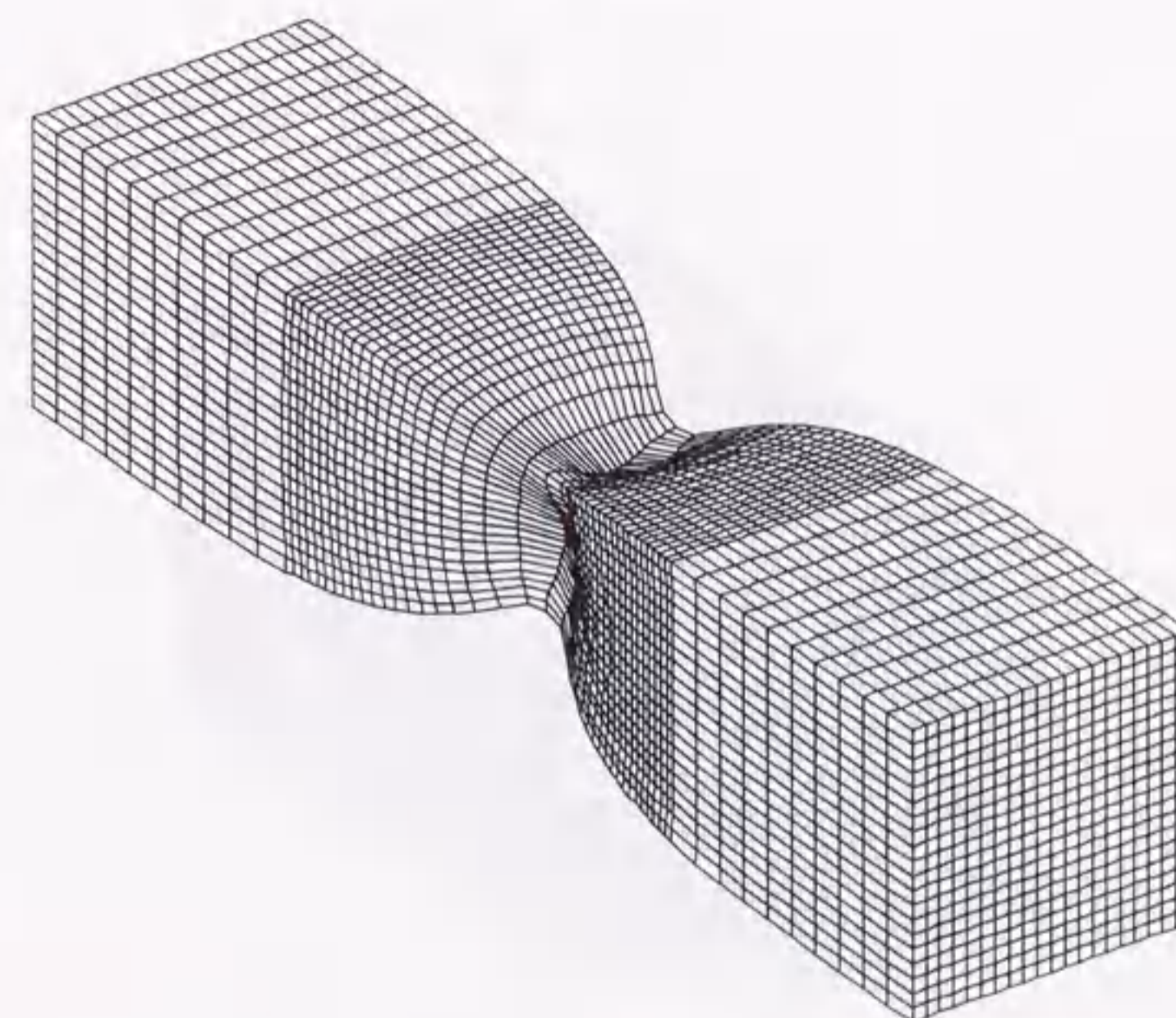


$u/L=0.333$

図 7.50 モデル H の分岐経路上での変形図



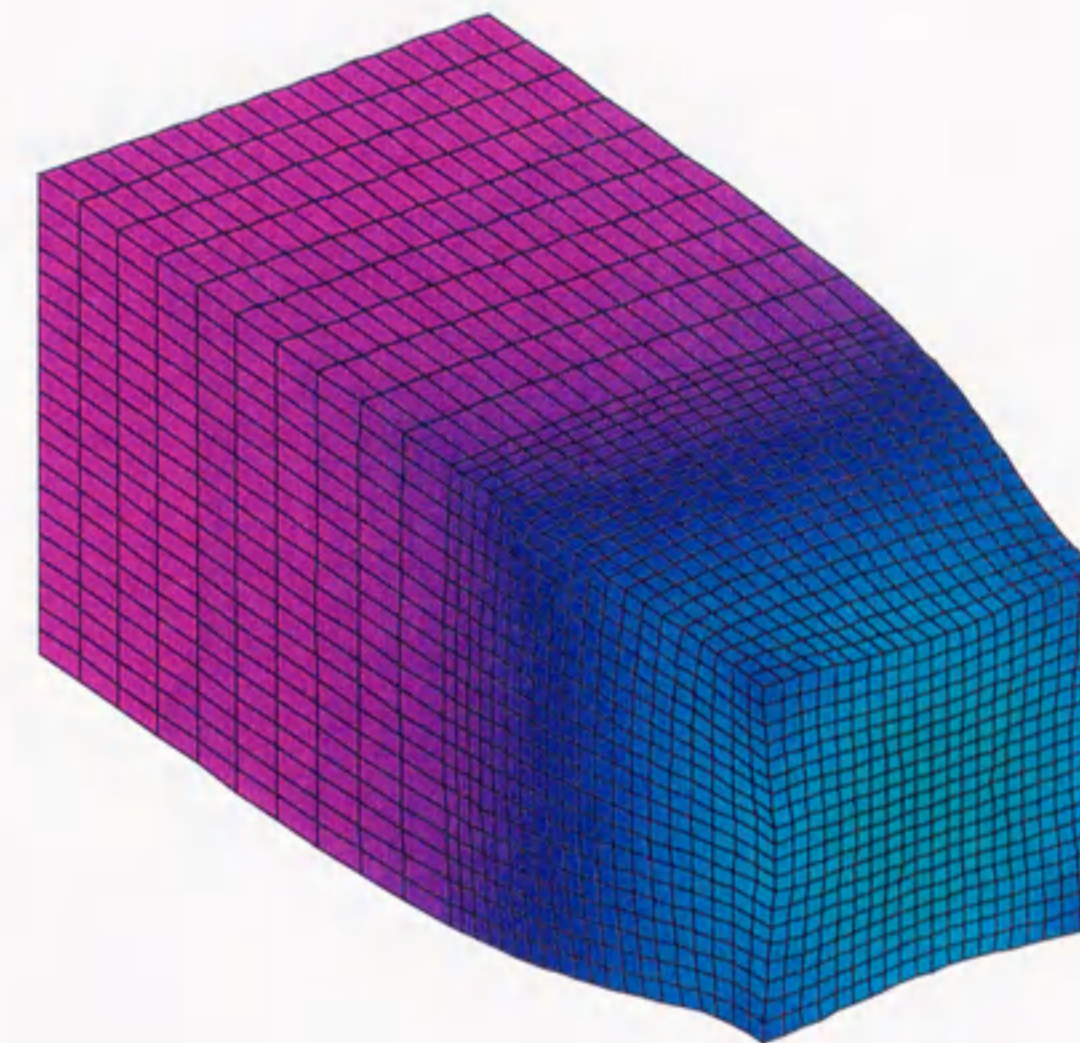
$u/L=0.367$



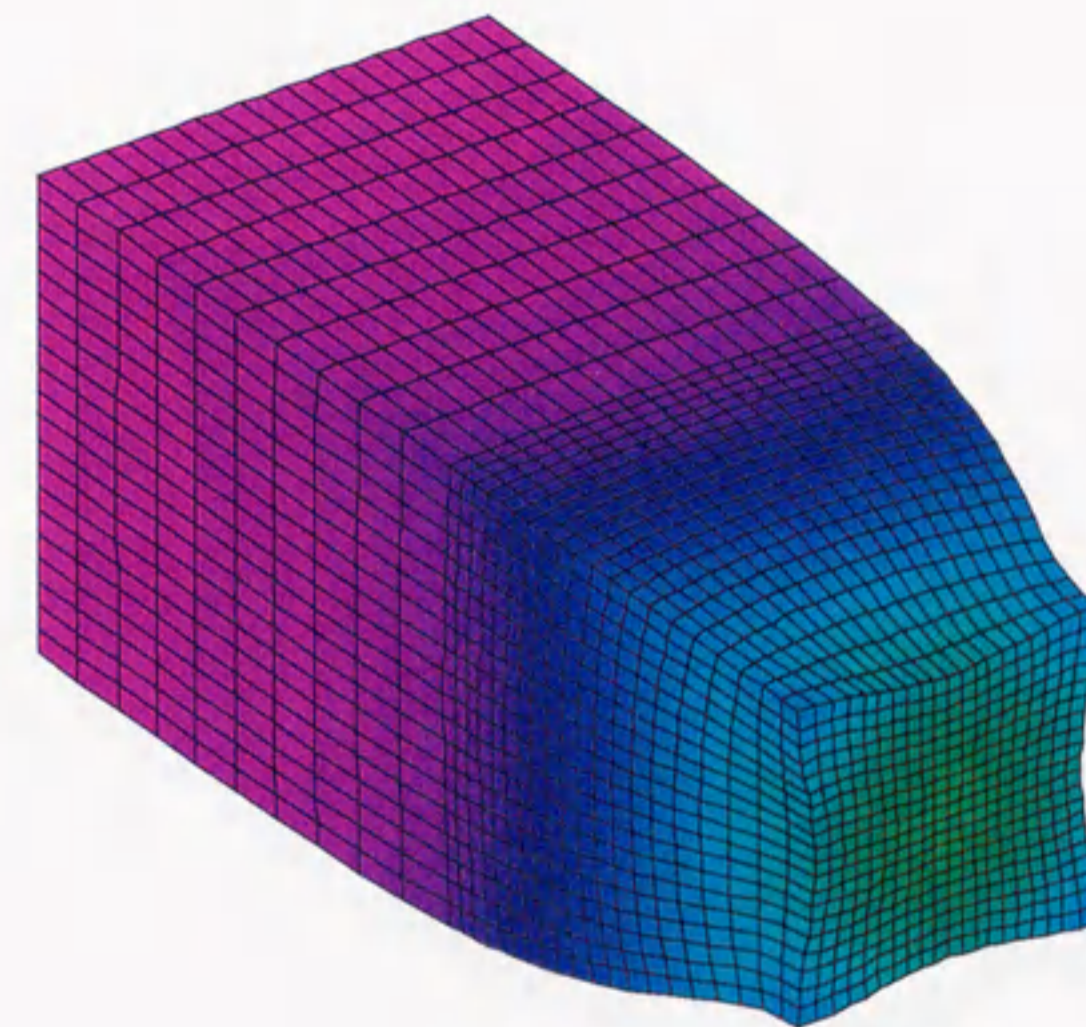
$u/L=0.4$

図 7.50 モデル H の分岐経路上での変形図





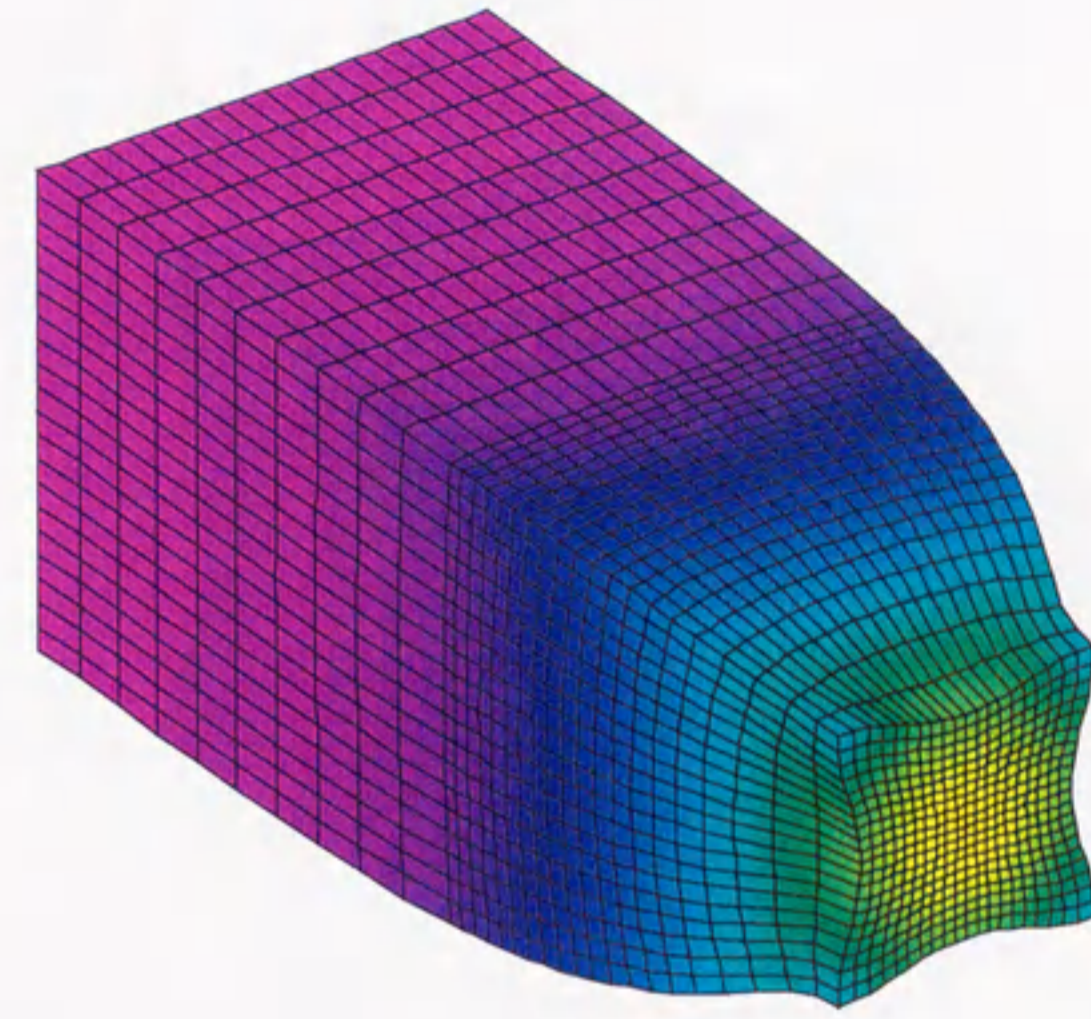
$u/L = 0.3$



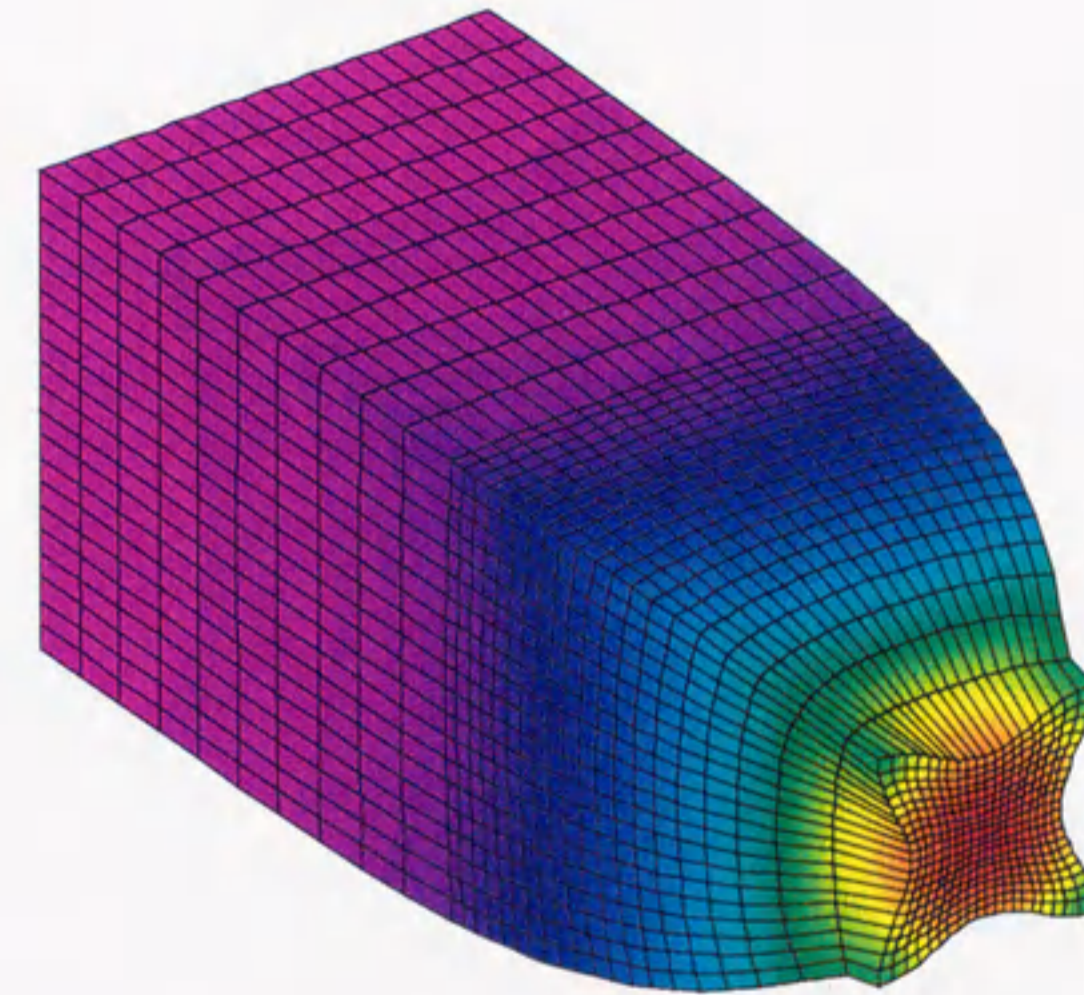
$u/L = 0.333$

