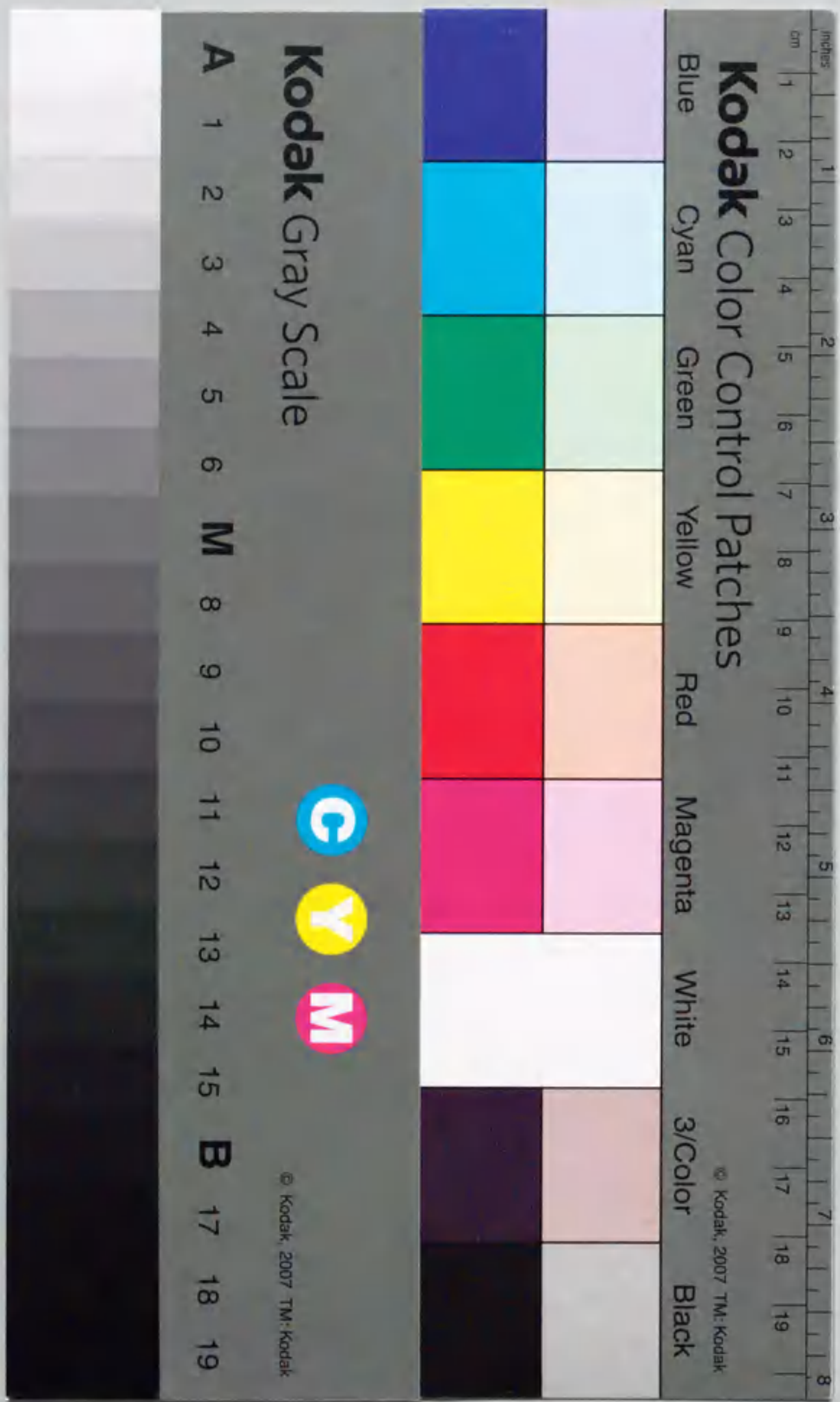


學位論文

核子の電磁的偏極率

1999年

田主裕一朗



報告番号 第 4537 号

核子の電磁的偏極率

田主 裕一朗

概要

電磁的偏極率を large N_c バリオン模型を用いて $1/N_c$ 展開の初項までのオーダーで計算した。まず、核子の内部構造を反映する物理量であるスピン平均電磁的偏極率およびスピン依存電磁的偏極率の定義および物理的意味を解説し、実験・理論両面の研究の現状を概観した。核子の電磁的偏極率を重バリオンカイラル摂動論を用いて計算する方法を紹介した。large N_c バリオン模型による電磁的偏極率の計算においては分散関係式を利用しているが、スピン依存偏極率の計算の際には注意深く取り扱う必要があることを示した。重バリオンカイラル摂動論と large N_c バリオン模型による結果を比較すると基本的に良く一致しており、電磁的偏極率においてパイオンループの寄与および $\Delta(1232)$ の寄与が支配的になっていることが分かった。しかし、2つの理論における摂動展開の方法論の違いによる不一致も見られた。両者の計算によるスピン平均電磁的偏極率は実験値より大きな値になるが、この原因はパイオン1ループの計算をしているからであることを示した。他方、スピン依存電磁的偏極率については高エネルギー領域の寄与があまり効かないために、多重極解析の結果と良く一致した。ハイペロンのスピン平均電磁的偏極率の large N_c バリオン模型による計算について述べた。

目次

第1章 序論	3
第2章 電磁的偏極率	6
2.1 コンプトン散乱	6
2.2 電磁的偏極率の物理的意味	7
2.3 分散関係式	8
2.4 電磁的偏極率の理論的・実験的現状	11
第3章 重バリオンカイラル摂動論 (HBChPT) による電磁的偏極率	14
3.1 重バリオンカイラル摂動論 (HBChPT)	14
3.2 HBChPTによる電磁的偏極率	16
3.3 $\Delta(1232)$ を含めた HBChPT による電磁的偏極率	18
3.4 計算結果	21
第4章 $1/N_c$ 展開による電磁的偏極率	23
4.1 large N_c バリオン模型	23
4.2 分散関係式	25
4.3 電磁相互作用	26
4.4 非ボルン項	27
4.4.1 パイオン光子生成振幅	28
4.4.2 電磁的偏極率	33
4.5 π^0 交換項	39
4.6 計算結果	40
第5章 ハイペロンの電磁的偏極率	44
5.1 現状	44
5.2 $1/N_c$ 展開による計算	45
5.2.1 メソン光子生成振幅	45
5.2.2 exotic states の質量	47
5.2.3 結果	47
第6章 まとめ	50

付録 A	51
A.1 スカーム模型における電磁相互作用ラグランジアン	51
A.2 積分公式	53
A.3 $N\pi$ 電気部分の分散関係式	54

第1章 序論

我々の世界を取り囲む物質は見た目もその性質も実に多種多様であるが、あらゆる物質は分子から構成されており、その物質の性質は分子の形状および分子同士の結合の仕方によって決定される。分子は複数の原子の集合体であり、その原子は質量のほとんどを担う原子核と、その周りを取り巻き原子の化学的な性質を決める電子から作られている。電子は内部構造を持たない素粒子であると考えられているのに対して、原子核を構成する核子は内部構造を持たない素粒子ではなく、より基本的な素粒子であるクォークから成る粒子である。核子はクォーク3個から構成される粒子の一種で、このような粒子をまとめてバリオンと呼ぶ。クォークから構成される粒子はハドロンと総称され、バリオン以外のハドロンとして、クォークと反クォークから成るメソンが知られている。現在のところバリオンとメソン以外のハドロンがあることを示す明確な証拠はない。

クォークの世界を支配する強い相互作用は量子色力学 (QCD) で説明される。QCD によると強い相互作用の荷量は3種類のカラー (赤, 緑, 青) で、クォークは各々1種類のカラーを持ち、クォーク同士はグルーオンを交換することによって相互作用する。強い相互作用の大きな特徴は、真空中にクォークやグルーオンが単体で存在することではなく、必ず「白色¹」になる組合せでハドロンの内部に閉じ込められていることにある。この機構はカラー閉じ込めと呼ばれ、定性的には QCD によって相互作用をするクォーク3個 (またはクォークと反クォークの) のうち、最も引力が強くなるカラーの組み合わせが「白色」になるものであることで理解できるが、何故その他の組み合わせが許されないのかについてはまだはっきりとは解明されていない。

QCD は非可換ゲージ理論と呼ばれる理論の一種であり、その特徴として相互作用を担うグルーオンもカラー荷を持つために、グルーオン同士がグルーオン交換によって強い相互作用をする。このグルーオンの自己相互作用のために、QCD は漸近的自由性と呼ばれる特徴を備えている。漸近的自由性とはエネルギーが高くなるにつれて相互作用がだんだん弱くなるという性質であり、強い相互作用の大きな特徴として知られているものである。漸近的自由性のために、QCD 結合定数は数 GeV 以上においては摂動論を用いることが可能な程に小さくなる。摂動論は素粒子物理においても十分に確立された非常に強力な手法であるから、摂動論を使えるのは非常に大きなメリットとなる。実際、摂動的 QCD は高エネルギー領域のハドロン反応に適用され、レプトンとハドロンの深非弾性散乱による構造関数や電子・陽電子対消滅反応におけるハドロンジェットの研究などで威力を発揮している。

¹ここでいう白色とは、厳密に言うとカラー SU(3) の完全反対称状態のことで、メソンの場合は赤・反赤, 緑・反緑, 青・反青の同じ割合での重ね合わせとなっている。

しかし核子の静的な性質を決定する典型的なエネルギー領域、すなわち低エネルギーの領域では、逆に相互作用が非常に強くなるために摂動論を用いることはできない。言い替えば、このエネルギー領域においては非摂動的な効果が重要な役割を果たすようになる。したがって、核子の内部構造を研究するためには、この非摂動効果を考慮しなければならない。だが非摂動効果を QCD に基づいて直接解析的に扱うことは非常に難しく、様々な試みがあるにも関わらず成功していない。現在のところ QCD を直接扱う唯一の方法は、時空を格子に離散化した上で数値的に解く格子 QCD である。最近の計算機の能力の飛躍的な向上によって格子 QCD は有用な手法になっているが、まだまだバリオンの動的な性質を調べるには不十分である。また格子 QCD は数値実験（シミュレーション）という側面が強く、ある結果を得たことがその物理的な本質をつかんだ事に直ちに結びつかない面もある。

一方、強い相互作用の低エネルギーにおける特徴として、カイラル対称性とその自発的破れ、クォーク・グルーオンのカラー閉じ込めなどの重要な性質が知られている。そこで、ハドロンの性質について研究する際に QCD を直接適用するのではなく、強い相互作用の特徴の一部を満たす適当なモデルで近似的に記述するという方法がある。そのようなモデルをまとめて低エネルギー有効モデルと言う。

有効モデルには様々なものが知られているが、本論文では有効モデルとしてスカームモデル [1] を取り上げる。スカームモデルは核子をパイオン場のソリトンとして取り扱うモデルであり、パイオンの自己相互作用はカイラル対称性を満たすように与える。そのためこのモデルは低エネルギー定理を満足する。低エネルギー定理とは、カイラル対称性の自発的破れから導き出される一連の法則である。一般に対称性が自発的に破れると南部-Goldstone ボソン（NG ボソン）と呼ばれる質量を持たないボソンが現れる。カイラル対称性の自発的破れに伴う NG ボソンを擬スカラーメソンと同定すると、対称性のために擬スカラーメソンには様々な性質が成り立つ。パイオンは擬スカラーメソンの一種であるため、パイオンにも低エネルギー定理が要請されるが、実際にパイオンは低エネルギー定理をよく満足しているので、パイオンを NG ボソンとみなすことは正しいと考えられている。核子をパイオン場のソリトンとするスカームモデルの描像は、クォークのカラー数 N_c を無限大にした QCD [2] におけるバリオンが持つ特徴に良く一致することで正当化される [3]。すなわち、スカームモデルは large N_c バリオンモデルの一種であると言える。実際のカラー数は 3 であるから、large N_c バリオンモデルの妥当性は、カラー数の逆数で展開する $1/N_c$ 展開を用いて展開の収束性を確認する必要がある。また、スカームモデルは large N_c バリオンモデルのある特別な形であるから、得られた結果がスカームモデルに特有なものかそれとも large N_c バリオンモデル一般に成り立つものなのかも考えなければならない。このように低エネルギー有効モデルは有用ではあるものの、各々のモデルの特徴や適用範囲を考え、またそのモデルによる予言が一般的なものなのかどうかを吟味する必要がある。

このようなモデルにつきまとう不確定性を嫌い、カイラル対称性とその自発的破れのみを仮定して、理論を展開するのがカイラル摂動論 (ChPT) である [4]。カイラル展開の初項は低エネルギー定理そのものであり、したがってカイラル展開は低エネルギー定理の拡張であると言える。ChPT はもともとは擬スカラーメソンのみの理論であるが、本論文ではこれをバリオンをも取り扱えるよう拡張しさらにバリオンを非常に重い粒子であると仮定

した重バリオンカイラル摂動論 (HBChPT) を取り上げる [5, 6]。ChPT および HBChPT の弱点は、相互作用ラグランジアンを対称性によってしか制限しないため、展開の次数を上げていくにつれて相互作用項の数は加速度的に増大してしまうことにある。このために、一般に展開の高次を計算するのは非常に困難であり、また計算出来たとしてもパラメータの数も増大しているために予言能力を失ってしまうのである。

本論文では核子の電磁的内部構造を反映した電磁的偏極率について考察する。電磁的偏極率は低エネルギーの実光子による弾性コンプトン散乱によって測定され、弱い電磁場中における核子の応答を表わす物理量である。光子は内部構造を持たない点粒子であり、なおかつ電磁的相互作用というその性質が良く知られている相互作用によってハドロンと相互作用するために、ハドロンの内部構造を探るプローブとして非常に有用である。電磁的偏極率を計算する手法としては、HBChPT およびスカームモデルを用いた。スカームモデルによる計算においては、スカームモデルの結果として用いているのは、各々の寄与の N_c 依存性の評価と large N_c バリオン間に成立する関係式のみであるから、得られた結果はスカームモデル固有のものではなく large N_c バリオンモデル一般に成り立つのである。

本論文は以下のように構成される。第 2 章では電磁的偏極率の定義およびその物理的意味を説明し、現在までの理論的および実験的研究について概観する。第 3 章ではコンプトン散乱振幅を直接評価することによって電磁的偏極率を求める。コンプトン散乱振幅を計算するために HBChPT を用いる。第 4 章ではまず核子の光子吸収振幅を求め、ユニタリティおよび分散関係式を利用して電磁的偏極率を求める。光子吸収振幅を計算する際にはスカームモデルを用いるが、結果はスカームモデルに限られるものではなく、large N_c に基づくモデル一般に成り立つものであることを示す。第 5 章では最近注目され始めているハイペロンの偏極率について簡単に述べる。第 6 章では議論をまとめ今後の課題について述べる。付録 A では第 4 章における数式および議論についての補足をする。

第2章 電磁的偏極率

2.1 コンプトン散乱

電磁的偏極率には核子や光子のスピンの依存しない2種類のスピン平均電磁的偏極率 α, β と、スピンに依存する4種類のスピン依存電磁的偏極率 $\gamma_i (i=1\sim 4)$ とがある。電磁的偏極率は前章で述べたようにコンプトン散乱によって測定されるので、まずコンプトン散乱振幅の一般論を展開しよう。

重心系における核子のコンプトン散乱振幅は、

$$\begin{aligned}
 T = & A_1(\omega, \theta) \boldsymbol{\epsilon}'^* \cdot \boldsymbol{\epsilon} + A_2(\omega, \theta) (\boldsymbol{\epsilon}'^* \cdot \hat{\mathbf{k}}) (\boldsymbol{\epsilon} \cdot \hat{\mathbf{k}}') \\
 & + A_3(\omega, \theta) i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\boldsymbol{\epsilon}'^* \times \boldsymbol{\epsilon}) + A_4(\omega, \theta) i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\hat{\mathbf{k}}' \times \hat{\mathbf{k}}) (\boldsymbol{\epsilon}'^* \cdot \boldsymbol{\epsilon}) \\
 & + A_5(\omega, \theta) i\boldsymbol{\sigma} \cdot [(\boldsymbol{\epsilon}'^* \times \hat{\mathbf{k}}) (\boldsymbol{\epsilon} \cdot \hat{\mathbf{k}}') - (\boldsymbol{\epsilon} \times \hat{\mathbf{k}}') (\boldsymbol{\epsilon}'^* \cdot \hat{\mathbf{k}})] \\
 & + A_6(\omega, \theta) i\boldsymbol{\sigma} \cdot [(\boldsymbol{\epsilon}'^* \times \hat{\mathbf{k}}') (\boldsymbol{\epsilon} \cdot \hat{\mathbf{k}}) - (\boldsymbol{\epsilon} \times \hat{\mathbf{k}}) (\boldsymbol{\epsilon}'^* \cdot \hat{\mathbf{k}})] \quad (2.1)
 \end{aligned}$$

で与えられる [7, 8]。ここで、 $\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{\epsilon}')$ と $\hat{\mathbf{k}}(\hat{\mathbf{k}}')$ は各々入射 (散乱) 光子の偏極ベクトルと運動量単位ベクトルで、 $\boldsymbol{\sigma}$ はパウリ行列である。これらのベクトルの独立な組合せは、パリティ対称性、荷電対称性、時間反転対称性を考慮し、横偏極条件 $\boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{k} = \boldsymbol{\epsilon}' \cdot \mathbf{k}' = 0$ を用いると、(2.1) の6種類に限られ、第1項と第2項はスピンに依存せず、第3項から第6項はスピンに依存している。このためスピンに依存しない電磁的偏極率が2種類、スピンに依存する電磁的偏極率が4種類となるわけである。

振幅 $A_i(\omega, \theta) (i=1\sim 6)$ は光子のエネルギー ω と散乱角 θ の関数である。 $A_i(\omega, \theta)$ はボルン項 $A_i(\omega, \theta)^B$ 、非ボルン項 $A_i(\omega, \theta)^{nB}$ 、および π^0 交換項 $A_i(\omega, \theta)^{\pi^0 \text{pole}}$ の和で書かれる。ボルン項はスピン 1/2 の内部構造を持たない点粒子による散乱を記述する項で、核子の質量、電荷、異常磁気モーメントで記述され、ファインマン図で書くと図 2.1 となる。それに対し非ボルン項は核子の内部励起やメソン生成などによるもので、核子の内部構造に依存している。また π^0 交換項は Wess-Zumino-Witten 項で表されるアノマリーによる $\pi^0 \gamma \gamma$ 相互作用を通した π^0 交換による寄与を表わし、ファインマン図で書くと図 2.2 になる。

電磁的偏極率は振幅 $A_i(\omega, \theta)$ からボルン項を除いた部分を光子のエネルギーで低エネルギー展開した時の最低次の係数として定義される。スピン平均振幅においては $\mathcal{O}(\omega^2)$ 、スピン依存部分では $\mathcal{O}(\omega^3)$ の係数となる。すなわち、

$$\begin{aligned}
 A_1(\omega, \theta) &= A_1(\omega, \theta)^B + 4\pi(\alpha + \beta \cos \theta) \omega^2 + \mathcal{O}(\omega^3) \\
 A_2(\omega, \theta) &= A_2(\omega, \theta)^B - 4\pi\beta \omega^2 + \mathcal{O}(\omega^3)
 \end{aligned}$$

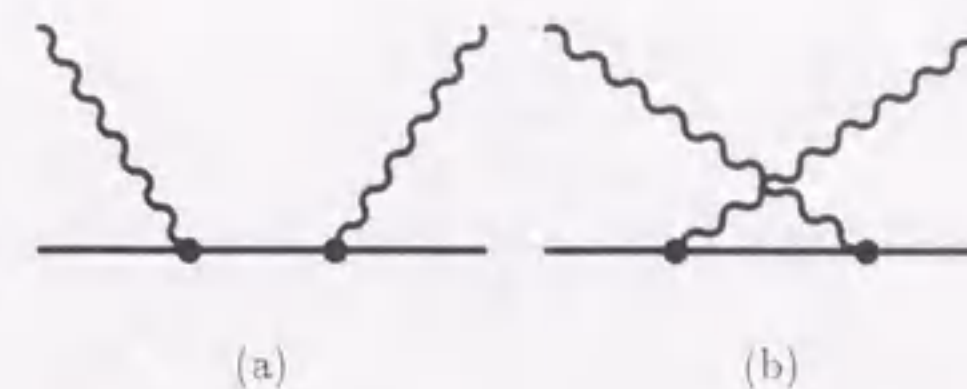


図 2.1: 核子のコンプトン散乱のボルンダイアグラム。波線は光子、実線は核子を表わしている。

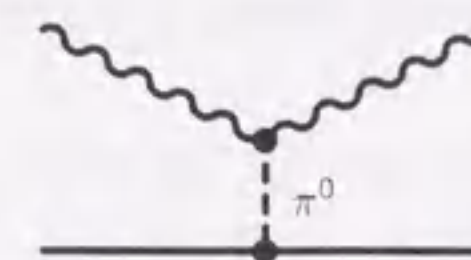


図 2.2: π^0 交換ダイアグラム。波線は光子、実線は核子、点線は π^0 を表わしている。

$$\begin{aligned}
 A_3(\omega, \theta) &= A_3(\omega, \theta)^B + 4\pi[\gamma_1 - (\gamma_2 + 2\gamma_4) \cos \theta] \omega^3 + \mathcal{O}(\omega^4) \\
 A_4(\omega, \theta) &= A_4(\omega, \theta)^B + 4\pi\gamma_2 \omega^3 + \mathcal{O}(\omega^4) \\
 A_5(\omega, \theta) &= A_5(\omega, \theta)^B + 4\pi\gamma_4 \omega^3 + \mathcal{O}(\omega^4) \\
 A_6(\omega, \theta) &= A_6(\omega, \theta)^B + 4\pi\gamma_3 \omega^3 + \mathcal{O}(\omega^4) \quad (2.2)
 \end{aligned}$$

となる。したがって、電磁的偏極率を求めるにはコンプトン散乱振幅の非ボルン項と π^0 交換項を光子のエネルギー ω で展開し、 ω の2乗もしくは3乗まで評価すれば良い。

2.2 電磁的偏極率の物理的意味

スピン平均電磁的偏極率は、各々電氣的偏極率 α と磁氣的偏極率 β と呼ばれる。この名前の由来は、外場として一様かつ弱い電場 \mathbf{E} と磁場 \mathbf{M} がある時に核子の分極が

$$\mathbf{d} = \alpha_0 \mathbf{E}, \quad \boldsymbol{\mu} = \beta_0 \mathbf{M} \quad (2.3)$$

で与えられることによる。この分極のために電磁場中における核子は

$$\Delta M = -\frac{1}{2} \alpha_0 \mathbf{E}^2 - \frac{1}{2} \beta_0 \mathbf{M}^2 \quad (2.4)$$

だけ質量が変化する。ここで α_0, β_0 と表記した理由は、コンプトン散乱振幅によって定義される電磁的偏極率と (2.3) で定義されるそれとは完全には一致しないからである。両者の関係は

$$\alpha = 2 \sum_{n \neq N} \frac{|\langle n | d_z | N \rangle|^2}{E_n - E_N} + \Delta \alpha = \alpha_0 + \Delta \alpha$$

$$\beta = 2 \sum_{n \neq N} \frac{|\langle n | \mu_z | N \rangle|^2}{E_n - E_N} + \Delta\beta = \beta_0 + \Delta\beta \quad (2.5)$$

で与えられる [9]。 $\Delta\alpha$ は核子の電気半径 r_E 、異常磁気モーメント κ を用いて

$$\Delta\alpha = \frac{e^2 r_E^2}{3M} + \frac{e^2 (\kappa^2 + 1)}{4M^3} \quad (2.6)$$

と評価されている [10]。 $\Delta\beta$ については磁気双極子

$$\mu = \frac{1}{2} \int d^3x \mathbf{x} \times \mathbf{j}(\mathbf{x}) \quad (2.7)$$

が \mathbf{x} の取り方に依存するため注意深い取り扱いが必要になるが、非相対論的近似においては \mathbf{x} の原点を重心に取れば良く、クォーク模型から

$$\Delta\beta = - \sum_q \frac{e_q^2 \langle r_q^2 \rangle}{6m_q} - \frac{\langle d^2 \rangle}{2M} \quad (2.8)$$

と評価されている [11, 12]。

スピン平均電磁的偏極率の場合とは異なり、スピン依存電磁的偏極率には特に各々に名前はないが、前方コンプトン散乱において現れる組合せ

$$\gamma_0 = \gamma_1 - \gamma_2 - 2\gamma_4 \quad (2.9)$$

を前方スピン依存電磁的偏極率と呼ぶことがある。スピン依存電磁的偏極率も電磁場中の核子の応答ではあるが、スピン平均電磁的偏極率とは異なり一様ではない電磁場中の応答を表わし、相互作用ハミルトニアンは

$$\frac{1}{4\pi} H = -\frac{1}{2} \left[(\gamma_1 + \gamma_3) \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{E} \times \dot{\mathbf{E}} + \gamma_4 \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{M} \times \dot{\mathbf{M}} - 2(\gamma_2 + \gamma_4) E_{ij} \sigma_i M_j + 2\gamma_3 M_{ij} \sigma_i E_j \right] \quad (2.10)$$

と書ける [13]。ここで E_{ij} と M_{ij} は電磁場の四重極の強さで

$$E_{ij} = \frac{1}{2} (\nabla_i E_j + \nabla_j E_i), \quad M_{ij} = \frac{1}{2} (\nabla_i M_j - \nabla_j M_i) \quad (2.11)$$

と定義される。(2.10) の第 1 項、第 2 項は E1→E1, M1→M1 遷移の強さ、第 3 項、第 4 項は M1→E2, E1→M2 遷移の相互作用を表わしている。

2.3 分散関係式

コンプトン散乱振幅を直接評価する代わりに、分散関係式とユニタリティを用いることによって核子の光子吸収振幅から電磁的偏極率を求めることができる。この節では、まずその概略を示し、その後有用な 2 つの和則を導く。

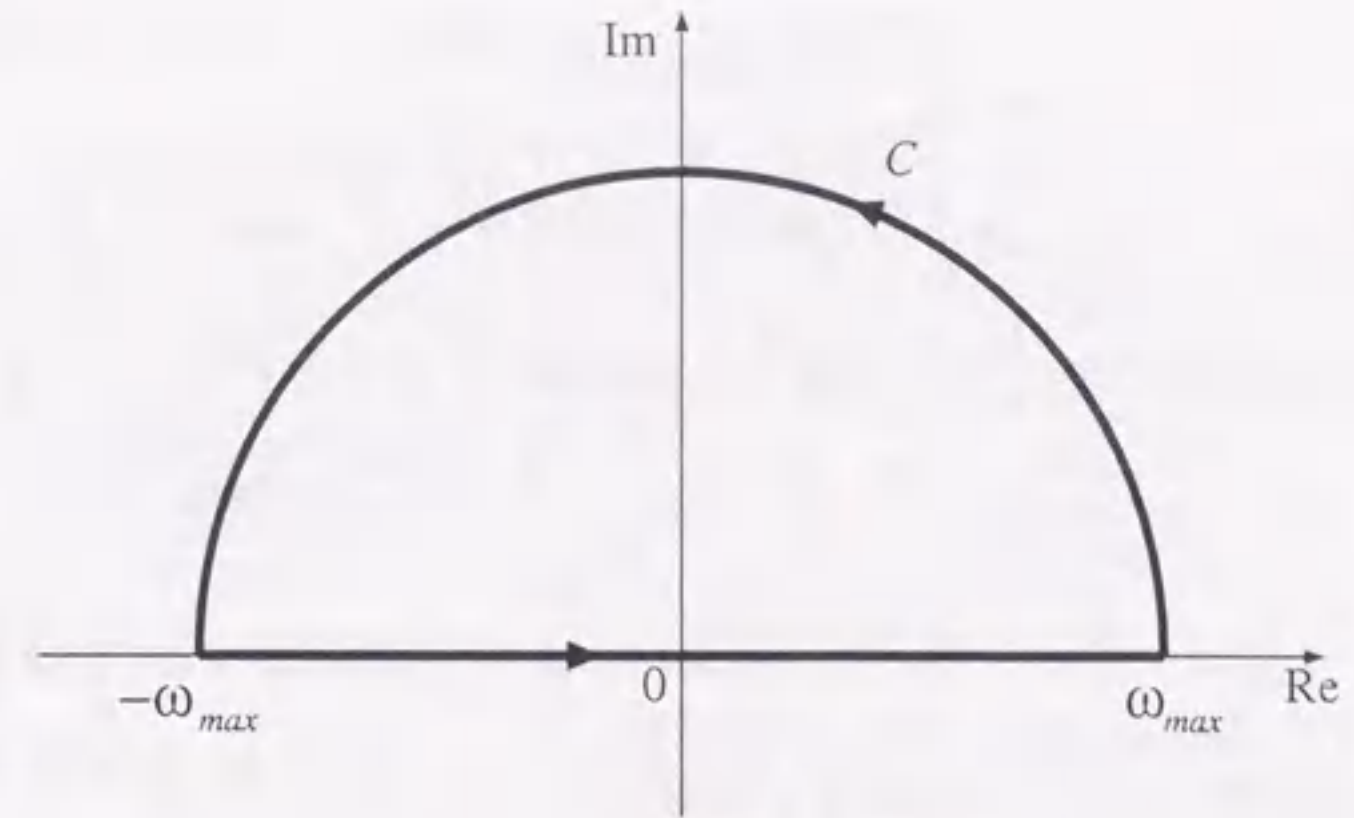


図 2.3: $g(\omega)$ の積分経路。

一般に解析的な関数 $g(\omega)$ が

$$g^*(-\omega) = g(\omega) \quad (2.12)$$

を満足している時、分散関係式

$$\text{Re } g(\omega) = \frac{2}{\pi} \text{P} \int_0^{\omega_{max}} d\omega' \frac{\omega'}{\omega'^2 - \omega^2} \text{Im } g(\omega') + \frac{1}{\pi} \text{Im} \int_C d\omega' \frac{\omega'}{\omega'^2 - \omega^2} g(\omega') \quad (2.13)$$

が成り立つ。右辺の第 1 項は主値積分であり、第 2 項における経路 C は複素 ω 平面における半径 ω_{max} の上半面円である (図 2.3 を参照)。ここで、 ω が大きい時に $g(\omega)$ が高々 $O(\omega^{-1})$ 程度の振舞いをするを仮定すると、 $\omega_{max} \rightarrow \infty$ の極限で第 2 項が落ち

$$\text{Re } g(\omega) = \frac{2}{\pi} \text{P} \int_0^{\infty} d\omega' \frac{\omega'}{\omega'^2 - \omega^2} \text{Im } g(\omega') \quad (2.14)$$

が成り立つ。

ところで条件式 (2.12) はまさに散乱振幅 T が満たすべき条件であるから、分散関係式 (2.14) をコンプトン散乱振幅 (2.1) に適用することができる。電磁的偏極率は (2.2) から分かるように非ボルン項の ω 展開の初項であり、また $A_i(\omega, \theta)$ の前方 ($\theta = 0$) での値さえ分かれば良いので、分散関係式 (2.14) を

$$\frac{A_i(\omega, 0)}{\omega^2} \quad (i = 1, 2), \quad \frac{A_i(\omega, 0)}{\omega^3} \quad (i = 3 \sim 6)$$

に適用し、 $\omega = 0$ と置けば電磁的偏極率が求まる。その結果は

$$\alpha + \beta = \frac{1}{2\pi^2} \int_{\omega_{th}}^{\infty} \frac{d\omega'}{\omega'^3} \text{Im } A_1(\omega', 0)^{nB}$$

$$\beta = -\frac{1}{2\pi^2} \int_{\omega_{th}}^{\infty} \frac{d\omega'}{\omega'^3} \text{Im } A_2(\omega', 0)^{nB}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_0 &= \frac{1}{2\pi^2} \int_{\omega_{th}}^{\infty} \frac{d\omega'}{\omega'^4} \text{Im} A_3(\omega', 0)^{nB} \\
\gamma_2 &= \frac{1}{2\pi^2} \int_{\omega_{th}}^{\infty} \frac{d\omega'}{\omega'^4} \text{Im} A_4(\omega', 0)^{nB} \\
\gamma_3 &= \frac{1}{2\pi^2} \int_{\omega_{th}}^{\infty} \frac{d\omega'}{\omega'^4} \text{Im} A_6(\omega', 0)^{nB} + \pi_0 \text{交換項} \\
\gamma_4 &= \frac{1}{2\pi^2} \int_{\omega_{th}}^{\infty} \frac{d\omega'}{\omega'^4} \text{Im} A_5(\omega', 0)^{nB} + \pi_0 \text{交換項} \quad (2.15)
\end{aligned}$$

となる。ここで、 ω_{th} はパイオン光子生成反応のしきい値である¹。 π^0 交換項は分散関係式では評価できず、また α , β , γ_0 , γ_2 には寄与しない。

コンプトン散乱振幅の非ボルン項の虚数成分はユニタリテイ

$$2 \text{Im} T_{fi} = \sum_n T_{nf}^* T_{ni} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_n - p_i) \quad (2.16)$$

を用いて光子吸収振幅と関係づけられる。したがって、分散関係式(2.15)とユニタリテイを用いれば、電磁的偏極率は光子吸収振幅から求めることができる。

前方コンプトン散乱の場合には、コンプトン散乱振幅は光学定理によって光子吸収断面積と関係付けられるので、重要な和則を導くことができる。前方コンプトン散乱振幅(2.1)は

$$T = A_1(\omega, 0) \epsilon'^* \cdot \epsilon + A_3(\omega, 0) i \sigma \cdot (\epsilon'^* \times \epsilon) \quad (2.17)$$

となり、スピン平均部分、スピン依存部分とも1項のみが残る。電磁的偏極率は(2.2)から、各々 $\alpha + \beta$, γ_0 という組合せとなることがわかる。また振幅 $A_1(\omega, 0)$, $A_3(\omega, 0)$ の虚数部分は、光学定理によって光子吸収断面積 σ_{abs} と結び付けることができる。すなわち

$$\begin{aligned}
\text{Im} A_1(\omega, 0) &= \frac{\omega}{2} \left(\sigma_{abs}^{1/2}(\omega) + \sigma_{abs}^{3/2}(\omega) \right) \equiv \omega \bar{\sigma}_{abs}(\omega) \\
\text{Im} A_3(\omega, 0) &= \frac{\omega}{2} \left(\sigma_{abs}^{1/2}(\omega) - \sigma_{abs}^{3/2}(\omega) \right) \equiv \frac{\omega}{2} \Delta \sigma_{abs}(\omega) \quad (2.18)
\end{aligned}$$

という関係式が成り立つ。ここで、光子吸収断面積の上添字は反応の全ヘリシティを表わしており、 $\sigma_{abs}^{3/2}$ ($\sigma_{abs}^{1/2}$) は光子と核子のスピンが平行 (反平行) であることを意味する。光学定理を用いると、式(2.15)から直ちに Baldin 和則 [14]

$$\alpha + \beta = \frac{1}{2\pi^2} \int_{\omega_{th}}^{\infty} \frac{d\omega}{\omega^2} \bar{\sigma}_{abs}(\omega) \quad (2.19)$$

および、Gell-Mann-Goldberger-Thirring (GGT) 和則 [15]

$$\gamma_0 = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\omega_{th}}^{\infty} \frac{d\omega}{\omega^3} \Delta \sigma_{abs}(\omega) \quad (2.20)$$

が導かれる。

¹しきい値以下では弾性散乱のみであるから虚数部分はない。

2.4 電磁的偏極率の理論的・実験的現状

核子のスピン平均電磁的偏極率はすでに多くの実験で測定されている。低エネルギーでのコンプトン散乱断面積よりも光子吸収断面積のほうが精度の高い測定ができるので、Baldin 和則 (2.19) を用いることによって、 $\alpha + \beta$ については α や β 各々の値よりも誤差の小さい値を得ることができる。最近 Babusci らは最新の光子吸収断面積のデータを用いて Baldin 和則を再計算し、次のような値を得た [16]。

$$\begin{aligned}
(\alpha + \beta)^p &= (13.69 \pm 0.14) \times 10^{-4} \text{ fm}^3 \\
(\alpha + \beta)^n &= (14.40 \pm 0.66) \times 10^{-4} \text{ fm}^3 \quad (2.21)
\end{aligned}$$

α , β 各々の偏極率については、以下の通りである。まず陽子の場合には、パイオン生成のしきい値以下の低エネルギー光子によるコンプトン散乱を観測することによって電磁的偏極率の測定がなされており、最新の実験値は

$$\begin{aligned}
\alpha^p &= (12.1 \pm 0.8 \pm 0.5) \times 10^{-4} \text{ fm}^3 \\
\beta^p &= (2.1 \mp 0.8 \mp 0.5) \times 10^{-4} \text{ fm}^3 \quad (2.22)
\end{aligned}$$

である [17]。ここで α と β の誤差の符号が逆になっているのは Baldin 和則の制限を考慮しているためである。なお、この実験は Babusci らによる Baldin 和則の再評価以前に行なわれているため、 $\alpha + \beta$ の値は (2.21) とは少しずれている。中性子については、鉛などの重イオンがつくり出す電場中での中性子散乱によって電磁的偏極率が測定されており、

$$\alpha^n = (12.6 \pm 1.5 \pm 2.0) \times 10^{-4} \text{ fm}^3 [18] \quad (2.23)$$

という値が得られている²。

一方、スピン依存電磁的偏極率はまだ測定されていないが、実験技術の進歩により高い偏極度でスピン偏極している光子ビームと核子標的を用いることが可能となってきた。そのため、核子のスピン構造に対する興味が高まってきており、最近 Drell-Hearn-Gerasimov (DHG) 和則 [20]

$$-\frac{e^2 \kappa^2}{8\pi M^2} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\omega_{th}}^{\infty} \frac{d\omega}{\omega} \Delta \sigma_{abs}(\omega) \quad (2.24)$$

の検証実験が Mainz で行なわれている。この実験では $\Delta \sigma_{abs}(\omega)$ を $\omega = 200 \sim 800 \text{ MeV}$ の範囲で測定している。GGT 和則 (2.20) を用いれば、この実験の結果からスピン依存電磁的偏極率 γ_0 の評価を行なうことができるので、初めてスピン依存電磁的偏極率が測定されることになるわけであるが、現在の段階ではまだ解析結果は報告されていない。スピン平均光子吸収断面積の多重極解析によるスピン依存電磁的偏極率の評価はなされており、

$$\gamma_0^p = -0.6 \times 10^{-4} \text{ fm}^4, \quad \gamma_0^n = -0.2 \times 10^{-4} \text{ fm}^4 \quad (2.25)$$

という値が得られている [21]。

²最近の実験 [19] では $\alpha^n = (0.0 \pm 5.0) \times 10^{-4} \text{ fm}^3$ という従来の実験とは大きく異なる値が報告されており、中性子の電磁的偏極率の値については決着が着いていない。

表 2.1: 核子のスピン平均電磁的偏極率。非相対論的クォーク模型 (NRQM), Bag 模型, スカーム模型は摂動計算, 格子 QCD (LQCD), QCD 和則 (QSR) は核子の質量変化, カイラル摂動論 (ChPT), 重バリオンカイラル摂動論 (HBChPT) はコンプトン散乱振幅から計算したものである。格子 QCD の計算はクォークの質量を 46.25 MeV としたものであり, 小さめに評価していると予想される。単位は 10^{-4} fm^3 である。

	NRQM	Bag	スカーム	LQCD	QSR	ChPT	HBChPT
α^p	3.1	10.8	13.4			7.4	10.5
β^p		2.1	-1.1			-2.0	3.5
α^n	3.1	10.8	13.4	11	16.5	10.1	13.4
β^n		1.5	-1.1			-1.2	7.8

理論的にも核子のスピン平均電磁的偏極率はさまざまな手段で計算されている。計算の方法には (a) 摂動論の式 (2.5) を利用したもの, (b) 核子の質量変化 (2.4) を計算したもの, (c) コンプトン散乱振幅の定義から計算したものがある。(a) には非相対論的クォーク模型 (NRQM) [22], Bag 模型 [23, 24], スカーム模型 [25] など, (b) には格子 QCD [26], QCD 和則 [27] など, (c) には相対論的カイラル摂動論 (ChPT) [28], 重バリオンカイラル摂動論 (HBChPT) [6, 29], などの手法による計算がある。それらの結果を表 2.1 にまとめる。結果は計算手法によってかなりまちまちではあるものの, α は β より大きく, 陽子と中性子の差は小さいという定性的な性質はだいたい再現されていると言えよう。

一方, スピン依存電磁的偏極率は今まで理論的には研究されていなかったが, 実験的に測定が可能になりつつあることもあって最近では興味を持たれており, 主に HBChPT による計算がなされ始めている [8, 30, 31]。HBChPT による計算については次章で詳しく述べる。

さて, ここで改めて理論的に電磁的偏極率を評価するにはどのような手段を用いればいいのかを考えてみよう。陽子の電荷分布は単に構成要素であるクォークの分布だけで説明することは出来ず, 中心部のまわりをパイオンの雲が覆っていると考えなければならないことが知られている。電磁的偏極率は非常にエネルギーが低い光子によって測定されるものであるから, まず陽子の比較的外部の状態すなわちパイオンの雲の状態が反映されるだろう。とは言え核子が仮想的に励起状態に移行し, また基底状態に戻るという効果も完全に無視するわけにはいかない。光子と陽子のハドロン反応断面積を図 2.4 に示した [32]。この図を低エネルギー側から見ていくと, まず $\Delta(1232)$ の共鳴が大きく見え, ついで $N^*(1440)$ などの共鳴があり, その後は連続状態に移行している。Baldin 和則 (2.19), GGT 和則 (2.20) から, 電磁的偏極率は光子吸収断面積に光子のエネルギーの逆ベキの 2 乗もしくは 3 乗をかけたものを積分することによって求められるので, 核子の励起状態としてはさしあたり $\Delta(1232)$ の寄与を考えれば十分であろうと思われる。したがって, 電磁的偏極率を評価するに当たっては, 最低条件としてパイオンの雲および $\Delta(1232)$ の効果を取り入れることの出来る有効模型を用いる必要がある。この条件を満たすものとして $\Delta(1232)$ をふくむように拡張した HBChPT, およびスカーム模型を取り上げる。ただし,

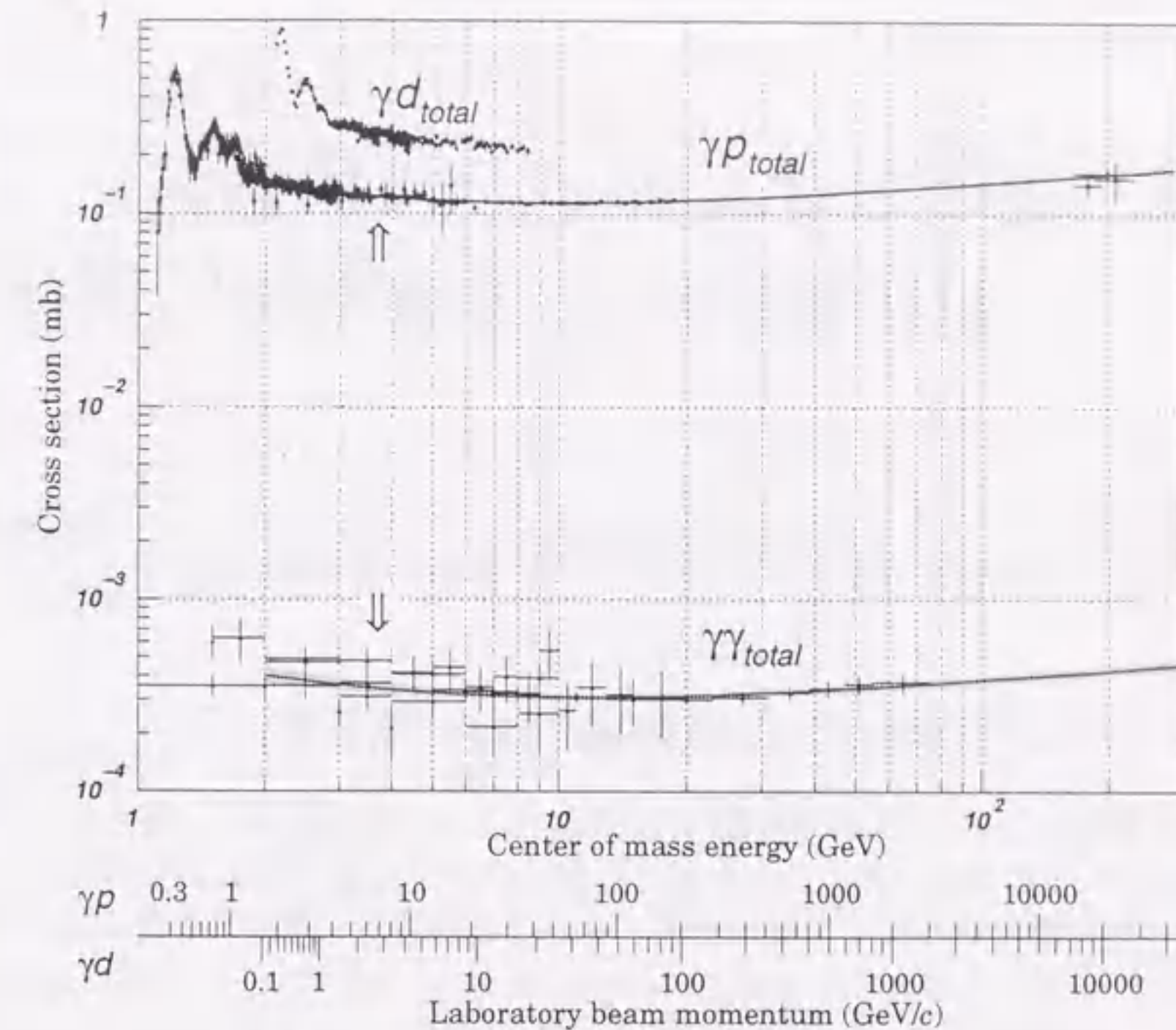


図 2.4: 光子・陽子ハドロン反応断面積

第 4 章で詳しく述べるが, スカーム模型によって得られる結果はスカーム模型固有のものではなく, 広く $1/N_c$ 展開の枠組で説明できるものである。HBChPT ではコンプトン散乱振幅を直接計算することによって電磁的偏極率を求めるのに対して, スカーム模型では分散関係式を利用して電磁的偏極率を求めることにする。

第3章 重バリオンカイラル摂動論 (HBChPT)による電磁的偏極率

この章では重バリオンカイラル摂動論 (HBChPT) を用いてコンプトン散乱振幅を計算し、前章で与えた電磁的偏極率の定義に基づいて電磁的偏極率を評価する。

3.1 重バリオンカイラル摂動論 (HBChPT)

カイラル摂動論 (ChPT) は強い相互作用の低エネルギー有効理論の一種であり、Gasser と Leutwyler によって定式化されたものである [4]。ChPT は強い相互作用の低エネルギーにおける大きな特徴であるカイラル対称性とその自発的破れを理論の基礎にしている。一般に対称性が自発的に破れると南部-Goldstone ボソン (NG ボソン) と呼ばれる質量を持たないボソンが現れるが、擬スカラーメソンが NG ボソンであると考え、擬スカラーメソンの性質を良く説明出来ることが知られている。実際にはクォークがわずかながら質量を持っているためにカイラル対称性は厳密には成り立っておらず、そのために NG ボソンである擬スカラーメソンは小さいながらも質量を持っている。ChPT は擬スカラーメソンのみで構成される理論で、相互作用の形は対称性のみを課して構成され、その結合定数は実験から決まるパラメータとして扱われる。ChPT の摂動展開パラメータは擬スカラーメソンの運動量および質量で、これらをカイラルパラメータと呼び、カイラルパラメータによる摂動展開をカイラル展開と呼ぶ。ChPT の大きな特徴は、カイラル展開とループ展開とが一致することにある。したがって、相互作用の形自体は繰り込み不可能であるにも関わらず、ある定まったオーダーまでの展開において意味のある答を出すことができるのである。

このように ChPT はもともと NG ボソンの有効理論であるが、Gasser らはこれをバリオン八重項を含むように拡張し [33]、このような拡張を行なうとカイラル展開とループ展開の同一性が崩れてしまうことを指摘した。この原因はカイラル極限 (クォークの質量を 0 にする極限) においてバリオンの質量が 0 にならないことにある。この困難はバリオンを非常に重い粒子として扱う重バリオン近似によって避けられることが Jenkins と Manohar によって示された [5]。また、Bernard らはバリオンの質量の逆数を摂動展開パラメータの一つとみなすことによって、摂動展開とループ展開は一致するようになることを示し、HBChPT を定式化した [6]。

この節では、核子の電磁的偏極率を評価する時に必要となる最小限のラグランジアン、すなわちフレーバー SU(2) でゲージ場として電磁場のみがある場合のラグランジアンを

与えておく。この系に含まれるのは、パイオン、核子、光子となる。より一般的な形については、例えば文献 [30] を参照されたい。

カイラル展開の初項において、ラグランジアンはパイオンと光子で構成され核子は含まない $\mathcal{L}_{\pi\pi}^{(2)}$ と、核子も含んでいる $\mathcal{L}_{\pi N}^{(1)}$ から構成される。 $\mathcal{L}_{\pi\pi}^{(2)}$ はパイオン場

$$U(x) = \exp \left[\frac{i}{f_\pi} \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\pi}(x) \right] \quad (3.1)$$

を用いて、

$$\mathcal{L}_{\pi\pi}^{(2)} = \frac{1}{4} f_\pi^2 \text{Tr} (\nabla_\mu U \nabla^\mu U) + \frac{1}{4} m_\pi^2 f_\pi^2 \text{Tr} (U + U^\dagger) \quad (3.2)$$

で与えられる。 f_π と m_π はパイオンの崩壊定数および質量である。ここで、共変微分 $\nabla_\mu U$ は、光子場を A_μ とすると

$$\nabla_\mu U = \partial_\mu U - ie A_\mu [Q, U] \quad (3.3)$$

で与えられる。ここで、電荷行列 $Q = \text{diag}(1, 0)$ である。 $\mathcal{L}_{\pi N}^{(1)}$ は、重バリオン近似をする前は核子場 Ψ を用いて、

$$\mathcal{L}_{\pi N}^{(1)} = \bar{\Psi} \left(iD - M + \frac{g_A}{2} \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\gamma} \right) \Psi \quad (3.4)$$

で与えられる。 M は核子の質量、 g_A は核子の軸性結合定数である。また、核子場の共変微分は

$$D_\mu \Psi = \partial_\mu \Psi - ie Q A_\mu \Psi \quad (3.5)$$

で与えられ、 u_μ は $u = \exp[(i/2f_\pi)\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\pi}]$ を用いて、

$$u_\mu = i\{u^\dagger, \nabla_\mu u\} = iu^\dagger \nabla_\mu U u^\dagger \quad (3.6)$$

と定義される。

重バリオン近似は以下の手順によって実行される。まず、バリオンの 4 元運動量 p_μ を 4 元速度 $v_\mu (v^2 = 1)$ を用いて

$$p_\mu = M v_\mu + k_\mu \quad (3.7)$$

と分解する。ここで k_μ は soft 運動量と呼ばれる量で $v^\mu k_\mu \ll M$ を満足する。次に射影演算子 $P_\pm = (1 \pm \not{v})/2$ を用いて核子場を

$$\begin{aligned} H &= e^{iMv \cdot x} P_+ \Psi \\ h &= e^{iMv \cdot x} P_- \Psi \end{aligned} \quad (3.8)$$

のように、large 成分 H と small 成分 h とに分解する。静止系 $v^\mu = (1, 0)$ においては、 H (h) は上成分 (下成分) のみを持っている。これをラグランジアンに代入すると直ちにわかるように、 H は質量 0、 h は質量 $2M$ の粒子とみなせるので、 h を含む項は重バリオン近似において高次項となる¹。よって、重バリオン近似をするとカイラル展開の初項 $\mathcal{L}_{\pi N}^{(1)}$

¹実際には経路積分による量子化を用いて h は変数変換した後で積分してしまうので、有効ラグランジアンには h は現れない。 h を積分して現れるフェルミオン行列式は定数になる。また変数変換によって H の 2 次項は M の逆数の級数となるので $1/M$ 展開がきちんと定義される。 $1/M$ 展開をメソンの運動量による展開とともにカイラル展開パラメータとして取り扱えば、重バリオンカイラル展開とループ展開との同一性が示される [6]。

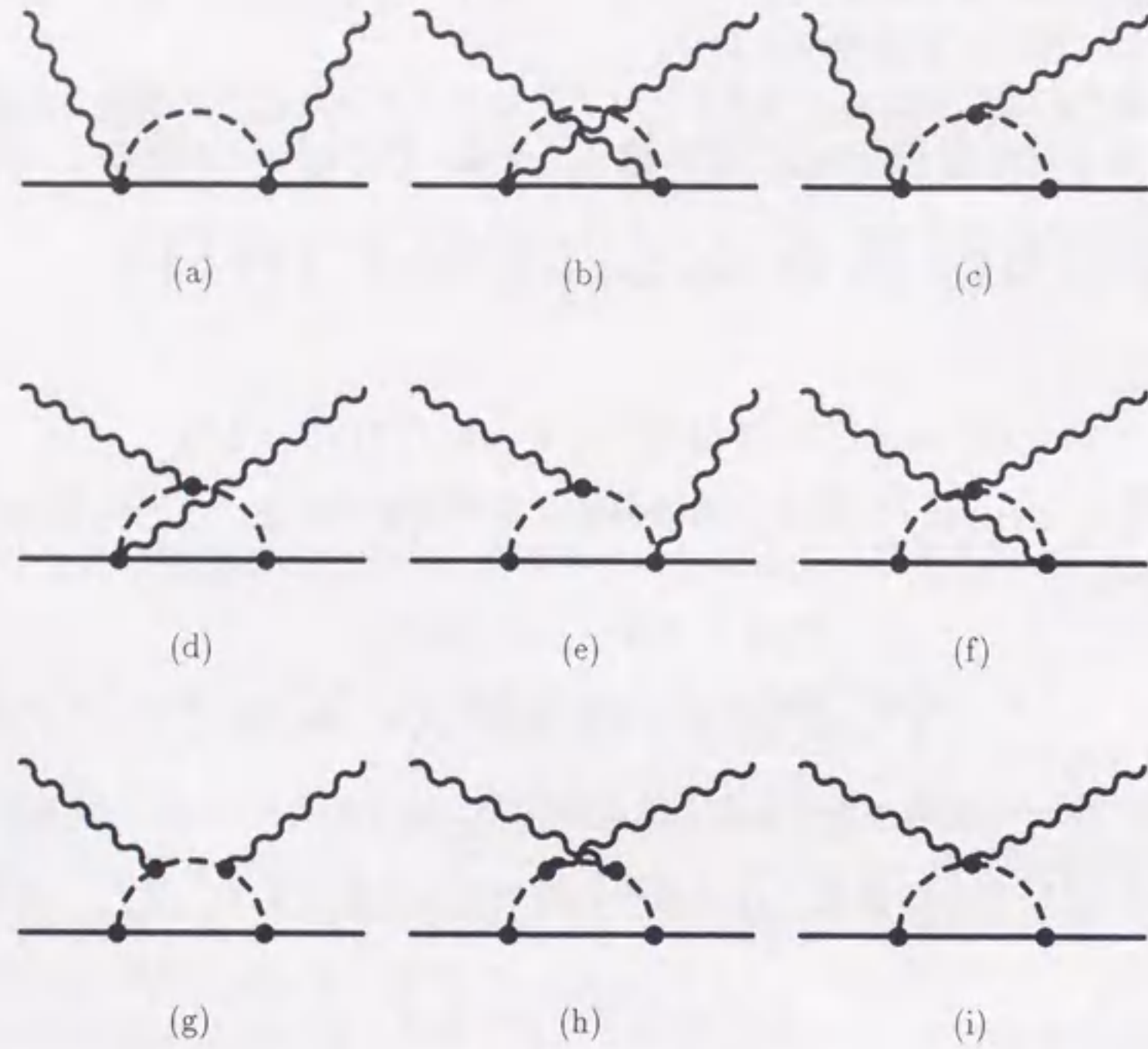


図 3.1: $N\pi$ -loop ダイアグラム。波線は光子，実線は核子，点線はパイオンを表わしている。

は

$$\mathcal{L}_{\pi N}^{(1)} = \bar{H} (iv \cdot D + g_A u \cdot S) H \quad (3.9)$$

で与えられる。スピン演算子 S_μ は

$$S_\mu = \frac{i}{2} \gamma_5 \sigma_{\mu\nu} v^\nu \quad (3.10)$$

で定義される。

3.2 HBChPT による電磁的偏極率

Bernard らは，カイラル展開の初項，すなわち $\mathcal{O}(p^3)$ で HBChPT を用いて電磁的偏極率を求めた [6]。カイラル展開の初項において計算する必要のあるグラフは，パイオンのループ効果である $N\pi$ -loop 項 (図 3.1) と量子異常に基づく π^0 交換項 (図 2.2) である。これらを計算すると $N\pi$ -loop 項は

$$A_1(\omega, \theta)^{nB} = \frac{e^2 g_A^2}{4\pi 2f_\pi^2} \left\{ m_\pi - \sqrt{m_\pi^2 - \omega^2} \right.$$

$$\begin{aligned}
 & \left. + \frac{2m_\pi^2 - t}{\sqrt{-t}} \left[\frac{1}{2} \arctan \frac{\sqrt{-t}}{2m_\pi} - \int_0^1 dz \arctan \frac{(1-z)\sqrt{-t}}{2\sqrt{m_\pi^2 - \omega^2 z^2}} \right] \right\} \\
 A_2(\omega, \theta)^{nB} &= \frac{e^2 g_A^2}{4\pi 2f_\pi^2} \frac{t - 2m_\pi^2}{(-t)^{3/2}} \omega^2 \\
 & \int_0^1 dz \left[\arctan \frac{(1-z)\sqrt{-t}}{2\sqrt{m_\pi^2 - \omega^2 z^2}} - \frac{2(1-z)\sqrt{t(\omega^2 z^2 - m_\pi^2)}}{4m_\pi^2 - 4\omega^2 z^2 - t(1-z)^2} \right] \\
 A_3(\omega, \theta)^{nB} &= \frac{e^2 g_A^2}{4\pi 2\pi f_\pi^2} \left[\frac{m_\pi^2}{\omega} \arcsin^2 \frac{\omega}{m_\pi - \omega} \right] \\
 & + \frac{e^2 g_A^2}{4\pi \pi f_\pi^2} \omega^4 \sin^2 \theta \int_0^1 dx \int_0^1 dz \frac{x(1-x)z(1-z)^3}{W^3} \left[\arcsin \frac{\omega z}{R} + \frac{\omega z W}{R^2} \right] \\
 A_4(\omega, \theta)^{nB} &= \frac{e^2 g_A^2}{4\pi \pi f_\pi^2} \omega^2 \int_0^1 dx \int_0^1 dz \frac{z(1-z)}{W} \arcsin \frac{\omega z}{R} \\
 A_5(\omega, \theta)^{nB} &= \frac{e^2 g_A^2}{4\pi 2\pi f_\pi^2} \omega^2 \int_0^1 dx \int_0^1 dz \left[-\frac{(1-z)^2}{W} \arcsin \frac{\omega z}{R} \right. \\
 & \left. + 2\omega^2 \cos \theta \frac{x(1-x)z(1-z)^3}{W^3} \left(\arcsin \frac{\omega z}{R} + \frac{\omega z W}{R^2} \right) \right] \\
 A_6(\omega, \theta)^{nB} &= \frac{e^2 g_A^2}{4\pi 2\pi f_\pi^2} \omega^2 \int_0^1 dx \int_0^1 dz \left[\frac{(1-z)^2}{W} \arcsin \frac{\omega z}{R} \right. \\
 & \left. - 2\omega^2 \frac{x(1-x)z(1-z)^3}{W^3} \left(\arcsin \frac{\omega z}{R} + \frac{\omega z W}{R^2} \right) \right] \quad (3.11)
 \end{aligned}$$

π^0 交換項は

$$\begin{aligned}
 A_3(\omega, \theta)^{\pi^0 \gamma \gamma} &= \frac{e^2 g_A t \omega}{4\pi 2\pi f_\pi^2 (m_\pi^2 - t)} \tau_3 \\
 A_5(\omega, \theta)^{\pi^0 \gamma \gamma} &= -\frac{e^2 g_A t \omega}{4\pi 4\pi f_\pi^2 (m_\pi^2 - t)} \tau_3 \\
 A_6(\omega, \theta)^{\pi^0 \gamma \gamma} &= -A_5(\omega, \theta)^{\pi^0 \gamma \gamma} \\
 A_1(\omega, \theta)^{\pi^0 \gamma \gamma} &= A_2(\omega, \theta)^{\pi^0 \gamma \gamma} = A_4(\omega, \theta)^{\pi^0 \gamma \gamma} = 0 \quad (3.12)
 \end{aligned}$$

となる。ここで

$$\begin{aligned}
 t &= -2\omega^2(1 - \cos \theta) \\
 W &= \sqrt{m_\pi^2 - \omega^2 z^2 + t(1-z)^2 x(x-1)} \\
 R &= \sqrt{m_\pi^2 + t(1-z)^2 x(x-1)} \quad (3.13)
 \end{aligned}$$

である。

これから直ちに電磁的偏極率が計算され， $N\pi$ -loop 項の寄与は

$$\alpha^{N\pi\text{-loop}} = \frac{e^2 5g_A^2}{4\pi 96\pi f_\pi^2 m_\pi}, \quad \beta^{N\pi\text{-loop}} = \frac{1}{10} \alpha^{N\pi\text{-loop}}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_0^{N\pi\text{-loop}} &= \frac{e^2}{4\pi} \frac{g_A^2}{24\pi^2 f_\pi^2 m_\pi^2} \\
\gamma_1^{N\pi\text{-loop}} &= \gamma_0^{N\pi\text{-loop}}, \quad \gamma_2^{N\pi\text{-loop}} = \frac{1}{2} \gamma_0^{N\pi\text{-loop}} \\
\gamma_3^{N\pi\text{-loop}} &= \frac{1}{4} \gamma_0^{N\pi\text{-loop}}, \quad \gamma_4^{N\pi\text{-loop}} = -\frac{1}{4} \gamma_0^{N\pi\text{-loop}}
\end{aligned} \tag{3.14}$$

となり、 π^0 交換項の寄与は

$$\begin{aligned}
\gamma_1^{\pi^0\gamma\gamma} &= -\frac{e^2}{4\pi} \frac{g_A}{4\pi^2 f_\pi^2 m_\pi^2} \tau_3 \\
\gamma_3^{\pi^0\gamma\gamma} &= \frac{e^2}{4\pi} \frac{g_A}{8\pi^2 f_\pi^2 m_\pi^2} \tau_3 \\
\gamma_4^{\pi^0\gamma\gamma} &= -\frac{e^2}{4\pi} \frac{g_A}{8\pi^2 f_\pi^2 m_\pi^2} \tau_3 \\
\alpha^{\pi^0\gamma\gamma} &= \beta^{\pi^0\gamma\gamma} = \gamma_2^{\pi^0\gamma\gamma} = 0
\end{aligned} \tag{3.15}$$

となる。 $N\pi$ -loop の寄与は陽子と中性子で同符号であるのに対し、 π^0 交換項の寄与は陽子と中性子で逆符号をとる。電磁的偏極率がパイオンの質量の逆数もしくは逆数の2乗に比例しているのは、パイオンの雲による寄与であることを反映している。

3.3 $\Delta(1232)$ を含めた HBChPT による電磁的偏極率

HemmertらはHBChPTを $\Delta(1232)$ を含む系に拡張した[34]。彼らの手法は、以下の通りである。まずバリオンChPTに $\Delta(1232)$ を力学的自由度として加え、対称性のみで相互作用項の形を定める。それから核子に対する重バリオン近似と同様に $\Delta(1232)$ 場をlarge成分とsmall成分に分け、small成分は積分してしまうのである。そして核子と $\Delta(1232)$ の質量差 $\Delta = M_\Delta - M$ をカイラルパラメータと同等に摂動展開パラメータとして取り扱う。彼らはこの展開を“small scale expansion”, 摂動展開パラメータを“small parameter” ϵ と名付けた。このような拡張をする理由は、質量差 Δ がパイオンの質量の2倍程度であるために、低エネルギーの物理において $\Delta(1232)$ の効果が見逃せない場合がしばしばあるからである。だがこの拡張により模型に依存しないというHBChPTの精神からは一歩後退することになる。質量差 Δ はカイラル対称性とは関係ない量だからである。

この拡張により、新たにラグランジアンとして $\mathcal{L}_{\pi\Delta}$, $\mathcal{L}_{\pi N\Delta}$ が加わるのだが、ここでは $\mathcal{O}(\epsilon^3)$ で電磁的偏極率を計算する際に必要となる最小限の形を与えておく。より一般的な形については文献[34]を参照。この近似の範囲内で前節の項以外に新たに加わる項は、核子が $\Delta(1232)$ に励起する Δ -pole項(図3.2), および $\Delta\pi$ 状態に励起する $\Delta\pi$ -loop項(図3.3)の2種類である。 $\Delta\pi$ -loop項は1ループの計算なので $\mathcal{O}(\epsilon^1)$ のラグランジアンのみで良いが、 Δ -pole項はループがないので $\mathcal{O}(\epsilon^3)$ まで必要となり、そのうち電磁的偏極率に効くのは $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ の項である。したがって、電磁的偏極率の計算に必要な最低限のラグランジアンは

$$\mathcal{L}_{\pi\Delta}^{(1)} = -\bar{T}_i^\mu [iv \cdot D^{ij} - \Delta\delta^{ij} + g_1 S \cdot u\delta^{ij}] g_{\mu\nu} T_j^\nu$$