図 7.51 モデル H の分岐経路上での相当塑性ひずみ分布図





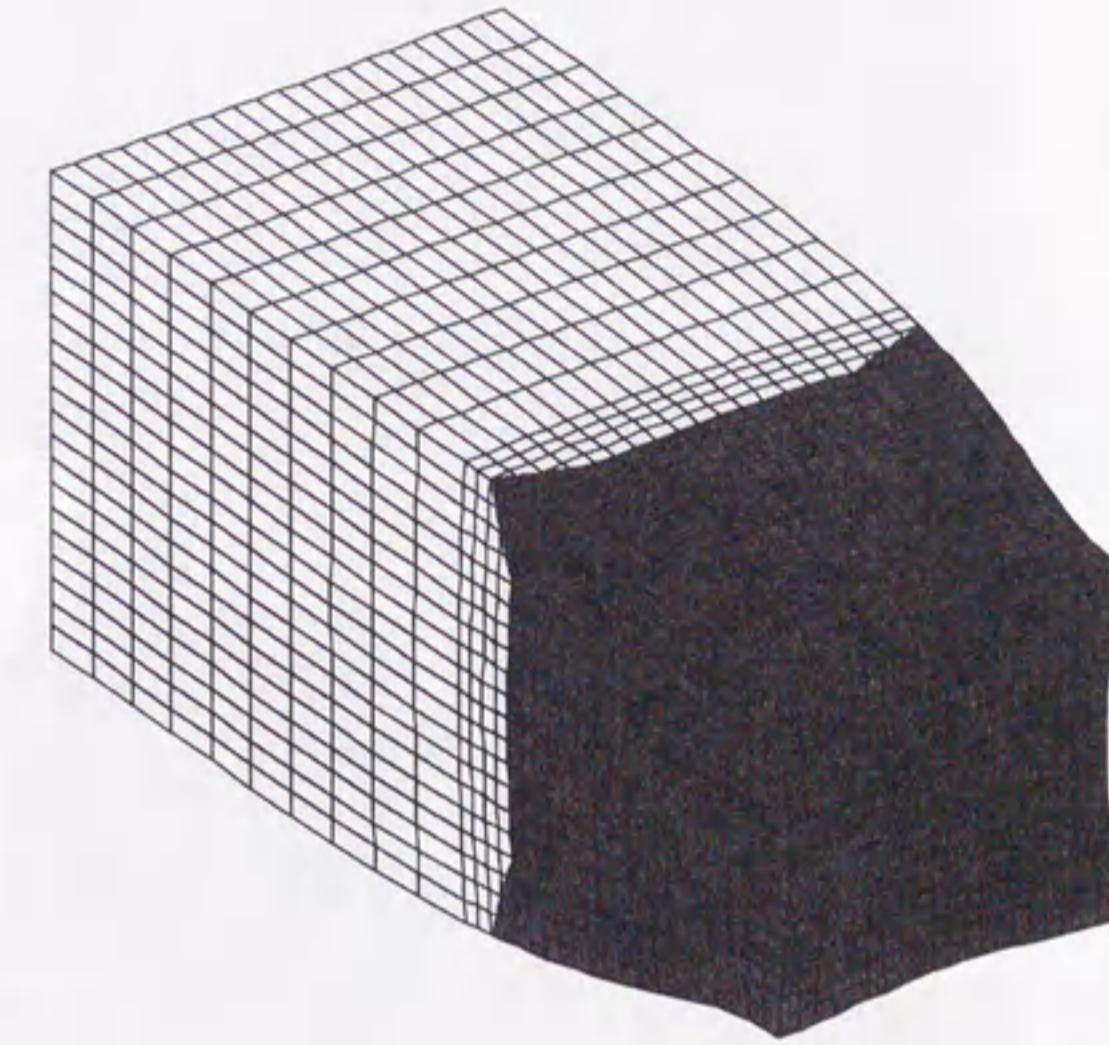
$u/L = 0.367$



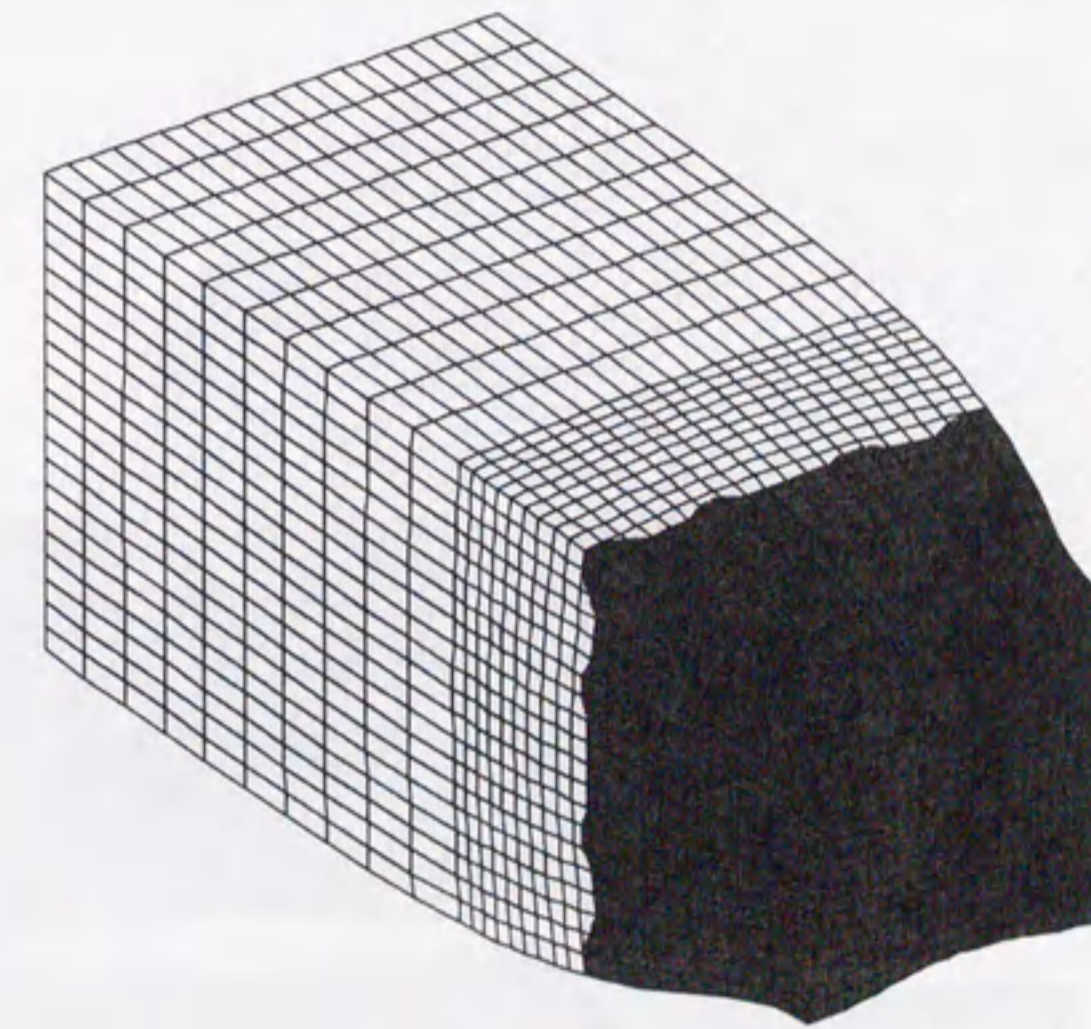
$u/L = 0.4$

図 7.51 モデル H の分岐経路上での相当塑性ひずみ分布図





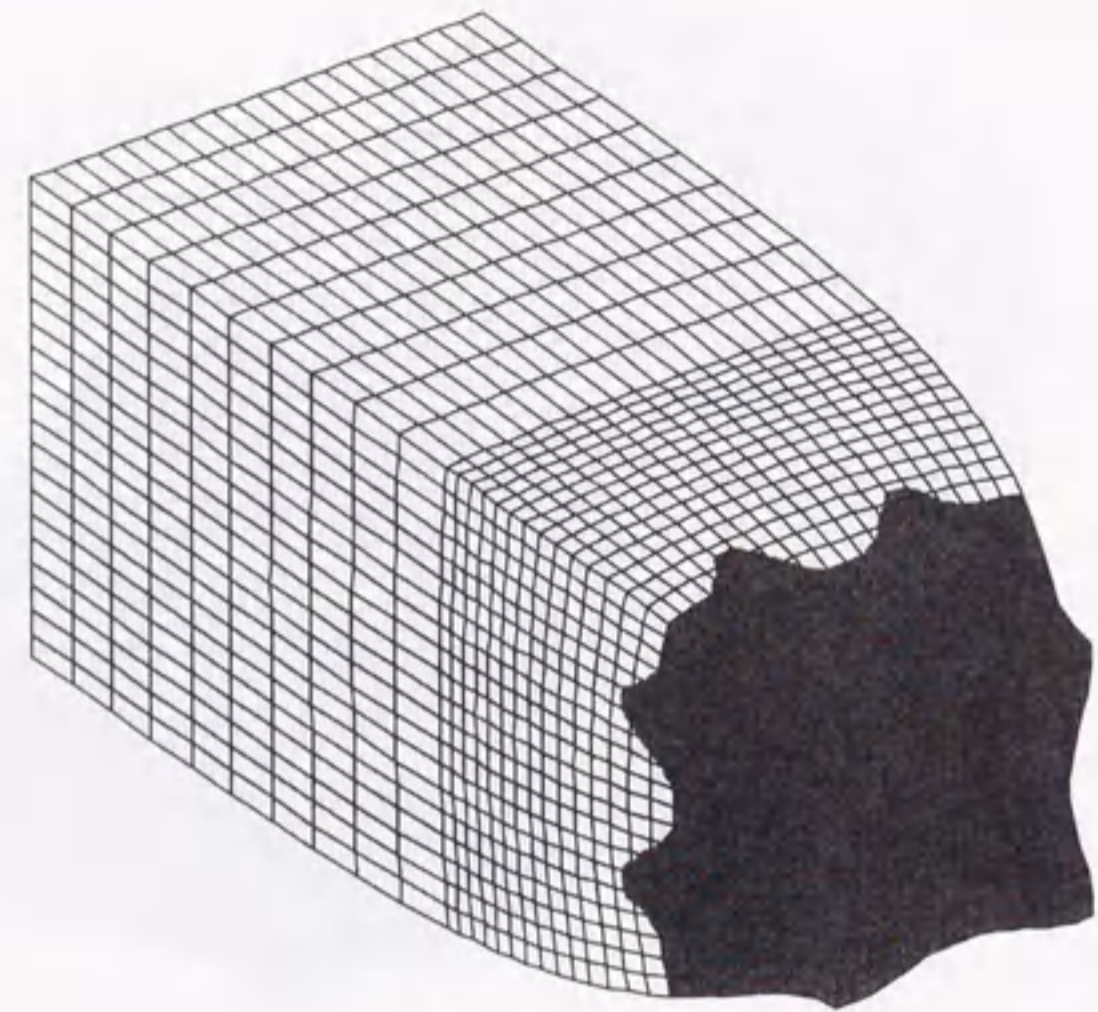
$u/L = 0.3$



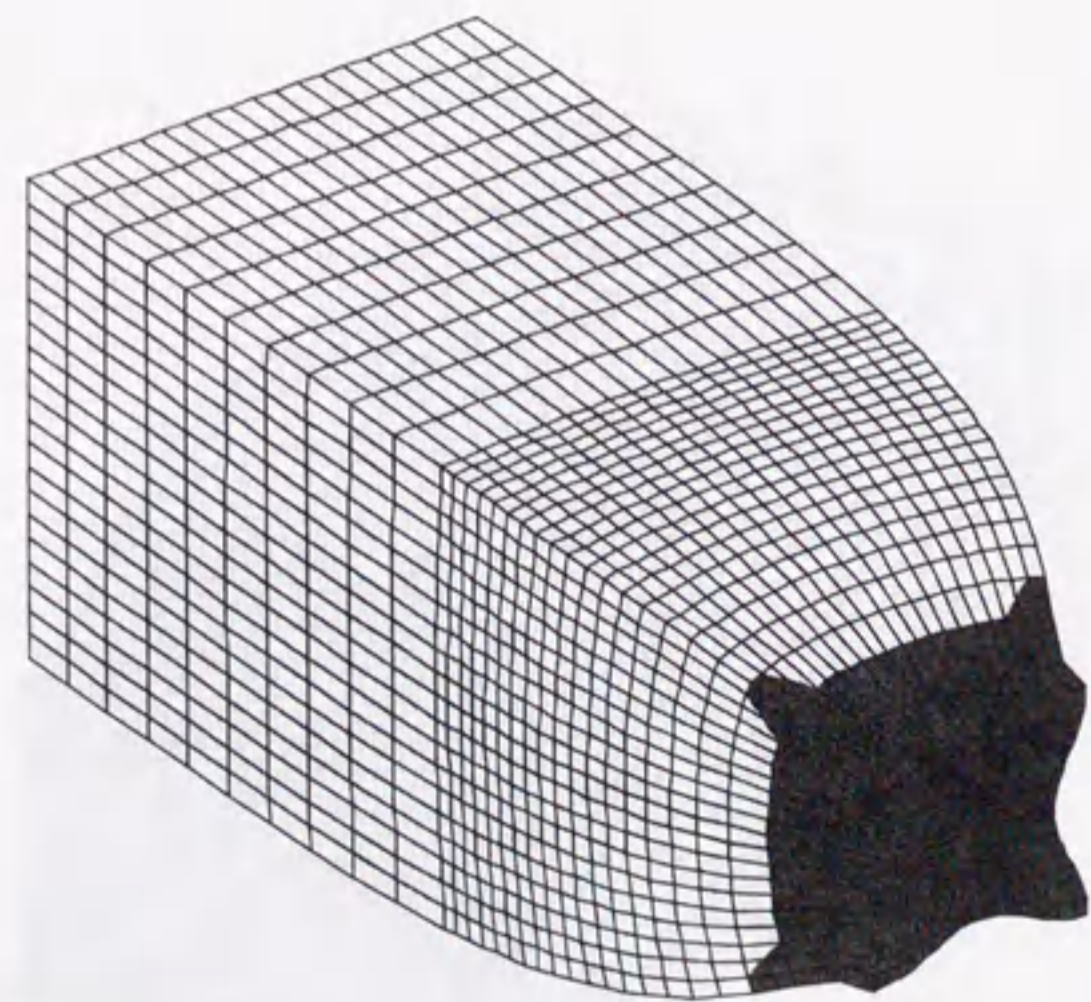
$u/L = 0.333$

図 7.52 モデル H の分岐経路上での負荷・除荷領域 (負荷:黒 除荷:白)