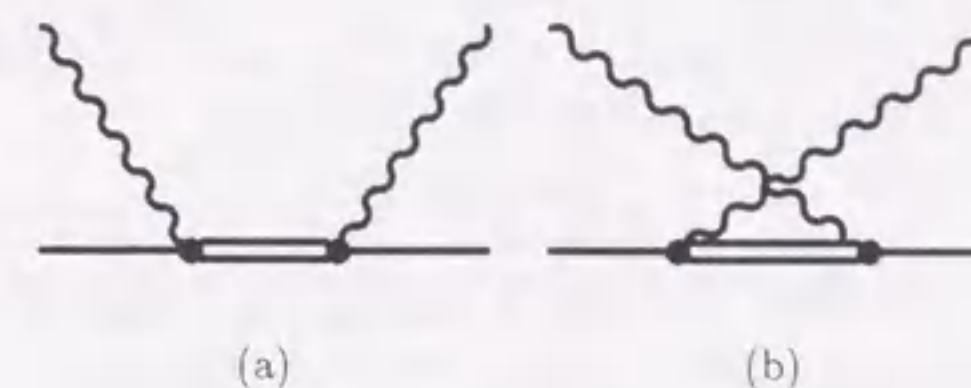


図 3.2: Δ -pole ダイアグラム。波線は光子、実線は核子、二重線は $\Delta(1232)$ を表わしている。

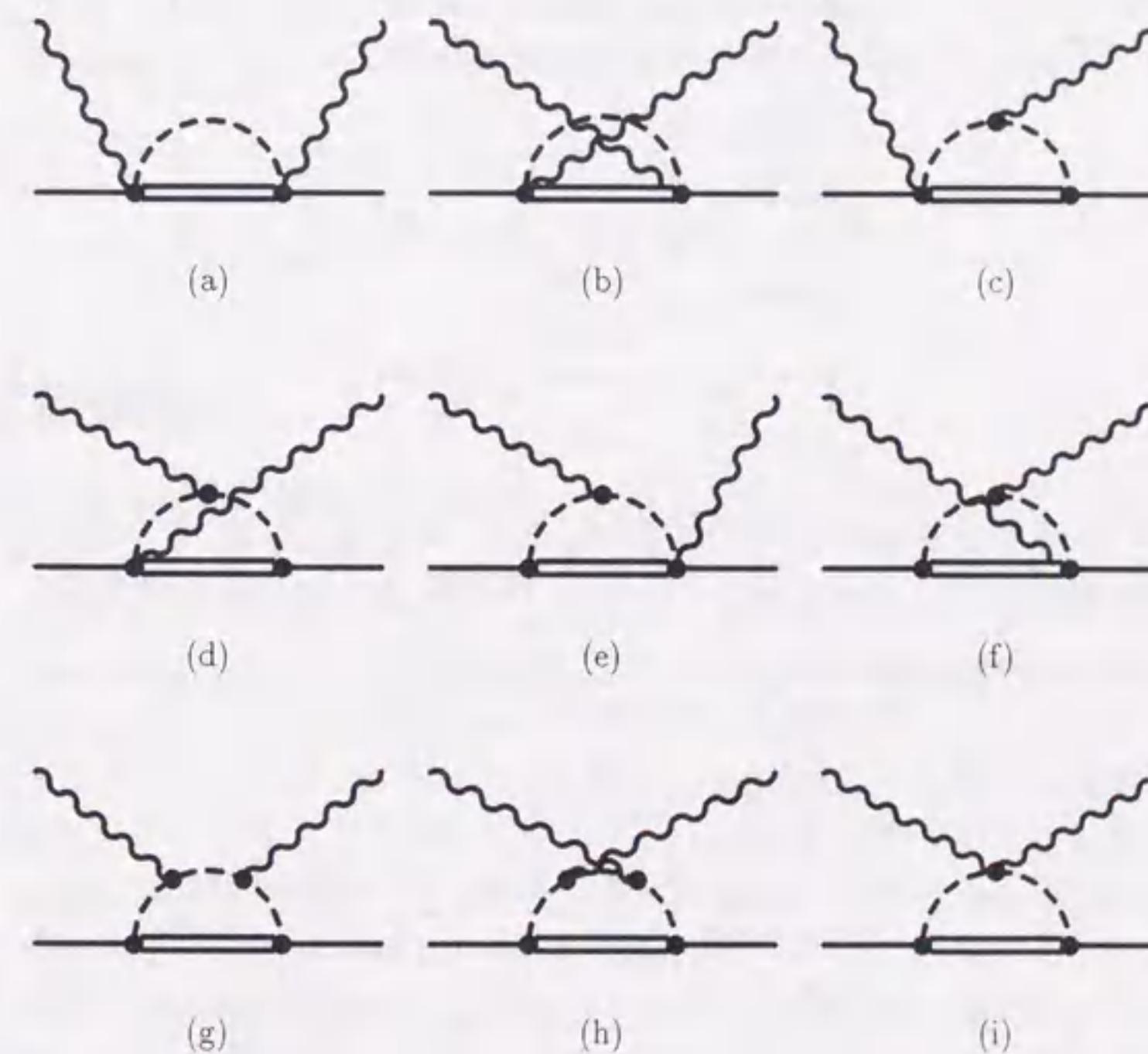


図 3.3: $\Delta\pi$ -loop ダイアグラム。波線は光子、実線は核子、二重線は $\Delta(1232)$ 、点線はパイオンを表わしている。

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\pi N\Delta}^{(1)} &= g_{\pi N\Delta} \bar{T}_i^\mu w_\mu^i N + h.c. \\ \mathcal{L}_{\pi N\Delta}^{(2)} &= \frac{ib_1}{M} \bar{T}_i^\mu S^\nu f_{+\mu\nu}^i N + \dots\end{aligned}\quad (3.16)$$

である。ここで T_i^μ は $\Delta(1232)$ の large 成分であり、

$$T_i^\mu = e^{iMv \cdot x} P_+ \Psi_i^\mu \quad (3.17)$$

で定義される。 Ψ_i^μ はスピン 3/2 粒子を記述する Rarita-Schwinger スピノルで、 μ, i は各々 Lorentz 添字とアイソスピン添字である。また、 T_i^μ の共変微分は

$$D_\mu^i T_j^\nu = (\partial_\mu \delta^{ij} - ieQ A_\mu \delta^{ij} + e\epsilon^{i3j} A_\mu) T_j^\nu \quad (3.18)$$

で与えられる。それから、 $w_\mu^i, f_{+\mu\nu}^i$ はそれぞれ

$$\begin{aligned}w_\mu^i &= -\frac{1}{f_\pi} \partial_\mu \pi^i - \frac{e}{f_\pi} A_\mu \epsilon^{i3j} \pi_j \\ f_{+\mu\nu}^i &= e\delta^{i3} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)\end{aligned}\quad (3.19)$$

で定義される。

この模型を用いた $\mathcal{O}(\epsilon^3)$ の核子の電磁的偏極率の結果は以下の通りである [8, 31]。まず $N\pi$ -loop 項の寄与と π^0 交換項の寄与は前節の結果に等しい。次に Δ -pole 項の寄与は

$$\begin{aligned}\alpha^{\Delta\text{-pole}} &= 0 \\ \beta^{\Delta\text{-pole}} &= \frac{e^2}{4\pi} \frac{8b_1^2}{9M^2} \frac{1}{\Delta} \\ \gamma_0^{\Delta\text{-pole}} &= -\frac{e^2}{4\pi} \frac{4b_1^2}{9M^2} \frac{1}{\Delta^2} \\ \gamma_2^{\Delta\text{-pole}} &= -\gamma_4^{\Delta\text{-pole}} = \gamma_0^{\Delta\text{-pole}} \\ \gamma_1^{\Delta\text{-pole}} &= \gamma_3^{\Delta\text{-pole}} = 0\end{aligned}\quad (3.20)$$

である。ここで Δ は核子と $\Delta(1232)$ の質量差、 b_1 は (3.16), (3.19) から分かるように光子-核子- $\Delta(1232)$ 結合定数である (図 3.2 参照)。最後に $\Delta\pi$ -loop 項の寄与は

$$\begin{aligned}\alpha^{\Delta\pi\text{-loop}} &= \frac{e^2}{4\pi} \frac{g_{\pi N\Delta}^2}{54\pi^2 f_\pi^2} \left[\frac{9\Delta}{\Delta^2 - m_\pi^2} + \frac{\Delta^2 - 10m_\pi^2}{(\Delta^2 - m_\pi^2)^{3/2}} \ln R \right] \\ \beta^{\Delta\pi\text{-loop}} &= \frac{e^2}{4\pi} \frac{g_{\pi N\Delta}^2}{54\pi^2 f_\pi^2} \frac{\ln R}{\sqrt{\Delta^2 - m_\pi^2}} \\ \gamma_1^{\Delta\pi\text{-loop}} &= -\frac{e^2}{4\pi} \frac{g_{\pi N\Delta}^2}{54\pi^2 f_\pi^2} \left[\frac{\Delta^2 + 2m_\pi^2}{(\Delta^2 - m_\pi^2)^2} - \frac{3m_\pi^2 \Delta \ln R}{(\Delta^2 - m_\pi^2)^{5/2}} \right] \\ \gamma_2^{\Delta\pi\text{-loop}} &= \frac{e^2}{4\pi} \frac{g_{\pi N\Delta}^2}{54\pi^2 f_\pi^2} \left[\frac{1}{\Delta^2 - m_\pi^2} - \frac{\Delta \ln R}{(\Delta^2 - m_\pi^2)^{3/2}} \right] \\ \gamma_3^{\Delta\pi\text{-loop}} &= -\gamma_4^{\Delta\pi\text{-loop}} = \gamma_2^{\Delta\pi\text{-loop}}\end{aligned}\quad (3.21)$$

となる。ここで

$$R = \frac{\Delta}{m_\pi} + \sqrt{\frac{\Delta^2}{m_\pi^2} - 1} \quad (3.22)$$

である。

表 3.1: 重バリオンカイラル摂動論による電磁的偏極率。sum. の数値は $N\pi$ -loop, Δ -pole, $\Delta\pi$ -loop の和であり、 $\pi^0\gamma\gamma$ は含んでいない。かつこの値は $\pi N\Delta$ および $\gamma N\Delta$ 結合の強さをあらわす $g_{\pi N\Delta}$ と b_1 を相対論的なツリー計算で評価したものである。単位はスピン平均電磁的偏極率は 10^{-4} fm^3 , スピン依存電磁的偏極率は 10^{-4} fm^4 である。

	$N\pi$ -loop	Δ -pole	$\Delta\pi$ -loop	sum.	$\pi^0\gamma\gamma$
α	12.5	0	4.2 (8.6)	16.7 (21.1)	0
β	1.25	7.41 (12.04)	0.73 (1.48)	9.40 (14.8)	0
γ_1	4.56	0	-0.21 (-0.42)	4.35 (4.14)	$-21.7\tau_3$
γ_2	2.28	-2.40 (-4.04)	-0.23 (-0.47)	-0.35 (-2.23)	0
γ_3	1.14	0	-0.12 (-0.23)	1.02 (0.91)	$10.9\tau_3$
γ_4	-1.14	2.40 (4.04)	0.12 (0.23)	1.38 (3.13)	$-10.9\tau_3$
γ_0	4.56	-2.40 (-4.04)	-0.21 (-0.42)	1.94 (0.10)	0

3.4 計算結果

HBChPT による電磁的偏極率の値を表 3.1 にまとめた。パラメータは $f_\pi = 92.4 \text{ MeV}$, $m_\pi = 138 \text{ MeV}$, $M = 938.9 \text{ MeV}$, $\Delta = 294 \text{ MeV}$, $g_A = 1.26$ とした。また、 $\pi N\Delta$ 結合および $\gamma N\Delta$ 結合の強さをあらわす $g_{\pi N\Delta}$ と b_1 は、相対論的なツリー計算から現象論的に評価すると $g_{\pi N\Delta} = 1.5 \pm 0.2$, $b_1^2 = 6.3 \pm 1.75$ となるが、Hemmer らは HBChPT でこれらの値を評価し、“small scale expansion” の初項で $g_{\pi N\Delta} = 1.05 \pm 0.02$, $b_1^2 = 3.85 \pm 0.15$ という値を得ている [8]。彼らは “small scale expansion” で話を閉じようとするのであれば、後者の値を用いるべきだと主張している。一方、次章で述べるように large N_c の関係式からは、前者に非常に近い値が得られる。表には両方のパラメータで計算した値を載せることにする。スピン平均偏極率 α, β の計算結果を実験値と比較するといずれも大きめの値になっているが、“small scale expansion” から計算されたパラメータを用いた場合のほうが実験値に近い値になる。一方スピン依存偏極率については、 γ_0 が多重極解析から負になることが示唆されているのに対して、HBChPT では正になっているものの、 Δ -pole 項および $\Delta\pi$ -loop 項が負の寄与を与えており、電磁的偏極率に対する $\Delta(1232)$ の重要性がうかがえる。

カイラル展開の次のオーダーである $\mathcal{O}(p^4)$ の計算も、 $\Delta(1232)$ への拡張をしていない

HBChPT の範囲においてはいくつか試みられている。スピン平均電磁的偏極率においては $\mathcal{O}(p^4)$ までで

$$\begin{aligned}\alpha^p &= (10.5 \pm 2.0) \times 10^{-4} \text{ fm}^3, & \beta^p &= (3.5 \pm 3.6) \times 10^{-4} \text{ fm}^3 \\ \alpha^n &= (13.4 \pm 3.0) \times 10^{-4} \text{ fm}^3, & \beta^n &= (7.8 \pm 3.6) \times 10^{-4} \text{ fm}^3\end{aligned}\quad (3.23)$$

という値を得ている [29]。最近スピン依存電磁的偏極率においても前方偏極率 γ_0 の $\mathcal{O}(p^4)$ の計算がなされており、

$$\gamma_0^p = -4.0 \times 10^{-4} \text{ fm}^4, \quad \gamma_0^n = -0.8 \times 10^{-4} \text{ fm}^4 \quad (3.24)$$

と計算されている [35, 36]。どちらの計算も $\mathcal{O}(p^4)$ における補正は大きく、重バリオンカイラル展開の収束性は良くないように思われる。これらの計算は先ほど述べたように $\Delta(1232)$ への拡張は行なわれておらず、したがって完全な $\mathcal{O}(\epsilon^4)$ の計算はまだなされていない。また、仮に計算されたとしても $\mathcal{O}(\epsilon^4)$ におけるすべてのパラメータを実験から決めることは出来ないので、値を予言することは出来ない。

第4章 $1/N_c$ 展開による電磁的偏極率

この章ではスカーム模型を用いて電磁的偏極率を計算する。前章ではコンプトン散乱振幅を直接計算することで電磁的偏極率を計算したが、この章では分散関係式を利用して光子吸収散乱振幅から電磁的偏極率を評価する。

得られる結論はスカーム模型に固有のものではなく large N_c バリオン模型一般に成り立つものである。なぜなら、後に詳しく述べるように計算の過程で用いる振幅は模型に依らない一般的なものであり、スカーム模型の性質として利用するのは各々の寄与の N_c 依存性の評価と large N_c 極限で一般に成り立つ関係式だけだからである。

この章の構成は以下の通りである。第4.1節では large N_c バリオン模型を簡単に紹介する。第4.2節では分散関係式について説明する。第4.3節ではスカーム模型における電磁相互作用の取り扱いを説明する。第4.4節ではパイオン生成振幅を求め、電磁的偏極率を評価する。得られる結果はスカーム模型固有のものではなく、 $1/N_c$ 展開一般に成り立つ結果であることを示す。第4.5節では π^0 交換項の寄与をスカーム模型で評価する方法について述べる。第4.6節では得られた結果について議論する。

4.1 large N_c バリオン模型

カラー数 N_c をパラメータとして仮想的に N_c を大きくするというアイデアは 't Hooft によって提唱された [2]。この large N_c QCD の世界では、カラー数の逆数 $1/N_c$ を展開パラメータとみなすことができる。グルーオンの自己エネルギー (図4.1) が N_c 無限大の極限で発散しないようにするためには、QCD 結合定数のカラー依存性を $\mathcal{O}(N_c^{-1/2})$ とする必要がある。このように QCD 結合定数のカラー依存性を定義すると、例えばグルーオンの真空偏極のクォークループによる寄与は、 $\mathcal{O}(N_c^{-1})$ で抑制されることになる。その他の種類のグラフについても、グラフによって large N_c QCD における N_c 依存性が異なり、粒子線の立体交差がないいわゆる “planar” なグラフが支配的になる。その結果、メソンは free で安定な粒子として振舞うようになる。すなわちメソン間の相互作用は $\mathcal{O}(N_c^{-1})$ 、メソンの崩壊振幅は $\mathcal{O}(N_c^{-1/2})$ で抑制される。また OZI 則が厳密に成り立つようになり、メソンは $qq\bar{q}\bar{q}$ のような成分を含まない純粋な $q\bar{q}$ 状態となる。

Witten はこの考えをバリオンに適用し、large N_c においてバリオンの質量が $\mathcal{O}(N_c)$ になることを示した [3]。この理由は、large N_c の世界でカラーについての完全反対称状態、すなわち $SU(N_c)$ におけるカラー一重項を作るには、 N_c 個のクォークが必要になるからである。一般に弱く結合する場において場の結合定数の逆数で発散する質量をもつソリトンが存在する。large N_c QCD においてメソンの結合定数は $\mathcal{O}(N_c^{-1})$ 、バリオンの質量



図 4.1: グルーオンの自己エネルギーダイアグラム。

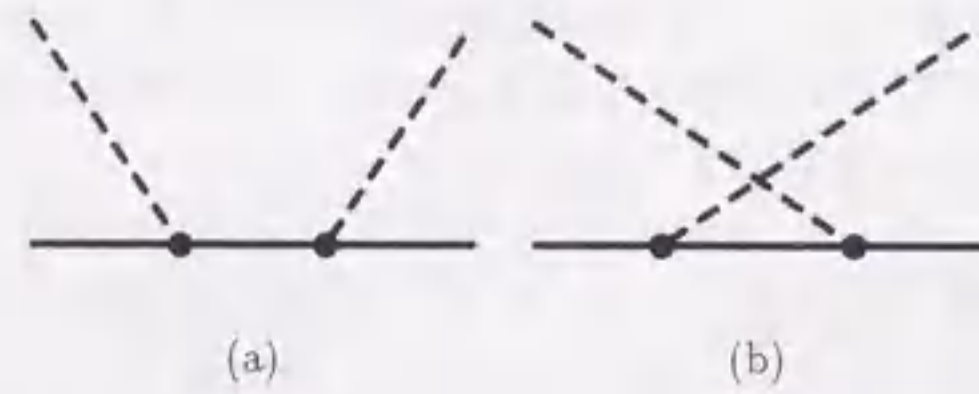


図 4.2: パイオン-バリオン弾性散乱振幅のダイアグラム。点線はパイオン、実線はバリオンを表わしている。

は $\mathcal{O}(N_c)$ であるから、バリオンは弱結合メソン場におけるソリトンであると推測することができる。したがって large N_c QCD は、核子をパイオン場のソリトンとして取り扱うスカム模型 [1] の基礎づけをあたえるものであると考えられる。

Dashen らはこの large N_c のアイデアを発展させ、large N_c の世界でのバリオンの振舞いを詳細に解析した [37]。彼らは consistency condition を理論の基礎においた。consistency condition とはパイオン-バリオン弾性散乱振幅のユニタリティから導かれる条件であり [38, 39], その導出過程を以下簡単に説明する。

パイオン-バリオン結合は、バリオンの軸性ベクトル

$$\langle B' | \bar{q} \gamma^i \gamma_5 \tau^a q | B \rangle = N_c g (X^{ia}) \quad (4.1)$$

と $\partial^\mu \pi^a / f_\pi$ の積で与えられる。ここで i はスピン, a はパイオンのアイソスピンの添字である。バリオンの軸性ベクトルは $\mathcal{O}(N_c^1)$ なので、(4.1) の右辺において N_c を分離し規格化定数 g および X^{ia} を $\mathcal{O}(N_c^0)$ にするようにして、 $X^{ia} = X_0^{ia} + X_1^{ia}/N_c + \dots$ のように $1/N_c$ 展開する。パイオン-バリオン散乱振幅 $\pi^a(\omega, \mathbf{k}) + B \rightarrow \pi^b(\omega, \mathbf{k}') + B'$ は $1/N_c$ 展開の初項では

$$-i \frac{N_c^2 g^2 k^i k'^j}{f_\pi^2 \omega} [X_0^{jb}, X_0^{ia}] \quad (4.2)$$

で与えられる (図 4.2 参照)。ここで交換関係が現れるのは、図 4.2(a) と (b) とで中間状態のバリオンのエネルギー分母が逆符号を与えるからである。また、中間状態は可能な任意のバリオンの和をとる。ここで散乱振幅の N_c 依存性を見ると、 f_π が $\mathcal{O}(N_c^{1/2})$ である以外はすべて $\mathcal{O}(N_c^0)$ であるために、このままでは散乱振幅は $\mathcal{O}(N_c^1)$ となり、large N_c の世界ではユニタリティが破れてしまう。よって、ユニタリティを保つためには演算子 X_0^{ia} は

consistency condition

$$[X_0^{jb}, X_0^{ia}] = 0 \quad (4.3)$$

を満たさなければならない。すなわち、large N_c の世界が consistent に構成されるためには consistency condition (4.3) が成り立たなければならないのである。ここで中間状態としてすべてのバリオン状態をとることに注意されたい。例えば、パイオン-核子散乱の場合は中間状態として核子と $\Delta(1232)$ を考える必要があるが、それらの効果が互いに打ち消し合うことによって、全体として consistency condition (4.3) が成り立つのである。後に述べるように、コンプトン散乱においても consistency condition のおかげで正しい N_c 依存性が得られる。

さて、 X^{ia} はスピン 1, アイソスピン 1 のテンソル演算子であるから、スピン演算子, アイソスピン演算子をそれぞれ J^i, I^a とおくと

$$[J^i, X_0^{jb}] = i \epsilon_{ijk} X_0^{kb}, \quad [I^a, X_0^{jb}] = i \epsilon_{abc} X_0^{jc} \quad (4.4)$$

を満足する。また、 J^i, I^a は

$$[J^i, J^j] = i \epsilon_{ijk} J^k, \quad [I^a, I^b] = i \epsilon_{abc} I^c, \quad [I^a, J^i] = 0 \quad (4.5)$$

を満足するので (4.3), (4.4), (4.5) から SU(4) 代数が構成される。Dashen らはこの SU(4) 代数を出発点として large N_c バリオン模型を作り、 $1/N_c$ 展開におけるバリオンの様々な性質を調べた。SU(4) 代数から量子数 $I = J = 1/2, 3/2, 5/2, \dots, N_c/2$ を持つ一連のバリオンが構成され、 $N_c = 3$ の世界すなわち現実の世界では $I = J = 1/2$ が核子, $I = J = 3/2$ が $\Delta(1232)$ に対応する。パイオン-バリオン結合定数 $G_{B'B\pi}$ やバリオン間の磁気双極子モーメント $\mu_{B'B}^V$ は、全体に掛かる定数以外は対称性から完全に定められる。

結合定数の間に large N_c で成り立つこれらの関係式は、後述するように核子のパイオン光子生成振幅の磁気ボルン項の N_c 依存性において決定的な役割を果たす。パイオン光子生成振幅の磁気ボルン項の場合も、パイオン-核子バリオン散乱振幅と同様に各々のグラフの寄与は正しくない N_c 依存性を示すのだが、全てのグラフを加えると $1/N_c$ 展開の初項のオーダーの寄与が互いにキャンセルし、最終的に正しい N_c 依存性を持った振幅が得られるのである。

4.2 分散関係式

第 2 章で述べたように、分散関係式 (2.15) を用いると振幅の非ボルン項から電磁的偏極率が求められる。実は、これらの公式をナイーブに用いると矛盾が生じるのだが、それについては後述する。

(2.15) から分かるように、電磁的偏極率は光子吸収振幅の低エネルギーでの振舞いによって決定されるので非相対論近似をとる。第 3 章で明らかにされたように、電磁的偏極率にはパイオンの雲と $\Delta(1232)$ の役割が重要であるから、中間状態としては $N\pi$ channel

と $\Delta\pi$ channel のみを考慮する。この近似の下で、ユニタリティ条件は

$$\text{Im } T_{N\gamma \rightarrow N'\gamma'} = \frac{q}{16\pi^2} \int d\Omega_q \sum_{B=N,\Delta} T_{N'\gamma' \rightarrow B\pi}^\dagger T_{N\gamma \rightarrow B\pi} \quad (4.6)$$

となる。ここで $q = |\mathbf{q}|$ はパイオンの運動量の大きさで、パイオンの運動量について角度積分している。

光子吸収振幅の計算にはスカーム模型をゲージ化したものを用いる。スカーム模型で記述されるバリオンはスピンとアイソスピンが等しいバリオン、すなわち核子と $\Delta(1232)$ であるから、スカーム模型によって $N\pi$ channel と $\Delta\pi$ channel を評価することができる。

4.3 電磁相互作用

この節では、スカーム模型における電磁相互作用の取り扱いについて述べる。次節以降において LSZ 簡約公式を用いて振幅を評価するので、その際に必要となる電磁相互作用カレント

$$\mathcal{J}^\mu = i^2 [H_{tot}, [H_{tot}, A^\mu]] + \partial_i \partial^i A^\mu \quad (4.7)$$

を計算するのに使われる全ハミルトニアン H_{tot} の導出がこの節の目的である。スカーム模型に電磁相互作用を導入するには基本的にはゲージ原理を用いれば良いのだが、SU(2) スカーム模型では現れない Wess-Zumino-Witten (WZW) 項からも電磁相互作用項が出てくることに注意する必要がある。式がかなり煩雑になるので、この節ではハミルトニアン の導出に至る過程の概略について説明し、途中に現れる記号の正確な形は付録 A.1 で与えることにする。

スカーム模型のラグランジアンは

$$\mathcal{L} = \frac{f_\pi^2}{4} \text{Tr}(\partial_\mu U \partial^\mu U) + \frac{1}{32e_s^2} \text{Tr}[U^\dagger \partial_\mu U, U^\dagger \partial_\nu U]^2 \quad (4.8)$$

で与えられる。第1項はパイオンの運動量項、第2項はスカーム項と呼ばれる自己相互作用項であり、結合の強さを決定する e_s はフリーパラメータである。パイオン場 Φ_a は

$$U(x) = \frac{1}{f_\pi} [\Phi_0(x) + i\tau_a \Phi_a(x)] \quad (4.9)$$

で定義され、 $\Phi_0^2 + \Phi_a^2 = f_\pi^2$ の制限がある。スカーム模型においては、バリオン状態に挟まれたパイオン場は古典的なソリトン解 ϕ に置き換わる。すなわち、

$$\langle B'(p') | \Phi_a(x) | B(p) \rangle = \langle B'(p') | \phi_a(\mathbf{x} - \mathbf{X}(x^0)) | B(p) \rangle$$

$$\phi_a(\mathbf{x}) = f_\pi \sin F(r) R_{ai} \hat{x}_i, \quad \phi_0(\mathbf{x}) = f_\pi \cos F(r) \quad (4.10)$$

ここで、 $r = |\mathbf{x}|$, $\hat{x}_i = x_i/r$ で $F(r)$ はスカーム模型の profile 関数、 R_{ai} は直交行列である。

スカーム模型を電磁場を含む系に拡張するには、ラグランジアンをゲージ化すれば良い。すなわち電磁場を A_μ とすると、偏微分を共変微分

$$D_\mu \Phi_a = \partial_\mu \Phi_a + e A_\mu \epsilon_{3ab} \Phi_b, \quad D_\mu \Phi_0 = \partial_\mu \Phi_0 \quad (4.11)$$

に置き換える。したがって、スカーム模型において電磁相互作用ラグランジアンは

$$\mathcal{L} = e A_\mu J^\mu + \frac{e^2}{2} A_\mu A_\nu Z^{\mu\nu} + e^2 \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \partial^\mu A^\nu A^\alpha W^\beta \quad (4.12)$$

となる。最終項は WZW 項から現れる相互作用項である。

次に、ハミルトニアンを求めるために、 J^μ , $Z^{\mu\nu}$, W^μ から場の時間微分項を取り出すと

$$J^\mu = j^\mu + J_a^\mu \dot{\Phi}_a + \frac{1}{2} \dot{\Phi}_a J_{ab}^\mu \dot{\Phi}_b$$

$$Z^{\mu\nu} = \zeta^{\mu\nu} + Z_a^{\mu\nu} \dot{\Phi}_a + \frac{1}{2} \dot{\Phi}_a Z_{ab}^{\mu\nu} \dot{\Phi}_b$$

$$W_\mu = g_{\mu i} \xi^i + g_{\mu 0} \eta_a \dot{\Phi}_a \quad (4.13)$$

となる。ここで右辺に現れる j^μ , J_a^μ などの関数は時間微分項を含まない。全ラグランジアンは時間微分項を取り出すと

$$\mathcal{L}_{tot} = \frac{1}{2} \dot{\Phi}_a \widetilde{K}_{ab} \dot{\Phi}_b + \widetilde{L}_a \dot{\Phi}_a - \widetilde{V} - \frac{1}{2} \partial_\nu A_\mu \partial^\nu A^\mu \quad (4.14)$$

と書き直すことが出来る。

(4.14) からパイオン、光子の正準共役な運動量場が求まり

$$\Pi_a = \widetilde{K}_{ab} \dot{\Phi}_b + \widetilde{L}_a, \quad \pi_A^\mu = -\dot{A}^\mu + e^2 \epsilon^{0\mu jk} A_j \xi_k \quad (4.15)$$

となる。したがって、全ハミルトニアンは

$$H_{tot} = \int d^3x \left\{ \frac{1}{2} (\Pi_a - \widetilde{L}_a) \widetilde{K}_{ab}^{-1} (\Pi_b - \widetilde{L}_b) + \widetilde{V} - \frac{1}{2} (\pi_A^\mu - e^2 \epsilon^{0\mu jk} A_j \xi_k)^2 + \partial_i A_\mu \partial_i A^\mu \right\} \quad (4.16)$$

で与えられる。

4.4 非ボルン項

前節で電磁相互作用のカレントが求まったので、この節では電磁的偏極率の非ボルン項からの寄与を評価する。具体的にはまずパイオン光子生成振幅を計算する。パイオン光子生成振幅には光子とハドロンが電氣的に相互作用する電気ボルン項と磁氣的に相互作用する磁気ボルン項とがある。また、終状態として $N\pi$ channel と $\Delta\pi$ channel を考慮する。それからユニタリティを用いてコンプトン散乱振幅の虚数部分を求め、分散関係式 (2.15) から電磁的偏極率を求める。なお我々の散乱振幅の定義は通常と $1/4\pi$ だけ異なっているので、混乱を避けるためにこの章では記号 $f = (1/4\pi)T$ を用いる。

4.4.1 パイオン光子生成振幅

LSZ 簡約公式を用いてパイオン光子生成 $\gamma(k) + N(p) \rightarrow \pi^a(q) + B(p')$ (B は核子または $\Delta(1232)$ である) の散乱振幅を計算すると,

$$S_{fi} = \delta_{fi} + (2\pi)^4 i \delta(p+k-p'-q) 4\pi f_\mu^a \epsilon^\mu \quad (4.17)$$

$$f_\mu^a = \frac{i}{4\pi} \int d^4 y e^{iqy} \langle B(\mathbf{p}') | T(\mathcal{J}^a(y) \mathcal{J}_\mu(0)) + \delta(y^0) \{ [\Phi_a(y), \mathcal{J}_\mu(0)] - i\omega_q [\Phi_a(y), \mathcal{J}_\mu(0)] \} | N(\mathbf{p}) \rangle \quad (4.18)$$

となる。ここで ω_q はパイオンのエネルギー, \mathcal{J}_μ は前節で与えた電磁相互作用カレント, $\mathcal{J}^a = (\partial_\mu \partial^\mu + m_\pi^2) \Phi^a$ はパイオンのソース項である。