$u/L = 0.367$



$u/L = 0.4$

図 7.52 モデル H の分岐経路上での負荷・除荷領域 (負荷:黒 除荷:白)

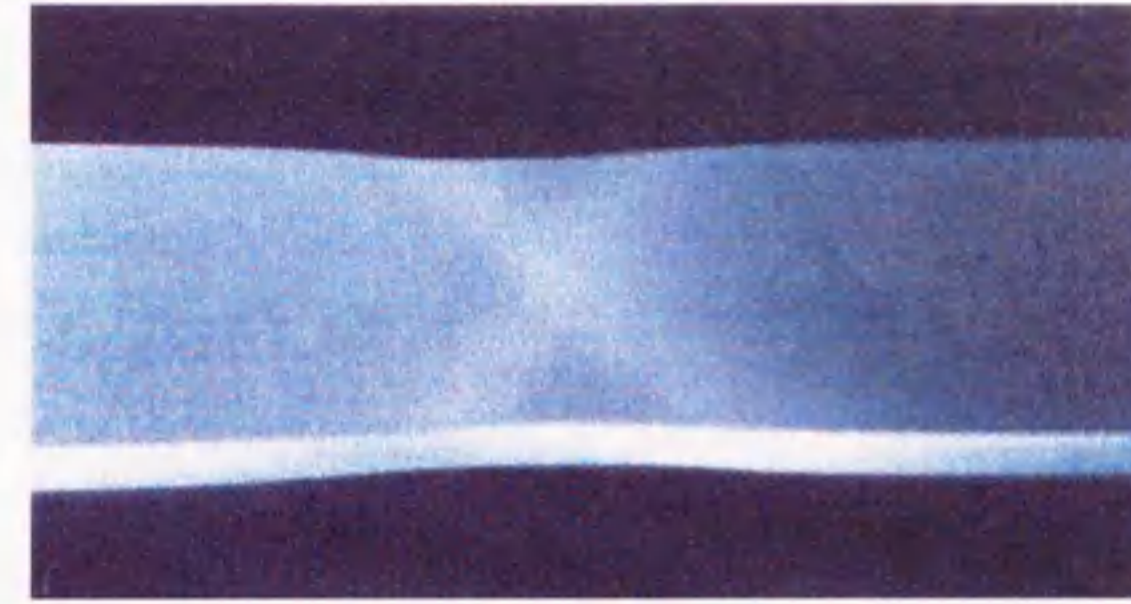


写真 7.1 ×状のせん断帯 (モデル B と同じ幅厚比の鋼材の場合)

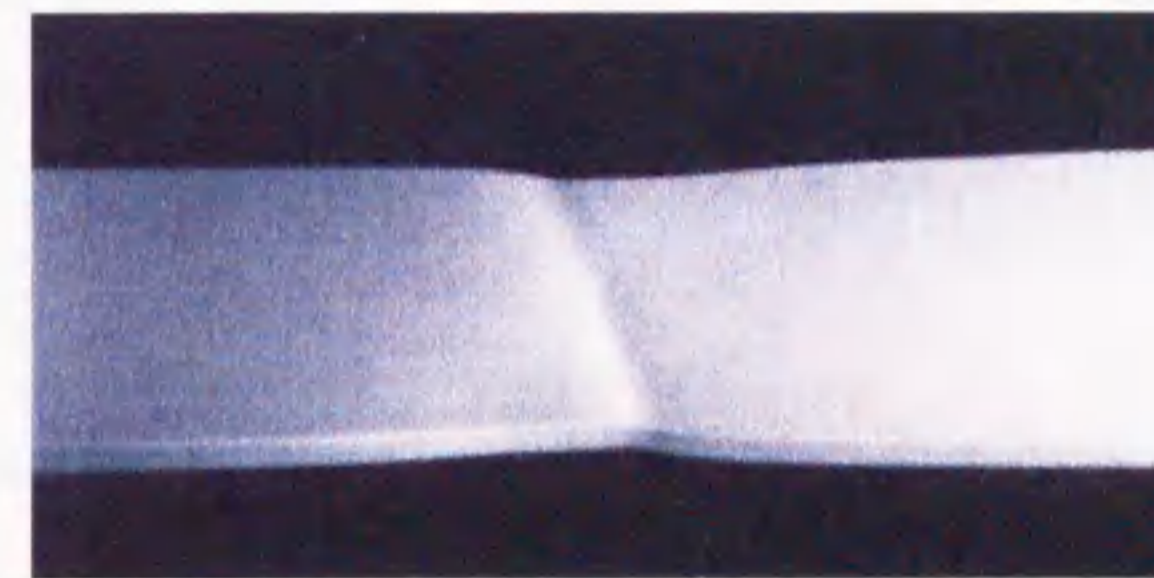


写真 7.2 破断直前の状態 (モデル B と同じ幅厚比の鋼材の場合)

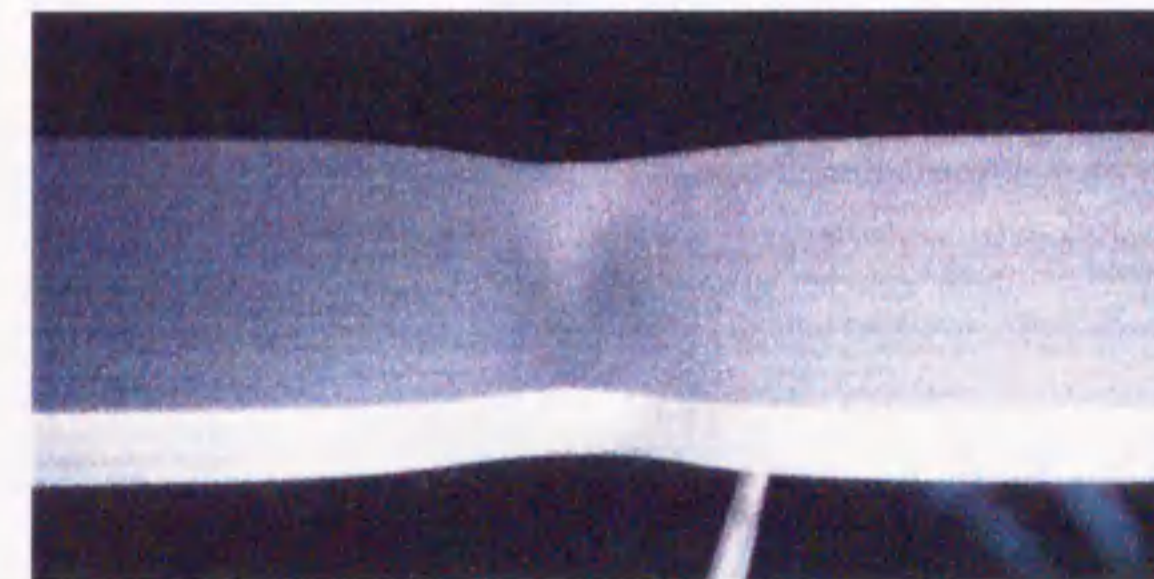


写真 7.3 破断直前の状態 (モデル E と同じ幅厚比の鋼材の場合)



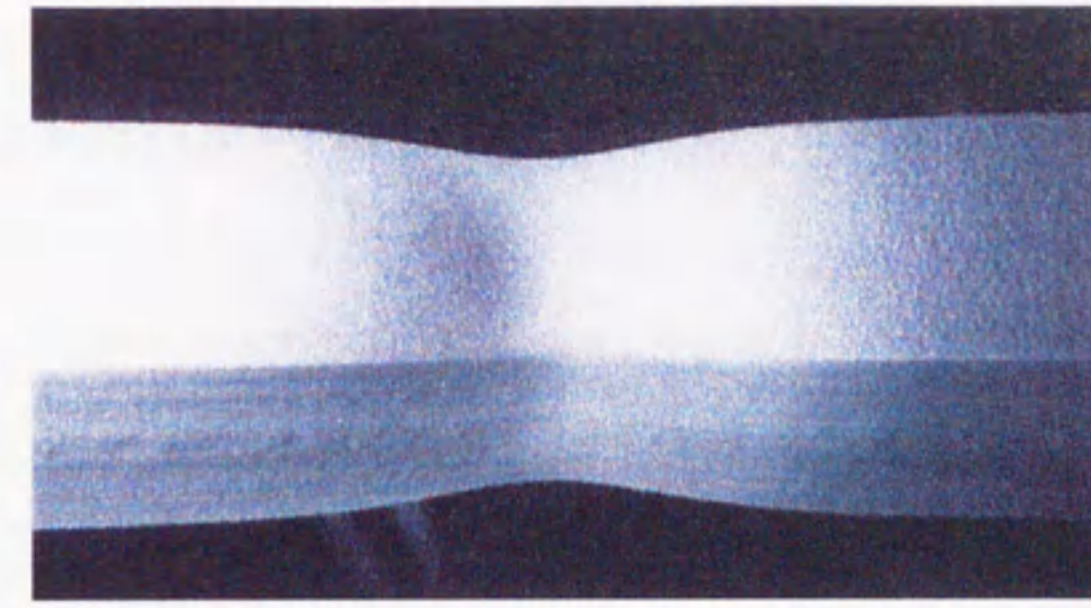


写真 7.4 破断直前の状態(モデル G と同じ幅厚比の鋼材の場合)

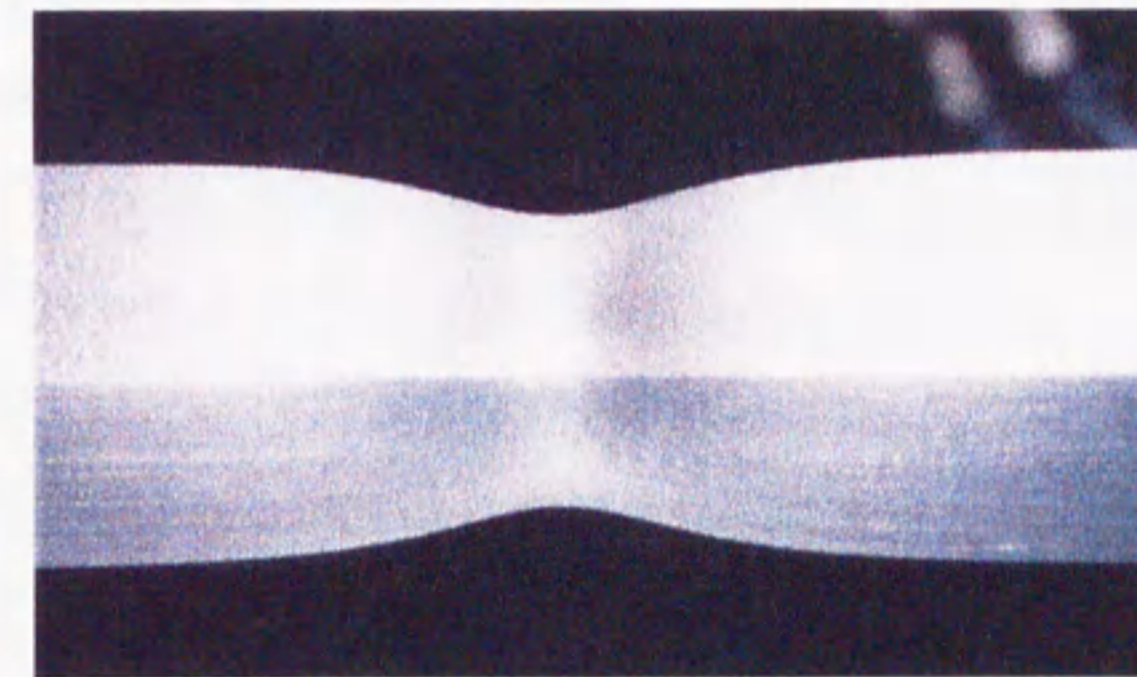


写真 7.5 破断直前の状態(モデル H と同じ幅厚比の鋼材の場合)



#### 7.4 結語

本章では Scaled Corrector を用いた有限要素分岐解析により、2次元及び3次元状態における塑性不安定解析を行った。弾塑性構成方程式としては金属材料において通常よく用いられる硬化型の  $J_2$  流れ則を用いている。Scaled Corrector を用いることによって固有値解析を行うことなく分岐問題としての塑性不安定解析が可能となる。この Scaled Corrector は2次元及び3次元状態のすべての計算において拡散くびれモードを示している。ゆえに荷重極大点後に発生する分岐現象はすべて拡散くびれである。主経路においては変形や応力状態等すべての力学的挙動は、試験片全体に渡って均一である。よって主経路でのすべてのサンプリング点は負荷状態であり、この分岐でのみ除荷が発生する。そして1度その分岐経路に切り換えた後は2度目の分岐は発生しないことが今回の計算によって確認された。

以下に2次元及び3次元状態での解析結果の要点、そして塑性不安定現象の結論をまとめる。また変形の対称性を考慮しない、モデル全体での計算は今後の課題である。

2次元解析結果の要点として、

1. 平面ひずみ状態では拡散くびれは発生するが、その後の金属試験片の破断の原因となるようなせん断帯や局所くびれなどの終局的挙動は発生しない。
2. 平面応力状態では拡散くびれ後に、それによって引き起こされた除荷領域によって×状の塑性領域が挟まれる。そしてその塑性領域に変形が局所化することによって、せん断帯が形成される。

そして3次元解析については、

3. 荷重極大点直後に分岐現象として拡散くびれが発生し、その後の除荷の進展具合により終局的な破壊モードが決定される。
4. 終局的な破壊モードとしては、幅厚比が大きな薄い金属試験片はせん断帯、厚肉の試験片では局所くびれが発生する。そして同じサイズの試験片である場合、せん断帯の幅は板厚に比例する。

以上より塑性不安定現象としては、次のような結論を出すことができる。



5. これまで、金属材料としては一般的な構成方程式である硬化型の  $J_2$  流れ則を用いた場合には、拡散くびれ以降の金属試験片の破断に直接的に結びつく、局所くびれやせん断帯はシミュレートできないとされてきた。しかしながら、3次元解析を行えば変形理論による特別な構成方程式や軟化型構成方程式を用いなくても、局所くびれやせん断帯のシミュレートが可能である。さらにこれらの計算結果は鋼材の引張実験による実際の塑性不安定挙動によく一致していることを確認した。
6. 拡散くびれから、局所くびれもしくはせん断帯の一連の塑性不安定現象は、荷重極大点直後の分岐経路にアクセスしてその経路を追跡するだけでシミュレートできる。つまり、局所くびれやせん断帯などの直接的に破断に結びつく終局的挙動も、荷重極大点直後の分岐点が引き金となって発生する。ゆえにこれらの局所くびれやせん断帯も分岐現象として認識することが可能であり、分岐後の挙動の初期段階が拡散くびれで、その後の同じ分岐経路上での挙動が局所くびれやせん断帯である。

## 第8章

### 結論



本研究における目的は、特殊な構成方程式には一切頼らずに金属材料の弾塑性構成方程式として一般的な硬化型の  $J_2$  流れ則のみを用いて、分岐解析だけで塑性不安定現象の終局的挙動にどこまで近づけるかを検証することであった。その目的を達成するために、まず大ひずみ大ひずみの弾塑性有限要素解析手法について述べた。そして塑性不安定解析を実行するための弾塑性分岐条件及び効率的な分岐解析法を提案するとともに、2次元及び3次元塑性不安定解析を行った。以下に各章で得られた要点をまとめて、本論文の結論とする。

第2章では Updated Lagrangian 法による有限要素法の定式化を行った。第2 Piola-Kirchhoff 応力テンソルと Green-Lagrange ひずみテンソルによる仮想仕事の原理から出発して、仮想仕事の増分分解式を得た後にさらにそれを線形化することによって接線剛性方程式を誘導した。そして形状関数を用いることによって離散化された接線剛性方程式を示した。また本研究で用いるアイソパラメトリック要素と volumetric ロッキングを避けるための選択型低減積分法についても概説した。

第3章では弾塑性構成方程式について述べた。まず微小ひずみ状態で、von Mises の降伏関数を塑性ポテンシャルとした Prandtl-Reuss の式について概説した。また大ひずみの取り扱いについて必要不可欠な客観応力速度を何種類か定義すると同時に、その客観性の証明を行った。そして何種類かの客観応力速度のうち、相対 Kirchhoff 応力の Jaumann 速度による  $J_2$  流れ則を用いれば、大ひずみ問題の弾塑性有限要素解析において対称な接線剛性マトリクスが得られることを示した。

第4章では非線形有限要素解析における、つり合い経路の追跡法について述べた。非線形なつり合い経路を追跡する際に、本章で提案した追跡方向の決定法と共に弧長制御法を用いれば、どのような曲率を有する非線形経路でも後戻りすることなく追跡が可能である。また、応力積分に関しては、大ひずみ問題での前進型としての陽解法と後退型としての陰解法それぞれについてその具体的な手法を示した。

第5章では非線形有限要素法における弾塑性分岐条件について検討した。ここでは弾塑性分岐条件として広く用いられている Hill の分岐条件式は、第2章における Updated Lagrangian 法で得られた接線剛性マトリクスから除荷の可能性を排除した場合に、それが

特異マトリクスとなる条件と全く等価であることを示した。ゆえに Hill の分岐条件式を用いなくても、通常の接線剛性マトリクスのみで弾塑性分岐点の評価が可能である。

また、この場合には除荷の可能性を排除しているのであるから、その特異性は弾性問題のそれと同じように振る舞う。よって弾性問題における分岐解析と同様な以下のような説明が弾塑性分岐解析においても成り立つ。まず接線剛性マトリクスの負の固有値の有無により系の安定性を評価でき、その限界点では接線剛性マトリクスが特異マトリクスとなり少なくとも1つのゼロ固有値が発生する。そしてその特異点は分岐点と荷重極限点とに分類され、クリティカルな固有ベクトルと荷重モードベクトルとが直交する時が分岐点で、そうでない時が荷重極限点である。

第6章では第5章の弾塑性分岐条件を踏まえて、分岐問題としての塑性不安定解析を可能とするための弾塑性分岐解析手法を提案した。本章における Scaled Corrector を用いることによって、分岐解析において必要不可欠なクリティカルな固有ベクトルの近似値を、固有値解析を行うことなく求めることができることを示した。これは先に野口ら[N7][N8]によって発表されているものとは全く違った観点から理論展開を試みたものである。また有限要素分岐解析においてはこのクリティカルな固有ベクトルのスケールリングが常に問題となるが、弾塑性分岐解析においてはこのスケールリングは理論上一意に決定される。本章ではこのスケールリングパラメーターの具体的な決定方法についても述べている。

第7章では前章までの計算手法を用いて、2次元及び3次元状態における塑性不安定解析を行った。これまで金属材料の構成方程式としては一般的な硬化型の  $J_2$  流れ則では、拡散くびれ以降の金属試験片の破断に直接的に結びつくような、局所くびれやせん断帯はシミュレートできないとされてきた。しかし、3次元解析を行えば変形理論による特殊な構成方程式や軟化型構成方程式を用いなくても、硬化型の  $J_2$  流れ則で局所くびれやせん断帯などの塑性不安定現象の終局的な挙動がシミュレートできることを明らかにした。そして本研究での計算結果と実験結果がよく一致していることも同時に示した。

初期段階の拡散くびれから終局的な局所くびれもしくはせん断帯への一連の塑性不安定現象は、荷重極大点直後の分岐経路に1度アクセスして、その経路を追跡するだけでシミュレートできる。ここでの分岐モードは拡散くびれを示すものであり、その分岐によって引き起こされる除荷の進展具合によって局所くびれやせん断帯が発生する。拡散くびれの変形を示す分岐が1度発生した後は2度目の分岐は発生しないものの、拡散くびれの分岐がそ



の発端になっているという観点からすると、拡散くびれから局所くびれやせん断帯などの終局的挙動は一連の分岐現象として認識することが可能である。

ゆえに硬化型の  $J_2$  流れ則を用いた場合でも、拡散くびれだけでなく金属試験片破断までの終局的な塑性不安定現象が分岐現象としてシミュレート可能であると結論づけることができる。しかしながらそのためには3次元解析が必要不可欠である。

以上より、本研究の目的は果せたと考える。今後は本研究で扱ったような塑性不安定現象だけでなく、より一般的な弾塑性分岐解析を行うことが課題となる。

## 参考文献

- [B1] Bath, K.J., Ramm, E. and Wilson, E.L.  
Finite Element Formulation for Large Deformation Dynamic Analysis,  
*Int. J. Numerical Methods in Engineering*, 9, pp.353-386, 1975.
- [B2] Belytschko, T., Tsay, C.S. and Liu, W.K.  
A Stabilization Matrix for the Bilinear Mindlin Plate Element,  
*Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 29, pp.313-327, 1981.
- [B3] Belytschko, T. and Tsay, C.S.  
A Stabilization Procedure for the Quadrilateral Plate Element with One-Point Quadrature, *Int. J. Numerical Methods in Engineering*, 19, pp.405-419, 1983.
- [B4] Bathe, K.J.  
*Finite Element Procedures*,  
Prentice Hall, pp.1-1037, 1996.
- [B5] Bonet, J. and Wood, R.D.  
*Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis*,  
Cambridge University Press, pp.1-248, 1997.
- [B6] Bergan, P.G., Horrigmoe, G., Krakeland, B. and Soreide, T.H.  
Solution Techniques for Non-Linear Finite Element Problems,  
*Int. J. Numerical Methods in Engineering*, 12, pp.1677-1696, 1978.
- [B7] Britvec, S.J.  
*The Stability of Elastic Systems*,  
Pergamon Unified Engineering Series, 1973.
- [B8] Borst, R. and Giessen, E.  
*Material Instabilities in Solids*,  
John Wiley & Sons, pp.1-556, 1998.
- [B9] Burke, M.A. and Nix, W.D.  
A Numerical Study of Necking in the Plane Tension Test,  
*Int. J. Solids. Structures*, 15, pp.379-393, 1979.
- [B10] Budiansky, B.  
A Reassessment of Deformation Theories of Plasticity,  
*J. Appl. Mech.*, ASME, 26, pp.259-264, 1959.
- [C1] Crisfield, M.A.  
*Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures, Volume 1 Essentials*,  
John Wiley & Sons, pp.1-345, 1991.
- [C2] Crisfield, M.A.  
*Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures, Volume 2 Advanced Topics*,  
John Wiley & Sons, pp.1-494, 1997.



- [C3] Crisfield, M.A.  
A Fast Incremental Iterative Solution Procedure That Handles Snapthrough,  
*Computers & Structures*, 13, pp.55-62, 1981.
- [C4] Chan, S.L.  
Geometric and Material Nonlinear Analysis of Beam-Column and Frames using the Minimum Residual Displacement Method, *Int. J. Numerical Methods in Engineering*, 26, pp.2657-2669, 1988.
- [C5] Crisfield, M.A. and Shi, J.  
A Review of Solution Procedures and Path-following Techniques in Related to the Non-linear Finite Element Analysis of Structures,  
*Nonlinear Computational Mechanics : State of the art*,  
edited by Wriggers, P. and Wagner, W., Springer-Verlag, Berlin, pp.47-68, 1992.
- [C6] Choong, K.K.  
*Solution Strategy for Bifurcation Analysis of Geometrically Nonlinear Structures and Structures on Elastic Medium*,  
University of Tokyo, Dr. Thesis, pp.1-183, 1993.
- [C7] Crisfield, M.A. and Wills, J.  
Solution Strategies and Softening Materials,  
*Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 66, pp.267-289, 1988.
- [C8] Christoffersen, J. and Hutchinson, J.W.  
A Class of Phenomenological Corner Theories of Plasticity,  
*J. Mech. Phys. Solids*, 25, pp.465-487, 1979.
- [E1] Eterovic, A.L. and Bathe K-J.  
A Hyperelastic-Based Large Strain Elasto-Plastic Constitutive Formulation with Combined Isotropic-Kinematic Hardening Using the Logarithmic Stress,  
*Int. J. Numerical Methods in Engineering*, 30, pp.1099-1114, 1990.
- [F1] Feng, Y.T., Peric, D. and Owen D.R.  
A New Criterion for Determination of Initial Loading Parameter in Arc-Length Methods, *Computers & Structures*, 58, pp.479-485, 1996.
- [F2] Fried, I.  
Orthogonal Trajectory Accession to the Nonlinear Equilibrium Curve,  
*Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 47, pp.283-297, 1984.
- [F3] Fujii, F., Perez, B.C. and Choong, K.K.  
Selection of the Control Parameter in Displacement Incrementation,  
*Computers & Structures*, 42, pp.167-174, 1992.
- [F4] Fujii, F. and Usuda, Y.  
Stiffness Formulation of Planar Kinematics,  
*J. of Engineering Mechanics*, ASCE, 117, pp.694-699, 1991.

- [F5] Fujii, F.  
Scheme for Elasticas with Snap-Back and Looping,  
*J. of Engineering Mechanics*, ASCE, 115, pp.2166-2181, 1989.
- [F6] 藤井文夫, 岡澤重信  
剛性行列の固有ペアの数理と特異剛性行列を係数行列に持つ連立方程式の解法,  
構造工学論文集, 43A, pp.299-310, 1997.
- [F7] Fujii, F. and Okazawa, S.  
Pinpointing Bifurcation Points and Branch-Switching,  
*J. of Engineering Mechanics*, ASCE, 123, pp.179-189, 1997.
- [F8] Fujii, F. and Okazawa, S.  
Bypass, Homotopy Path and Local Iteration to Compute the Stability Point,  
*Structural Engineering and Mechanics*, 5, Special Issue on Selected Papers Presented at the third Asian-Pacific Conference on Computational Mechanics, pp.577-586, 1997.
- [F9] 藤井文夫, 岡澤重信  
構造系の弾性有限変位・分岐問題における大域的非線形解法,  
日本機械学会論文集(A編), 62, pp.48-55, 1996.
- [F10] 藤井文夫, 池田清宏, 岡澤重信  
剛性行列のブロック対角化原理を用いた対称性に起因する多重分岐点の反復精算法, 構造工学論文集, 43A, pp.321-332, 1997.
- [F11] Fujii, F.  
Bifurcation and Path-Switching in Nonlinear Elasticity,  
Invited Lecture, *3<sup>rd</sup> World Congress on Computational Mechanics, Extended Abstract*,  
Makuhari/Japan, pp.1246-1247, 1994.
- [F12] Fujii, F. and Ramm, E.  
Computational Bifurcation Theory —Path-Tracing, Pinpointing and Path-Switching—,  
Invited Lecture, *Proceedings of International Conference on Stability of Structures*,  
Coimbatore/India, pp.177-191, 1995.
- [F13] Fujii, F. and Choong, K.K.  
Branch Switching in Bifurcation of Structures,  
*J. of Engineering Mechanics*, ASCE, 118, pp.1578-1596, 1992.
- [G1] 後藤 学  
実践 有限要素法 —大変形弾塑性解析—,  
コロナ, pp.1-148, 1995.
- [G2] Goto, Y. and Suzuki, S.  
Analysis of Critical Behavior of Semi-Rigid Frames with or without Load History in Connections, *Int. J. Solids. Structures*, 27, pp.467-483, 1991.



- [G3] 後藤芳顯, 大鹿克敏, 川西直樹, 小畑誠  
多自由度離散系の弾塑性分岐挙動の解析法とトラス構造物への適用,  
土木学会論文集, 446, pp.117-126, 1992.
- [G4] Goto, Y.  
Analysis of Localization of Plastic Buckling Patterns under Cyclic Loading,  
*Engineering Structures*, 20, pp.413-424, 1998.
- [G5] Goto, Y., Toba, Y. and Matsuoka, H.  
Localization of Plastic Buckling Patterns under Cyclic Loading,  
*J. of Engineering Mechanics*, 121, No.4, pp.493-501, 1995.
- [G6] 後藤芳顯, 松岡宏典, 王慶雲, 鳥羽保行  
圧縮板の塑性座屈モードの局所化と変形能の低下,  
土木学会論文集, 513, pp. 39-51, 1995.
- [G7] 後藤芳顯, 鳥羽保行, 小野聖久, 小畑誠  
円筒殻の軸対称座屈モードの局所化と繰り返し荷重下の挙動,  
土木学会論文集, 543, pp. 41-53, 1996.
- [G8] 後藤芳顯, 王慶雲, 小畑誠  
塑性分岐解析に基づく圧縮板の座屈モードの局所化現象の解析,  
土木学会論文集, 543, pp. 55-70, 1996.
- [G9] 郭 智宏, 渡部 修  
双線形要素を用いた弾塑性大変形解析の改善手法の研究(塑性の体積拘束の数  
値解への影響), 日本機械学会論文集(A編), 61, pp.179-186, 1995.
- [G10] 郭 智宏, 渡部 修  
歪弾性体の構成式と塑性硬化則が数値シミュレーションに及ぼす影響(2次元平面  
ブロックのせん断変形), 日本機械学会論文集(A編), 59, pp.46-54, 1993.
- [G11] Gotoh, M.  
A Simple Plastic Constitutive Equation with Vertex Effect,  
*Engineering Fracture Mechanics*, 21, pp.673-684, 1985.
- [H1] 久田俊明, 野口裕久  
非線形有限要素法の基礎と応用,  
丸善, pp.1-428, 1995.
- [H2] 久田俊明  
非線形有限要素法のためのテンソル解析の基礎,  
丸善, pp.1-226, 1992.
- [H3] Hughes, T.J.R.  
*The Finite Element Method - Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis -*,  
Prentice-Hall, pp.1-803, 1987.