便宜のため, 軸性カレント A_μ^a を用いてパイオンソース項を書き直す。軸性カレント項はパイオン pole 項と direct coupling 項に分けられる。すなわち

$$A_\mu^a = \tilde{A}_\mu^a - f_\pi \partial_\mu \Phi_a \quad (4.19)$$

で, direct coupling 項 \tilde{A}_μ^a はパイオンソース項と

$$\partial^\mu \tilde{A}_\mu^a = f_\pi \mathcal{J}^a \quad (4.20)$$

という関係にある。軸性カレントを用いるとパイオン光子生成振幅は

$$f_\mu^a = \frac{1}{f_\pi} (q^\nu \Pi_{\mu\nu}^a - iC_\mu^a + \omega_q D_\mu^a) \quad (4.21)$$

と書き直すことができる。ここで

$$\Pi_{\mu\nu}^a = \frac{1}{4\pi} \int d^4 y e^{iqy} \langle B(\mathbf{p}') | T(\tilde{A}_\nu^a(y) \mathcal{J}_\mu(0)) | N(\mathbf{p}) \rangle \quad (4.22)$$

$$C_\mu^a = \frac{1}{4\pi} \int d^4 y e^{iqy} \delta(y^0) \langle B(\mathbf{p}') | [A_0^a(y), \mathcal{J}_\mu(0)] | N(\mathbf{p}) \rangle \quad (4.23)$$

$$D_\mu^a = \frac{f_\pi}{4\pi} \int d^4 y e^{iqy} \delta(y^0) \langle B(\mathbf{p}') | [\Phi_a(y), \mathcal{J}_\mu(0)] | N(\mathbf{p}) \rangle \quad (4.24)$$

である。

まず, 電気ボロン振幅を計算する。ゲージ不変性より, ω を光子のエネルギーとすると

$$f_0^a \omega = \sum_i f_i^a k_i \quad (4.25)$$

が成り立つので, 運動量単位ベクトルを \hat{k}_i と書くと,

$$f_0^a = \sum_i f_i^a \hat{k}_i \quad (4.26)$$

となる。したがって, 振幅を計算するには, まず縦偏極光子に対する振幅 f_0^a を求め, それから (4.26) を用いて横偏極光子 (物理的実光子) に関する振幅を求めれば良い。

カレント代数を用いると, 同時刻交換関係は

$$\begin{aligned} [A_0^a(0, \mathbf{y}), \mathcal{J}_0(0)] &= ie\epsilon_{a3b} A_0^b(0) \delta(\mathbf{y}) + \text{Schwinger term} \\ [\Phi_a(0, \mathbf{y}), \mathcal{J}_0(0)] &= ie\epsilon_{a3b} \Phi_b(0) \delta(\mathbf{y}) \end{aligned} \quad (4.27)$$

となる。したがって,

$$-iC_0^a + \omega_q D_0^a = \frac{e\epsilon_{a3b}}{4\pi} \langle B(\mathbf{p}') | A_0^b(0) + if_\pi \omega_q \Phi_b(0) | N(\mathbf{p}) \rangle \quad (4.28)$$

と計算される。ここで Schwinger term はしきい値において消えるので無視した。行列要素は $\mathbf{t} = \mathbf{p}' - \mathbf{p}$, $t = |\mathbf{t}|$ とおくと

$$\begin{aligned} \langle B(\mathbf{p}') | \tilde{A}_0^a(0) | N(\mathbf{p}) \rangle &= f_\pi \frac{G_{BN\pi}(t)}{2M} \mathbf{S} \cdot (\mathbf{p}' + \mathbf{p}) T^a \frac{1}{2M} \\ \langle B(\mathbf{p}') | \Phi_a(0) | N(\mathbf{p}) \rangle &= -\frac{G_{BN\pi}(t)}{2M} i \mathbf{S} \cdot \mathbf{t} T^a \frac{1}{m_\pi^2 - (p' - p)^2} \end{aligned} \quad (4.29)$$

で与えられ [41], パイオン-バリオン結合定数は,

$$G_{BN\pi}(t) = -\Lambda_{BN} 2M f_\pi \frac{\omega_t^2}{t} \int dr 4\pi r^2 j_1(tr) \sin F(r) \quad (4.30)$$

と計算される。ここで $\omega_t = \sqrt{t^2 + m_\pi^2}$ であり, また Λ_{BN} は SU(2) 対称性で決まる定数で $\Lambda_{\Delta N} = 1/\sqrt{2}$, $\Lambda_{NN} = -1/3$ である。以下では結合定数の運動量依存性は無視して $G_{BN\pi} = G_{BN\pi}(t^2 = -m_\pi^2)$ と定義する。また (4.29) に現れる \mathbf{S} , T^a はそれぞれスピン, アイソスピン行列で $B = N$ のときはパウリ行列 $\boldsymbol{\sigma}$, τ^a になり $B = \Delta$ のときは遷移行列になる。

重心系 ($\mathbf{p} = -\mathbf{k}$, $\mathbf{p}' = -\mathbf{q}$) であることを考慮すると

$$\begin{aligned} \frac{\epsilon_{a3b}}{4\pi} \frac{1}{f_\pi} \langle B(\mathbf{p}') | A_0^b(0) + if_\pi \omega_q \Phi_b(0) | N(\mathbf{p}) \rangle \\ = -i\epsilon_{a3b} T^b \frac{G_{BN\pi}}{8\pi M \omega} \left\{ i \mathbf{S} \cdot (\mathbf{k} + \mathbf{q}) \frac{\omega}{2M} - i \mathbf{S} \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{q}) \frac{(2\omega\omega_q - \omega^2)}{m_\pi^2 - (k - q)^2} \right\} \end{aligned} \quad (4.31)$$

となる。時間順序積を含む項 (4.22) については, 中間状態としてバリオン状態を挟み, 関係式

$$\begin{aligned} \langle B(\mathbf{p}) | \mathcal{J}_0(0) | N(0) \rangle &= \delta_{BN} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tau_3 \right) e + \mathcal{O}(k^2) \\ \langle B(\mathbf{p}) | \mathcal{J}_0(0) | B'(0) \rangle &= \delta_{BB'} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} T_{BB'}^3 \right) e + \mathcal{O}(k^2) \\ \langle B(\mathbf{p}) | \tilde{A}_i^a(0) | N(0) \rangle &= f_\pi \frac{G_{BN\pi}}{2M} S_i T^a \end{aligned} \quad (4.32)$$

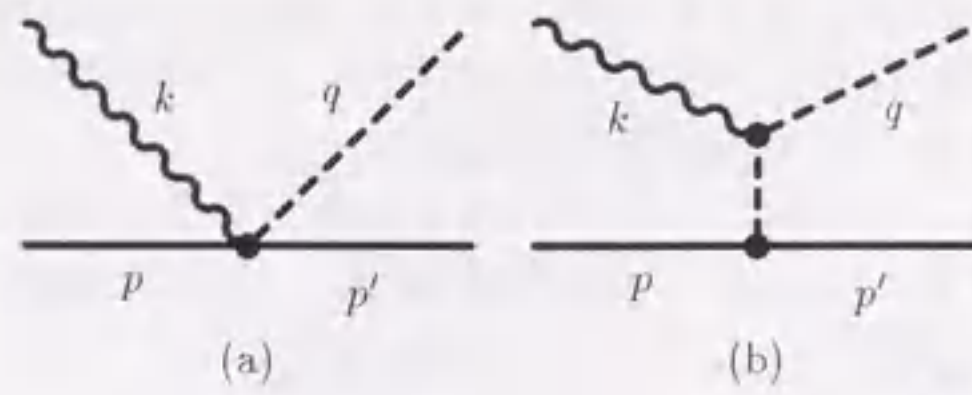


図 4.3: 電気ボロン項の $N\pi$ channel のダイアグラム。波線は光子, 実線は核子, 点線はパイオンを表わしている。 $\Delta\pi$ channel においては終状態が核子ではなく $\Delta(1232)$ になる。

を用いると,

$$\frac{1}{f_\pi} q^\mu \Pi_{\mu 0}^a = \frac{eG_{BN\pi}}{8\pi M} \left\{ \frac{i\mathbf{S}\cdot\mathbf{q}T^a(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\tau^3)}{\omega + k^2/2M} + \frac{i\mathbf{S}\cdot\mathbf{q}(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}T_{BB}^3)T^a}{\omega + (k^2 + 2\mathbf{k}\cdot\mathbf{q})/2M} - \frac{i\mathbf{S}\cdot\mathbf{q}T^a(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\tau^3)}{\omega + k^2/2M} \frac{\omega_q}{2M} + \frac{i\mathbf{S}\cdot(2\mathbf{k} + \mathbf{q})(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}T_{BB}^3)T^a}{\omega + (k^2 + 2\mathbf{k}\cdot\mathbf{q})/2M} \frac{\omega_q}{2M} \right\} \quad (4.33)$$

ここで $k^2/2M_\Delta \simeq k^2/2M$ と近似した。 ($\Delta = M_\Delta - M$ は $\mathcal{O}(N_c^{-1})$ である。)

(4.28), (4.33) を (4.21) で $\mu = 0$ と置いた場合の式に代入すれば, 縦光子に対する振幅 f_0^a が得られるので, ゲージ不変性 (4.26) を用いて電気ボロン項を求める。ただし, f_0^a から求まるのは $f_i^a \hat{k}_i$ であるが, 実際に求めたい振幅は電気ボロン項 $f_e^a = f_i^a \epsilon_i$ である。よって, \hat{k}_i を ϵ_i に置き換えることで電気ボロン項 f_e^a を計算する。

パイオン光子生成振幅は

$$f^a = i\epsilon_{a3b} T^b f^{(-)} + T^a f^{(0)} + T_{a3}^+ f^{(+)} \quad (4.34)$$

とアイソスピン分解できる。ここで $T_{a3}^+ = T^a \frac{1}{2}\tau^3 + \frac{1}{2}T_{BB}^3 T^a$ であり, $B = N$ の時は δ_{a3} になる。電気ボロン項をアイソスピン分解すると,

$$f_e^{(-)} = \left(\frac{eG_{BN\pi}}{8\pi M} \right) \left\{ i\mathbf{S}\cdot\boldsymbol{\epsilon} + 2 \frac{i\mathbf{S}\cdot(\mathbf{k} - \mathbf{q})(\boldsymbol{\epsilon}\cdot\mathbf{q})}{m_\pi^2 - (\mathbf{k} - \mathbf{q})^2} \right\} \quad (4.35)$$

$$f_e^{(0)} = f_e^{(+)} = \left(\frac{eG_{BN\pi}}{8\pi M} \right) i\mathbf{S}\cdot\boldsymbol{\epsilon} \left(-\frac{\omega_q}{2M} \right) \quad (4.36)$$

となる。 $f_e^{(-)}$ は $\mathcal{O}(N_c^{1/2})$ であるのに対して, $f_e^{(+,0)}$ は $\mathcal{O}(N_c^{-1/2})$ であるから, 電磁的偏極率を求める時には $f_e^{(-)}$ のみを考慮する。 $f_e^{(-)}$ は, $B = N$ の時は図 4.3 の Feynman 図に対応し, 第 1 項は Kroll-Ruderman 項 (図 4.3 の (a)), 第 2 項は π pole 項 (図 4.3 の (b)) と呼ばれる。式 (4.35) は低エネルギー定理を満たす模型, すなわちパイオンが真空と軸性ベクトルカレントで結合し, ハドロンと光子が $U(1)$ ゲージ相互作用している模型であれば必ず得られる式であるので, 模型依存性はない。

次に磁気ボロン項を計算する。カレント \mathcal{J}_i に対する行列要素は

$$\langle B(\mathbf{p}') | \mathcal{J}_i \epsilon_i | N(\mathbf{p}) \rangle = e [i(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{s})\delta_{BN}\mu_S^N + i(\mathbf{S}\cdot\mathbf{s})T^3\mu_V^{BN}] \quad (4.37)$$

で与えられる [40, 41]。ここで $\mathbf{s} = (\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \times \boldsymbol{\epsilon}$ である。 $\mu_V^N (\mu_S^N)$ はベクトル (スカラー) 磁気モーメントであり, 陽子と中性子の磁気モーメントから $\mu_{V,S}^N = (\mu_p \mp \mu_n)/2$ と定義される。また, $\mu_V^{\Delta N}$ は ΔN 遷移の磁気モーメントである。以下では large N_c で成り立つ関係式 [42]

$$\mu_V^{\Delta N} = -\frac{3}{\sqrt{2}}\mu_V^N \quad (4.38)$$

を用いて $\mu_V^{\Delta N}$ を μ_V^N で置き換えるので, $\mu_{V,S}^N$ を簡単のために $\mu_{V,S}$ と表記する。 μ_V は $\mathcal{O}(N_c)$ であるのに対して μ_S は $\mathcal{O}(N_c^{-1})$ であるため, μ_S に比例する $f_M^{(0)}$ は μ_V に比例する $f_M^{(\pm)}$ より $1/N_c$ 展開の高次項となるので無視する。

$\gamma(k) + N(p) \rightarrow \pi(q) + N(p')$ の磁気ボロン項の振幅は以下ようになる。

$$f_{N,m}^{(-)} = \left(\frac{eG_{NN\pi}}{8\pi M} \right) \left(\frac{\mu_V}{2M} \right) \left\{ -\frac{(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{q})(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{s})}{\omega} - \frac{(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{s})(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{q})}{\omega} + \frac{1}{2} \frac{[3\mathbf{s}\cdot\mathbf{q} - (\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{q})(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{s})]}{\omega - \Delta} + \frac{1}{2} \frac{[3\mathbf{s}\cdot\mathbf{q} - (\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{s})(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{q})]}{\omega + \Delta} \right\} \quad (4.39)$$

$$f_{N,m}^{(+)} = \left(\frac{eG_{NN\pi}}{8\pi M} \right) \left(\frac{\mu_V}{2M} \right) \left\{ -\frac{(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{q})(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{s})}{\omega} + \frac{(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{s})(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{q})}{\omega} - \frac{[3\mathbf{s}\cdot\mathbf{q} - (\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{q})(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{s})]}{\omega - \Delta} + \frac{[3\mathbf{s}\cdot\mathbf{q} - (\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{s})(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{q})]}{\omega + \Delta} \right\} \quad (4.40)$$

ここで large N_c で成り立つ関係式

$$G_{\Delta N\pi} = -\frac{3}{\sqrt{2}}G_{NN\pi} \quad (4.41)$$

を用いた。この振幅を Feynman 図で表すと, 図 4.4 になる。なお, 核子の質量が非常に重いと, 核子の反跳を無視した (反跳項 $k^2/2M$ は $\mathcal{O}(N_c^{-1})$ である)。第 1 項および第 2 項は中間状態が核子 (図 4.4 の (a)(b)), 第 3 項および第 4 項は中間状態が $\Delta(1232)$ の寄与 (図 4.4 の (c)(d)) である。各々の寄与は $\mathcal{O}(N_c^{3/2})$ であるが, 両方の寄与を加えると $\mathcal{O}(N_c^{3/2})$ の項は完全に打ち消し合うため, $f_e^{(-)}$ と同じオーダーである $\mathcal{O}(N_c^{1/2})$ となる。また各々の寄与は高エネルギーで $\mathcal{O}(\omega)$ で発散しているが, 両方の寄与を加えることにより発散がなくなり高エネルギーにおける振舞いが改善されている。これらの打ち消しは large N_c で成り立つ関係式 (4.38), (4.41) がなければ成立しない。すなわち, 第 4.1 節で述べたように, パイオン-バリオン散乱と同様に磁気ボロン項においても consistency condition によってユニタリティが成り立っているのである。なお, 磁気ボロン項を導き出すのに用いたのは, 各々の物理量の N_c 依存性と関係式 (4.38), (4.41) のみであるから, 得られた磁気ボロン振幅はスカーム模型に特有のものではなく, large N_c バリオン模型一般に成り立つ。

便宜のため振幅を以下のように書き直す。

$$f_{N,m}^{(\pm)} = \left(\frac{eG_{NN\pi}}{8\pi M} \right) \mu_V \left\{ t_1^{(\pm)} P_1(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{s}}) + t_3^{(\pm)} P_3(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{s}}) \right\} \quad (4.42)$$

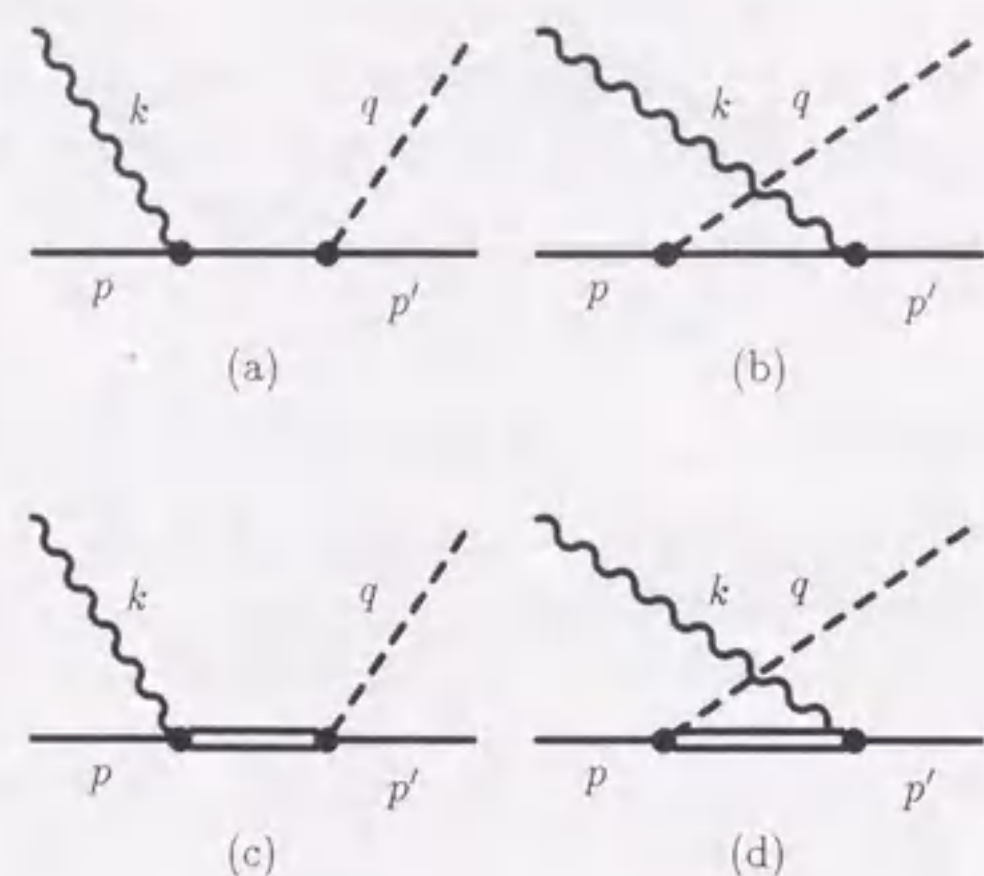


図 4.4: 磁気ボロン項の $N\pi$ channel のダイアグラム。波線は光子, 実線は核子, 二重線は $\Delta(1232)$, 点線はパイオンを表わしている。 $\Delta\pi$ channel においては終状態が核子ではなく $\Delta(1232)$ になる。

ここで $P_1(\hat{q}, \hat{s}) = (\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{q})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{s})$, $P_3(\hat{q}, \hat{s}) = 3(\hat{q} \cdot \hat{s}) - (\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{q})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{s})$ は各々 $J = 1/2$ と $J = 3/2$ における P -波への射影演算子である。また $\hat{q} = \mathbf{q}/q$, $\hat{s} = \mathbf{s}/k$ である。 $t_1^{(\pm)}, t_3^{(\pm)}$ は以下のようになる。

$$\begin{aligned} t_1^{(-)} &= -\frac{q}{3M\omega + \Delta} \\ t_3^{(-)} &= \frac{q\omega}{2M} \left[\frac{\Delta}{\omega^2 - \Delta^2 + i\Delta\Gamma_\Delta} - \frac{2}{3} \frac{\Delta}{\omega(\omega + \Delta)} \right] \\ t_1^{(+)} &= -\frac{2q}{3M\omega + \Delta} \\ t_3^{(+)} &= \frac{q\omega}{2M} \left[-\frac{2\Delta}{\omega^2 - \Delta^2 + i\Delta\Gamma_\Delta} + \frac{2}{3} \frac{\Delta}{\omega(\omega + \Delta)} \right] \end{aligned} \quad (4.43)$$

ここで, $\omega = \Delta$ における発散を避けるために $t_3^{(\pm)}$ に現象論的に $\Delta(1232)$ に有限の幅

$$\Gamma_\Delta = \frac{1}{6\pi} \left(\frac{G_{\Delta N\pi}}{2M} \right)^2 q^3 \quad (4.44)$$

を導入した。 $G_{NN\pi}$ を後の第 4.6 節で説明するように評価し, 関係式 (4.41) から $G_{\Delta N\pi}$ を決めると, この幅の式 (4.44) は on-shell 運動量 $q = 227$ MeV で $\Gamma_\Delta = 130$ MeV を与える¹。

一方, $\gamma(k) + N(p) \rightarrow \pi(q) + \Delta(p')$ については

$$f_{\Delta,m}^{(-)} = \left(\frac{eG_{\Delta N\pi}}{8\pi M} \right) \left(\frac{\mu_V}{2M} \right) \left\{ -\frac{(\mathbf{S} \cdot \mathbf{q})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{s})}{\omega} - \frac{4}{5} \frac{(\mathbf{S}_{\Delta\Delta} \cdot \mathbf{q})(\mathbf{S} \cdot \mathbf{s})}{\omega_q} \right\}$$

¹実験値は $\Gamma_\Delta = 115 - 125$ MeV

$$+ 2 \left\{ \frac{(\mathbf{S} \cdot \mathbf{s})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{q})}{\omega_q} - \frac{1}{5} \frac{(\mathbf{S}_{\Delta\Delta} \cdot \mathbf{s})(\mathbf{S} \cdot \mathbf{q})}{\omega} \right\} \quad (4.45)$$

$$f_{\Delta,m}^{(+)} = \left(\frac{eG_{\Delta N\pi}}{8\pi M} \right) \left(\frac{\mu_V}{2M} \right) \left\{ -\frac{(\mathbf{S} \cdot \mathbf{q})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{s})}{\omega} - \frac{1}{5} \frac{(\mathbf{S}_{\Delta\Delta} \cdot \mathbf{q})(\mathbf{S} \cdot \mathbf{s})}{\omega_q} + \frac{(\mathbf{S} \cdot \mathbf{s})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{q})}{\omega_q} + \frac{1}{5} \frac{(\mathbf{S}_{\Delta\Delta} \cdot \mathbf{s})(\mathbf{S} \cdot \mathbf{q})}{\omega} \right\} \quad (4.46)$$

となる。ここで $\mathbf{S}_{\Delta\Delta}$ は $\Delta(1232)$ 間のスピン行列である。

この節ではスカーム模型を用いることによりパイオン光子生成振幅を $1/N_c$ 展開の初項までのオーダーで求めた。パイオン光子生成振幅の N_c 依存性は $\mathcal{O}(N_c^{1/2})$ で, 電気ボロン項では $f_e^{(-)}$, 磁気ボロン項では $f_m^{(\pm)}$ が残る。得られた振幅はスカーム模型固有のものではなく large N_c バリオン模型において一般に成り立つものである事を改めて強調しておく。

4.4.2 電磁的偏極率

前節でパイオン光子生成振幅が求まったので, この節ではユニタリティを用いて, コンプトン散乱振幅の虚数部分を計算し, 分散関係式から電磁的偏極率を求める。まず $N\pi$ channel すなわち $N + \gamma \rightarrow N + \pi$ からの寄与を計算する。 $1/N_c$ 展開の初項では $f_{N,e}^{(-)}$, $f_{N,m}^{(\pm)}$ が寄与するので, 式 (4.34) より

$$f_N^\dagger f_N = 2f_{N,e}^{(-)\dagger} f_{N,e}^{(-)} + \left(2f_{N,m}^{(-)\dagger} f_{N,m}^{(-)} + f_{N,m}^{(+)\dagger} f_{N,m}^{(+)} \right) + 2 \left(f_{N,e}^{(-)\dagger} f_{N,m}^{(-)} + f_{N,m}^{(-)\dagger} f_{N,e}^{(-)} \right) \quad (4.47)$$

が成り立つ。以下では, 第 1 項, 第 2 項, 第 3 項をそれぞれ電気部分, 磁気部分, 干渉部分と呼ぶことにする。

まず電気部分を計算する。付録 A.2 を用いると,

$$\begin{aligned} \int d\Omega_q 2f_{N,e}^{(-)\dagger} f_{N,e}^{(-)} &= 8\pi \left(\frac{eG_{NN\pi}}{8\pi M} \right)^2 \\ &\left\{ \left[1 - 2I_2(v) + (\hat{\mathbf{k}}' \cdot \hat{\mathbf{k}} + v^2) J_1(v, \theta) - 2(1 + \hat{\mathbf{k}}' \cdot \hat{\mathbf{k}}) J_6(v, \theta) \right] \boldsymbol{\epsilon}'^* \cdot \boldsymbol{\epsilon} \right. \\ &+ \left[(\hat{\mathbf{k}}' \cdot \hat{\mathbf{k}} + v^2) J_3(v, \theta) - 2(1 + \hat{\mathbf{k}}' \cdot \hat{\mathbf{k}}) J_5(v, \theta) - 2J_6(v, \theta) \right] (\boldsymbol{\epsilon}'^* \cdot \hat{\mathbf{k}})(\boldsymbol{\epsilon} \cdot \hat{\mathbf{k}}') \\ &+ (1 - 2I_2(v)) i\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\epsilon}'^* \times \boldsymbol{\epsilon} \\ &+ (J_1(v, \theta) - 2J_6(v, \theta)) i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\hat{\mathbf{k}}' \times \hat{\mathbf{k}})(\boldsymbol{\epsilon}'^* \cdot \boldsymbol{\epsilon}) \\ &- J_6(v, \theta) i\boldsymbol{\sigma} \cdot [(\boldsymbol{\epsilon}'^* \times \hat{\mathbf{k}})(\boldsymbol{\epsilon} \cdot \hat{\mathbf{k}}') - (\boldsymbol{\epsilon} \times \hat{\mathbf{k}}')(\boldsymbol{\epsilon}'^* \cdot \hat{\mathbf{k}})] \\ &+ J_6(v, \theta) i\boldsymbol{\sigma} \cdot [(\boldsymbol{\epsilon}'^* \times \hat{\mathbf{k}}')(\boldsymbol{\epsilon} \cdot \hat{\mathbf{k}}) - (\boldsymbol{\epsilon} \times \hat{\mathbf{k}})(\boldsymbol{\epsilon}'^* \cdot \hat{\mathbf{k}})] \\ &\left. + (J_3(v, \theta) - 2J_5(v, \theta)) i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\hat{\mathbf{k}}' \times \hat{\mathbf{k}})(\boldsymbol{\epsilon}'^* \cdot \hat{\mathbf{k}})(\boldsymbol{\epsilon} \cdot \hat{\mathbf{k}}') \right\} \end{aligned} \quad (4.48)$$

と計算できる。ここで θ は重心系における散乱角, v はパイオンの速さ, $I_i(v)$ ($i=1 \dots 5$) と $J_j(v, \theta)$ ($j=1 \dots 6$) は付録 A.2 で与えられる関数である。式 (4.48) の第 1 項から第 6 項に掛かっているベクトルはコンプトン散乱振幅の一般式 (2.1) のベクトルに対応している。そ

れに対して最終項のベクトル $i\sigma \cdot (\hat{k}' \times \hat{k})(\epsilon^* \cdot \hat{k})(\epsilon \cdot \hat{k}')$ はコンプトン散乱振幅の一般式にない形だが、このベクトルは一次独立ではなく他のベクトルの和で書くことが出来る。すなわち

$$\begin{aligned} i\sigma \cdot (\hat{k}' \times \hat{k})(\epsilon^* \cdot \hat{k})(\epsilon \cdot \hat{k}') &= (1 - (\hat{k}' \cdot \hat{k})^2) i\sigma \cdot \epsilon^* \times \epsilon \\ &+ (\hat{k}' \cdot \hat{k}) i\sigma \cdot [(\epsilon^* \times \hat{k})(\epsilon \cdot \hat{k}') - (\epsilon \times \hat{k}')(\epsilon^* \cdot \hat{k})] \\ &- i\sigma \cdot [(\epsilon^* \times \hat{k}')(\epsilon \cdot \hat{k}) - (\epsilon \times \hat{k})(\epsilon^* \cdot \hat{k}')] \end{aligned} \quad (4.49)$$

である。したがって、(4.48)の最終項は第3項、第5項、第6項に分けることができる。すると、 $\text{Im} A_5(\omega, 0)$ と $\text{Im} A_6(\omega, 0)$ は $J_3(v, 0) - 2J_5(v, 0) - J_6(v, 0)$ に比例するが、これは0になる(付録A.2参照)。よって、分散関係式(2.15)から $\gamma_3^{N,e} = \gamma_4^{N,e} = 0$ となってしまう。しかしながらこの議論は正しくない。この点について以下考察する。

コンプトン散乱振幅の一般形(2.1)においては、エネルギー依存性を分かりやすくするために光子の運動量については単位ベクトル \hat{k}, \hat{k}' で表記していたが、もともとはベクトル因子には運動量ベクトル自身が用いられている。したがって、(4.48)の最終項のスピ因子は $i\sigma \cdot (\mathbf{k}' \times \mathbf{k})(\epsilon^* \cdot \mathbf{k})(\epsilon \cdot \mathbf{k}')$ となり、これはもともと光子運動量を4つ含んでいるので、振幅の実数部は少なくとも $\mathcal{O}(\omega^4)$ である。振幅に $1/\omega$ のような因子は現れないので、 $\mathcal{O}(\omega^3)$ 以下にオーダーが落ちることはない。したがってこの項は $\mathcal{O}(\omega^3)$ の係数である電磁的偏極率には寄与しないので、無視するのが正しい。よって、(4.48)の最終項は電磁的偏極率の評価には含めない。この議論の正当性は、第3章で求めたコンプトン散乱振幅と比較することによって、より直接的に確かめることが出来るが、その詳細は付録A.3に述べる²。

したがって、 $N\pi$ channelの電気部分からの寄与は以下ようになる。

$$\begin{aligned} \text{Im} A_1^{N,e}(\omega, \theta) &= \frac{e^2 G_{NN\pi}^2}{4\pi 8\pi M^2} 4\pi q [1 - 2I_2(v) + (\cos\theta + v^2)J_1(v, \theta) - 2(1 + \cos\theta)J_6(v, \theta)] \\ \text{Im} A_2^{N,e}(\omega, \theta) &= \frac{e^2 G_{NN\pi}^2}{4\pi 8\pi M^2} 4\pi q [(\cos\theta + v^2)J_3(v, \theta) - 2(1 + \cos\theta)J_5(v, \theta) - 2J_6(v, \theta)] \\ \text{Im} A_3^{N,e}(\omega, \theta) &= \frac{e^2 G_{NN\pi}^2}{4\pi 8\pi M^2} 4\pi q (1 - 2I_2(v)) \\ \text{Im} A_4^{N,e}(\omega, \theta) &= \frac{e^2 G_{NN\pi}^2}{4\pi 8\pi M^2} 4\pi q (J_1(v, \theta) - 2J_6(v, \theta)) \\ \text{Im} A_5^{N,e}(\omega, \theta) &= -\frac{e^2 G_{NN\pi}^2}{4\pi 8\pi M^2} 4\pi q J_6(v, \theta) \\ \text{Im} A_6^{N,e}(\omega, \theta) &= -\text{Im} A_5^{N,e}(\omega, \theta) \end{aligned} \quad (4.50)$$

分散関係式(2.15)を用いると、電磁的偏極率の電気部分からの寄与は以下ようになる。

$$\alpha^{N,e} = \frac{e^2}{4\pi} \frac{10G_{NN\pi}^2}{192\pi M^2 m_\pi}, \quad \beta^{N,e} = \frac{1}{10} \alpha^{N,e}$$

²この問題は L'vov によって議論されている。彼は Regge 極の議論から高エネルギー側の散乱振幅の振舞いを調べ、分散関係式がこの場合には成立しないと議論している [43]。

$$\begin{aligned} \gamma_0^{N,e} &= \frac{e^2}{4\pi} \frac{G_{NN\pi}^2}{24\pi^2 M^2 m_\pi^2} \\ \gamma_1^{N,e} &= \gamma_0^{N,e}, \quad \gamma_2^{N,e} = \frac{1}{2} \gamma_0^{N,e}, \quad \gamma_3^{N,e} = \frac{1}{4} \gamma_0^{N,e}, \quad \gamma_4^{N,e} = -\frac{1}{4} \gamma_0^{N,e} \end{aligned} \quad (4.51)$$