- [H4] 林 豊  
塑性不安定を考えてみる,  
塑性と加工, 22, pp.425-432, 1981.
- [H5] Hung, H.H., Kuo, S.R., Yau, J.D. and Yang, Y.B.  
Tracing the Postbuckling Response of Space Trusses Using a Numerically Stable  
Method, *Proceedings of the International Colloquium on Computation of Shell &  
Spatial Structures*, Taipei/Taiwan, pp.391-396, 1997.
- [H6] Hibbitt, H.D., Marcal, P.V. and Rice, J.R.  
A Finite Element Formulation for Problems of Large Strain and Large Displacement,  
*Int. J. Solids. Structures*, 6, pp.1069-1086, 1970.
- [H7] Hill, R.  
A General Theory of Uniqueness and Stability in Elastic-Plastic Solids,  
*J. Mech. Phys. Solids*, 6, pp.236-249, 1958.
- [H8] 細野 透  
弧長法による弾性座屈問題の解析(その1)座屈点に於ける増分解の性質,  
日本建築学会論文報告集, 242, pp.41-49, 1976.
- [H9] 細野 透  
弧長法による弾性座屈問題の解析(その2)数値解析法としての弧長法,  
日本建築学会論文報告集, 243, pp.21-31, 1976.
- [H10] 林 豊  
薄板の塑性不安定問題についての考察,  
塑性と加工, 10, pp.917-927, 1969.
- [H11] Hutchinson, J.W.  
Post-Bifurcation Behavior in the Plastic Range,  
*J. Mech. Phys. Solids*, 21, pp.163-190, 1973.
- [H12] Hunt, G.W., Lawther, R. and Costa, P.P.E.  
Finite Element Modeling of Spatially Chaotic Structures,  
*Int. J. Numerical Methods in Engineering*, 40, pp.2237-2256, 1997.
- [H13] 半谷裕彦, 川口健一  
計算力学とCAEシリーズ5 形態解析 - 一般逆行列とその応用 -,  
培風館, pp.1-198, 1991.
- [H14] Hangai, Y. and Kawamata, S.  
Nonlinear Analysis of Space Frames and Snap-Through Buckling of Reticulated  
Shell Structures, *Proc. IASS Pacific Symposium Part II on Tension Structures and  
Space Frames*, Tokyo and Kyoto/Japan, pp.803-816, 1971.
- [I1] 伊藤耿一  
塑性不安定と分岐の理論,  
塑性と加工, 22, pp.1009-1015, 1981.



- [I2] 池田清広, 中沢正利, 水木麻雄  
周期境界を持つ長方形領域の分岐パターン解析,  
構造工学論文集, 44A, 275-284, 1998.
- [I3] Ikeda, K., Nishino, F., Hartono, W., and Torii, K.  
Bifurcation Behavior of an Axisymmetric Elastic Space Truss,  
*Structural Eng. / Earthquake Eng. JSCE*, 5, pp.209-212, 1988.
- [I4] Ikeda, K., Murota, K., and Fujii, H.  
Bifurcation Hierarchy of Symmetric Structures,  
*Int. J. Solids. Structures*, 27, pp.1551-1573, 1991.
- [I5] 石崎 仁  
非共軸項を付加したひずみ硬化弾塑性構成式による2次元局所化変形解析,  
土木学会論文集, 603, pp.113-127, 1998.
- [I6] Ikeda, K., Murota, K., Yamakawa, Y. and Yanagisawa, E.  
Mode Switching and Recursive Bifurcation in Granular Materials,  
*J. Mech. Phys. Solids*, 45, pp.1929-1953, 1997.
- [K1] 北川 浩  
弾・塑性力学 —非線形解析のための基礎理論—,  
裳華堂, pp.1-229, 1987.
- [K2] Kuo, S.R. and Yang, Y.B.  
Tracing Postbuckling Paths of Structures Containing Multi Loops,  
*Int. J. Numerical Methods in Engineering*, 38, pp.4053-4075, 1995.
- [K3] Kouhia, R. and Mikkola, M.  
Tracing the Equilibrium Path beyond Simple Critical Points,  
*Int. J. Numerical Methods in Engineering*, 28, pp.2923-2941, 1989.
- [K4] Koiter, W.T.  
On the Stability of Equilibrium,  
*Thesis Polytechnic Institute, Delft H.T., Paris, Amsterdam*, 1945.
- [K5] 北川 浩  
くびれ進展の数値解析,  
塑性と加工, 22, pp.638-644, 1981.
- [K6] 北川 浩  
塑性ひずみ局所化現象の解析 —最近の動向と問題点—,  
日本機械学会論文集(A編), 48, pp.250-258, 1982.
- [K7] 北川 浩, 田辺淳二, 宿利清己, 浜田 実  
くびれの数値解析(平面ひずみの場合),  
日本機械学会論文集(A編), 46, pp.486-496, 1980.

- [K8] 北川 浩, 田辺淳二, 浜田 実, 富田佳宏  
くびれの数値解析(引張りを受ける丸棒の場合),  
日本機械学会論文集(A編), 48, pp.141-149, 1982.
- [K9] 川井謙一  
軸対称および平面ひずみ引張りに関するベンチマークテスト,  
塑性と加工, 32, pp.553-559, 1991.
- [K10] 川井謙一  
平面応力引張りに関するベンチマークテスト,  
塑性と加工, 32, pp.560-564, 1991.
- [K11] Kleiber, M.  
*Parameter Sensitivity in Nonlinear Mechanics Theory and Finite Element Computations*, John Wiley & Sons, pp.1-406, 1997.
- [L1] Lee, E.H.  
Some Comments on Elastic-Plastic Analysis,  
*Int. J. Solids. Structures*, 17, pp.859-872, 1981.
- [L2] Lee, E.H.  
Elasto-Plastic Deformation at Finite Strains,  
*J. Appl. Mech.*, ASME, 36, pp.1-6, 1969.
- [M1] McMeeking, R. M. and Rice, J.R.  
Finite Element Formulations for Problems of Large Elastic-Plastic Deformation,  
*Int. J. Solids. Structures*, 11, pp.601-616, 1975.
- [M2] Moran, B., Oriz, M. and Shih, C.F.  
Formulation of Implicit Finite Element Methods for Multiplicative Finite Deformation Plasticity, *Int. J. Numerical Methods in Engineering*, 29, pp.483-514, 1990.
- [M3] 松本紘美, 小川 茂  
陰解法弾塑性有限要素法による不安定変形の解析精度に対する各種誤差要因の影響,  
塑性と加工, 33, pp.81-86, 1992.
- [M4] Mikkelsen, L.P.  
Post-Necking Behavior Modeled by a Gradient Dependent Plasticity Theory,  
*Int. J. Solids Structures*, 34, pp.4531-4546, 1997.
- [M5] 守時 一, 奥山栄樹  
塑性不安定の本質的基準,  
日本機械学会論文集(A編), 62, pp.195-202, 1996.
- [M6] 守時 一, 奥山栄樹  
土質材料におけるせん断帯の形態予測,  
日本機械学会論文集(A編), 63, pp.201-206, 1997.



- [M7] 守時 一, 奥山栄樹  
せん断帯解析に見られる解析構造の矛盾点,  
日本機械学会論文集(A編), 63, pp.133-140, 1997.
- [M8] 守時 一, 奥山栄樹  
多価条件と塑性不安定の関連,  
日本機械学会論文集(A編), 64, pp.193-199, 1998.
- [M9] 守時 一, 奥山栄樹  
多価性に準拠した成形性の予測,  
日本機械学会論文集(A編), 64, pp.183-190, 1998.
- [M10] 松本 隆 他  
数理科学 特集「分岐」,  
サイエンス社, 6月号, 1994.
- [N1] 野口裕久  
有限要素法によるシェル構造物の非線形座屈およびその感度解析手法に関する研究, 東京大学博士学位論文, pp.1-200, 1992.
- [N2] 日本塑性加工学会  
非線形有限要素法 —線形弾性解析から塑性加工解析まで—,  
コロナ, pp.1-247, 1994.
- [N3] 日本塑性加工学会  
塑性加工の計算力学 —進化するシミュレーション技術—,  
コロナ, pp.1-234, 1992.
- [N4] Nagtegaal, J.C., Parks, D.M. and Rice, J.R.  
On Numerically Accurate Finite Element Solutions in the Fully Plastic Range,  
*Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 4, pp.153-177, 1974.
- [N5] Nagtegaal, J.C.  
On the Implementation of Inelastic Constitutive Equations with Special Reference to Large Deformation Problems, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 33, pp.469-484, 1982.
- [N6] Nagtegaal, J.C. and Jong, J.E.DE.  
Some Computational Aspects of Elasto-Plastic Large Strain Analysis,  
*Int. J. Numerical Methods in Engineering*, 17, pp.15-41, 1981.
- [N7] 野口裕久, 久田俊明  
Scaled Corrector を用いた有限要素分岐解析法の開発,  
日本機械学会論文集(A編), 58, pp.2191-2198, 1992.
- [N8] Noguchi, H. and Hisada, T.  
Development of a New Branch-Switching Algorithm in Nonlinear FEM using Scaled Corrector, *JSME Int. J.*, 37, pp. 255-263, 1994.

- [N9] Needleman, A.  
A Numerical Study of Necking in Circular Cylindrical Bars,  
*J. Mech. Phys. Solids*, 20, pp. 111-127, 1972.
- [N10] Tvergaard, V., Needleman, A. and Lo, K.K.  
Flow Localization in the Plane Strain Tensile Test,  
*J. Mech. Phys. Solids*, 29, pp. 115-142, 1981.
- [N11] Norris, D.M., Moran, B. Jr., Scudder, J.K. and Quinones, D.F.  
A Computer Simulation of the Tension Test,  
*J. Mech. Phys. Solids*, 26, pp. 1-19, 1978.
- [N12] 野口裕久  
非線形解析技術の理論と最近の話題,  
日本機械学会講習会「設計工学からみた最近の解析技術の動向」,  
No.97-33, pp.55-60, 1997.
- [N13] Noguchi, H. and Hisada, T.  
Sensitivity Analysis in Post-Buckling Problems of Shell Structures,  
*Computers & Structures*, 47, pp.699-710, 1993.
- [N14] 野口裕久, 久田俊明  
座屈後挙動における感度解析手法の開発,  
日本機械学会論文集(A編), 58, pp.2415-2422, 1992.
- [N15] 野口裕久, 久田俊明  
幾何学的非線形問題における座屈荷重感度解析手法の開発,  
日本機械学会論文集(A編), 59, pp.1365-1372, 1993.
- [O1] Owen, D.R.J. and Hinton, E.  
塑性の有限要素法 —材料非線形有限要素法—(山田嘉昭 訳),  
科学技術出版社, pp.1-627, 1988.
- [O2] 岡澤重信, 藤井文夫, 宇佐美勉  
幾何学的非線形構造系の数理分岐解析法,  
土木学会論文集, 556, pp. 95-106, 1997.
- [O3] Okazawa, S. and Fujii, F.  
Global and Local Procedures to Compute the Stability Point,  
*Proceedings of the 3rd Asian-Pacific Conference on Computational Mechanics*,  
Seoul/Korea, pp.455-460, 1996.
- [O4] 岡澤重信, 藤井文夫, 野口裕久  
修正剛性行列を用いた多重分岐点の安定化反復精算法,  
構造工学論文集, 44A, pp.285-292, 1998.
- [O5] Okazawa, S., Noguchi, H. and Fujii, F.  
Scaled Corrector and Branch-Switching in Necking Problems,  
International Conference on Computational Engineering Science, Atlanta/USA,  
*Modeling and Simulation Based Engineering*, Tech Science Press, pp.419-424, 1998.



- [O6] 岡澤重信, 藤井文夫, 宇佐美勉  
剛性行列の固有値制御による弾塑性分岐点の精算法,  
構造工学論文集, 43A, pp.311-320, 1997.
- [O7] Okazawa, S., Fujii, F. and Usami, T.  
Eigenvalue-Controlled Path-Tracing to Compute Elastoplastic Bifurcation Points of a  
3D Reticulated Truss Dome, *Proceedings of the International Colloquium on  
Computational of Shell and Spatial Structures*, Taipei/ Taiwan, pp.379-384, 1997.
- [O8] 岡澤重信, 藤井文夫  
多重分岐のベンチモデルと分岐経路の探索方法について,  
構造工学論文集, 41A, pp.465-474, 1995.
- [P1] Peric, D. and Owen, D.R.J.  
A Model for Finite Strain Elasto-Plasticity Based on Logarithmic Strains :  
Computational Issues, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*,  
94, pp.35-61, 1992.
- [P2] Petryk, H. and Thermann, K.  
On Discretized Plasticity Problem with Bifurcation,  
*Int. J. Solids Structures*, 29, pp.745-765, 1992.
- [R1] Riks, E.  
An Incremental Approach to the Solution of Snapping and Buckling Problems,  
*Int. J. Solids Structures*, 15, pp.529-551, 1979.
- [R2] Riks, E.  
Some Computational Aspects of the Stability Analysis of Nonlinear Structures,  
*Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 47, pp.219-259, 1984.
- [R3] Riks, E.  
The Application of Newton's Method to the Problems of Elastic Stability,  
*J. Appl. Mech.*, ASME, 39, pp.1060-1066, 1972.
- [R4] Ramm, E.  
Strategies for Tracing the Non-linear Response near the Limit Points,  
*Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics*, edited by Wunderlich,  
W. et al. Springer -Verlag, Berlin, pp.63-89, 1981.
- [R5] Riks, E., Rankin, C.C. and Brogan, F.A.  
On the Solution of Mode Jumping Phenomenon in Thin-Walled Shell Structures,  
*Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 136, pp.59-92, 1996.
- [R6] Richard, R.M. and Abbott, B.J.  
Versatile Elastic-Plastic Stress-Strain Formula,  
*J. of Engineering Mechanics*, ASCE, 101, pp.511-515, 1975.

- [S1] Shi, J. and Crisfield, M.A.  
Combing Arc-Length Control and Line Searches in Path Following,  
*Communications in Numerical Methods in Engineering*, 11, pp.793-803, 1995.
- [S2] Shi, J.  
Computing Critical Points and Secondary Paths in Nonlinear Structural Stability  
Analysis by the Finite Element Method, *Computers & Structures*, 58, pp.203-220,  
1996.
- [S3] Simo, J.C.  
Algorithms for Static and Dynamic Multiplicative Plasticity that Preserve the  
Classical Return Mapping Schemes of the Infinitesimal Theory, *Computer Methods  
in Applied Mechanics and Engineering*, 99, pp.61-112, 1992.
- [S4] Simo, J.C. and Ortiz, M.  
A Unified Approach to Finite Deformation Elastoplastic Analysis Based on the Use  
of Hyperelastic Constitutive Equations, *Computer Methods in Applied Mechanics  
and Engineering*, 49, pp.221-245, 1985.
- [S5] Simo, J.C. and Taylor R.L.  
Consistent Tangent Operators for Rate-Independent Elasto-Plasticity,  
*Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 48, pp.101-118, 1985.
- [S6] Saje, M.  
Necking of a Cylindrical Bar in Tension,  
*Int. J. Solids Structures*, 15, pp.731-742, 1979.
- [S7] 白戸真大, 岩熊哲夫  
微視すべりを組み込んだ構成モデルとその大変形問題への応用,  
土木学会論文集, 598, pp. 257-268, 1998.
- [S8] Stören, S. and Rice, J.R.  
Localization Necking in Thin Sheets,  
*J. Mech. Phys. Solids*, 23, pp.421-441, 1975.
- [S9] Swift, H.W.  
Plastic Instability Under Plane Stress,  
*J. Mech. Phys. Solids*, 1, pp.1-18, 1952.
- [S10] Schreyer, H.L., Kulak, R.F. and Kramer, J. M.  
Accurate Numerical Solutions for Elastic-Plastic Models,  
*Journal of Pressure Vessel Technology*, ASME, 101, pp.226-234, 1979.
- [S11] Simo, J.C., Fox, D.D and Rifai, M.S.  
On a Stress Resultant Geometrically Exact Shell Model, Part III, Computational  
Aspects of the Nonlinear Theory, *Computer Methods in Applied Mechanics and  
Engineering*, 79, pp.21-70, 1990.