Goldberger-Treiman 関係式

$$G_{NN\pi} f_\pi = M g_A \quad (4.52)$$

を用いると、この結果は前節の HBChPT における $N\pi$ -loop の寄与(3.14)に等しいことが確かめられる。電磁的偏極率の陽子と中性子の違いは振幅 $f_{N,e}^{(0)}$ に依存しているが、我々はいまこの項を無視しているので、この近似のもとで予言できるのは陽子と中性子の平均値である。この事情は HBChPT における $\mathcal{O}(\epsilon^3)$ の予言と同じである。

次に磁気部分の評価する。 $\text{Im} A_i^{N,m}(\omega, \theta)$ は電気部分と同様に計算できる。

$$\begin{aligned} \text{Im} A_2^{N,m}(\omega, \theta) &= \frac{e^2 G_{NN\pi}^2}{4\pi 16\pi M^2} \mu_V^2 4\pi q \left[2 \left(|t_1^{(-)}|^2 + 2 |t_3^{(-)}|^2 \right) + \left(|t_1^{(+)}|^2 + 2 |t_3^{(+)}|^2 \right) \right] \\ \text{Im} A_1^{N,m}(\omega, \theta) &= -\text{Im} A_2^{N,m}(\omega, \theta) \cos\theta \\ \text{Im} A_4^{N,m}(\omega, \theta) &= \frac{e^2 G_{NN\pi}^2}{4\pi 16\pi M^2} \mu_V^2 4\pi q \left[2 \left(|t_1^{(-)}|^2 - |t_3^{(-)}|^2 \right) + \left(|t_1^{(+)}|^2 - |t_3^{(+)}|^2 \right) \right] \\ \text{Im} A_3^{N,m}(\omega, \theta) &= \text{Im} A_4^{N,m}(\omega, \theta) \cos\theta \\ \text{Im} A_5^{N,m}(\omega, \theta) &= -\text{Im} A_4^{N,m}(\omega, \theta) \\ \text{Im} A_6^{N,m}(\omega, \theta) &= 0 \end{aligned} \quad (4.53)$$

これらの式から

$$\gamma_2^{N,m} = -\gamma_4^{N,m} = \gamma_0^{N,m}, \quad \alpha^{N,m} = \gamma_1^{N,m} = \gamma_3^{N,m} = 0 \quad (4.54)$$

の関係が確かめられる。また、 $\Gamma_\Delta \rightarrow 0$ の極限で

$$\beta^{N,m} = \frac{e^2 \mu_V^2}{4\pi M^2 \Delta}, \quad \gamma_0^{N,m} = -\frac{e^2 \mu_V^2}{4\pi 2M^2 \Delta^2} \quad (4.55)$$

となる。これを HBChPT の Δ -pole の寄与(3.20)と比較すると、 b_1^2 を $9\mu_V^2/8$ と同定すると(これは $|b_1|$ を $|\mu_V^2|/2$ と同定することに等しい)両者は等しくなることが分かる。 $9\mu_V^2/8$ の実験値は 6.25 であるが、 b_1^2 は相対論的なツリーダイアグラムによる評価では 6.3 ± 1.75 と計算されているので、この同定は正しいと考えられる。

最後に干渉部分の評価する。干渉部分は Feynman 図で一例を挙げると図 4.5 のようなグラフである。このグラフには2つのバリオン内線が含まれているため HBChPT ではこの種の寄与は高次項となるのに対し、 $1/N_c$ 展開では初項の寄与を与える。

干渉部分の計算結果は以下の通りである。

$$\begin{aligned} &\int d\Omega_q 2 \left(f_{N,e}^{(-)\dagger} f_{N,m}^{(-)} + f_{N,m}^{(-)\dagger} f_{N,e}^{(-)} \right) \\ &= 8\pi \left(\frac{eG_{NN\pi}}{8\pi M} \right)^2 \mu_V \frac{1}{v} \end{aligned}$$

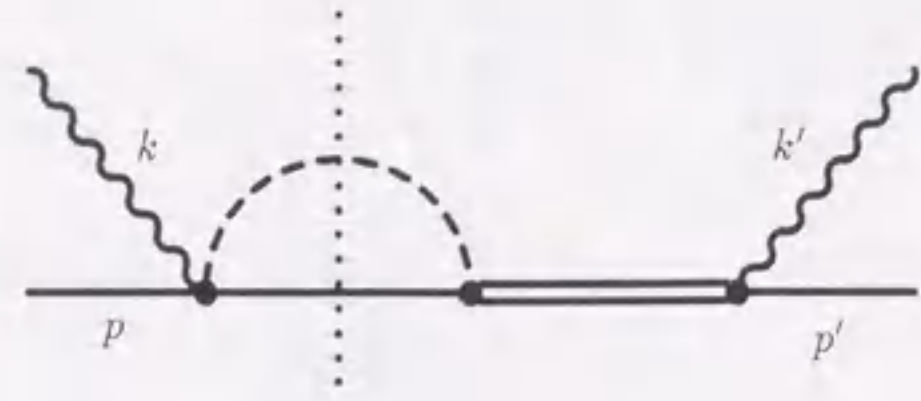


図 4.5: 干渉部分のダイアグラムの一例。波線は光子，実線は核子，二重線は $\Delta(1232)$ ，点線はパイオンを表わしている。中央の縦の点線では粒子は on-shell にある。

$$\begin{aligned}
& \left\{ 2I_2(v) \left(t_1^{(-)} - \text{Re} t_3^{(-)} \right) \left[(\epsilon'^* \cdot \epsilon) (\hat{k}' \cdot \hat{k}) - (\epsilon'^* \cdot \hat{k}) (\epsilon \cdot \hat{k}') \right] \right. \\
& + 2 \left[I_2(v) t_1^{(-)} + (2I_2(v) - 3I_4(v)) \text{Re} t_3^{(-)} \right] i\sigma \cdot (\epsilon'^* \times \epsilon) (\hat{k}' \cdot \hat{k}) \\
& + 2 \left[I_2(v) t_1^{(-)} - (I_2(v) - 3I_4(v)) \text{Re} t_3^{(-)} \right] i\sigma \cdot (\hat{k}' \times \hat{k}) (\epsilon'^* \cdot \epsilon) \\
& - I_2(v) \left(2t_1^{(-)} + \text{Re} t_3^{(-)} \right) i\sigma \cdot \left[(\epsilon'^* \times \hat{k}) (\epsilon \cdot \hat{k}') - (\epsilon \times \hat{k}') (\epsilon'^* \cdot \hat{k}) \right] \\
& \left. + (3I_2(v) + 6I_4(v)) \text{Im} t_3^{(-)} i\sigma \cdot \left[(\epsilon'^* \times \hat{k}) (\epsilon \cdot \hat{k}') + (\epsilon \times \hat{k}') (\epsilon'^* \cdot \hat{k}) \right] \right\} \quad (4.56)
\end{aligned}$$

最終項にコンプトン散乱振幅の一般形 (2.1) にない反エルミート型のスピン因子があるが，これは $\Delta(1232)$ の幅を考慮したために t_3 が複素数になったからである。この項は $\Delta(1232)$ の幅を 0 にとる極限で落ちる項であり，ここでは無視することにする。すると，

$$\begin{aligned}
\text{Im} A_2^{N,i}(\omega, \theta) &= -\frac{e^2 G_{NN\pi}^2}{4\pi 8\pi M^2} \mu_V \frac{8\pi q}{v} I_2(v) \left(t_1^{(-)} - \text{Re} t_3^{(-)} \right) \\
\text{Im} A_1^{N,i}(\omega, \theta) &= -\text{Im} A_2^{N,i}(\omega, \theta) \cos \theta \\
\text{Im} A_3^{N,i}(\omega, \theta) &= \frac{e^2 G_{NN\pi}^2}{4\pi 8\pi M^2} \mu_V \frac{8\pi q}{v} \left[I_2(v) t_1^{(-)} + (2I_2(v) - 3I_4(v)) \text{Re} t_3^{(-)} \right] \cos \theta \\
\text{Im} A_4^{N,i}(\omega, \theta) &= \frac{e^2 G_{NN\pi}^2}{4\pi 8\pi M^2} \mu_V \frac{8\pi q}{v} \left[I_2(v) t_1^{(-)} - (I_2(v) - 3I_4(v)) \text{Re} t_3^{(-)} \right] \\
\text{Im} A_5^{N,i}(\omega, \theta) &= -\frac{e^2 G_{NN\pi}^2}{4\pi 8\pi M^2} \mu_V \frac{4\pi q}{v} I_2(v) \left(2t_1^{(-)} + \text{Re} t_3^{(-)} \right) \\
\text{Im} A_6^{N,i}(\omega, \theta) &= 0 \quad (4.57)
\end{aligned}$$

となる。これから

$$\alpha^{N,i} = \gamma_1^{N,i} = \gamma_3^{N,i} = 0 \quad (4.58)$$

の関係式が得られる。

次に $\Delta\pi$ channel すなわち $N + \gamma \rightarrow \Delta + \pi$ からの寄与を考える。式 (4.34) から， $1/N_c$ 展開の初項で

$$f_{\Delta}^{\dagger} f_{\Delta} = \frac{4}{3} f_{\Delta,e}^{(-)\dagger} f_{\Delta,e}^{(-)} + \left[\frac{4}{3} f_{\Delta,m}^{(-)\dagger} f_{\Delta,m}^{(-)} - 2 \left(f_{\Delta,m}^{(-)\dagger} f_{\Delta,m}^{(+)} + f_{\Delta,m}^{(+)\dagger} f_{\Delta,m}^{(-)} \right) + \frac{14}{3} f_{\Delta,m}^{(+)\dagger} f_{\Delta,m}^{(+)} \right]$$

$$+ \left[\frac{4}{3} \left(f_{\Delta,e}^{(-)\dagger} f_{\Delta,m}^{(-)} + f_{\Delta,m}^{(-)\dagger} f_{\Delta,e}^{(-)} \right) - 2 \left(f_{\Delta,e}^{(-)\dagger} f_{\Delta,m}^{(+)} + f_{\Delta,m}^{(+)\dagger} f_{\Delta,e}^{(-)} \right) \right] \quad (4.59)$$

となる。

$\text{Im} A_i(\omega, \theta)$ を計算する手順は $N\pi$ channel と同じなので計算過程は省略し結果のみを記すことにする。まず電気部分は，

$$\begin{aligned}
\text{Im} A_1^{\Delta,e}(\omega, \theta) &= \frac{e^2 G_{\Delta N\pi}^2}{4\pi 18\pi M^2} 4\pi q \left[1 - \frac{2}{b} I_2(v) + \left(\cos \theta + \frac{v^2}{b^2} \right) J_1(v, \theta) - \frac{2}{b} (1 + \cos \theta) J_6(v, \theta) \right] \\
\text{Im} A_2^{\Delta,e}(\omega, \theta) &= \frac{e^2 G_{\Delta N\pi}^2}{4\pi 18\pi M^2} 4\pi q \left[\left(\cos \theta + \frac{v^2}{b^2} \right) J_3(v, \theta) - \frac{2}{b} (1 + \cos \theta) J_5(v, \theta) - \frac{2}{b} J_6(v, \theta) \right] \\
\text{Im} A_3^{\Delta,e}(\omega, \theta) &= -\frac{e^2 G_{\Delta N\pi}^2}{4\pi 36\pi M^2} 4\pi q \left[1 - \frac{2}{b} I_2(v) \right] \\
\text{Im} A_4^{\Delta,e}(\omega, \theta) &= -\frac{e^2 G_{\Delta N\pi}^2}{4\pi 36\pi M^2} 4\pi q \left[J_1(v, \theta) - \frac{2}{b} J_6(v, \theta) \right] \\
\text{Im} A_5^{\Delta,e}(\omega, \theta) &= \frac{e^2 G_{\Delta N\pi}^2}{4\pi 36\pi M^2} 4\pi \frac{q}{b} J_6(v, \theta) \\
\text{Im} A_6^{\Delta,e}(\omega, \theta) &= -\text{Im} A_5^{\Delta,e}(\omega, \theta) \quad (4.60)
\end{aligned}$$

となる。ここで $b = \omega/\omega_q$ である。分散関係式 (2.15) から電磁的偏極率は

$$\begin{aligned}
\alpha^{\Delta,e} &= \frac{e^2 G_{\Delta N\pi}^2}{4\pi 216\pi^2 M^2} \left[\frac{9\Delta}{\Delta^2 - m_{\pi}^2} + \frac{\Delta}{m_{\pi}^2} + \frac{\Delta^2 - 10m_{\pi}^2}{(\Delta^2 - m_{\pi}^2)^{3/2}} \ln R \right] \\
\beta^{\Delta,e} &= \frac{e^2 G_{\Delta N\pi}^2}{4\pi 216\pi^2 M^2} \left[-\frac{\Delta}{m_{\pi}^2} + \frac{\ln R}{(\Delta^2 - m_{\pi}^2)^{1/2}} \right] \\
\gamma_1^{\Delta,e} &= -\frac{e^2 G_{\Delta N\pi}^2}{4\pi 216\pi^2 M^2} \left[\frac{\Delta^2 + 2m_{\pi}^2}{(\Delta^2 - m_{\pi}^2)^2} - \frac{3m_{\pi}^2 \Delta \ln R}{(\Delta^2 - m_{\pi}^2)^{5/2}} \right] \\
\gamma_2^{\Delta,e} &= -\frac{e^2 G_{\Delta N\pi}^2}{4\pi 216\pi^2 M^2} \left[\frac{1}{\Delta^2 - m_{\pi}^2} - \frac{\Delta \ln R}{(\Delta^2 - m_{\pi}^2)^{3/2}} \right] \\
\gamma_3^{\Delta,e} &= -\gamma_4^{\Delta,e} = \frac{1}{2} \gamma_2^{\Delta,e} \quad (4.61)
\end{aligned}$$

となる。ここで

$$R = \frac{\Delta}{m_{\pi}} + \sqrt{\frac{\Delta^2}{m_{\pi}^2} - 1} \quad (4.62)$$

である。この結果はスピン依存電磁的偏極率については HBCChPT における $\Delta\pi$ -loop の結果 (3.21) に等しいがスピン平均電磁的偏極率についてはわずかに異なる。正確に言うと， $\alpha + \beta$ は等しいのだが， α ， β 各々が Δ/m_{π}^2 だけ異なっている。この原因は文献 [31] における $A_2(\omega, \theta)$ の評価方法に問題があるためである。コンプトン散乱振幅のスピン平均部分は横偏極条件 $\epsilon \cdot \hat{k} = 0$ ， $\epsilon'^* \cdot \hat{k}' = 0$ を課さなければ，

$$\begin{aligned}
T &= A_1(\omega, \theta) \epsilon'^* \cdot \epsilon + A_2^{(1)}(\omega, \theta) (\epsilon'^* \cdot \hat{k}') (\epsilon \cdot \hat{k}') + A_2^{(2)}(\omega, \theta) (\epsilon'^* \cdot \hat{k}') (\epsilon \cdot \hat{k}) \\
&\quad + A_2^{(3)}(\omega, \theta) (\epsilon'^* \cdot \hat{k}') (\epsilon \cdot \hat{k}') + A_2^{(4)}(\omega, \theta) (\epsilon'^* \cdot \hat{k}') (\epsilon \cdot \hat{k}) \quad (4.63)
\end{aligned}$$

と書くことができる。ここで横偏極条件を用いると $A_2^{(i)}(\omega, \theta) (i=2\sim 4)$ にかかっているベクトル部分は0になるので、

$$A_2(\omega, \theta) = A_2^{(1)}(\omega, \theta) \quad (4.64)$$

となる。しかし、Hemmertらはまず $\hat{k}' = \hat{k}$ とおいてコンプトン散乱振幅を計算し、その後 $(\epsilon^* \cdot \hat{k})(\epsilon \cdot \hat{k})$ にかかる振幅を $A_2(\omega, 0)$ と同定している。このように計算すると

$$A_2(\omega, 0) = \sum_{i=1}^4 A_2^{(i)}(\omega, 0) \quad (4.65)$$

となってしまうので、 $A_2(\omega, 0)$ は正しく求まらない。よって、 $A_2(\omega, 0)$ から導出する β の値も正しく求まらない。なお、このような計算手順でも $A_1(\omega, 0)$ の結果には影響がないので、 $\alpha + \beta$ については正しい値が得られる。したがって、 $\alpha + \beta$ は正しいのだが、 α, β 各々については正しくないということになるのである。彼らは $N\pi$ -loop の計算でも同じ過ちを犯しているのだが、 $N\pi$ -loop では偶然にも正しい答が得られてしまうので、計算ミスに気が付かなかったのだろう。

次に磁気部分は

$$\begin{aligned} \text{Im } A_2^{\Delta, m}(\omega, \theta) &= -\frac{e^2 G_{\Delta N \pi}^2 \Delta^2}{4\pi 54\pi M^4} \mu_V^2 4\pi q v^2 \\ \text{Im } A_1^{\Delta, m}(\omega, \theta) &= -\text{Im } A_2^{\Delta, m}(\omega, \theta) \cos \theta \\ \text{Im } A_3^{\Delta, m}(\omega, \theta) &= \frac{1}{4} \text{Im } A_1^{\Delta, m}(\omega, \theta) \\ \text{Im } A_4^{\Delta, m}(\omega, \theta) &= -\frac{1}{4} \text{Im } A_1^{\Delta, m}(\omega, \theta) \\ \text{Im } A_5^{\Delta, m}(\omega, \theta) &= -\text{Im } A_4^{\Delta, m}(\omega, \theta) \\ \text{Im } A_6^{\Delta, m}(\omega, \theta) &= 0 \end{aligned} \quad (4.66)$$

となり、電磁的偏極率は

$$\begin{aligned} \alpha^{\Delta, m} &= 0 \\ \beta^{\Delta, m} &= \frac{e^2 G_{\Delta N \pi}^2 \mu_V^2}{4\pi 54\pi^2 M^4} \left[\frac{\Delta^2 + 6m_\pi^2}{\Delta} - \frac{3\pi m_\pi^3}{\Delta^2} - \frac{3m_\pi^2(\Delta^2 - 2m_\pi^2)}{\Delta^2 \sqrt{\Delta^2 - m_\pi^2}} \ln R \right] \\ \gamma_1^{\Delta, m} &= \gamma_3^{\Delta, m} = 0 \\ \gamma_2^{\Delta, m} &= -\gamma_4^{\Delta, m} = -\frac{e^2 G_{\Delta N \pi}^2 \mu_V^2 m_\pi^3}{4\pi 108\pi^2 M^4 \Delta^3} \left[\frac{\Delta(24m_\pi^4 - 20m_\pi^2 \Delta^2 - \Delta^4)}{6m_\pi^3(\Delta^2 - m_\pi^2)} \right. \\ &\quad \left. + 2\pi + \frac{(8m_\pi^4 - 12m_\pi^2 \Delta^2 + 3\Delta^4) \ln R}{2m_\pi(\Delta^2 - m_\pi^2)^{3/2}} \right] \end{aligned} \quad (4.67)$$

と計算される。関係式 (4.54) は $\Delta\pi$ channel においても成り立っている。

最後に干渉部分は

$$\begin{aligned} \text{Im } A_2^{\Delta, i}(\omega, \theta) &= \frac{e^2 G_{\Delta N \pi}^2 \Delta}{4\pi 18\pi M^3} \mu_V 4\pi q I_2(v) \\ \text{Im } A_1^{\Delta, i}(\omega, \theta) &= -\text{Im } A_2^{\Delta, i}(\omega, \theta) \cos \theta \\ \text{Im } A_3^{\Delta, i}(\omega, \theta) &= \frac{e^2 G_{\Delta N \pi}^2 \Delta}{4\pi 36\pi M^3} \mu_V 4\pi \frac{q}{b} I_4(v) \cos \theta \\ \text{Im } A_4^{\Delta, i}(\omega, \theta) &= \frac{e^2 G_{\Delta N \pi}^2 \Delta}{4\pi 36\pi M^3} \mu_V 4\pi q \left(I_2(v) - \frac{1}{b} I_4(v) \right) \\ \text{Im } A_5^{\Delta, i}(\omega, \theta) &= -\frac{1}{4} \text{Im } A_2^{\Delta, i}(\omega, \theta) \\ \text{Im } A_6^{\Delta, i}(\omega, \theta) &= 0 \end{aligned} \quad (4.68)$$

となる。干渉部分については、電磁的偏極率の分散関係式 (2.15) における光子エネルギー ω の積分を解析的に実行することができないので、数値計算で求める。関係式 (4.58) は $\Delta\pi$ channel においても成り立っている。

4.5 π^0 交換項

この節では π^0 交換からの寄与がスカーム模型を用いても正しく計算されることを示す。 π^0 交換項は図 2.2 から分かるように、いわゆる seagull 項によって与えられる。seagull 項の振幅は

$$f_{\text{seagull}} = \epsilon'_i \epsilon_j \frac{i}{4\pi} \int d^3 y e^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{y}} \langle N(\mathbf{p}') | \{ [A_i(\mathbf{y}), \mathcal{J}_j(0)] - i\omega' [A_i(\mathbf{y}), \mathcal{J}_j(0)] \} | N(\mathbf{p}) \rangle \quad (4.69)$$

となる。

π^0 交換項における $\pi^0 \gamma \gamma$ 相互作用は Wess-Zumino-Witten ラグランジアンで与えられる。電磁相互作用カレント \mathcal{J}_i のうち、WZW ラグランジアンが関係している部分は

$$\mathcal{J}_i = 2e^2 \epsilon_{ijk} \pi_j^A W_k \quad (4.70)$$

であるから、これを (4.69) に代入すると

$$f_{\text{seagull}} = 2i\omega \epsilon_{ijk} \epsilon'_i \epsilon_j \frac{e^2}{4\pi} \langle N(\mathbf{p}') | W_k | N(\mathbf{p}) \rangle \quad (4.71)$$

となる。

行列要素は以下のように計算される。

$$\langle N(\mathbf{p}') | W_k | N(\mathbf{p}) \rangle = -\frac{1}{8\pi^2} \Lambda_{NN} \tau_3 \sigma_l \frac{1}{\omega_q^2} F_{lk}(q^2) \quad (4.72)$$

ここで、 Λ_{NN} は Wigner-Eckart の定理における不変行列の値であり、この場合は $-1/3$ となる。また、 $\mathbf{q} = \mathbf{k}' - \mathbf{k} = \mathbf{p} - \mathbf{p}'$ は π の運動量である。そして

$$F_{lk}(q^2) = \frac{\omega_q^2}{f_\pi^2} \int d^3 r e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \left[\hat{\phi}_0(\mathbf{r}) \partial_k \hat{\phi}_l(\mathbf{r}) - \hat{\phi}_l(\mathbf{r}) \partial_k \hat{\phi}_0(\mathbf{r}) \right] \quad (4.73)$$

である。 $F_{lk}(q^2)$ は $\omega_q^2 \rightarrow 0$ の極限で

$$F_{lk}(q^2) = -iq_k q_l \omega_q^2 \int d^3r \frac{j_1(qr)}{q} \cos F(r) \sin F(r) + \mathcal{O}(\omega_q^2) \\ \rightarrow \frac{q_k q_l G_{NN\pi}}{\Lambda_{NN} 2M f_\pi} \quad (4.74)$$

となる[41]。したがって、 π^0 交換の振幅は

$$f_{\text{seagull}} = -\frac{e^2}{4\pi} \frac{\omega}{4\pi^2 m_\pi^2} \frac{G_{NN\pi}}{2M f_\pi} i\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\epsilon}' \times \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{q}) \tau_3 \quad (4.75)$$

となる。

したがって、電磁的偏極率への寄与は

$$\gamma_1^{\pi^0\gamma\gamma} = -\frac{e^2}{4\pi} \frac{G_{NN\pi}}{4\pi^2 M f_\pi m_\pi^2} \tau_3 \\ \gamma_3^{\pi^0\gamma\gamma} = \frac{e^2}{4\pi} \frac{G_{NN\pi}}{8\pi^2 M f_\pi m_\pi^2} \tau_3 \\ \gamma_4^{\pi^0\gamma\gamma} = -\frac{e^2}{4\pi} \frac{G_{NN\pi}}{8\pi^2 M f_\pi m_\pi^2} \tau_3 \\ \alpha^{\pi^0\gamma\gamma} = \beta^{\pi^0\gamma\gamma} = \gamma_2^{\pi^0\gamma\gamma} = 0 \quad (4.76)$$

で与えられる。この結果はGoldberger-Treiman関係式(4.52)を用いると、HBChPTの結果(3.15)に等しいことが分かる。

4.6 計算結果

large N_c バリオン模型による電磁的偏極率の計算結果を表4.1に与える。用いたパラメータは前章のHBChPTと同じものを用いた。すなわち $f_\pi = 92.4$ MeV, $m_\pi = 138$ MeV, $M = 938.9$ MeV, $\Delta = 294$ MeV, $g_A = 1.26$ である。また $\mu_V = 2.35$ は実験値に合わせた。 $N\pi$ 結合定数 $G_{NN\pi}$ はGoldberger-Treiman関係式(4.52)から求めた。

この結果をHBChPTの結果(21ページ, 表3.1)と比較してみよう。まず第4.4.2節で述べたようにlarge N_c バリオン模型における $N\pi$ channelの電気部分(4.51), $\Delta\pi$ channelの電気部分(4.61)は、HBChPTにおける $N\pi$ -loop(3.14), $\Delta\pi$ -loop(3.21)にそれぞれ一致している。ただし $\Delta\pi$ channelの電気部分のほうは、 α と β については37ページで説明したようにHBChPTにおける $\Delta\pi$ -poleの計算に誤りがあるために、large N_c バリオン模型とは違った値になっている。それを考慮しても、数値的にはHBChPTとは多少異なっている。その原因は $\pi N\Delta$ 結合定数の評価方法が両者で違うからである。HBChPTにおいて $\Delta\pi$ -loopでは $\pi N\Delta$ 結合定数に二種類のパラメータが用いられているが、large N_c バリオン模型においては N_c 無限大における関係式(4.41)から $G_{\Delta N\pi}$ は一意に定められ、その値は相対論的ツリー計算で評価したものに非常に近い。したがって $\Delta\pi$ channelの電気

表 4.1: large N_c バリオン模型による電磁的偏極率。パラメータは実験値を用いている。 E, M, I はそれぞれ電気, 磁気, 干渉部分からの寄与である。また, 括弧内の値は Δ の幅を0にした極限での値である。単位はスピン平均電磁的偏極率は 10^{-4} fm^3 , スピン依存電磁的偏極率は 10^{-4} fm^4 である。

	$N\pi$ channel			$\Delta\pi$ channel			$N\pi + \Delta\pi$	WZW
	E	M	I	E	M	I		
α	12.5	0	0	10.2	0	0	22.7	0
β	1.25	9.07	0.25	-2.22	1.24	-2.39	7.20	0
		(11.95)	(0)				(9.83)	
γ_1	4.56	0	0	-0.33	0	0	4.23	-21.7 τ_3
γ_2	2.28	-2.54	-0.07	-0.37	0.05	0.42	-0.23	0
		(-4.00)	(0)				(-1.62)	
γ_3	1.14	0	0	-0.18	0	0	0.96	10.9 τ_3
γ_4	-1.14	2.54	1.10	0.18	-0.05	-0.09	2.55	-10.9 τ_3
		(4.00)	(0)				(2.91)	
γ_0	4.56	-2.54	-2.14	-0.33	0.05	-0.24	-0.64	0
		(-4.00)	(0)				(0.03)	

部分の値は、HBChPTの結果の表3.1の $\Delta\pi$ -loopのかっこ内の数値のほうに近い値となっている。

また、large N_c バリオン模型において $\Delta(1232)$ の幅を0に取った極限での $N\pi$ channelの磁気部分は、HBChPTにおける Δ -pole項に一致する。HBChPTでは $\gamma N\Delta$ 結合定数においても二種類のパラメータが用いられているが、large N_c バリオン模型においては N_c 無限大における関係式(4.38)から一意に定められ、その値はやはり相対論的ツリー計算で評価したものに非常に近い。

large N_c バリオン模型における干渉項に対応する項がHBChPTの $\mathcal{O}(\epsilon^3)$ での計算には存在しないが、この理由はすでに述べたように干渉項に対応する項は重バリオン展開においては高次項になるためである。一般に干渉部分の寄与は電気部分や磁気部分と比較すると小さいが、 β における $\Delta\pi$ channelと γ_4 (その結果 γ_0 も)における $N\pi$ channelにおいては干渉部分の寄与が大きく、そのためにHBChPTと大きく異なった結果を与える。

$\Delta\pi$ channelの寄与は $N\pi$ channelの寄与に比べて小さくなっているが、この理由は $\Delta\pi$ channelのしきい値が $N\pi$ channelより高いからである。式(2.15)から分かるように、分散関係式を用いて電磁的偏極率を求める時に、スピン平均偏極率の場合にも $1/\omega^3$, スピン依存偏極率の場合には $1/\omega^4$ の因子がかかるために、しきい値が高い反応channelからの寄与は大きく抑えられることになる。とりわけスピン依存電磁的偏極率の場合はこの効果が大きく、 $\Delta\pi$ channelの寄与はほとんどない。このことから $\Delta(1232)$ より高い共鳴状態($N^*(1440)$ など)の電磁的偏極率への寄与は非常に小さいであろうことが推測される。

large N_c バリオン模型とHBChPTの結果を実験値およびスピン平均のパイオン光子生

表 4.2: 核子の電磁的偏極率。多重極解析および実験値における p , n はそれぞれ陽子, 中性子の値である。large N_c バリオン模型および HBChPT では陽子と中性子の値は等しい。単位はスピン平均電磁的偏極率は 10^{-4} fm^3 , スピン依存電磁的偏極率は 10^{-4} fm^4 である。

	large N_c	HBChPT	多重極解析				実験値	
			HDT		SAID		p	n
			p	n	p	n		
α	22.7	16.7			11.9	13.3	12.1	12.6
β	7.20	9.40			1.9	1.8	2.1	3.2
γ_1	4.23	4.35	5.1	6.1	3.1	6.3		
γ_2	-0.23	-0.35	-1.1	-0.8	-0.8	-0.9		
γ_3	0.96	1.02	-0.6	-0.6	0.3	-0.7		
γ_4	2.55	1.38	3.4	3.4	2.7	3.8		
γ_0	-0.64	1.94	-0.6	-0.2	-1.5	-0.4		

成反応の多重極解析の結果と比較したのが表 4.2 である。多重極解析は Hanstein らの結果 [44] を利用したもの (HDT)[21] と, SP97K の解 [45] に基づくもの (SAID)[13] を載せている。 π^0 交換の寄与 (WZW 項からの寄与) は本質的に模型非依存なので, 簡単のため省略している。

large N_c バリオン模型および HBChPT においては, 陽子と中性子の電磁的偏極率の差は展開³ の初項では現れない。またパイオン 1 ループの計算をしているので, 高エネルギー領域において振舞いが悪くなる。さらに重バリオン近似という非相対論的な近似 ($1/N_c$ 展開においては核子の質量は $\mathcal{O}(N_c^1)$ であるから重バリオン近似と同等の近似になる) をしているのも高エネルギー領域における振舞いの悪化の一因である。その結果として特にスピン平均偏極率の値が実験値に比べてかなり大きくなっている。スピン依存偏極率においては, 高エネルギー領域からの寄与は分散関係式における $1/\omega^4$ 因子のおかげでスピン平均偏極率の場合よりさらに $1/\omega$ 抑えられるので, 高エネルギーにおける振舞いがスピン平均電磁的偏極率ほどには影響していない。

高エネルギーにおける振舞いを改善する方法として, パイオン-核子結合に形状因子を導入することが考えられるが, これは 2 ループ以上の計算をすることに等しく, したがって高次項の補正を取り入れる必要がある。また相対論的效果も $1/N_c$ 展開および “small scale expansion” の高次項として入ってくる。したがって, より定量的に信頼できる結果を求めるには展開の高次項を計算する必要がある。また高次項を計算することによって, 展開の収束性の評価が出来る。

$1/N_c$ 模型と HBChPT の違いは, HBChPT によるスピン平均電磁的偏極率の計算でのミスを除くと, β および γ_4 (その結果として γ_0 も) に現れている。この原因は干渉項 (36 ページ, 図 4.5 参照) の有無の差によるものである。干渉項は $1/N_c$ 展開では初項になる

³ スカーム模型においては $1/N_c$ 展開, HBChPT においては “small scale expansion”

のに対して重バリオン展開では高次項となるからである。干渉項の寄与は β と γ_4 のどちらにも良い方向の寄与を与えている。したがって, 電磁的偏極率においては $1/N_c$ 展開のほうが重バリオン展開よりも良い展開になっている。