- [S12] Simo, J.C. and Hughes, T.J.R.  
*Computational Inelasticity*,  
Springer, pp.1-392, 1998.
- [S13] 佐竹洋一  
幅厚比の違いが鋼部材の延性に及ぼす影響,  
名古屋大学工学部土木工学科卒業論文, 1999.
- [T1] 富田佳宏  
数値弾塑性力学,  
養賢堂, pp.1-227, 1994.
- [T2] ツルミュール, R  
マトリクス理論と応用 (瀬川富士, 高市成方 共訳),  
ブレイン図書, pp.1-434, 1972
- [T3] Thompson, J.M.T. and Hunt, G.W.  
*A General Theory of Elastic Stability*,  
John Wiley & Sons, London, 1973.
- [T4] 田中宏幸, 渡部 修  
塑性硬化則とひずみ速度の影響を考慮したせん断帯の3次元有限要素解析,  
日本機械学会論文集(A編), 63, pp.192-200, 1997.
- [U1] 上谷宏二, 中村恒善, 森迫清貴, 石田修三  
弾塑性構造物の臨界挙動解析のための整合剛性行列形成法,  
日本建築学会構造系論文報告集, 445, pp.67-78, 1993.
- [U2] 宇佐美 勉, 鈴木森晶, Iraj, H.P. Mamaghani, 葛 漢彬  
コンクリートを部分的に充填した鋼製橋脚の地震時保有水平耐力照査法の提案,  
土木学会論文集, 525, pp.69-82, 1995.
- [W1] Wang, X.-J. and Belytschko, T.  
A Study of Stabilization and Projection in the 4-Node Mindlin Plate Element,  
*Int. J. Numerical Methods in Engineering*, 28, pp.2223-2238, 1989.
- [W2] 鷲津久一郎, 宮本 博, 山田嘉昭, 山本善之, 川井忠彦  
有限要素法ハンドブック I 基礎編,  
培風館, pp.1-443, 1983.
- [W3] 鷲津久一郎, 宮本 博, 山田嘉昭, 山本善之, 川井忠彦  
有限要素法ハンドブック II 応用編,  
培風館, pp.1-1109, 1983.
- [W4] Wriggers, P., Wagner, W. and Mische, C.  
A Quadratically Convergent Procedure for Calculation of Stability Points in Finite  
Element Analysis, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 70,  
pp.329-347, 1988.

- [W5] Wempner, G.A.  
Discrete Approximations Related to Nonlinear Theories of Solid,  
*Int. J. Solids. Structures*, 7, pp.1581-1599, 1971.
- [W6] Waszczyszyn, Z.  
Numerical Problems of Nonlinear Stability Analysis of Elastic Structures,  
*Computers & Structures*, 17, pp.13-24, 1983.
- [W7] Wriggers, P.  
Continuum Mechanics, Nonlinear Finite Element Techniques and Computational  
Stability, *Progress in Computational Analysis of Inelastic Structure*, edited by Stein,  
E., pp.245-287, 1993.
- [W8] Wagner, W. and Wriggers, P.  
A Simple Methods for the Calculation of Postcritical Branches,  
*Engng. Comput.*, 5, pp.103-109, 1988.
- [W9] Wriggers, P. and Simo, J.C.  
General Procedure for the Direct Computation of Turning and Bifurcation Points,  
*Int. J. Numerical Methods in Engineering*, 30, pp.155-176, 1990.
- [Y1] 矢川元基, 吉村 忍  
計算力学とCAEシリーズ1 有限要素法,  
培風館, pp.1-268, 1991.
- [Y2] Yang, Y.B. and Kuo, S.R.  
*Theory & Analysis of Nonlinear Framed Structures*,  
Prentice Hall, pp.1-579, 1994.
- [Y3] 山田嘉昭, 青木至  
薄板の軸対称変形における塑性不安定について,  
塑性と加工, 7, pp.393-406, 1966.
- [Y4] 横内康人  
弾塑性有限要素法の反復型解法,  
塑性と加工, 34, pp.977-983, 1993.
- [Y5] 吉田 裕  
有限要素法による幾何学的非線形構造解析法の現状と課題,  
土木学会論文集, 374, pp.25-37, 1986.
- [Y6] 山田嘉昭  
塑性・粘弾性(有限要素法の基礎と応用シリーズ6),  
培風館, pp.1-262, 1980.
- [Z1] Zienkiewicz, O.C. and Taylor, R.L.  
マトリクス有限要素法 I (矢川元基 訳),  
科学技術出版社, pp.1-631, 1996.



- [Z2] Zienkiewicz, O.C. and Taylor, R.L.  
 マトリクス有限要素法 II (矢川元基 訳),  
 科学技術出版社, pp.1-793, 1996.
- [Z3] Zbib, H.M. and Jubran, J.S.  
 Dynamic Shear Banding : A Three-Dimensional Analysis,  
*Int. J. of Plasticity*, 8, pp.619-641, 1992.

## 付録.1

要素レベルでの接線剛性マトリクス  $k$  と内カベクトル(等価節点カベクトル)  $r$

$$k = k_L + k_{NL} \quad (A.1.1)$$

$$= \int_V \mathbf{B}_L^T (\mathbf{C}^{ep} - \mathbf{A}) \mathbf{B}_L dv + \int_V \mathbf{B}_{NL}^T \mathbf{T} \mathbf{B}_{NL} dv$$

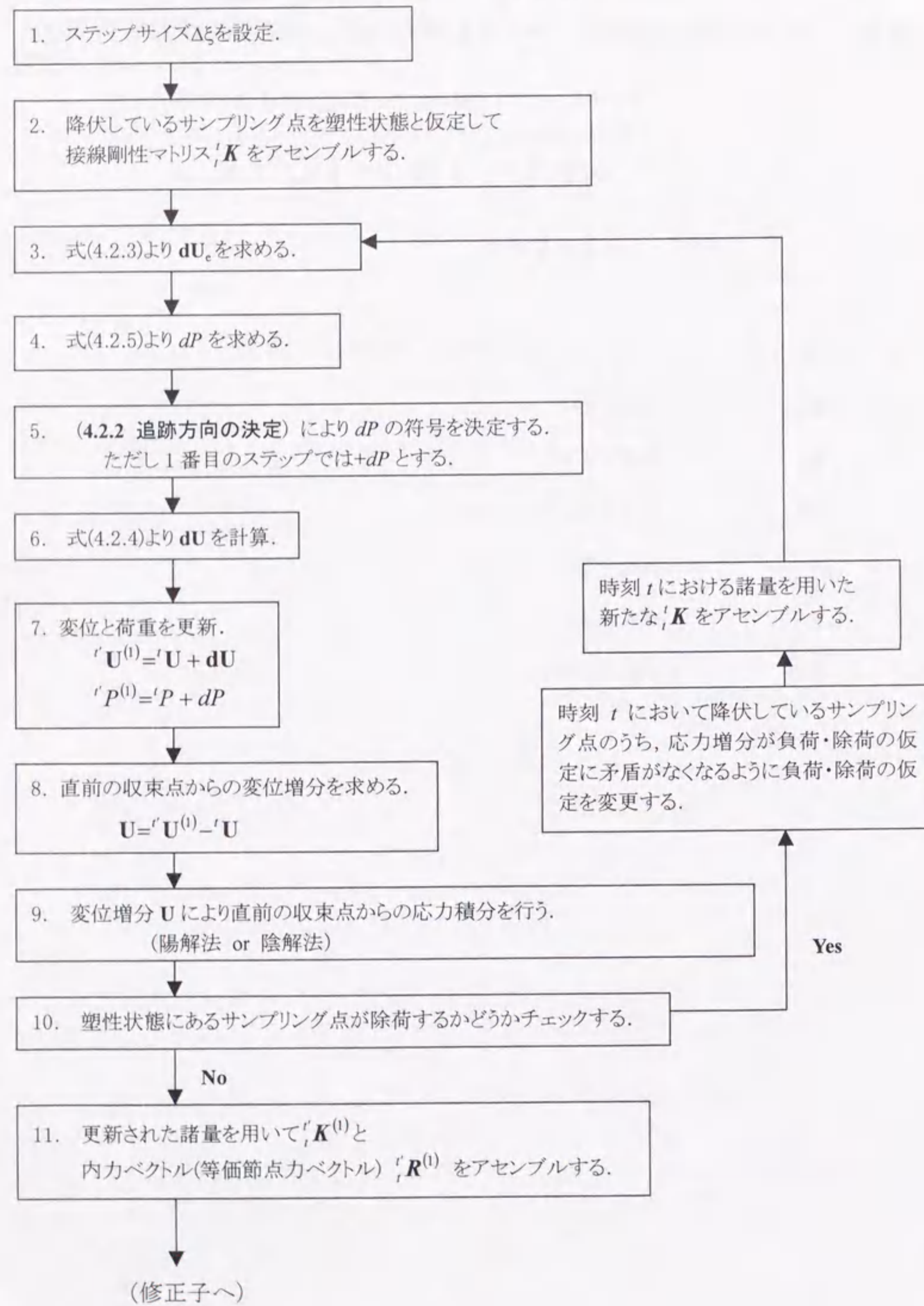
$$r = \int_V \mathbf{B}_L^T \underline{\mathbf{T}} dv \quad (A.1.2)$$

ここで登場するマトリクス・ベクトルは、それぞれ以下のように示される。

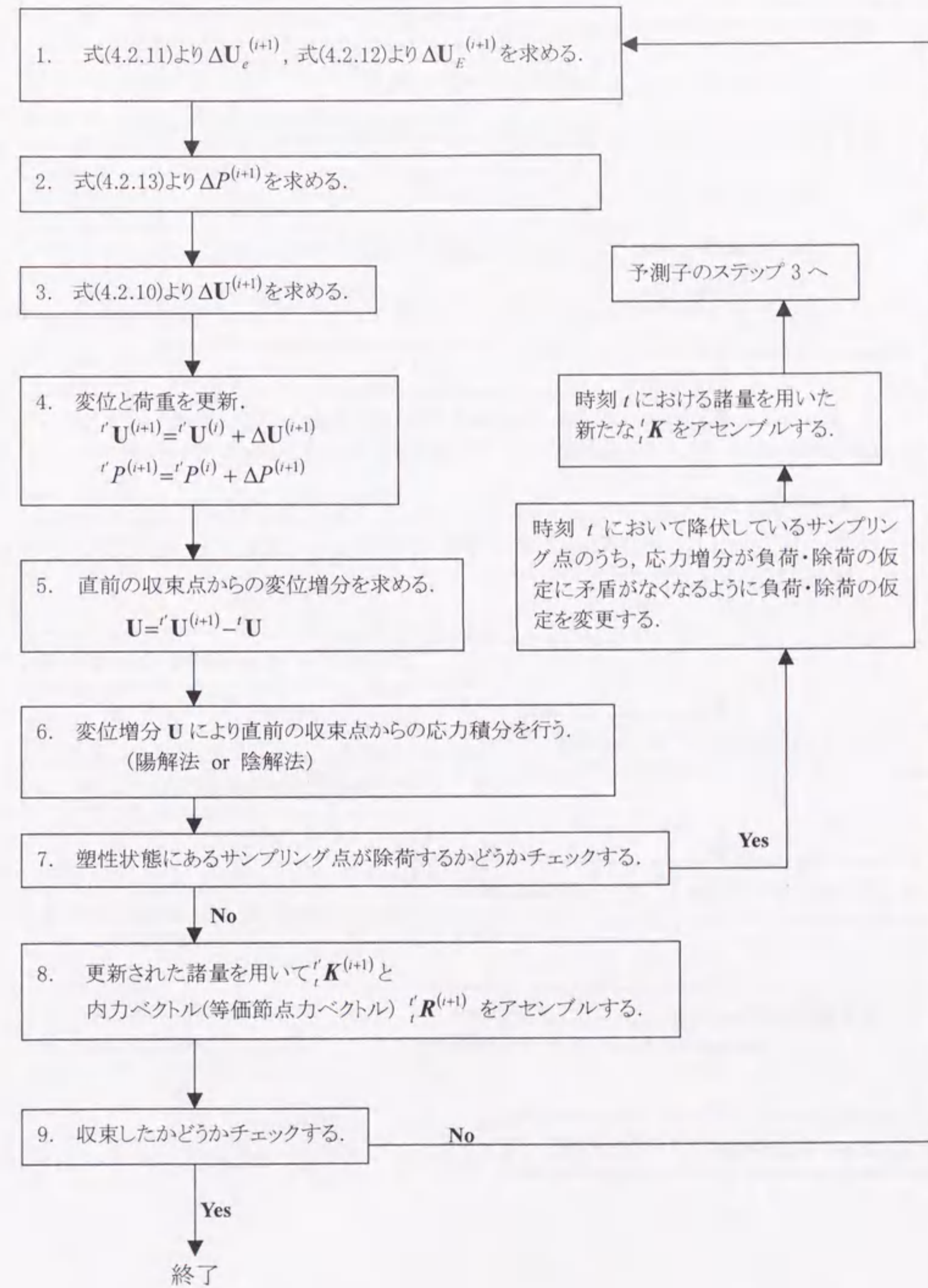
- $\mathbf{B}_L$  : 式(2.3.7)
- $\mathbf{B}_{NL}$  : 式(2.3.10)
- $\mathbf{C}^{ep}$  : 式(3.2.46)~(3.2.47)
- $\mathbf{A}$  : 式(3.4.24)
- $\mathbf{T}$  : 式(2.3.18)
- $\underline{\mathbf{T}}$  : 式(2.3.20)



付録.2 弧長制御法の計算手順 (予測子)

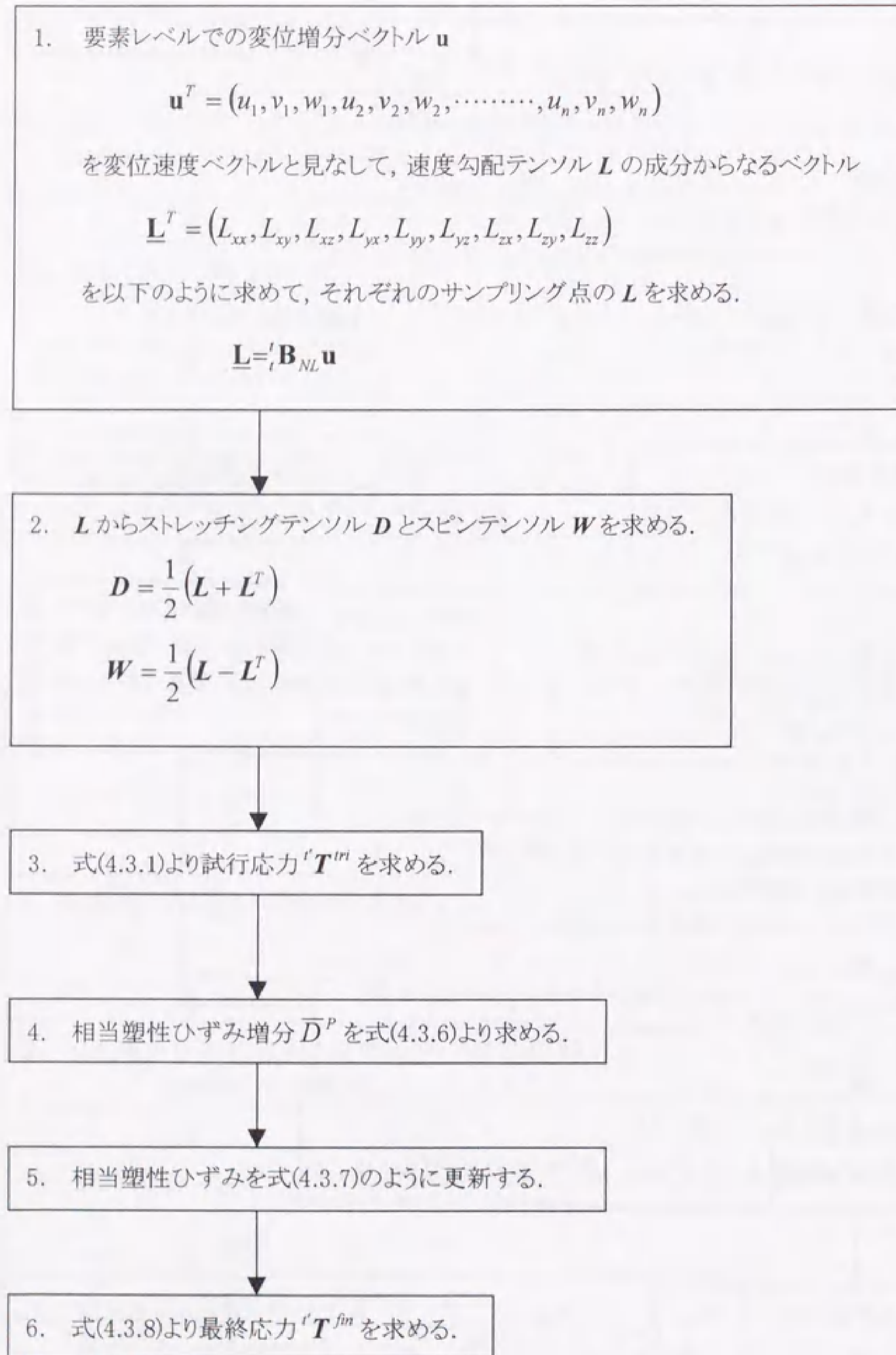


(修正子)

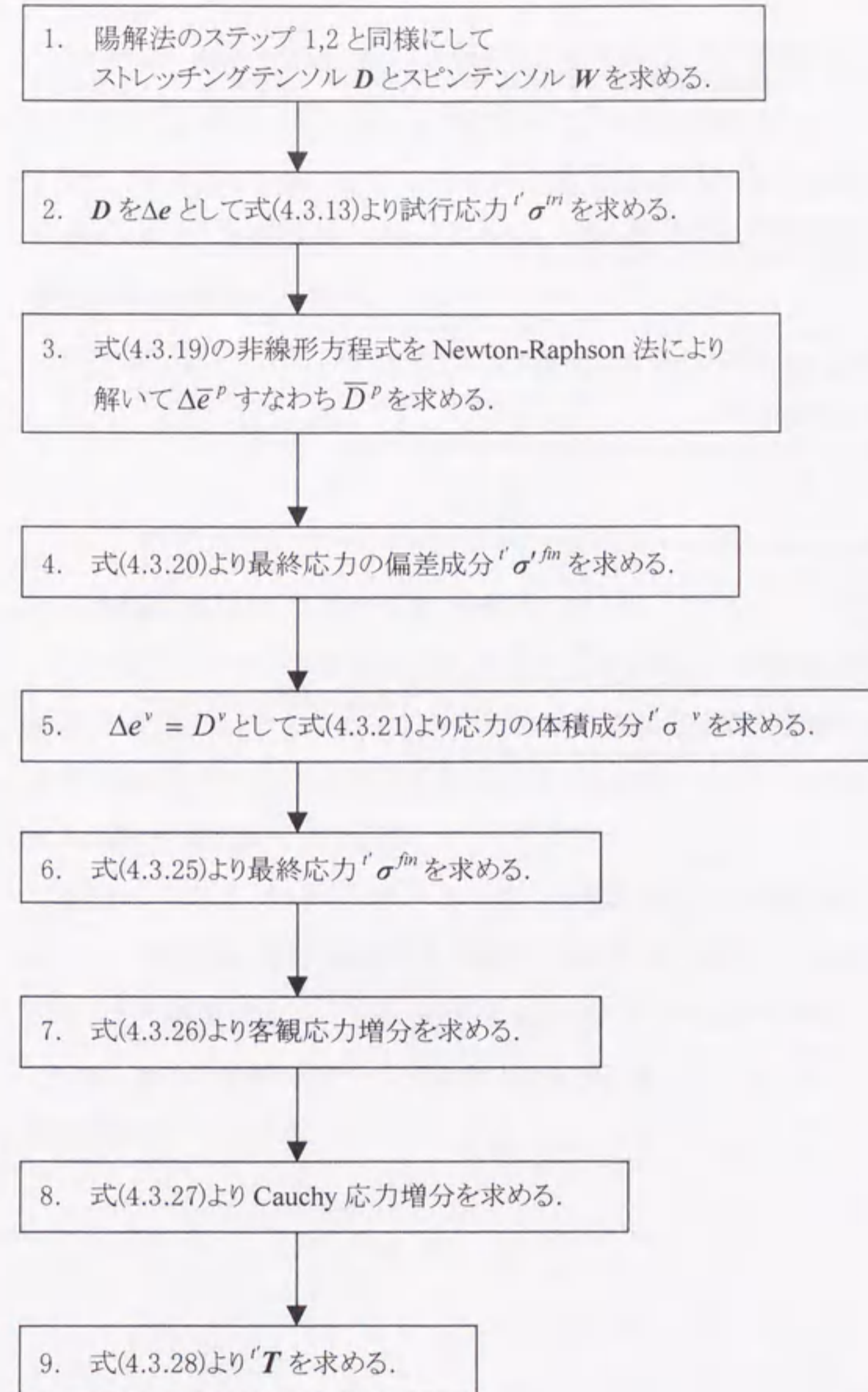




付録.3 応力積分の計算手順 (陽解法)

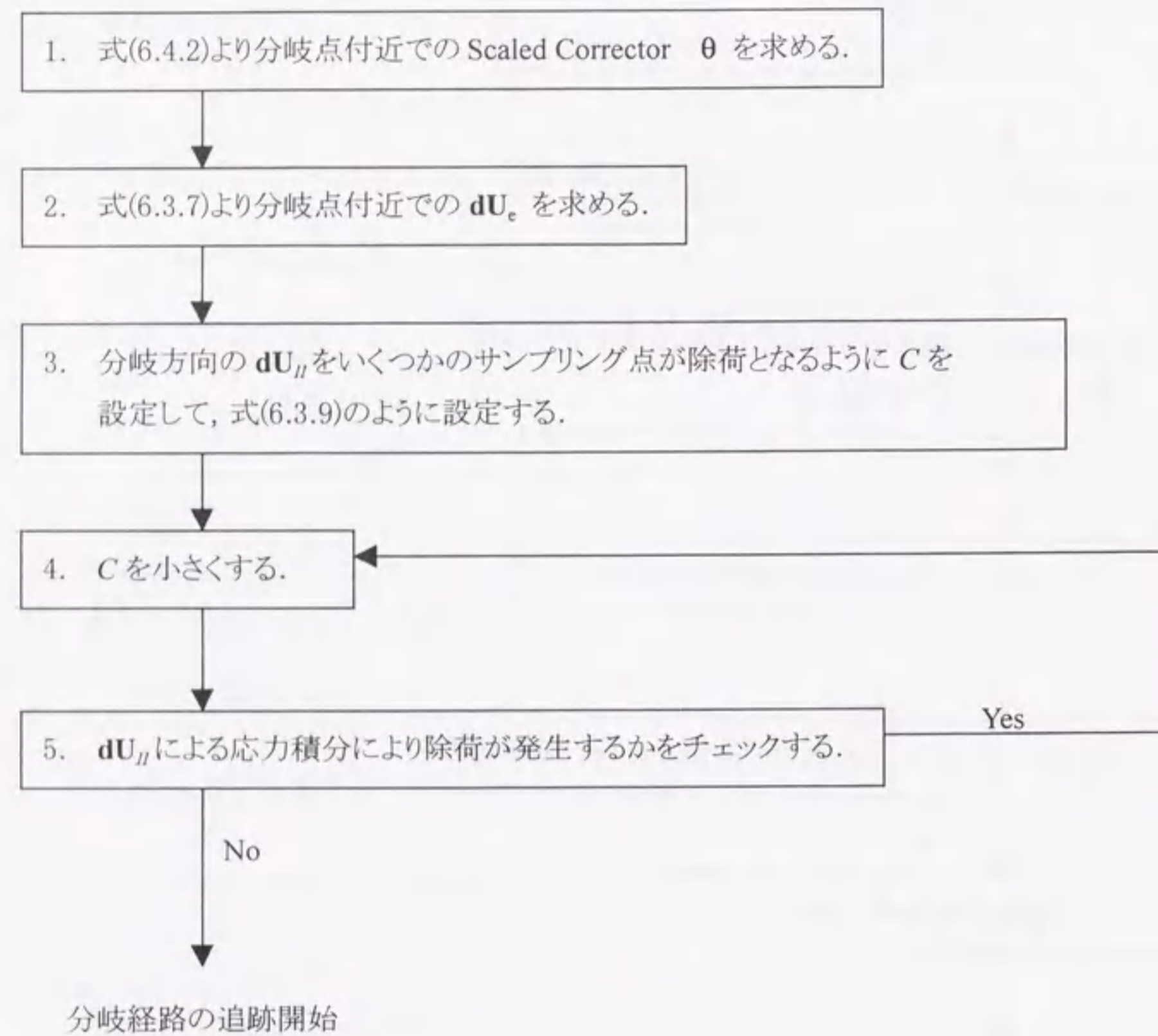


(陰解法)





#### 付録.4 弾塑性分岐解析手順



#### 付録.5 トラス構造系の弾塑性分岐解析

ここでは、本論文で提案した弾塑性分岐解析手法を弾塑性トラス構造系に適用した計算例[06][07]を示す。ここで扱った構造系は、半谷ら[H14]によって考案された図 A-1 に示すような 3D トラスドームで、このモデルに弾塑性部材の仮定を導入して計算を試みた。材料パラメータは、弾性係数  $E=205.8(\text{GPa})$ 、降伏応力  $\sigma_y=0.2352(\text{GPa})$  と設定した。そしてトラス要素の断面積  $A=1.0(\text{cm}^2)$  とした。

塑性域においては、次のような硬化型の応力  $\sigma$  とひずみ  $e$  の関係を仮定した[R6]。

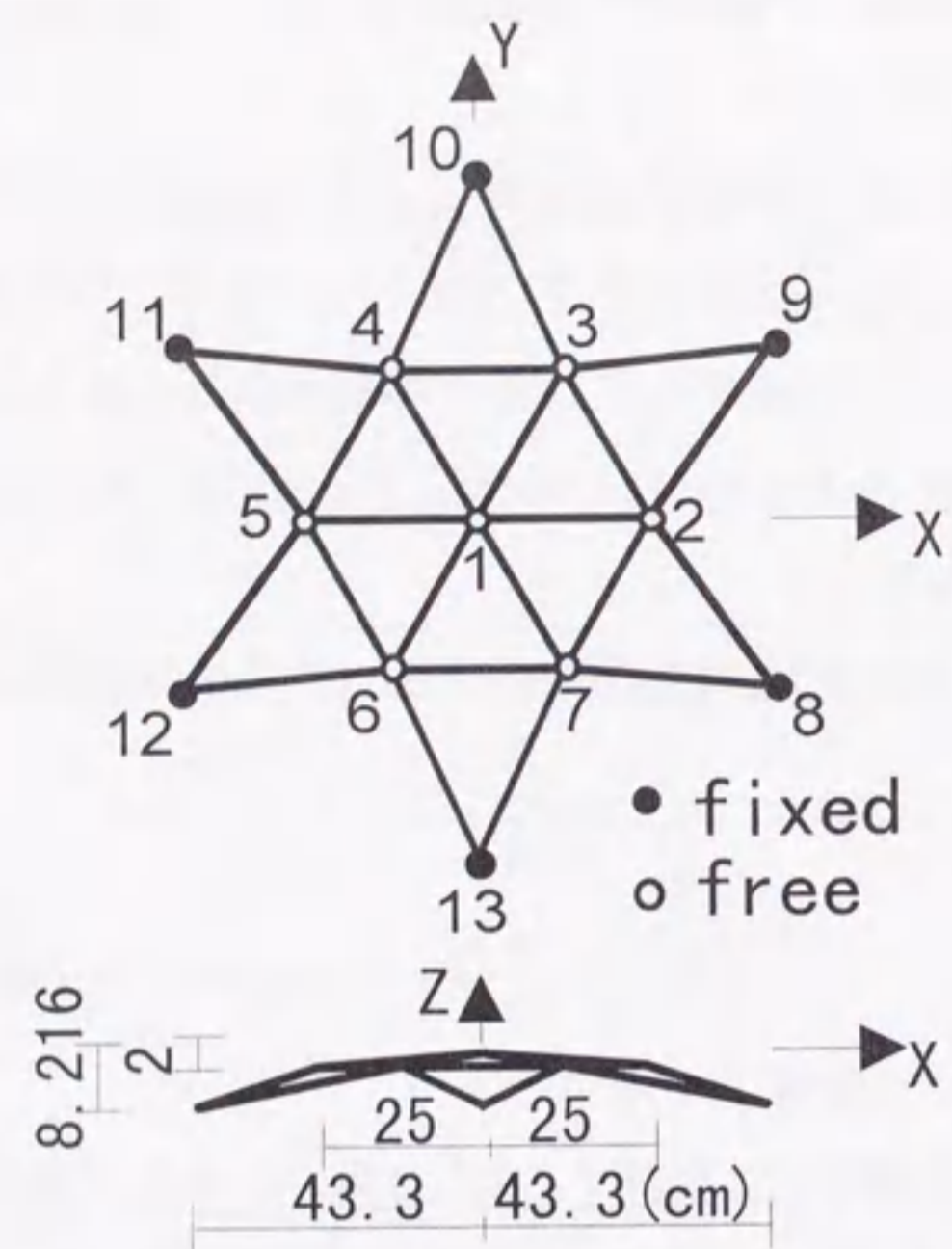
$$\sigma = \frac{E e}{\left(1 + \left|\frac{E e}{\sigma_y}\right|^{10}\right)^{\frac{1}{10}}} \quad (\text{A.5.1})$$

なお除荷剛性としては弾性係数  $E$  を用いた。

このモデルでは、荷重極限点に到達する前に3個の分岐点が発生する。最初の分岐点は単純分岐点であり、2つめ3つめの分岐点は共に接線剛性マトリクスが2重ゼロ固有値となる多重分岐点である。ここでは最初の分岐点(BP1)と2つめの分岐点(BP2)において、分岐経路への経路切り換えを行った。

最初の分岐点 BP1 においては何の問題もなく、分岐経路への切り換えに成功した。図 A-2 に、主経路・分岐経路のそれぞれにおける変形モードと共に得られたつり合い経路を示す。また多重分岐点である BP2 では2つのクリティカルな固有ベクトルの線形結合を用いて[08]、3本の分岐経路へのアクセスに成功した。図 A-3 がその分岐経路とそれらに対応する変形モードである。