第5章 ハイペロンの電磁的偏極率

5.1 現状

ハイペロンの電磁的偏極率の研究はまだ十分になされていない。実験面ではハイペロンの電磁的偏極率の測定はまだ行なわれていないが、現在 $\gamma\Sigma$ 相互作用の測定が計画されている [46]。理論面ではスピン平均電磁的偏極率において非相対論的クォーク模型 (NRQM) による Σ^\pm の計算 [47], SU(3)HBChPT によるバリオン八重項の計算 [48, 49], スカーム模型によるバリオン八重項の計算 [50], QCD 和則による中性ハイペロンの α の計算 [51] があるのみである。これらの計算結果を表 5.1 にまとめる。

HBChPT による計算は第 3.2 節の方法を SU(3) に発展させたものであり、カイラル展開の初項のみ、すなわち $\mathcal{O}(p^3)$ で計算している。この近似の範囲では、パイオンループの寄与は核子において陽子と中性子で等しかったのと同様に、ハイペロンのアイソスピン第 3 成分には依存しない。だが、ハイペロンの場合はパイオンループのほかに K ループが加わり、 K ループの寄与がアイソ多重項の間の違いを生む。ただし、この計算では中間状態として八重項のみを取り入れており、十重項は考えていない。第 3.3 節から核子において $\Delta(1232)$ の寄与が大きいことが分かっているので、ハイペロンにおいても十重項の寄与を考慮するのは重要である。さらにバリオン間の質量差も無視しており、この近似の下では $\alpha = 10\beta$ が成立する。したがって、表 5.1 の HBChPT の欄には α の値だけを載せている。

その他の方法の計算も概観しておく。NRQM による結果は Σ^+ と Σ^- で大きく異なるが、これは Σ^+ のクォーク構成が uus であるのに対し、 Σ^- のクォーク構成が dds である

表 5.1: ハイペロンのスピン平均電磁的偏極率。HBChPT においては $\alpha = 10\beta$ が成り立つため α の値のみを載せている。単位は 10^{-4} fm^3 である。

	NRQM		HBChPT	Skyrme		QCD 和則
	α	β	α	α	β	α
Λ			7.5	18.1	3.4	6.2
Σ^+	20.8	1.7	9.4	18.8	1.3	
Σ^0			8.3	18.1	-12.7	
Σ^-	5.7	-1.7	6.3	17.4	-7.9	
Ξ^0			3.8	19.9	4.4	10.8
Ξ^-			2.3	18.0	-7.2	

ことから、電磁場中における分極の仕方が全く違うためである。スカーム模型に基づく計算は sea-gull 項による計算で、この方法ではゲージに依存してしまうので、ゲージ不変性の観点からは疑問が残る。QCD 和則による計算は模型によらない計算ということで興味深い。文献 [51] の方法では中性バリオンの α しか計算することができず、また α_{Σ^0} の Borel 質量依存性を消すことができないため値を予言することができないなど、計算方法の改良が待たれるところである。

ハイペロンのスピン依存偏極率については理論・実験双方ともまだ研究例がない。

5.2 $1/N_c$ 展開による計算

我々は第 4 章で説明した方法を発展させて、 Λ と Σ のスピン平均電磁的偏極率を計算する。すなわち、まずメソン光子生成振幅を計算し、分散関係式とユニタリティを用いて電磁的偏極率を求める。ハイペロンは SU(2) ソリトンに K を束縛させた状態として扱う bound kaon soliton 模型 (BKSM) [52] で取り扱う。この方法は large N_c の方法 [37] と同様の結果を与えるため、得られる結果は BKSM 特有のものではなく large N_c 模型一般に成り立つ。

計算すべきメソン光子生成振幅は、パイオン光子生成振幅と K 光子生成振幅である。どちらも $1/N_c$ 展開の初項のみを考慮するが、そのオーダーはパイオンにおいては $\mathcal{O}(N_c^{1/2})$ になるのに対して K では $\mathcal{O}(N_c^0)$ になる。我々の計算は中間状態として八重項および十重項を取り入れ、またバリオン間の質量差も考慮する。

5.2.1 メソン光子生成振幅

ハイペロンの場合も核子と同様にメソン光子生成振幅は電気ボロン項と磁気ボロン項から成る。

まず電気ボロン項は式 (4.35) を発展させた形となる。パイオン光子生成振幅 $\gamma(K) + Y(p) \rightarrow \pi(q) + Y'(p')$ は

$$f^a = T_a^{(-)} f^{(-)} + T_a^{(0)} f^{(0)} + T_a^{(+)} f^{(+)} + T_a^{(\delta)} f^{(\delta)} \quad (5.1)$$

のように分解される。ここで、 $\gamma\Sigma \rightarrow \pi\Sigma$ では I_a をアイソスピン行列とすると $T_a^{(-)} = i\epsilon_{a3b} I_b$, $T_a^{(+)} = \{I_a, I_3\}$, $T_a^{(0)} = I_a$, $T_a^{(\delta)} = \delta_{a3} I$ となる。 $\gamma\Lambda \rightarrow \pi\Sigma$ においては $T_a^{\Sigma\Lambda}$ をアイソスピン遷移行列とすると $T_a^{(-)} = i\epsilon_{a3b} T_b^{\Sigma\Lambda}$, $T_a^{(+)} = 0$ となる。

電気ボロン項において $\mathcal{O}(N_c^{1/2})$ となるのは $f^{(-)}$ のみで

$$f_e^{(-)} = \left(\frac{ef_{Y'Y\pi}}{4\pi m_\pi} \right) \left\{ i\mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\epsilon} + 2 \frac{i\mathbf{S} \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{q})(\boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{q})}{m_\pi^2 - (\mathbf{k} - \mathbf{q})^2} \right\} \quad (5.2)$$

となる。ここで、 $f_{Y'Y\pi}$ は擬ベクトル結合定数を表わし、スカラー結合定数 $G_{Y'Y\pi}$ とは on-shell で

$$\frac{f_{Y'Y\pi}}{m_\pi} = \frac{G_{Y'Y\pi}}{M_{Y'} + M_Y} \quad (5.3)$$

の関係にあり,

$$\frac{1}{m_\pi} \frac{f_{Y^*Y\pi}}{\sqrt{4\pi}} = \Lambda_{Y^*Y} G_\pi \quad (5.4)$$

で与えられる。 Λ_{Y^*Y} は large N_c 模型で決定される量であるのに対して G_π はフリーパラメータであるが, BKSM では G_π も計算することができる量で, 例えば $f_{\Sigma\Lambda\pi}/\sqrt{4\pi} = 0.22$ となる [53]。この値は実験値 0.20 ± 0.01 [54] に近いのでこの値を採用する。 Λ 因子 Λ_{Y^*Y} は SU(2) 代数によって一意に定められるのですべてのパイオン結合定数が決まる。

一方, K 光子生成振幅も (5.3) と同様の式で与えられるが, 擬ベクトル結合定数 f_{YBK} が, $\mathcal{O}(N_c^0)$ であるため振幅も $\mathcal{O}(N_c^0)$ となる。擬ベクトル結合定数 f_{YBK} は,

$$\frac{1}{m_K} \frac{f_{YBK}}{\sqrt{4\pi}} = \Lambda_{YB} G_K \quad (5.5)$$

で与えられる。BKSM から $f_{\Lambda p K}/\sqrt{4\pi} = 0.92$ となるが [53], これも実験値 0.89 ± 0.10 に十分近いのでこの値を用いる。パイオンの場合と同様に Λ 因子は SU(2) 代数によって一意に定まる。

電気ボルン項においては光子とメソンが結合しているのので, 現れるメソンは荷電メソンに限られる。したがって, $\gamma\Sigma^0 \rightarrow \pi^0\Lambda$ などの振幅は現れない。

磁気ボルン項は核子の場合と同様に各々の振幅は $\mathcal{O}(N_c^{3/2})$ であるが, それらが打ち消しあって最終的に $\mathcal{O}(N_c^{1/2})$ の振幅が得られる。ただし核子の場合と違い, Σ においてはこの打ち消し合いが成り立つには, 中間状態として八重項と十重項だけではなく large N_c バリオン模型に現れる exotic states をも考慮しなければならない。第 4.1 節で強調したように, consistency condition は中間状態として可能な任意のバリオンを考える必要があるからである。 $\gamma\Sigma \rightarrow \pi\Sigma$ で必要なのはストレンジネス $S = -1$, アイソスピン $I = 2$, スピン $J = 3/2$ のバリオンで, これを Σ^{**} と呼ぶことにする。また $\gamma\Sigma \rightarrow K\Xi$ においては, $S = -2$ で $I = 3/2, J = 1/2$ のバリオンと $I = 3/2, J = 3/2$ のバリオンが現れ, それぞれ Ξ_1^{**}, Ξ_3^{**} と呼ぶことにする。

磁気ボルン項においては核子の場合と同様にエネルギー分母に発散が現れるので, Σ^* と Σ^{**} に幅を導入することによってこの発散を回避する。 Σ^* は $\Lambda\pi$ および $\Sigma\pi$ に崩壊するので, Σ^* の幅は

$$\Gamma_{\Sigma^*} = \frac{2}{3} \left(\frac{f_{\Sigma^*\Lambda\pi}^2}{4\pi} \right) \frac{q_\Lambda^3}{m_\pi^2} + \frac{4}{3} \left(\frac{f_{\Sigma^*\Sigma\pi}^2}{4\pi} \right) \frac{q_\Sigma^3}{m_\pi^2} \quad (5.6)$$

で与えられる。ここで q_Λ と q_Σ はそれぞれ $\Lambda\pi$ と $\Sigma\pi$ 状態への崩壊におけるパイオンの運動量である。on-shell 運動量において $\Gamma_{\Sigma^* \rightarrow \Lambda\pi} = 44.8$ MeV, $\Gamma_{\Sigma^* \rightarrow \Sigma\pi} = 4.7$ MeV となる。いっぽう Σ^{**} の場合は, Σ^{**} が $I = 2$ であることから $\Lambda\pi$ には崩壊せず, また後に述べるように Σ^{**} の質量が $\Sigma^*\pi$ に崩壊できるほど大きくないので, $\Sigma\pi$ のみに崩壊する。よって幅は

$$\Gamma_{\Sigma^{**}} = \frac{2}{3} \left(\frac{f_{\Sigma^{**}\Sigma\pi}^2}{4\pi} \right) \frac{q^3}{m_\pi^2} \quad (5.7)$$

で与えられ, on-shell 運動量においては $\Gamma_{\Sigma^{**}} = 138$ MeV となる。 Σ^{**} は $\Lambda\pi\pi$ には崩壊し得るが, 我々の偏極率の計算では 1 メソン過程しか考えていないので, 整合性をとるためにこの channel については考慮しない。

表 5.2: $1/N_c$ 展開によるハイペロンの電氣的偏極率 α 。単位は 10^{-4} fm^3 である。

	total	π channel			K channel			
		$\Lambda\pi$	$\Sigma\pi$	$\Sigma^*\pi$	$N\bar{K}$	ΞK	$\Delta\bar{K}$	Ξ^*K
Λ	18.05	0	5.40	7.13	2.78	0.38	0	2.36
Σ^+	22.08	11.89	4.30	0.98	0	2.36	1.99	0.56
Σ^0	13.79	0	8.61	1.95	0.44	1.18	1.33	0.28
Σ^-	18.71	11.89	4.30	0.98	0.88	0	0.67	0

5.2.2 exotic states の質量

BKSM によると, ストレンジネス S , アイソスピン I , スピン J のバリオンの質量は

$$M = M_s + |S|\omega + \frac{1}{2\Lambda} \left[cJ(J+1) + (1-c)I(I+1) - c(1-c) \frac{|S|}{2} \left(\frac{|S|}{2} + 1 \right) \right] \quad (5.8)$$

で与えられる。ここでパラメータ M_s, ω, c, Λ は BKSM から一意に定められる量であるが, BKSM の予言値をそのまま用いると質量は非常に大きな値になってしまう。そこで核子, Δ, Λ, Σ の質量をインプットとしてこれらのパラメータを決定すると, 結果は $M_s = 866$ MeV, $\omega = 221$ MeV, $c = 0.630$, $3/(2\Lambda) = 293$ MeV となる¹。前節で導入した exotic states の質量をこの質量公式から求めると

$$\begin{aligned} \Sigma^{**}(I=2, J=\frac{3}{2}) &= 1520 \text{ MeV}, \\ \Xi_1^{**}(I=\frac{3}{2}, J=\frac{1}{2}) &= 1440 \text{ MeV}, \quad \Xi_3^{**}(I=\frac{3}{2}, J=\frac{3}{2}) = 1640 \text{ MeV} \end{aligned} \quad (5.9)$$

となる。質量公式 (5.8) の初項は $\mathcal{O}(N_c^1)$, 第二項は $\mathcal{O}(N_c^0)$, 第三項は $\mathcal{O}(N_c^{-1})$ であることに注意されたい。

5.2.3 結果

電氣的偏極率 α を表 5.2 に, 磁氣的偏極率 β を表 5.3 にまとめる。核子の場合と同様に, 電氣的偏極率は電気部分しか効かないのに対し, 磁氣的偏極率は電気部分, 磁気部分, その干渉部分の寄与がある。

α および β の電気部分については, 中間状態が八重項の channel, すなわち $\Lambda\pi, \Sigma\pi, N\bar{K}, \Xi K$ についてはバリオン間の質量を無視すると式の形は HBChPT の結果に帰着する。ただし, 結合定数が両者で違う (HBChPT は SU(3) 対称性から決められるのに対し

¹large N_c 模型では (5.8) 右辺第三項の括弧内の係数は 3 つとも独立なパラメータとなる。そのため BKSM よりパラメータが一つ増えるので, $|S|^2$ の質量への寄与を独立に決められるため, Ξ の質量もインプットとなり, $S = -2$ バリオンの質量が少し変化する。しかし, この違いは Λ や Σ の偏極率にはほとんど効かない。

て, large N_c 模型では SU(2)+束縛 K という形から決めている) ので数値は完全には一致しない。バリオン間の質量差を考慮すると, 中間状態のバリオンがもとのハイペロンより軽い channel において急激に値が増加するので, Σ^\pm における $\Lambda\pi$ channel は約3倍もの大きさになる。そのために α_{Σ^\pm} は α_{Σ^0} に比べて大きくなる。逆に十重項は質量が大きいので質量差を考慮すると総じて寄与は小さくなるが, Λ は Σ に比べて十重項との結合定数が

$$|f_{\Sigma^+\Lambda\pi}| = \sqrt{3}|f_{\Sigma\Lambda\pi}|, \quad |f_{\Sigma^+\Sigma\pi}| = \frac{\sqrt{3}}{2}|f_{\Sigma\Sigma\pi}| \quad (5.10)$$

のように大きいので, Λ においては十重項からの寄与も非常に大きくなっている。

一方 β については $\Lambda\pi$ と $\Sigma\pi$ の磁気部分の寄与が支配的になっている。これは核子において $N\pi$ channel 磁気部分に Δ -pole の寄与があったのと同様に, $\Lambda\pi$ channel において Σ^* -pole, $\Sigma\pi$ channel において Σ^* -pole と Σ^{**} -pole の寄与があるためである。 Σ^* と Σ^{**} の幅を 0 にする極限をとり, β への Σ^* -pole と Σ^{**} -pole の寄与を求めると,

$$\beta_\Lambda^M|_{\Sigma^*} = 6.13, \quad \beta_{\Sigma^\pm}^M|_{\Sigma^*} = 2.15 \quad (5.11)$$

$$\beta_{\Sigma^\pm}^M|_{\Sigma^{**}} = 3.78, \quad \beta_{\Sigma^0}^M|_{\Sigma^{**}} = 5.04 \quad (5.12)$$

となる (単位は 10^{-4} fm^3)。

得られた結果は核子の場合と同様に, 実際の値に比べて大きくなっていると予想される。なぜなら, 1ループのみの計算のために形状因子が考慮されておらず, またハイペロンの反挑を無視した非相対論的な計算になっているためである。これに関しては形状因子の導入や相対論的補正を考慮する必要がある, それらは $1/N_c$ 展開の高次項として現れる効果である。

表 5.3: $1/N_c$ 展開によるハイペロンの磁気的偏極率 β 。 E, M, I はそれぞれ電気, 磁気, 干渉部分からの寄与である。単位は 10^{-4} fm^3 である。

	total	channel	E	M	I	sum.
Λ	3.22	$\Lambda\pi$	0	4.80	0	4.80
		$\Sigma\pi$	0.34	0.56	-0.73	0.17
		$\Sigma^*\pi$	-1.29	0.24	-1.25	-2.31
		$N\bar{K}$	0.25	0.95	-0.60	0.60
		ΞK	0.03	0.09	0.02	0.14
		$\Xi^* K$	0.06	0.07	-0.31	-0.18
Σ^+	6.67	$\Lambda\pi$	0.87	1.77	-0.33	2.30
		$\Sigma\pi$	0.43	3.31	0.57	4.32
		$\Sigma^*\pi$	-0.07	0.13	-0.20	-0.13
		$N\bar{K}$	0	0.34	0	0.34
		ΞK	0.21	0.06	-0.34	-0.07
		$\Delta\bar{K}$	0.20	0.12	-0.40	-0.08
		$\Xi^* K$	0.03	0.03	-0.05	-0.00
Σ^0	5.52	$\Sigma\pi$	0.86	4.06	0.46	5.34
		$\Sigma^*\pi$	-0.14	0.52	-0.42	-0.03
		$N\bar{K}$	0.03	0.15	-0.07	0.11
		ΞK	0.11	0.03	-0.12	0.02
		$\Delta\bar{K}$	0.13	0.07	-0.20	-0.01
$\Xi^* K$	0.01	0.09	-0.05	0.06		
Σ^-	7.13	$\Lambda\pi$	0.87	1.77	-0.33	2.30
		$\Sigma\pi$	0.43	3.31	0.57	4.32
		$\Sigma^*\pi$	-0.07	0.13	-0.20	-0.13
		$N\bar{K}$	0.07	0.34	0.04	0.45
		ΞK	0	0.06	0	0.06
		$\Delta\bar{K}$	0.07	0.12	-0.07	0.11
		$\Xi^* K$	0	0.03	0	0.03

第6章 まとめ

本論文では核子の電磁的内部構造を反映した物理量である電磁的偏極率について述べた。電磁的偏極率は核子の低エネルギーコンプトン散乱で測定されるものであると同時に、弱い電磁場中での核子の応答を表わす物理量でもある。またユニタリティ、分散関係式を用いることによって、核子の光子吸収反応とも関係付けられることを示した。

低エネルギーハドロン物理において重要な役割を果たすのは、カイラル対称性の自発的対称性の破れに伴う南部 Goldstone ボソンであるパイオンである。バリオンカイラル摂動論はその精神に基づき、パイオンと核子のみで構築されている。だが、核子の物理ではしばしば $\Delta(1232)$ が重要になる。なぜなら $\Delta(1232)$ と核子の質量差はパイオンの質量のおよそ2倍程度であるからである。電磁的偏極率は $\Delta(1232)$ が重要な役割を果たす典型的な物理量であることが HBChPT や large N_c バリオン模型の計算で分かった。

重バリオンカイラル展開と $1/N_c$ 展開とは互いに全く異なるアイデアに基づいた展開であるにも関わらず、両者による電磁的偏極率の予言が良く似ているのは、両者とも核子の質量 M の逆数が展開パラメータのひとつになっていることに大きく依っている。だが第4.6節で述べたように、 $1/N_c$ 模型における干渉項のように両者の展開でそのオーダーが異なる項が現れている。どちらがより良い展開法であるかは対象とする物理に依るのであろうが、電磁的偏極率に関しては $1/N_c$ 展開のほうがより良い展開になっている。

電磁的偏極率を両者の方法で計算することによってパイオン1ループの計算の限界も見えてきた。この限界を乗り越えるには当然2ループの計算が必要になるが、2ループの寄与は展開の高次の寄与になるので、両者の展開手法に基づく計算は非常に困難であると言わざるを得ない。現実的な解答としては、展開の整合性は考えずに構造因子を取り入れるなどの何らかの仮定を持ち込む必要があるだろう。

謝辞

本研究の遂行にあたって、指導教官である斎藤栄教授には、筆者が狭い視野に陥りかける度に高い見地からの示唆に富む助言を頂きました。深く感謝します。また斎藤教授とともに本研究の共同研究者である植原正行教授の真摯な研究姿勢にはしばしば教えられました。敬意を表すとともに感謝します。またTH研究室およびその構成員に、ハード・ソフト両面において素晴らしい研究環境を提供してくれたことを感謝します。最後に長きにわたる研究を精神的に支えてくれた両親に感謝します。

付録A

A.1 スカーム模型における電磁相互作用ラグランジアン

第4.3節で述べたスカーム模型における電磁相互作用ラグランジアン

$$\mathcal{L} = eA_\mu J^\mu + \frac{e^2}{2} A_\mu A_\nu Z^{\mu\nu} + e^2 \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \partial^\mu A^\nu A^\alpha W^\beta \quad (\text{A.1})$$

における、 J^μ , $Z^{\mu\nu}$, W^μ の正確な形は以下の通りである。まず、 J^μ については

$$\begin{aligned} J^\mu &= \epsilon_{3ab} \Phi_a \left[K_{bc} - \frac{1}{e_S^2 f_\pi^4} (X_{bc} X_{de} - X_{bd} X_{ce}) \dot{\Phi}_d \dot{\Phi}_e \right] \partial^\mu \Phi_c \\ &\quad - \frac{1}{24 f_\pi^4} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \epsilon_{abcd} \Phi_a \partial_\nu \Phi_b \partial_\alpha \Phi_c \partial_\beta \Phi_d \\ &= j^\mu + J_a^\mu \dot{\Phi}_a + \frac{1}{2} \dot{\Phi}_a J_{ab}^\mu \dot{\Phi}_b \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

となり、 j^μ , J_a^μ , J_{ab}^μ は

$$\begin{aligned} j^i &= \epsilon_{3ab} \Phi_a K_{ab} \partial^i \Phi_c \\ j^0 &= -\frac{1}{24\pi^2 f_\pi^4} \epsilon^{ijk} \epsilon_{abcd} \Phi_a \partial_i \Phi_b \partial_j \Phi_c \partial_k \Phi_d \\ J_a^i &= -\frac{1}{8\pi^2 f_\pi^4} \epsilon^{ijk} \epsilon_{abcd} \Phi_b \partial_j \Phi_c \partial_k \Phi_d \\ J_a^0 &= \epsilon_{3ab} \Phi_b K_{ca} \\ J_{ab}^i &= -\frac{1}{e_S^2 f_\pi^4} 2\epsilon_{3cd} \Phi_c (X_{ab} X_{de} - X_{ad} X_{be}) \partial^i \Phi_e \\ J_{ab}^0 &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

で与えられる。ここで

$$\begin{aligned} X_{ab} &= \delta_{ab} + \frac{\Phi_a \Phi_b}{\Phi_0^2} \\ K_{ab} &= X_{ab} + \frac{1}{e_S^2 f_\pi^4} (X_{ab} \partial_j \Phi_c X_{cd} \partial_j \Phi_d - X_{ac} \partial_j \Phi_c X_{bd} \partial_j \Phi_d) \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

である。次に、 $Z^{\mu\nu}$ については

$$Z^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} \left\{ \Phi_\perp^2 - \frac{1}{e_S^2 f_\pi^4} [\Phi_\perp^2 \partial_\alpha \Phi_a X_{ab} \partial^\alpha \Phi_b - \epsilon_{3ca} \Phi_c \partial_\alpha \Phi_a \epsilon_{3db} \Phi_d \partial^\alpha \Phi_b] \right\}$$

$$\begin{aligned}
& +g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\frac{1}{e_S^2f_\pi^4}[\Phi_\perp^2\partial_\alpha\Phi_aX_{ab}\partial_\beta\Phi_b - \epsilon_{3ca}\Phi_c\partial_\alpha\Phi_a\epsilon_{3db}\Phi_d\partial_\beta\Phi_b] \\
& = \zeta^{\mu\nu} + Z_a^{\mu\nu}\dot{\Phi}_a + \frac{1}{2}\dot{\Phi}_aZ_{ab}^{\mu\nu}\dot{\Phi}_b
\end{aligned} \tag{A.5}$$

で与えられ,

$$\begin{aligned}
\zeta^{\mu\nu} & = g^{\mu\nu} \left\{ \Phi_\perp^2 + \frac{1}{e_S^2f_\pi^4} [\Phi_\perp^2\partial_i\Phi_aX_{ab}\partial_i\Phi_b - \epsilon_{3ca}\Phi_c\partial_i\Phi_a\epsilon_{3db}\Phi_d\partial_i\Phi_b] \right\} \\
& \quad + g^{\mu i}g^{\nu j}\frac{1}{e_S^2f_\pi^4} [\Phi_\perp^2\partial_i\Phi_aX_{ab}\partial_j\Phi_b - \epsilon_{3ca}\Phi_c\partial_i\Phi_a\epsilon_{3db}\Phi_d\partial_j\Phi_b] \\
Z_a^{\mu\nu} & = (g^{\mu i}g^{\nu 0} + g^{\mu 0}g^{\nu i})\frac{1}{e_S^2f_\pi^4} [\Phi_\perp^2\partial_i\Phi_b - \epsilon_{3ca}\Phi_c\epsilon_{3db}\Phi_d\partial_i\Phi_b] \\
Z_{ab}^{\mu\nu} & = -2(g^{\mu\nu} - g^{\mu 0}g^{\nu 0})\frac{1}{e_S^2f_\pi^4} [\Phi_\perp^2X_{ab} - \epsilon_{3ca}\epsilon_{3db}\Phi_c\Phi_d]
\end{aligned} \tag{A.6}$$

となる。最後に W^μ については

$$\begin{aligned}
W^\mu & = -\frac{1}{8\pi^2f_\pi^2}\Phi_0X_{3a}\partial^\mu\Phi_a \\
& = g_{\mu i}\xi^i + g_{\mu 0}\eta_a\dot{\Phi}_a
\end{aligned} \tag{A.7}$$

で与えられ,

$$\begin{aligned}
\xi^i & = -\frac{1}{8\pi^2f_\pi^2}\Phi_0X_{3a}\partial^i\Phi_a \\
\eta_a & = -\frac{1}{8\pi^2f_\pi^2}\Phi_0X_{3a}
\end{aligned} \tag{A.8}$$

である。

全ラグランジアン

$$\mathcal{L}_{tot} = \frac{1}{2}\dot{\Phi}_a\widetilde{K}_{ab}\dot{\Phi}_b + \widetilde{L}_a\dot{\Phi}_a - \widetilde{\mathcal{V}} - \frac{1}{2}\partial_\nu A_\mu\partial^\nu A^\mu \tag{A.9}$$

に現れる \widetilde{K}_{ab} , \widetilde{L}_a , $\widetilde{\mathcal{V}}$ は

$$\begin{aligned}
\widetilde{K}_{ab} & = K_{ab} + eA_\mu J_{ab}^\mu + \frac{1}{2}e^2A_\mu A_\nu Z_{ab}^{\mu\nu} \\
\widetilde{L}_a & = eA_\mu J_a^\mu + \frac{1}{2}e^2A_\mu A_\nu Z_{ab}^{\mu\nu} + e^2\epsilon^{ijk0}\partial_i A_j A_k \eta_a \\
\widetilde{\mathcal{V}} & = \frac{1}{2}\partial_i\Phi_a G_{ab}\partial_i\Phi_b + m_\pi^2 f_\pi^2 \left(1 - \frac{\Phi_0}{f_\pi}\right) \\
& \quad - eA_\mu j^\mu - \frac{1}{2}e^2A_\mu A_\nu \zeta^{\mu\nu} - e^2\epsilon^{i\mu\nu j}\partial_i A_\mu A_\nu \xi_j
\end{aligned} \tag{A.10}$$

となる。ここで

$$G_{ab} = X_{ab} + \frac{1}{2e_S^2f_\pi^4}(X_{ab}\partial_j\Phi_cX_{cd}\partial_j\Phi_d - X_{ac}\partial_j\Phi_cX_{bd}\partial_j\Phi_d) \tag{A.11}$$

である。

電磁相互作用カレントは $\mathcal{O}(e)$ の \mathcal{J}_1^μ と $\mathcal{O}(e^2)$ の \mathcal{J}_2^μ とに分けられ

$$\mathcal{J}_1^\mu = -e \left\{ j^\mu + J_a^\mu K_{ab}^{-1}\Pi_b + \frac{1}{2}\Pi_a K_{ac}^{-1}J_{cd}^\mu K_{db}^{-1}\Pi_b \right\} \tag{A.12}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_2^\mu & = e^2 A_\nu \left\{ -\zeta^{\mu\nu} + J_a^\mu K_{ab}^{-1}J_b^\nu + J_a^\mu K_{ac}^{-1}J_{cd}^\nu K_{db}^{-1}\Pi_b + J_a^\nu K_{ac}^{-1}J_{cd}^\mu K_{db}^{-1}\Pi_b \right. \\
& \quad \left. - Z_a^{\mu\nu} K_{ab}^{-1}\Pi_b + \Pi_a \left[K_{ac}^{-1}J_{ce}^\mu K_{ef}^{-1}J_{fd}^\nu K_{db}^{-1} - \frac{1}{2}K_{ac}^{-1}Z_{cd}^{\mu\nu} K_{db}^{-1} \right] \Pi_b \right\} \\
& \quad - e^2 \left\{ A_\nu \partial_i [\epsilon^{i\mu\nu 0}\eta_a K_{ab}^{-1}\Pi_b + \epsilon^{i\mu\nu j}\xi_j] - 2\partial_i A_\nu [\epsilon^{i\mu\nu 0}\eta_a K_{ab}^{-1}\Pi_b + \epsilon^{i\mu\nu j}\xi_j] \right. \\
& \quad \left. + \epsilon^{0\mu\nu j} A_\nu \Pi_a K_{ab}^{-1} \frac{\partial \xi_j}{\partial \Phi_b} + 2\epsilon^{0\mu\nu j} \pi_\nu^A \xi_j \right\}
\end{aligned} \tag{A.13}$$

で与えられる。

A.2 積分公式

この節では第4章において、電磁的偏極率を計算する際に必要となるいくつかの積分公式についてまとめておく。

$$\frac{1}{4\pi} \int d\Omega_q \frac{v\hat{q}_i}{1-v\hat{\mathbf{k}}\cdot\hat{\mathbf{q}}} = \hat{k}_i I_1(v)$$

$$\frac{1}{4\pi} \int d\Omega_q \frac{v^2\hat{q}_i\hat{q}_j}{1-v\hat{\mathbf{k}}\cdot\hat{\mathbf{q}}} = \delta_{ij} I_2(v) + \hat{k}_i\hat{k}_j I_3(v)$$

$$\frac{1}{4\pi} \int d\Omega_q \frac{v^3\hat{q}_i\hat{q}_j\hat{q}_k}{1-v\hat{\mathbf{k}}\cdot\hat{\mathbf{q}}} = (\delta_{ij}\hat{k}_k + \delta_{ik}\hat{k}_j + \delta_{jk}\hat{k}_i) I_4(v) + \hat{k}_i\hat{k}_j\hat{k}_k I_5(v)$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4\pi} \int d\Omega_q \frac{v^2\hat{q}_i\hat{q}_j}{(1-v\hat{\mathbf{k}}'\cdot\hat{\mathbf{q}})(1-v\hat{\mathbf{k}}\cdot\hat{\mathbf{q}})} \\
= \delta_{ij} J_1(v, \theta) + (\hat{k}_i\hat{k}_j + \hat{k}'_i\hat{k}'_j) J_2(v, \theta) + (\hat{k}_i\hat{k}'_j + \hat{k}'_i\hat{k}_j) J_3(v, \theta)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4\pi} \int d\Omega_q \frac{v^3\hat{q}_i\hat{q}_j\hat{q}_k}{(1-v\hat{\mathbf{k}}'\cdot\hat{\mathbf{q}})(1-v\hat{\mathbf{k}}\cdot\hat{\mathbf{q}})} \\
= (\hat{k}_i\hat{k}_j\hat{k}_k + \hat{k}'_i\hat{k}'_j\hat{k}'_k) J_4(v, \theta) \\
+ (\hat{k}_i\hat{k}_j\hat{k}'_k + \hat{k}_i\hat{k}'_j\hat{k}_k + \hat{k}'_i\hat{k}_j\hat{k}_k + \hat{k}_i\hat{k}_j\hat{k}'_k + \hat{k}'_i\hat{k}'_j\hat{k}_k) J_5(v, \theta) \\
+ [\delta_{ij}(\hat{k} + \hat{k}')_k + \delta_{ik}(\hat{k} + \hat{k}')_j + \delta_{jk}(\hat{k} + \hat{k}')_i] J_6(v, \theta)
\end{aligned}$$