Node	1	2	3	4	5	6	7
Load Vector	X	0	0	0	0	0	0
	Y	0	0	0	0	0	0
	Z	-1	-2	-2	-2	-2	-2

図 A-1 3Dトラスドーム

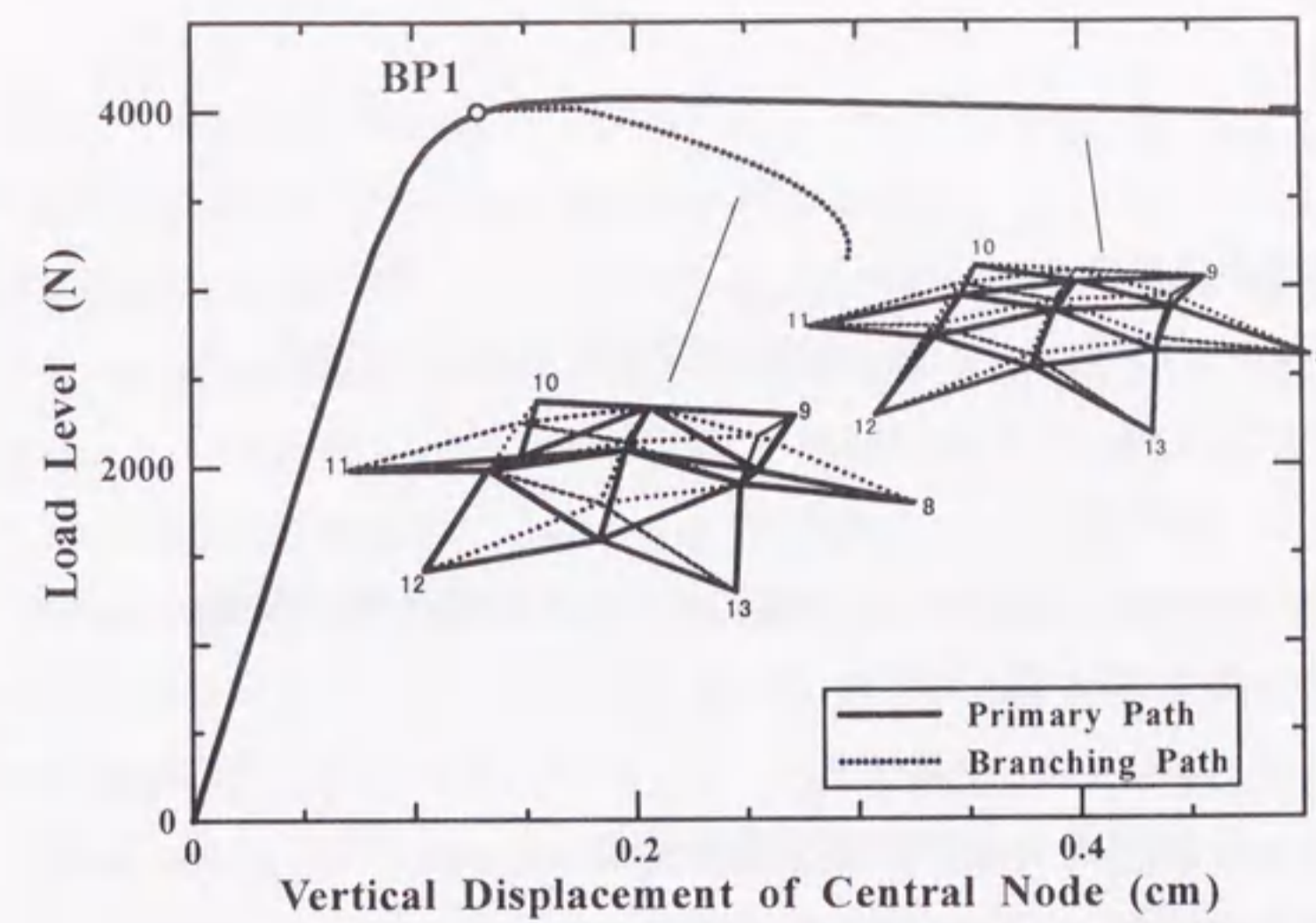


図 A-2 BP1 における分岐経路

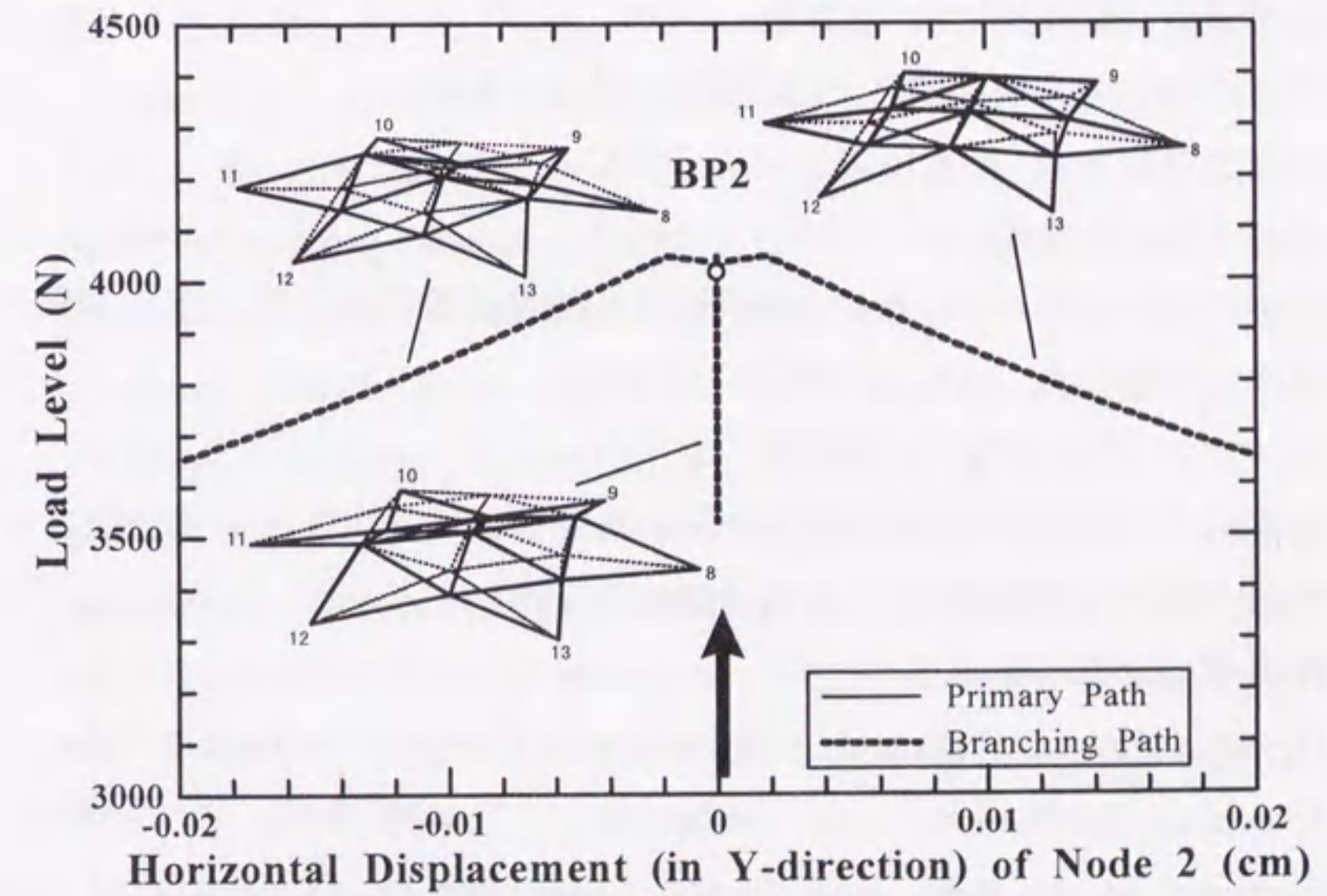


図 A-3 BP2 における分岐経路



## 発表論文

### 【査読論文】

- [1] 岡澤重信, 藤井文夫  
多重分岐のベンチモデルと分岐経路の探査方法について,  
構造工学論文集, 41A, pp.465-474, 1995.
- [2] 藤井文夫, 岡澤重信  
構造系の弾性有限変位・分岐問題における大域的非線形解法,  
機械学会論文集(A編), 62, pp.48-55, 1996.
- [3] 岡澤重信, 藤井文夫, 宇佐美勉  
幾何学的非線形構造系の数値分岐解析法,  
土木学会論文集, 556, pp.95-106, 1997.
- [4] Fujii, F. and Okazawa, S.  
Pinpointing Bifurcation Points and Branch-Switching,  
*J. of Engineering Mechanics*, ASCE, 123, pp.179-189, 1997.
- [5] 岡澤重信, 藤井文夫, 宇佐美勉  
剛性行列の固有値制御による弾塑性分岐点の精算法,  
構造工学論文集, 43A, pp.311-320, 1997.
- [6] 藤井文夫, 岡澤重信  
剛性行列の固有ペアの数値と特異剛性行列を係数行列に持つ連立方程式の解法,  
構造工学論文集, 43A, pp.299-310, 1997.
- [7] 藤井文夫, 池田清宏, 岡澤重信  
剛性行列のブロック対角化原理を用いた対称性に起因する多重分岐点の反復精  
算法, 構造工学論文集, 43A, pp.321-332, 1997.
- [8] Fujii, F. and Okazawa, S.  
Bypass, Homotopy Path and Local Iteration to Compute the Stability Point,  
*Structural Engineering and Mechanics*, 5, Special Issue on Selected Papers  
Presented at the third Asian-Pacific Conference on Computational Mechanics,  
pp.577-586, 1997.
- [9] 岡澤重信, 藤井文夫, 野口裕久  
修正剛性行列を用いた多重分岐点の安定化反復精算法,  
構造工学論文集, 44A, pp.285-292, 1998.

### 【国際会議】

- [1] Fujii, F. and Okazawa, S.  
Multi-Bifurcation Models in Nonlinear Elasticity,  
*Proceedings of the International Conference on Computational Methods in  
Structural and Geotechnical Engineering*, Hong Kong, pp.583-588, 1994.
- [2] Fujii, F., Okazawa, S. and Gong, S.X.  
Computational Stability Theory - Its Strategies,  
*Proceedings of the International Conference on Computational Engineering Science*,  
Hawaii/USA, pp.1523-1528, 1995.
- [3] Okazawa, S. and Fujii, F.  
Global and Local Procedures to Compute the Stability Point,  
*Proceedings of the 3rd Asian-Pacific Conference on Computational Mechanics*,  
Seoul/Korea, pp.455-460, 1996.
- [4] Okazawa, S., Fujii, F. and Usami, T.  
Eigenvalue-Controlled Path-Tracing to Compute Elastoplastic Bifurcation Points of a  
3D Reticulated Truss Dome, *Proceedings of the International Colloquium on  
Computational of Shell and Spatial Structures*, Taipei/ Taiwan, pp.379-384, 1997.
- [5] Fujii, F., Ikeda, K. and Okazawa, S.  
Modified Stiffness Iteration to Compute the Multiple Bifurcation Point,  
*Proceedings of the International Colloquium on Computational of Shell and Spatial  
Structures*, Taipei/ Taiwan, pp.320-325, 1997.
- [6] Okazawa, S., Noguchi, H. and Fujii, F.  
Scaled Corrector and Branch-Switching in Necking Problems,  
*International Conference on Computational Engineering Science*, Atlanta/USA,  
*Modeling and Simulation Based Engineering*, Tech Science Press, pp.419-424, 1998.



## 【シンポジウム・講演会 等】

- [1] 岡澤重信, 藤井文夫  
単純/多重分岐点における経路切り換え方法,  
日本機械学会第7回計算力学講演会講演論文集, pp.200-201, 1994.
- [2] 岡澤重信, 藤井文夫  
多重分岐解の探索手法,  
第44回応用力学連合講演会講演予稿集, pp.195-196, 1995.
- [3] 岡澤重信, 藤井文夫  
数式処理システムにおける計算安定理論,  
日本機械学会東海支部第44期総会講演会講演論文集, pp.51-52, 1995.
- [4] 岡澤重信, 藤井文夫  
特異つり合い点をピンポイントするための安定化スキーム,  
構造工学における数値解析法シンポジウム論文集, 19, pp.351-356, 1995.
- [5] 藤井文夫, 岡澤重信  
分岐モデルにみる計算安定理論(Computational Stability Theory)について,  
構造工学における数値解析法シンポジウム論文集, 19, pp.339-344, 1995.
- [6] 岡澤重信, 藤井文夫  
検出もれのない多重分岐つり合い解の求解法について,  
日本機械学会第8回計算力学講演会講演論文集, pp.349-350, 1995.
- [7] 岡澤重信, 藤井文夫, 宇佐美 勉  
3Dはり要素を用いた安定解析,  
計算工学講演会論文集, 1, pp.803-806, 1996.
- [8] 岡澤重信, 藤井文夫, 宇佐美勉  
弾塑性トラスにおける単純/多重分岐点の精算法と経路切り換え法,  
計算工学講演会論文集, 2, pp.913-916, 1997.
- [9] 藤井文夫, 池田清宏, 岡澤重信  
修正剛性行列による多重分岐点の反復精算法,  
計算工学講演会論文集, 2, pp.1209-1212, 1997.
- [10] 藤井文夫, 岡澤重信, 森明子  
漸次変化する荷重モードで載荷された円形アーチの特異つり合い点の連続計算法(第2報一般荷重モードと荷重極限点), 日本応用数学会 1997 年度年会講演予稿集, pp.78-79, 1997.

## 謝辞

本論文は、筆者が名古屋大学大学院博士後期課程在学中(1996年4月～1999年3月)に行った研究成果をまとめたものです。研究を進めていく際に多くの人達に御指導や御助言をいただきました。

名古屋大学・宇佐美 勉先生には、筆者が大学院在学中に始終丁寧な御指導をしていただきました。先生は筆者自身が選択した研究テーマに関して寛大な御理解を示され、暖かく見守ってくださいました。また、筆者の研究が実際の構造設計及び耐震設計にどのように関連してくるかなど、先生の豊富な経験のもとに御助言をいただき、自分自身の研究が工学的にどのような意味合いを持っているかを把握しながら研究を進めていくことができました。

岐阜大学・藤井文夫先生には、特に分岐解析手法について御指導をいただきました。過去に弾性分岐問題を研究テーマにしていた筆者にとって、弾塑性分岐問題を取り扱う際にはさまざまな困難がありました。そんな状況の中で、先生と弾塑性分岐に関して1つずつ問題点を解決していくことができました。本研究における塑性不安定解析の計算手法を構築できたのも、ひとえに先生との数多くのディスカッションがあったからだと思います。

慶應義塾大学・野口裕久先生には、連続体力学及び非線形有限要素法に関する御指導をいただきました。筆者が今回の研究分野に踏み込む際に立ちはだかったのが連続体力学でしたが、慶應義塾大学に何度も足を運ぶ筆者に、先生は多忙であるにもかかわらず膨大な時間を割いて連続体力学の御指導をしてくれました。また、連続体力学だけでなく非線形有限要素法についても先生から本格的に学び、計算力学の基礎を習得する事ができたと思います。先生から得たこれらの知識は、今後研究者として研究を行っていく上で大きな財産になると思います。また東京大学・宮村倫司先生にも野口裕久先生と共にこの方面の御指導をいただきました。

東北大学・池田清宏先生からは、筆者とは違ったアプローチでの数学的な分岐理論に関する御指導を受けました。また、先生からは実際の材料挙動における分岐の影響についても貴重な御助言をいただき、それは本研究のヒントとなりました。筆者は東北大学の方へ何度もお邪魔させていただきましたが、その際には寺田賢二郎先生をはじめとする数理システム設計学講座の皆様たいへんお世話になりました。

東京大学・故 半谷裕彦先生には、日本計算工学会の第1研究分科会に参加する機会



を与えていただきました。この研究分科会に参加することによってさまざまな研究分野の人達と接触することができ、よりグローバルな視点で自分自身の研究を進めていくことができたと思います。この研究をまとめる前に先生がお亡くなりになられたのが残念でなりません。御冥福をお祈りします。また、この研究分科会における研究グループにおいても、日本大学・三井和男先生、鹿児島大学・本間俊雄先生、清水建設・瀧 諭氏、名古屋大学・萩原伸幸先生、富士総合研究所・眞鍋 尚氏に多くの御意見をいただきました。

神戸大学・富田佳宏先生からは塑性不安定問題に関して多くの御助言を受け、本研究を進行するにあたっては大きな励みとなりました。特にアメリカで開催された国際会議での長時間におよぶディスカッションは、とても有意義なものでした。

名古屋大学・佐竹洋一氏には、本研究の計算結果の妥当性を検証するための実験を行っていただくとともに、その実験結果を快く提供していただきました。そして名古屋大学・葛 漢彬先生、葛西 昭先生や筆者が所属していた研究室の皆様にもお世話になりました。また、名古屋大学・田辺忠顕先生、伊藤義人先生には、本研究に関して貴重な御意見をいただきました。

筆者は名古屋大学大学院博士後期課程在学中の3年間、日本学術振興会の特別研究員として研究奨励金と文部省科学研究費補助金(特別研究員奨励費)の支給を受けました。おかげで経済的な困難に遭遇することなく研究を進めていくことができました。

最後に、筆者の研究生活をいつも励ましてくれた両親(父・晴雄、母・ハツヨ)に感謝します。

1999年 1月

岡澤重信