$I_1(v) \sim I_5(v)$ は π の速さ v に依存する関数で、以下のように与えられる。

$$I_1(v) = -1 + \frac{1}{2v} \ln \left(\frac{1+v}{1-v} \right)$$

$$I_2(v) = \frac{1}{2} - \frac{1-v^2}{4v} \ln \left(\frac{1+v}{1-v} \right)$$

$$\begin{aligned}
I_3(v) &= -\frac{3}{2} + \frac{3-v^2}{4v} \ln \left(\frac{1+v}{1-v} \right) \\
I_4(v) &= -\frac{1}{3}v^2 + \frac{1}{2} - \frac{1-v^2}{4v} \ln \left(\frac{1+v}{1-v} \right) \\
I_5(v) &= \frac{2}{3}v^2 - \frac{5}{2} + \frac{5-3v^2}{4v} \ln \left(\frac{1+v}{1-v} \right)
\end{aligned}$$

$J_1(v, \theta) \sim J_6(v, \theta)$ は π の速さ v と光子の散乱角 θ に依存している。電磁的偏極率の計算に必要なのは前方散乱のときのみなので、 $\theta = 0$ における形を与えておく。

$$\begin{aligned}
J_1(v, 0) &= -1 + \frac{1}{2v} \ln \left(\frac{1+v}{1-v} \right) \\
J_2(v, 0) &= \frac{2}{3} + \frac{1}{3(1-v^2)} - \frac{1}{2v} \ln \left(\frac{1+v}{1-v} \right) \\
J_3(v, 0) &= \frac{1}{3} + \frac{1}{6(1-v^2)} - \frac{1}{4v} \ln \left(\frac{1+v}{1-v} \right) \\
J_4(v, 0) &= \frac{13}{8} + \frac{1}{4(1-v^2)} - \frac{15-3v^2}{16v} \ln \left(\frac{1+v}{1-v} \right) \\
J_5(v, 0) &= \frac{13}{24} + \frac{1}{12(1-v^2)} - \frac{5-v^2}{16v} \ln \left(\frac{1+v}{1-v} \right) \\
J_6(v, 0) &= -\frac{3}{4} + \frac{3-v^2}{8v} \ln \left(\frac{1+v}{1-v} \right)
\end{aligned}$$

A.3 $N\pi$ 電気部分の分散関係式

この節では、第 4.4.2 節での $N\pi$ 電気部分における分散関係式に関する議論の正当性を、より直接的な計算によって検証する。分散関係式による電磁的偏極率の表式 (2.15) は、(2.13) の右辺第 2 項が $\omega_{max} \rightarrow \infty$ において 0 になるとして落した式 (2.14) から得られたものであるが、この仮定は $N\pi$ 電気部分の場合には成り立たないのである。

問題が現れるのは γ_3, γ_4 についてであり、関連するコンプトン散乱振幅は $A_5(\omega, \theta)$, $A_6(\omega, \theta)$ である。(3.11) を見るとわかるように、前方散乱の場合は両者は符号を除いて等しくなるので、以下 $A_5(\omega, \theta)$ について議論する。前方散乱の場合、 x と z の積分は実行することができ、

$$A_5(\omega, 0) = A_{51}(\omega, 0) + A_{52}(\omega, 0) \quad (\text{A.14})$$

$$\begin{aligned}
A_{51}(\omega, 0) &= -\frac{g_A^2 m_\pi}{8\pi^2 f_\pi^2} \left(\frac{u^3}{12} + \frac{u^5}{315} + \mathcal{O}(u^7) \right) \\
A_{52}(\omega, 0) &= \frac{g_A^2 m_\pi}{8\pi^2 f_\pi^2} \left(\frac{u^5}{315} + \mathcal{O}(u^7) \right)
\end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

となる。ここで $u = \omega/m_\pi$ である。 $A_{51}(\omega, 0)$ と $A_{52}(\omega, 0)$ は各々 (3.11) の $A_5(\omega, \theta)$ の第 1 項と第 2 項を計算したもので、 $A_{52}(\omega, 0)$ がスカーム模型における (4.48) の最終項に対応して

いる項、すなわち (4.49) を用いて導き出された項である。 $A_{51}(\omega, 0)$ と $A_{52}(\omega, 0)$ の $\mathcal{O}(u^5)$ 以上の項は符号を除いて完全に一致しており、

$$A_5(\omega, 0) = A_{51}(\omega, 0) + A_{52}(\omega, 0) = -\frac{g_A^2 m_\pi u^3}{8\pi^2 f_\pi^2 12} \quad (\text{A.16})$$

となる。よって、複素 ω 平面において $A_5(\omega, 0)$ は実軸上にカットを持っていないため虚数部は 0 になる。これはスカーム模型において (4.49) を用いると $\text{Im} A_5(\omega, 0)$ が 0 になることに対応している。

$A_{51}(\omega, 0)$, $A_{52}(\omega, 0)$ それぞれの虚数部は 0 にならず、 $\omega > m_\pi$ へ解析接続すると、

$$\text{Im} A_{51}(\omega, 0) = -\text{Im} A_{52}(\omega, 0) = -\frac{g_A^2 m_\pi \pi}{8\pi^2 f_\pi^2 8u} \left(-6u\sqrt{u^2-1} + (1+2u^2) \ln \frac{u+\sqrt{u^2-1}}{u-\sqrt{u^2-1}} \right) \quad (\text{A.17})$$

となる。これはまさに第 4.4.2 節において (4.48) の最終項をおとした時に求めた $\text{Im} A_5(\omega, 0)$ そのものである。

$A_{51}(\omega, 0)$ と $A_{52}(\omega, 0)$ それぞれの分散関係式は

$$\text{Re} \frac{A_{51}(\omega, 0)}{\omega^3} \Big|_{\omega=0} = \frac{2}{\pi} \text{P} \int_0^{\omega_{max}} d\omega' \frac{\text{Im} A_{51}(\omega', 0)}{\omega'^4} + \frac{1}{\pi} \text{Im} \int_C d\omega' \frac{A_{51}(\omega', 0)}{\omega'^4} \quad (\text{A.18})$$

$$\text{Re} \frac{A_{52}(\omega, 0)}{\omega^3} \Big|_{\omega=0} = \frac{2}{\pi} \text{P} \int_0^{\omega_{max}} d\omega' \frac{\text{Im} A_{52}(\omega', 0)}{\omega'^4} + \frac{1}{\pi} \text{Im} \int_C d\omega' \frac{A_{52}(\omega', 0)}{\omega'^4} \quad (\text{A.19})$$

となる。(A.15) から (A.18) の左辺は

$$-\frac{g_A^2}{8\pi^2 f_\pi^2} \frac{1}{12m_\pi^2} \quad (\text{A.20})$$

となる。右辺も (A.17) を用いると、第 1 項から等しい寄与が現れ、第 2 項は 0 になる。一方 (A.19) の左辺は (A.15) から 0 になり、右辺は第 1 項と第 2 項が打ち消しあっているのである。すなわち、第 2 項の積分は 0 にならない。実際、 $A_5(\omega, 0)$ の分散関係式は

$$\begin{aligned}
\text{Re} \frac{A_5(\omega, 0)}{\omega^3} \Big|_{\omega=0} &= \frac{1}{\pi} \text{Im} \int_C d\omega' \frac{A_5(\omega', 0)}{\omega'^4} \\
&= -\frac{g_A^2}{8\pi^2 f_\pi^2} \frac{1}{12m_\pi^2} \frac{1}{\pi} \text{Im} \int_C d\omega' \frac{1}{\omega'} \\
&= -\frac{g_A^2}{8\pi^2 f_\pi^2} \frac{1}{12m_\pi^2}
\end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

となっている。

したがって、この場合複素上半面積分は 0 にならないのである。 $A_5(\omega)/\omega^5$ に対する分散関係式を用いれば上半面積分をおとすことができるが、その時に求まるのは ω^5 の係数であるから電磁的偏極率を評価することはできない。しかし、 $A_{52}(\omega, 0)$ は (A.15) からわかるように $\mathcal{O}(u^5)$ の関数であり、電磁的偏極率には明らかに寄与しない。よって、 $A_{51}(\omega, 0)$ のみを考慮して、電磁的偏極率を求めればよいのである。これが第 4 章において $A_{52}(\omega, 0)$ に対応する項をおとす理由である。

関連図書

- [1] T. H. R. Skyrme, Proc. Roy. Soc. (London) **A260** (1961) 127.
- [2] G. t' Hooft, Nucl. Phys. **B72** (1974) 461.
- [3] E. Witten, Nucl. Phys. **B160** (1979) 57.
- [4] J. Gasser and H. Leutwyler, Ann. Phys. **158** (1984) 142; Nucl. Phys. **B250** (1985) 465.
- [5] E. Jenkins, and A. V. Manohar, Phys. Lett. **B255** (1991) 558.
- [6] V. Bernard, N. Kaiser, J. Kambor and U.-G. Meißner, Nucl. Phys. **B388** (1992) 315.
- [7] S. Ragusa, Phys. Rev. **D47** (1993) 3757; Phys. Rev. **49** (1994) 3157.
- [8] T. R. Hemmert, B. R. Holstein, J. Kambor and G. Knöchlein, Phys. Rev. **D57** (1998) 5746.
- [9] A. I. L'vov, Int. J. Mod. Phys. **A8** (1993) 5267.
- [10] N. V. Maksimenko and S. G. Shulga, Yad. Fiz. **52** (1990) 524; Sov. J. Nucl. Phys. **52** (1990) 355.
- [11] V. A. Petrun'kin, Nucl. Phys. **55** (1964) 197.
- [12] J. L. Friar, Ann. Phys. **95** (1975) 170.
- [13] D. Babusci, G. Giordano, A. I. L'vov, G. Matone and A. M. Nathan, Phys. Rev. **C58** (1998) 1013.
- [14] A. M. Baldin, Nucl. Phys. **18** (1960) 310.
- [15] M. Gell-Mann, M. L. Goldberger and W. E. Thirring, Phys. Rev. **95** (1954) 1612.
- [16] D. Babusci, G. Giordano, and G. Matone, Phys. Rev. **C57** (1998) 291.
- [17] B. E. MacGibbon *et al.*, Phys. Rev. **C52** (1995) 2097.

- [18] J. Schmiedmayer, P. Riehs, J. A. Harvey and N. W. Hill, Phys. Rev. Lett. **66** (1991) 1015.
- [19] L. Koester *et al.*, Phys. Rev. **C51** (1995) 3363.
- [20] S. D. Drell and A. C. Hearn, Phys. Rev. Lett. **16** (1966) 908; S. Gerasimov, Sov. J. Nucl. Phys. **2** (1966) 430.
- [21] D. Drechsel, G. Krein and O. Hanstein, Phys. Lett. **B420** (1998) 248.
- [22] F. Schöberl and H. Leeb, Phys. Lett. **B166** (1986) 355.
- [23] P. C. Hecking and G. F. Bertsch, Phys. Lett. **B99** (1981) 237.
- [24] A. Schäfer, B. Müller, D. Vasak and W. Greiner, Phys. Lett. **B143** (1984) 323.
- [25] N. N. Scoccola and W. Weise, Phys. Lett. **B232** (1989) 287; Nucl. Phys. **A517** (1990) 495.
- [26] H. R. Fiebig, W. Wilcox and R. M. Woloshyn, Nucl. Phys. **B324** (1989) 47.
- [27] T. Nishikawa, S. Saito and Y. Kondo, Nucl. Phys. **A615** (1997) 417.
- [28] V. Bernard, N. Kaiser, J. Kambor and U.-G. Meißner, Nucl. Phys. **B373** (1992) 346.
- [29] V. Bernard, N. Kaiser, U.-G. Meißner and A. Schmidt, Z. Phys. **A348** (1994) 317.
- [30] V. Bernard, N. Kaiser and U.-G. Meißner, Int. J. Mod. Phys. **E4** (1995) 193.
- [31] T. R. Hemmert, B. R. Holstein and J. Kambor, Phys. Rev. **D55** (1997) 5598.
- [32] C. Caso *et al.*, Euro. Phys. J. **C3** (1998) 1.
- [33] J. Gasser, M. E. Sainio and A. Svarc, Nucl. Phys. **B307** (1988) 779.
- [34] T. R. Hemmert, B. R. Holstein and J. Kambor, J. Phys. **G24** (1998) 1831.
- [35] X. Ji, C. W. Kao and J. Osborne, hep-ph/9908526.
- [36] K. B. V. Kumar, J. A. McGovern and M. C. Birse, hep-ph/9909442.
- [37] R. Dashen, E. Jenkins and A. V. Manohar, Phys. Rev. **D49** (1994) 4713.
- [38] J. -L. Gervais and B. Sakita, Phys. Rev. Lett. **52** (1984) 87.
- [39] R. Dashen and A. V. Manohar, Phys. Lett. **B315** (1993) 425.

- [40] G. S. Adkins, C. R. Nappi and E. Witten, Nucl. Phys. **B288** (1983) 552; G. S. Adkins and C. R. Nappi, Nucl. Phys. **B233** (1984) 109.
- [41] S. Saito, F. Takeuchi and M. Uehara, Nucl. Phys. **A556** (1993) 317.
- [42] E. Jenkins and A. V. Manohar, Phys. Lett. **B335** (1994) 452.
- [43] A. I. L'vov, nucl-th/9810032.
- [44] O. Hanstein, D. Drechsel and L. Tiator, Phys. Lett. **B385** (1996) 45; Phys. Lett. **B399** (1996) 13; Nucl. Phys. **A632** (1998) 561.
- [45] R. A. Arndt, I. I. Stokovskiy and R. L. Workman, Phys. Rev. **C53** (1996) 430; Phys. Rev. **C56** (1997) 577.
- [46] M. A. Moinester, Proc. on Chiral Dynamics: Theory and Experiment at MIT (1994), p. 152; A. M. Bernstein and B. R. Holstein(Eds.); B. R. Holstein, hep-ph/9910369.
- [47] H. J. Lipkin and M. A. Moinester, Phys. Lett. **B287** (1992) 179.
- [48] V. Bernard, N. Kaiser, J. Kamber and U.-G. Meißner, Phys. Rev. **D46** (1992) R2756.
- [49] V. Bernard, N. Kaiser, J. Kamber and U.-G. Meißner, Phys. Lett. **B319** (1993) 269.
- [50] C. Gobbi, C. L. Schat and N. Scoccola, Nucl. Phys. **A598** (1996) 318.
- [51] T. Nishikawa, S. Saito and Y. Kondo, Phys. Lett. **B422** (1998) 26.
- [52] C. G. Callan and I. Klebanov, Nucl. Phys. **B262** (1985) 365.
- [53] Y. Kondo, S. Saito, Y. Tanushi and M. Uehara, Nucl. Phys. **A609** (1996) 501.
- [54] O. Dumbrajs *et al.*, Nucl. Phys. **B216** (1983) 277.

Reprinted from

PHYSICS LETTERS B

Physics Letters B 425 (1998) 6–12

Spin-dependent polarizability of nucleon with dispersion relation in the Skyrme model

Y. Tanushi ^{a,1}, Y. Nakahara ^{a,2}, S. Saito ^{a,3}, M. Uehara ^{b,4}

^a *Department of Physics, Nagoya University, Nagoya 464-01, Japan*

^b *Department of Physics, Saga University, Saga 840, Japan*

Received 29 October 1997; revised 3 February 1998

Editor: W. Haxton



ELSEVIER

PHYSICS LETTERS B

EDITORS

L. Alvarez-Gaumé, Theory Division, CERN, CH-1211 Geneva 23, Switzerland.
E-mail address: Alvarez@NXTH04.CERN.CH
Theoretical High Energy Physics (General Theory) from the Iberian Peninsula, France, Switzerland, Italy, Malta, Austria, Hungary, Balkan countries and Cyprus

J.-P. Blaizot, Service de Physique Théorique, Orme des Merisiers, C.E.A.-Saclay, F-91191 Gif-sur-Yvette Cedex, France.
E-mail address: plb(@)SPHT.SACLAY.CEA.FR
Theoretical Nuclear Physics

M. Cvetič, David Rittenhouse Laboratory, Department of Physics, University of Pennsylvania, 209 S. 33rd Street, Philadelphia, PA 19104-6396, USA.
E-mail address: plb@CVETIC.HEP.UPENN.EDU
Theoretical High Energy Physics from countries outside Europe

R. Gatto, Theory Division, CERN, CH-1211 Geneva 23, Switzerland.
E-mail address: Raoul.Gatto@CERN.CH
Theoretical High Energy Physics (Particle Phenomenology) from the Iberian Peninsula, France, Switzerland, Italy, Malta, Austria, Hungary, Balkan countries and Cyprus

H. Georgi, Department of Physics, Harvard University, Cambridge, MA 02138, USA.
E-mail address: Georgi@PHYSICS.HARVARD.EDU
Theoretical High Energy Physics from countries outside Europe

Aims and Scope

Physics Letters B ensures the rapid publication of letter-type communications in the fields of Nuclear Physics/Intermediate Energy Physics, High Energy Physics and Field Theory.

Abstracted/indexed in:

Current Contents: Physical, Chemical & Earth Sciences; INSPEC.

Subscription Information 1998

PHYSICS LETTERS A (ISSN 0375-9601) and PHYSICS LETTERS B (ISSN 0370-2693) will each be published weekly. For 1998 13 volumes, volumes 237-249 (78 issues altogether) of Physics Letters A have been announced. For 1998 27 volumes, volumes 416-442 (108 issues altogether) of Physics Letters B have been announced. The subscription prices for these volumes are available upon request from the Publisher. PHYSICS REPORTS (ISSN 0370-1573) will be published approximately weekly. For 1998 15 volumes, volumes 291-305 (90 issues altogether) of Physics Reports have been announced. The subscription price for these volumes is available upon request from the Publisher.

A combined subscription to the 1998 issues of Physics Letters A, Physics Letters B and Physics Reports is available at a reduced rate.

Subscriptions are accepted on a prepaid basis only and are entered on a calendar year basis. Issues are sent by SAL (Surface Air Lifted) mail wherever this service is available. Airmail rates are available upon request.

For orders, claims, product enquiries (no manuscript enquiries) please contact the Customer Support Department at the Regional Sales Office nearest to you:

New York, Elsevier Science, P.O. Box 945, New York, NY 10159-0945.

US mailing notice - Physics Letters B (ISSN 0370-2693) is published weekly by Elsevier Science B.V., P.O. Box 211, 1000 AE Amsterdam, The Netherlands. Annual subscription price in the USA is US\$ 7123.00 (valid in North, Central and South America only), including air speed delivery. Periodicals postage paid at Jamaica, NY 11431.

USA POSTMASTERS: Send address changes to Physics Letters B, Publications Expediting, Inc., 200 Meacham Avenue, Elmont, NY 11003.

AIRFREIGHT AND MAILING in the USA by Publications Expediting, Inc., 200 Meacham Avenue, Elmont, NY 11003.

© The paper used in this publication meets the requirements of ANSI/NISO Z39.48-1992 (Permanence of Paper).

Printed in The Netherlands



North-Holland, an imprint of Elsevier Science

W. Haxton, Institute for Nuclear Theory, Box 351550, University of Washington, Seattle, WA 98195-1550, USA.
E-mail address: plb@PHYS.WASHINGTON.EDU
Theoretical Nuclear Physics

P.V. Landshoff, Department of Applied Mathematics and Theoretical Physics, University of Cambridge, Silver Street, Cambridge CB3 9EW, UK.
E-mail address: P.V.Landshoff@DAMTP.CAM.AC.UK
Theoretical High Energy Physics from Ireland, United Kingdom, Benelux, Scandinavian countries, German Federal Republic, Poland, Czech Republic, Slovak Republic, Baltic countries and the Commonwealth of Independent States

L. Montanet, CERN, CH-1211 Geneva 23, Switzerland.
E-mail address: Lucien.Montanet@CERN.CH
Experimental High Energy Physics

J.P. Schiffer, Argonne National Laboratory, 9700 South Cass Avenue, Argonne, IL 60439, USA.
E-mail address: Schiffer@ANL.GOV
Experimental Nuclear Physics (Heavy Ion Physics, Intermediate Energy Nuclear Physics)

R.H. Siemssen, KVI, University of Groningen, Zernikelaan 25, NL-9747 AA Groningen, The Netherlands.
E-mail address: Siemssen@KVI.NL
Experimental Nuclear Physics (Heavy Ion Physics, Low Energy Nuclear Physics)

K. Winter, CERN, CH-1211 Geneva 23, Switzerland
E-mail address: Klaus.Winter@CERN.CH
Experimental High Energy Physics

USA: Tel: +1 212 633 3730, [Toll free number for North American customers: 1 888 4ES INFO (437 4636)], Fax: +1 212 633 3680, E-mail: usinfo@elsevier.com

Amsterdam, Elsevier Science, P.O. Box 211, 1000 AE Amsterdam, The Netherlands. Tel: +31 20 485 3757; Fax: +31 20 485 3432, E-mail: nlinfo@elsevier.nl

Tokyo, Elsevier Science, 9-15, Higashi-Azabu 1-chome, Minato-ku, Tokyo 106, Japan. Tel: +81 3 5561 5033; Fax: +81 3 5561 5047, E-mail: info@elsevier.co.jp

Singapore, Elsevier Science, No. 1 Temasek Avenue, #17-01 Millenia Tower, Singapore 039192. Tel: +65 434 3727; Fax: +65 337 2230, E-mail: asiainfo@elsevier.com.sg

Rio de Janeiro, Elsevier Science, Rua Sete de Setembro 111/16 Andar, 20050-002 Centro, Rio de Janeiro - RJ, Brazil. Tel: +55 21 509 5340; Fax: +55 21 507 1191, E-mail: elsevier@campus.com.br

Claims for issues not received should be made within six months of our publication (mailing) date.

Advertising Offices

International: Elsevier Science, Advertising Department, The Boulevard, Langford Lane, Kidlington, Oxford OX5 1GB, UK. Tel: +44 1865 843565; Fax: +44 1865 843976.

USA and Canada: Weston Media Associates, Dan Lipner, P.O. Box 1110, Greens Farms, CT 06436-1110, USA. Tel: +1 203 261 2500; Fax: +1 203 261 0101.

Japan: Elsevier Science Japan, Marketing Services, 1-9-15 Higashi-Azabu, Minato-ku, Tokyo 106, Japan. Tel: +81 3 5561 5033; Fax: +81 3 5561 5047.



ELSEVIER

16 April 1998

PHYSICS LETTERS B

Physics Letters B 425 (1998) 6-12

Spin-dependent polarizability of nucleon with dispersion relation in the Skyrme model

Y. Tanushi^{a,1}, Y. Nakahara^{a,2}, S. Saito^{a,3}, M. Uehara^{b,4}

^a Department of Physics, Nagoya University, Nagoya 464-01, Japan

^b Department of Physics, Saga University, Saga 840, Japan

Received 29 October 1997; revised 3 February 1998

Editor: W. Haxton

Abstract

We calculate the spin-dependent polarizability of the nucleon in the Skyrme model. The result is compared with that of a heavy baryon chiral perturbation theory (HBChPT), and is shown to be the same as that of HBChPT up to the Δ -pole terms in the narrow width limit of the Δ state and with the experimental physical constants. The effect of the $\Delta + \pi$ channel is rather small and is numerically quite similar to that of the Δ loop in the HBChPT. The electric and magnetic polarizabilities are recalculated using the transverse photon and a consistent inclusion of the Δ width. © 1998 Elsevier Science B.V. All rights reserved.

PACS: 13.60.Le; 12.39.De; 13.60.Fz

Keywords: Electromagnetic polarizabilities; Spin-dependent polarizability; Skyrme model; Heavy baryon chiral perturbation theory

The electromagnetic polarizabilities are important quantities which show the response of internal structure of nucleons to the external electromagnetic fields. These polarizabilities are extracted from the forward Compton scattering at threshold, and recently attracted a great deal of attention of both experimental and theoretical interest.

The Skyrme-soliton model is a QCD motivated model based on the idea of large N_c and of the spontaneous breaking of chiral symmetry. The electromagnetic polarizability is considered to be sensitive to the pion cloud around the nucleon, so that the Skyrme model may be well-suited to the study of the polarizability. In a previous paper [1] we have calculated the electric and magnetic polarizabilities in the model using the dispersion formula with the photo-absorption cross sections of the longitudinal and transversal photons for the electric and magnetic ones, respectively. Calculations of the electric polarizability from the seagull term were also shown to be not compatible with the gauge invariance. It was shown that the chiral leading order terms of the electric and magnetic polarizabilities are exactly the same as those in the chiral perturbation theory [2,1]. Further, we have

¹ E-mail: tanushi@nuc-th.phys.nagoya.ac.jp.

² E-mail: nakahara@nuc-th.phys.nagoya.ac.jp.

³ E-mail: saito@nuc-th.phys.nagoya.ac.jp.

⁴ E-mail: ueharam@cc.saga-u.ac.jp.

stressed that the Δ states play important roles, and that the N and the Δ states are treated as the same rotational levels of the Skyrme soliton.

In this paper we apply the method to the study of the spin-dependent polarizability γ of the nucleon. The multipole analysis shows that γ is small but negative: $-1.3(-0.4) \times 10^{-4} \text{ fm}^4$ for the proton (neutron) [3]. On the other hand, the chiral leading order contribution is largely positive and is about $4.6 \times 10^{-4} \text{ fm}^4$. There are some studies of this quantity in terms of the heavy baryon chiral perturbation theory (HBChPT). Bernard et al. [4] obtained γ with the one-loop result and with including the effect of the Δ state. Hemmert et al. [5] calculated γ up to $O(\epsilon^3)$ with the HBChPT and the explicit degree of freedom of the Δ state. In this approach the small parameter ϵ is taken to be either of the soft momentum, the pion mass, or the mass splitting $\Delta M = M_\Delta - M_N$ between the N and Δ states. These calculations show that the contribution of the Δ state is very large and negative. In this meaning it is very interesting to study the spin polarizability in the Skyrme model, since it treats the Δ state as the equal partner as the N state.

The forward Compton scattering amplitude of the nucleon is represented as

$$f_1(\omega) \boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{\epsilon}' + if_2(\omega) \boldsymbol{\omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\epsilon}' \times \boldsymbol{\epsilon}, \quad (1)$$

where $f_1(\omega)$ and $f_2(\omega)$ are expanded at low energies as

$$f_1(\omega) = -\frac{e^2}{4\pi M} + (\bar{\alpha} + \bar{\beta}) \omega^2 + \dots, \quad (2)$$

and

$$f_2(\omega) = -\frac{e^2 \kappa^2}{8\pi M^2} + \gamma \omega^2 + \dots. \quad (3)$$

Here, $\bar{\alpha}$ and $\bar{\beta}$ are the electric and magnetic polarizabilities, respectively, κ the anomalous magnetic moment of the nucleon, and γ the spin-dependent polarizability [6,7]. The once-subtracted dispersion relation gives for the spin-dependent polarizability

$$\gamma = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\omega_0}^{\infty} \frac{\sigma_{1/2} - \sigma_{3/2}}{\omega^3} d\omega, \quad (4)$$

where σ_λ denotes the photo-absorption cross section with the helicity λ .

We calculate the photo-absorption cross section in terms of the $\gamma + N \rightarrow \pi + N$ and $\gamma + N \rightarrow \pi + \Delta$ amplitudes in the Skyrme model. We have shown [1] that the electric and magnetic Born amplitudes satisfies the low-energy theorem of the pion photo-production amplitudes at threshold except for the order $(m_\pi/M)^2$ term which was recently introduced by the effect of chiral loops [8]. The electric Born amplitude for the $\gamma + N \rightarrow \pi + N$ is given by

$$(T_E^{(-)})^N = \left(\frac{eG_{NN\pi}}{8\pi M} \right) \left\{ i\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\epsilon} + 2 \frac{i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{q})(\boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{q})}{m_\pi^2 + (\mathbf{k} - \mathbf{q})^2} \right\}, \quad (5)$$

where \mathbf{k} and \mathbf{q} are the incident photon and the outgoing pion momenta, respectively, and $\boldsymbol{\epsilon}$ is the polarization vector of the incident photon. Here, we expanded the production amplitude as

$$T^a = i\epsilon_{a3b} \tau^b T^{(-)} + \tau^a T^{(0)} + \delta_{a3} T^{(+)}. \quad (6)$$

We see that the $(T_E^{(-)})^N$ is of $O(N_c^{1/2})$, while the $(T_E^{(+,0)})^N$ are of $O(N_c^{-1/2})$ and behave as $O(\omega_k)$. Therefore, the latter amplitudes do not lead to finite results without unitarization of them, and are neglected in the following. The absorption cross section is calculated to be

$$\Delta\sigma_E^N(\omega_k) = \left(\frac{e^2 G_{NN\pi}^2}{8\pi M^2} \right) (1 - v^2) \ln \frac{1+v}{1-v}, \quad (7)$$

where $\Delta\sigma = \sigma_{1/2} - \sigma_{3/2}$, and $v = q/\omega_q$ is the pion velocity. Inserting this into Eq. (4) we obtain

$$\gamma_E^N = \left(\frac{e^2}{4\pi}\right) \frac{G_{NN\pi}^2}{24\pi^2 M^2 m_\pi^2}. \quad (8)$$

In terms of the Goldberger-Treiman relation, this can be seen to be exactly the same as that of the N -loop in ChPT, as already shown by L'vov [2]. The $1/m_\pi^2$ dependence shows that this is the contribution from the pion cloud, and is of the leading order in the ChPT. Because the proton-neutron difference depends on the amplitude $(T_E^{(0)})^N$, we predict only the average between them. It is known that the prediction of the HBChPT up to chiral order ϵ^3 includes no isospin dependence, and there is no contribution of $(T_E^{(-)})^N$, $(T_E^{(+,0)})^N$. The multipole analysis [3] shows that γ is possibly negative, while the above prediction is positive. The contribution of the Δ resonance is considered to reverse the sign.

We now examine the contributions from the magnetic Born terms for $\gamma + N \rightarrow \pi + N$:

$$(T_M^{(-)})^N = \left(\frac{eG_{NN\pi}}{8\pi M}\right) \left(\frac{\mu_V}{2M}\right) \left\{ -\frac{(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{q})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{s})}{\omega_k} - \frac{(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{s})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{q})}{\omega_k} + \frac{1}{2} \frac{[3\mathbf{s} \cdot \mathbf{q} - (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{q})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{s})]}{\omega_k - \Delta M} + \frac{1}{2} \frac{[3\mathbf{s} \cdot \mathbf{q} - (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{s})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{q})]}{\omega_k + \Delta M} \right\}, \quad (9)$$

$$(T_M^{(+)})^N = \left(\frac{eG_{NN\pi}}{8\pi M}\right) \left(\frac{\mu_V}{2M}\right) \left\{ -\frac{(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{q})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{s})}{\omega_k} + \frac{(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{s})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{q})}{\omega_k} - \frac{[3\mathbf{s} \cdot \mathbf{q} - (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{q})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{s})]}{\omega_k - \Delta M} + \frac{[3\mathbf{s} \cdot \mathbf{q} - (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{s})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{q})]}{\omega_k + \Delta M} \right\}, \quad (10)$$

where $\mathbf{s} = \mathbf{k} \times \boldsymbol{\epsilon}$, and μ_V the vector part of the nucleon magnetic moments defined by $(\mu_p - \mu_n)/2$ in units of the nuclear magneton. Note that we introduced the nucleon- and Δ -pole terms, and that we have used the relation $\mu_V^{\Delta N} = -\frac{3}{\sqrt{2}}\mu_V$ in the Skyrme model, which is known to be correct in the large N_c limit [9]. We also see that $(T_M^{(\pm)})^N$ reduces to $O(N_c^{1/2})$ by the cancellation among the N - and Δ -pole terms. The term $(T_M^{(0)})^N$ is of $O(N_c^{-1/2})$ and is neglected in the following. We rewrite $(T_M^{(\pm)})^N$ as

$$(T_M^{(\pm)})^N = \left(\frac{eG_{NN\pi}}{8\pi M}\right) \mu_V \{t_1^{(\pm)} P_1(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{s}}) + t_3^{(\pm)} P_3(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{s}})\}, \quad (11)$$

where $P_1(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{s}}) = (\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{q}})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{s}})$ and $P_3(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{s}}) = 3(\hat{\mathbf{q}} \cdot \hat{\mathbf{s}}) - (\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{q}})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{s}})$ are the P -wave projection operators for $J = 1/2$ and $J = 3/2$, respectively, and $\hat{\mathbf{q}} = \mathbf{q}/q$ and $\hat{\mathbf{s}} = \mathbf{s}/k$. We obtain

$$\begin{aligned} t_1^{(-)} &= -\frac{1}{3M} \frac{\Delta M q}{\omega_k + \Delta M} \\ t_3^{(-)} &= \frac{1}{2M} q \omega_k \left[\frac{\Delta M}{\omega_k^2 - \Delta M^2 + i\Delta M \Gamma_\Delta} - \frac{2}{3} \frac{\Delta M}{\omega_k(\omega_k + \Delta M)} \right] \\ t_1^{(+)} &= -\frac{2}{3M} \frac{\Delta M q}{\omega_k + \Delta M} \\ t_3^{(+)} &= \frac{1}{2M} q \omega_k \left[-\frac{2\Delta M}{\omega_k^2 - \Delta M^2 + i\Delta M \Gamma_\Delta} + \frac{2}{3} \frac{\Delta M}{\omega_k(\omega_k + \Delta M)} \right]. \end{aligned} \quad (12)$$

Here, avoiding the divergent dispersion integrals due to the poles at $\omega_k = \Delta M$, we introduced the finite width of the Δ state by

$$\Gamma_\Delta = \frac{1}{6\pi} \left(\frac{G_{\Delta N\pi}}{2M}\right)^2 q^3 \quad (13)$$

with $G_{\Delta N\pi} = -(3/\sqrt{2})G_{NN\pi}$, which is also correct in the large N_c limit. This is the expression given by Kokkedee without the relativistic correction [10]. It gives 145 MeV with the experimental value of $G_{NN\pi}$ at $q = 227$ MeV. Then, the contribution from the magnetic part to the difference of the absorption cross section is given by

$$\begin{aligned} \Delta\sigma_M^N &= 8\pi \left(\frac{q}{\omega_k}\right) \left(\frac{G_{NN\pi}}{4\pi}\right)^2 \left(\frac{e\mu_V}{2M}\right)^2 \{2(|t_1^{(-)}|^2 - |t_3^{(-)}|^2) + (|t_1^{(+)}|^2 - |t_3^{(+)}|^2)\} \\ &= \frac{e^2 \mu_V^2 \Delta M^2}{6M^2} \Gamma_\Delta \omega_k \times \left\{ \frac{4}{3} \frac{1}{\omega_k^2(\omega_k + \Delta M)^2} + \frac{16}{3} \frac{\omega_k^2 - \Delta M^2}{\omega_k(\omega_k + \Delta M)[(\omega_k^2 - \Delta M^2)^2 + \Delta M^2 \Gamma_\Delta^2]} \right. \\ &\quad \left. - \frac{6}{(\omega_k^2 - \Delta M^2)^2 + \Delta M^2 \Gamma_\Delta^2} \right\}. \end{aligned} \quad (14)$$

In the narrow width limit this gives for the gamma

$$\gamma_M^N|_{\Gamma_\Delta \rightarrow 0 \text{ limit}} = -\left(\frac{e^2}{4\pi}\right) \frac{\mu_V^2}{2M^2} \frac{1}{\Delta M^2}. \quad (15)$$

Identifying $b_1 = \mu_V^{\Delta N}/2$ we find that this is just the Δ -pole contribution in the HBChPT [5]. b_1 is the constant of $O(\epsilon^2)$ counter term in the HBChPT, and numerically about -2.5 ± 0.35 , while $\mu_V^{\Delta N}/2$ is -2.5 with experimental values for the constants. The calculated γ in the narrow width limit is $-4.0 \times 10^{-4} \text{ fm}^4$, while we obtain $-2.5 \times 10^{-4} \text{ fm}^4$ with the finite width. In the previous paper [1] the width of the Δ state in the direct Δ pole was proportional to v^3 with v the pion velocity, and was chosen so as to reproduce the experimental one. However, this is not consistent with the width which appears naturally in the numerator as shown in the second line of Eq. (14), so that the narrow width limit does not lead to the Δ -pole term in the HBChPT. When we use the previous expression for the amplitudes we obtain $\gamma_M^N = -6.1 \times 10^{-4} \text{ fm}^4$, which is too large compared with the case of the narrow width limit.

The interference term between the electric and magnetic terms is given by

$$\Delta\sigma_{EM}^N = \frac{q}{\omega_k} \frac{e^2 \mu_V G_{NN\pi}^2}{4\pi M^2} \left\{ 2v \text{Re } t_3^{(-)} + \left[\frac{1}{v} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{v^2}\right) \ln \frac{1+v}{1-v} \right] (\text{Re } t_1^{(-)} - \text{Re } t_3^{(-)}) \right\}. \quad (16)$$

The Born terms for the process $\gamma + N \rightarrow \pi + \Delta$ have been also calculated in the previous paper [1]: The amplitude is expanded as

$$T^a = i\epsilon_{a3b} \mathcal{F}^b T^{(-)} + \mathcal{F}^a T^{(0)} + \mathcal{F}_{a3}^+ T^{(+)}, \quad (17)$$

where \mathcal{F}^a is the transition isospin matrix from N to Δ , and $\mathcal{F}_{a3}^+ = \mathcal{F}^a \frac{1}{2} \tau^3 + \frac{1}{2} \mathcal{F}_{\Delta\Delta}^3 \mathcal{F}^a$. The electric part is obtained by replacing $\boldsymbol{\sigma}$ and $G_{NN\pi}$ in Eq. (5) by the transition spin operator $S_{\Delta N}$ and $G_{\Delta N\pi}$, respectively. The magnetic part is given by

$$(T_M^{(-)})^\Delta = \left(\frac{eG_{\Delta N\pi}}{8\pi M}\right) \left(\frac{\mu_V}{2M}\right) \left\{ -\frac{(S_{\Delta N} \cdot \mathbf{q})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{s})}{\omega_k} - \frac{4(S_{\Delta\Delta} \cdot \mathbf{q})(S_{\Delta N} \cdot \mathbf{s})}{5\omega_q} + 2\frac{(S_{\Delta N} \cdot \mathbf{s})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{q})}{\omega_q} - \frac{1(S_{\Delta\Delta} \cdot \mathbf{s})(S_{\Delta N} \cdot \mathbf{q})}{5\omega_k} \right\}, \quad (18)$$

$$(T_M^{(+)})^\Delta = \left(\frac{eG_{\Delta N\pi}}{8\pi M}\right) \left(\frac{\mu_V}{2M}\right) \left\{ -\frac{(S_{\Delta N} \cdot \mathbf{q})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{s})}{\omega_k} - \frac{1(S_{\Delta\Delta} \cdot \mathbf{q})(S_{\Delta N} \cdot \mathbf{s})}{5\omega_q} + \frac{(S_{\Delta N} \cdot \mathbf{s})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{q})}{\omega_q} + \frac{1(S_{\Delta\Delta} \cdot \mathbf{s})(S_{\Delta N} \cdot \mathbf{q})}{5\omega_k} \right\}. \quad (19)$$

Table 1

Spin-dependent polarizability. Those with the suffices E , M and EM are from the electric, magnetic and interference terms between the electric and magnetic ones, respectively. The superscripts N and Δ denote the contributions from the $N+\pi$ and $\Delta+\pi$ channels, respectively. $\gamma^N = \gamma_E^N + \gamma_M^N + \gamma_{EM}^N$, $\gamma^\Delta = \gamma_E^\Delta + \gamma_M^\Delta + \gamma_{EM}^\Delta$ and $\gamma = \gamma^N + \gamma^\Delta$. All values are in units of 10^{-4} fm^4 . See text for the parameter sets

Set	γ_E^N	γ_M^N	γ_{EM}^N	γ^N	γ_E^Δ	γ_M^Δ	γ_{EM}^Δ	γ^Δ	γ
I	3.9	-1.2	-1.3	1.4	-0.3	0.0	0.0	-0.3	1.1
II	2.9	-2.8	-0.8	-0.7	-0.3	0.0	0.0	-0.3	-0.9
III	5.0	-2.5	-2.4	0.2	-0.4	0.1	0.0	-0.3	-0.1

The cross section for the process is given by the electric and magnetic terms and their interference term:

$$\Delta\sigma^\Delta = \Delta\sigma_E^\Delta + \Delta\sigma_M^\Delta + \Delta\sigma_{EM}^\Delta \quad (20)$$

with

$$\begin{aligned} \Delta\sigma_E^\Delta &= \frac{e^2 G_{NN\pi}^2}{4\pi M^2} \frac{v}{b} \left[\frac{a-b^2}{b^2} - \frac{a^2-b^2v^2}{2b^3v} \ln \frac{a+bv}{a-bv} \right], \\ \Delta\sigma_M^\Delta &= \frac{e^2 G_{NN\pi}^2 \mu_V^2 \Delta M^2 v^3}{24\pi M^4} \frac{1}{b}, \\ \Delta\sigma_{EM}^\Delta &= -\frac{e^2 G_{NN\pi}^2 \mu_V \Delta M v^2}{8\pi M^3} \frac{1}{b^3} \left[\frac{2bv}{3} - \frac{a^2}{bv} + \frac{a(a^2-b^2v^2)}{2b^2v^2} \ln \frac{a+bv}{a-bv} \right], \end{aligned} \quad (21)$$

where $b = 1 + d\sqrt{1-v^2}$ and $a = (1+b^2)/2$ with $d = \Delta M/m_\pi$.

In Table 1, we give numerical results of the spin-dependent polarizability γ for parameter sets I, II and III. Set I is that of Adkins [10]. In Set II f_π is the experimental one and the Skyrme parameter $e = 4.0$ is chosen for g_A to be reproduced. In Set III all the constants such as $G_{NN\pi}$, μ_V in the above are taken to be the empirical values. Here, $\gamma = \gamma^N + \gamma^\Delta$ with $\gamma^{N,\Delta} = \gamma_E^{N,\Delta} + \gamma_M^{N,\Delta} + \gamma_{EM}^{N,\Delta}$. The suffices E , M and EM denote the contributions from the electric, magnetic terms and their interference terms, respectively.

The result of Set III can be compared with that of the HBChPT. Hemmert et al. showed in Ref. [5] that γ is given by $[4.5 (N \text{ loop}) - 4.0 (\Delta \text{ pole}) - 0.4 (\Delta \text{ loop})] \times 10^{-4} \text{ fm}^4$. As already shown, γ_E^N is the same as the N -loop term in the HBChPT. Note that we did not use the Goldberger-Treiman relation here. γ_M^N reduces to the Δ -pole term at the narrow width limit. For the finite width case γ^N is close to the sum of the N -loop and Δ -pole terms in the HBChPT. The effect of the $\Delta + \pi$ channel is small and is also close to that of the Δ loop in the HBChPT. In the latter the contribution of magnetic terms is not included, so that the electric term can be compared with that of Δ loop. We see that the total result is very similar to that of the HBChPT. Numerical results show that the magnetic terms for the $\Delta + \pi$ channel are small but have an opposite sign.

Here, we discuss about the Drell-Hearn-Gerasimov(DHG) sum rule [11] in the Skyrme model. The low-energy limit of the Compton scattering amplitude is given by the nucleon Born terms with the spatial component of the electromagnetic current, and we obtain

$$\begin{aligned} T_{N\text{-pole}} &= \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{\langle N(\mathbf{p}) | \boldsymbol{\epsilon}' \cdot \mathbf{J}_{em} | N(\mathbf{p}+\mathbf{k}) \rangle \langle N(\mathbf{p}+\mathbf{k}) | \boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{J}_{em} | N(\mathbf{p}) \rangle}{-\omega_k} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\langle N(\mathbf{p}) | \boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{J}_{em} | N(\mathbf{p}-\mathbf{k}) \rangle \langle N(\mathbf{p}-\mathbf{k}) | \boldsymbol{\epsilon}' \cdot \mathbf{J}_{em} | N(\mathbf{p}) \rangle}{\omega_k} \right\}. \end{aligned} \quad (22)$$

The spin-dependent part of the N -pole terms is then given by

$$T_{N\text{-pole}} = -\frac{e^2 \mu_N^2}{8\pi M_N^2} \omega_k \mathbf{i} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\epsilon}' \times \boldsymbol{\epsilon}. \quad (23)$$

where μ_N is the nucleon magnetic moment in units of nuclear Bohr magneton. Consequently, the unsubtracted dispersion relation is

$$-\frac{e^2 \mu_N^2}{8\pi M^2} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\omega_0}^{\infty} \frac{\sigma_{1/2} - \sigma_{3/2}}{\omega} d\omega. \quad (24)$$

This is different from the DHG sum rule, in which the left-hand side is given by the anomalous magnetic moment instead of the total magnetic one. How to resolve this has been shown by Low [7]: The Born terms in terms of the time-component of the relativistic electromagnetic current removes this discrepancy; however, the effect is highly relativistic and cannot be obtained in a nonrelativistic approach such as in the Skyrme model. The contribution from the electric Born terms is already calculated by L'vov [2] and is given by $e^2 G_{NN\pi}^2 / (32\pi^3 M^2)$, while those from the magnetic terms are calculated to be, in the narrow width approximation for the Δ state, $-e^2 \mu_V^2 / (8\pi M^2)$. Noting that $\mu_N = \mu_S + \tau_3 \mu_V$ with $\mu_S/2M$ and $\mu_V/2M$ to be $O(N_c^{-1})$ and $O(N_c)$, respectively, we see that the left-hand side of Eq. (24) is of $O(N_c^2)$, but the right-hand side is of $O(N_c)$, so that there seems to be an inconsistency in the N_c dependence of the DHG sum rule. However, the term of $O(N_c^2)$ in the left-hand side is completely canceled by the contribution from the Δ resonance, and it turns out that the left-hand side of the sum rule becomes of $O(1)$, but the right-hand side is of $O(N_c)$. It is not clear if the sum rule is down to that of $O(1)$, because of the nonrelativistic approach and the incomplete prediction of the Skyrme model for the next-leading order terms in the large N_c limit of magnetic moments. A similar situation was also shown in the Adler-Weisberger(AW) relation [12]: The square of the axial-vector constant is of $O(N_c^2)$, but other terms is at most of $O(N_c)$. Therefore, there appears an inconsistency in the N_c dependence of the AW relation, but the contribution of the Δ states again cancels the term of $O(N_c^2)$ at the narrow width limit. In this case the remaining terms of $O(N_c)$ reduces to be $O(1)$, due to further cancellations among the isospin odd forward scattering amplitudes. See also a similar situation in the case of the Cabibbo-Radicatti sum rule [13].

Finally, we calculate the spin-independent part; namely, the electric and magnetic polarizabilities of the nucleon. In Ref. [1] the electric polarizability $\bar{\alpha}$ is derived from the absorption cross section by the longitudinal photon, thereby the magnetic one can be obtained by means of the Baldin sum rule [14]. However, it is possible to calculate directly them using the transverse photon [2]. The difference between two approaches appears only in the case of the $\Delta + \pi$ channel for the final states. Here we give the result with use of the transverse photon. In this calculation we also used the amplitudes for the direct Δ -pole terms to the $N + \pi$ channel given in Eq. (12). The magnetic Born term to the $\pi + N$ channel at the narrow width limit is again the same as that of the Δ -pole term in the HBChPT:

$$\beta_M^N |_{\Gamma_\Delta=0 \text{ limit}} = \left(\frac{e^2}{4\pi} \right) \frac{\mu_V^2}{M^2} \frac{1}{\Delta M}. \quad (25)$$

The numerical results for the electric and magnetic polarizabilities are shown in Table 2. The numbers in parentheses are values calculated using the longitudinal photon. Empties show no change for this case. We can see that the results for Set III are very close to those of the HBChPT: Hemmert et al. showed in the calculation up to $O(\epsilon^3)$ that $\bar{\beta}$ is given by $[1.2(N \text{ loop}) + 12(\Delta \text{ pole}) + 1.5(\Delta \text{ loop})] \times 10^{-4} \text{ fm}^3$ [5]. The effect of the finite width is seen to reduce the value of the Δ -pole term. β_E^Δ is, however, small, but the interference term β_{EM}^Δ is rather large and negative. The large interference term is due to the high-energy behavior of the amplitudes of the magnetic part. This may need further consideration. In the previous paper [1] the calculated results for $\bar{\beta}$ are 7.8 and 21.3 in units of 10^{-4} fm^3 for Set I and III, respectively. Therefore, we see that the

⁵The scalar part μ_S is of $O(N_c^{-1})$ in the Skyrme model, but is of $O(1)$ in the large N_c limit [9]. Also, the next-leading order term seems missing in the vector part μ_V .

Table 2

Electric and magnetic polarizabilities, $\bar{\alpha}$ and $\bar{\beta}$. Notations are the same as those of the spin-dependent polarizability γ . All values are in units of 10^{-4} fm^3 . See text for the parameter sets.

Set	$\bar{\alpha}^N$	$\bar{\alpha}^\Delta$	$\bar{\alpha}$	$\bar{\beta}_E^N$	$\bar{\beta}_M^N$	$\bar{\beta}_{EM}^N$	$\bar{\beta}^N$	$\bar{\beta}_E^\Delta$	$\bar{\beta}_M^\Delta$	$\bar{\beta}_{EM}^\Delta$	$\bar{\beta}^\Delta$	$\bar{\beta}$
I	10.8	6.4	17.2 (5.6)	1.1	4.3	0.1	5.5	0.1	0.5	-1.3	-0.7	4.8
II	8.0	5.3	13.3 (4.7)	0.8	7.7	-0.3	8.2	0.1	0.4	-1.1	-0.5	7.7
III	13.9	8.2	22.1 (7.2)	1.4	9.0	0.3	10.7	0.1	1.4	-2.4	-0.9	9.8
			(16.4)					(0.9)			(0.1)	(5.6)
			(12.7)					(0.7)			(0.0)	(8.2)
			(21.1)					(1.1)			(0.1)	(10.8)

inconsistent inclusion of the Δ width leads to too large values for the magnetic polarizability. The effect of the finite width makes the magnetic polarizabilities rather small in the consistent inclusion of this paper.

In summary we have calculated the spin polarizability of the nucleon in the Skyrme model, where the pion photo-production Born amplitudes are employed for obtaining the absorption cross section in the dispersion relation. The electric and magnetic Born terms agree with the N -loop and the Δ -pole terms of the HBChPT, at the limit of the narrow width of the Δ state. The electric and magnetic polarizabilities were also calculated using the transverse photon and by the consistent treatment of the Δ width.

References

- [1] S. Saito, M. Uehara, Phys. Rev. D 51 (1995) 6059; D 56 (1997) 7471.
- [2] A.I. L'vov, Phys. Lett. B 304 (1993) 29.
- [3] A.M. Sandorfi et al., Phys. Rev. D 50 (1994) R6681.
- [4] V. Bernard, N. Kaiser, J. Kambor, U.-G. Meissner, Nucl. Phys. B 388 (1992) 315.
- [5] T.R. Hemmert, B.R. Holstein, J. Kambor, Phys. Rev. D 55 (1997) 5598.
- [6] M. Gell-Mann, M.L. Goldberger, Phys. Rev. 96 (1954) 1433.
- [7] F.E. Low, Phys. Rev. 96 (1954) 1428.
- [8] V. Bernard, N. Kaiser, U.-G. Meissner, Nucl. Phys. B 383 (1992) 442; V. Bernard, N. Kaiser, T.S.H. Lee, U.-G. Meissner, Phys. Rep. 246 (1994) 316.
- [9] R. Dashen, E. Jenkins, A.V. Manohar, Phys. Rev. D 49 (1994) 4714; E. Jenkins, A.V. Manohar, Phys. Lett. B 335 (1994) 452.
- [10] G.S. Adkins, C.R. Nappi, E. Witten, Nucl. Phys. B 288 (1983) 552; G.S. Adkins, C.R. Nappi, Nucl. Phys. B 233 (1984) 109.
- [11] S.D. Drell, A.C. Hearn, Phys. Rev. Lett. 16 (1966) 908; S. Gerasimov, Sov. J. Nucl. Phys. 2 (1966) 430.
- [12] M. Uehara, A. Hayashi, S. Saito, Prog. Theor. Phys. 85 (1991) 181; A. Hayashi, S. Saito, M. Uehara, Phys. Rev. D 46 (1992) 4856.
- [13] W. Broniowski, Nucl. Phys. A 580 (1994) 429.
- [14] A.M. Baldin, Nucl. Phys. 18 (1960) 310.

PHYSICS LETTERS B

Instructions to Authors (short version)

(A more detailed version of these instructions is published in the preliminary pages to each volume.)

Submission of papers

Manuscripts (one original + two copies), accompanied by a covering letter, should be sent to one of the Editors indicated on page 2 of the cover.

Original material. By submitting a paper for publication in Physics Letters B the authors imply that the material has not been published previously nor has been submitted for publication elsewhere and that the authors have obtained the necessary authority for publication.

Refereeing. Submitted papers will be refereed and, if necessary, authors may be invited to revise their manuscript. If a submitted paper relies heavily on unpublished material, it would be helpful to have a copy of that material for the use of the referee.

Types of contributions

Letters. The total length of the paper should preferably not exceed six journal pages, equivalent to ten typewritten pages with double spacing, including the list of authors, abstract, references, figure captions and three figures. In the case that more figures are required, the text should be shortened accordingly. As proofs will not be sent, authors should check their papers carefully before submission.

Manuscript preparation

All manuscripts should be written in good English. The paper copies of the text should be prepared with double line spacing and wide margins, on numbered sheets. See notes opposite on electronic version of manuscripts.

Structure. Please adhere to the following order of presentation: Article title, Author(s), Affiliation(s), Abstract, Classification codes and keywords, Main text, Acknowledgements, Appendices, References, Figure captions, Tables.

Corresponding author. The name, complete postal address, telephone and fax numbers and the e-mail address of the corresponding author should be given on the first page of the manuscript.

Classification codes/keywords. Please supply one to four classification codes (PACS and/or MSC) and up to six keywords of your own choice that describe the content of your article in more detail.

References. References to other work should be consecutively numbered in the text using square brackets and listed by number in the Reference list. Please refer to the more detailed instructions for examples.

Illustrations

Illustrations should also be submitted in triplicate: one master set and two sets of copies. The *line drawings* in the master set should be original laser printer or plotter output or drawn in black india ink, with careful lettering, large enough (3–5 mm) to remain legible after reduction for printing. The *photographs* should be originals, with somewhat more contrast than is required in the printed version. They should be unmounted unless part of a composite figure. Any scale markers should be inserted on the photograph, not drawn below it.

Colour plates. Figures may be published in colour, if this is judged essential by the Editor. The Publisher and the author will each bear

part of the extra costs involved. Further information is available from the Publisher.

After acceptance

Notification. You will be notified by the Editor of the journal of the acceptance of your article and invited to supply an electronic version of the accepted text, if this is not already available.

Copyright transfer. You will be asked to transfer the copyright of the article to the Publisher. This transfer will ensure the widest possible dissemination of information.

No proofs. In order to speed up publication, all proofreading will be done by the Publisher and proofs are *not* sent to the author(s).

Electronic manuscripts

The Publisher welcomes the receipt of an electronic version of your accepted manuscript (preferably encoded in LaTeX). If you have not already supplied the final, accepted version of your article to the journal Editor, you are requested herewith to send a file with the text of the accepted manuscript directly to the Publisher by e-mail or on diskette (allowed formats 3.5" or 5.25" MS-DOS, or 3.5" Macintosh) to the address given below. Please note that no deviations from the version accepted by the Editor of the journal are permissible without the prior and explicit approval by the Editor. Such changes should be clearly indicated on an accompanying printout of the file.

Author benefits

No page charges. Publishing in Physics Letters B is free.

Free offprints. The corresponding author will receive 25 offprints free of charge. An offprint order form will be supplied by the Publisher for ordering any additional paid offprints.

Discount. Contributors to Elsevier Science journals are entitled to a 30% discount on all Elsevier Science books.

Contents Alert. Physics Letters B is included in Elsevier's pre-publication service Contents Alert (for information, please contact: c-alert.mathphys@elsevier.nl).

ContentsDirect. Physics Letters B is included in Elsevier's free E-mail service ContentsDirect. Please register at <http://www.elsevier.nl/locate/ContentsDirect>

Further information (after acceptance)

Elsevier Science B.V., Physics Letters B
Issue Management
Physics and Astronomy
P.O. Box 2759, 1000 CT Amsterdam
The Netherlands
Tel.: + 31 20 485 2634
Fax: + 31 20 485 2319
E-mail: NHPDESKED@ELSEVIER.NL



North-Holland, an imprint of Elsevier Science

Spin polarizabilities of the nucleon in a large N_c baryon model with dispersion relations

Y. Tanushi* and S. Saito†

Department of Physics, Nagoya University, Nagoya 464-8602, Japan

M. Uehara‡

Department of Physics, Saga University, Saga 840-8502, Japan

(Received 28 December 1998; revised manuscript received 30 July 1999; published 22 November 1999)

We calculate the spin polarizabilities of the nucleon by means of the dispersion relations applied to model-independent pion photoproduction amplitudes both in the $N\pi$ and $\Delta\pi$ channels. Here, we follow the idea of the $1/N_c$ expansion. By careful application of dispersion relations we show that the spin polarizabilities coincide with those in heavy baryon chiral perturbation theory, if we take the narrow decay-width limit of the Δ particle. [S0556-2813(99)02311-0]

PACS number(s): 13.60.Fz, 12.39.Dc, 13.60.Le

I. INTRODUCTION

The electromagnetic polarizabilities are the quantities to represent the response of the nucleon to external electromagnetic fields and reflect its internal structure. Recently, Ragusa showed [1] that there are four independent spin polarizabilities γ_i ($i=1, \dots, 4$) in the amplitude of $\mathcal{O}(\omega^3)$, and that the forward spin polarizability γ_0 is given by $\gamma_0 = \gamma_1 - \gamma_2 - 2\gamma_4$. There has not yet been any experiment about the spin polarizabilities.

Theoretical investigations on the spin polarizabilities have been carried out within the framework of the heavy baryon chiral perturbation theory (HBChPT). Bernard *et al.* [2] showed that the value of γ_0 from the leading $N\pi$ loops has an opposite sign to that of the pion photoproduction multipole analysis [3], and that the contribution of the $\Delta(1232)$ pole is inevitable to reduce largely that of the $N\pi$ -loop terms. Hemmert *et al.* [4,5] gave the spin polarizabilities γ_1 to γ_4 within a small scale expansion framework, where the Δ is introduced as an independent field, and the mass difference between the nucleon and Δ state is treated as an additional small scale.

In this paper we study the spin polarizabilities $\gamma_1, \dots, \gamma_4$ by careful application of the dispersion relations to the pion photoproduction amplitudes, which satisfy the low energy theorems and then are model independent. Such model-independent amplitudes can also be constructed in the chiral soliton model [6]. In previous papers, we calculated with use of the dispersion relations the electric and magnetic polarizabilities [6] and the forward spin polarizability γ_0 [7], and found that our calculations well reproduce the results of the $N\pi$ -loop and Δ -pole terms calculated in HBChPT, if we take the narrow width limit of the Δ state [7].

The chiral soliton model has flavor-spin symmetry in the large N_c QCD, which implies the large N_c consistency condition on meson-baryon reaction amplitudes [8,9], where N_c is the number of colors. The consistency condition makes the pion production amplitudes with the magnetic dipole interaction vertices finite at high energies and then the dispersion

integrals of the magnetic part of the amplitudes converge. In this sense we study the subject from the view point of the $1/N_c$ expansion.

We show in this paper that the results on the spin polarizabilities also reduce to the same ones by HBChPT at the narrow width limit of the Δ state, if we carefully apply the dispersion relations. We argue that the convergent dispersion integral does not necessarily mean no need of the subtraction, and discuss how to remedy the ill-defined dispersion integrals. We discuss the contributions from the interference terms between the electric and magnetic amplitudes in the $N\pi$ and $\Delta\pi$ channels, which appear at the finite Δ width. These are not taken into account in HBChPT, because they are of higher order in the small parameter expansion. Comparison with the multipole analyses [10,11] is given.

In Sec. II we calculate the imaginary parts of Compton scattering amplitude with use of the electric pion photoproduction amplitude in the $N\pi$ channel, and argue a subtle problem in the application of the dispersion relation. The contributions from the magnetic pion photoproduction amplitudes and $\Delta\pi$ channels are discussed in Secs. III and IV, respectively. Numerical results and discussion are given in Sec. V.

II. THE ELECTRIC PION PHOTOPRODUCTION AMPLITUDES AND DISPERSION RELATIONS

We consider the spin-dependent part of Compton scattering amplitude excluding the nucleon-pole terms, which is represented, at the center-of-mass system, as [5]

$$f_{\text{spin}} = A_3(\omega, \theta)R_3 + A_4(\omega, \theta)R_4 + A_5(\omega, \theta)R_5 + A_6(\omega, \theta)R_6, \quad (2.1)$$

where R_3 , etc., are defined as

$$\begin{aligned} R_3 &= i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\boldsymbol{\epsilon}'^* \times \boldsymbol{\epsilon}), & R_4 &= i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{k}' \times \mathbf{k})(\boldsymbol{\epsilon}'^* \cdot \boldsymbol{\epsilon}), \\ R_5 &= i\boldsymbol{\sigma} \cdot [(\boldsymbol{\epsilon}'^* \times \mathbf{k})(\boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{k}') - (\boldsymbol{\epsilon} \times \mathbf{k}')(\boldsymbol{\epsilon}'^* \cdot \mathbf{k})], & (2.2) \\ R_6 &= i\boldsymbol{\sigma} \cdot [(\boldsymbol{\epsilon}'^* \times \mathbf{k}')(\boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{k}) - (\boldsymbol{\epsilon} \times \mathbf{k})(\boldsymbol{\epsilon}'^* \cdot \mathbf{k})]. \end{aligned}$$

Here, $\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{\epsilon}')$ and $\mathbf{k}(\mathbf{k}')$ are the polarization vector and the momentum of the incident (outgoing) photon, respectively.

*Electronic address: tanushi@nuc-th.phys.nagoya-u.ac.jp

†Electronic address: saito@nuc-th.phys.nagoya-u.ac.jp

‡Electronic address: uehara@cc.saga-u.ac.jp

and σ denotes the Pauli matrix of the nucleon. The independent structure functions $A_i(\omega, \theta)$ with $i=3, \dots, 6$ are functions of the photon energy $\omega (= \omega')$ and the scattering angle θ . We note that A_3 is $\mathcal{O}(\omega^3)$ at low energies, but other A_i 's with i being from 4 to 6 behave as $\mathcal{O}(\omega)$ because of the additional ω^2 dependence coming from R_i , except for R_3 .

We apply the forward dispersion relations to the structure functions $A_i(\omega, 0)$ except for the anomalous part coming from the $\pi^0\gamma\gamma$ interaction. The forward spin polarizability $\gamma_0 = \gamma_1 - \gamma_2 - 2\gamma_4$ is given as the following dispersion integral of $\text{Im } A_3(\omega, 0)$:

$$\gamma_0 = \frac{2}{\pi} \int_{\omega_p}^{\infty} d\omega \frac{\text{Im } A_3(\omega, 0)}{\omega^4}. \quad (2.3)$$

The other polarizabilities $\gamma_2, \gamma_3,$ and γ_4 are given by the dispersion integrals of $\text{Im } A_4(\omega, 0), \text{Im } A_6(\omega, 0),$ and $\text{Im } A_5(\omega, 0)$ divided by $\omega^2,$ respectively, instead of $\text{Im } A_3(\omega, 0)/\omega^4$ in Eq. (2.3). The anomalous terms contribute to $\gamma_1, \gamma_3,$ and γ_4 .

The imaginary part of the scattering amplitude is calculated from the photoabsorption one of the nucleon using the unitarity condition. In this section we evaluate the contribution of the $\gamma+N \rightarrow \pi+N$ amplitude with the electric interaction, which we call the electric Born amplitude. The amplitude is decomposed into three terms as

$$f_N^a = i\epsilon_{abc} \tau^b f_N^{a-} + \tau^a f_N^{(0)} + \delta_{ab} f_N^{a+}, \quad (2.4)$$

where τ^a 's are the isospin matrices.

The electric Born amplitude satisfying the low energy theorem within the static kinematics is written as

$$f_{N,e}^a = \left(\frac{eG_{NN\pi}}{8\pi M} \right) \left[i\sigma \cdot \epsilon + 2 \frac{i\sigma \cdot (k-q)(\epsilon \cdot q)}{m_\pi^2 - (k-q)^2} \right], \quad (2.5)$$

where k and q are the incident photon and the outgoing pion four-momenta, respectively. ϵ the polarization vector of the incident photon. This amplitude is also obtained in the chiral soliton model, where it is seen from the $1/N_c$ viewpoint: The πNN coupling constant $G_{NN\pi}$ is of $\mathcal{O}(N_c^{3/2})$, the nucleon mass of $\mathcal{O}(N_c)$ and the pion mass and momenta of $\mathcal{O}(1)$. We, then, see that $f_{N,e}^a$ is of $\mathcal{O}(N_c^{1/2})$, while $f_{N,e}^{a+}$ are of $\mathcal{O}(N_c^{-1/2})$ and behave as $\mathcal{O}(\omega)$, that is, though the latter amplitudes satisfy the low energy theorem, they do not lead to finite results without unitarization, and are discarded in the following.

With use of the unitarity condition we find the imaginary part of the spin-dependent part as

$$\begin{aligned} & \frac{q}{4\pi} \int d\Omega_q 2f_{N,e}^{a-} f_{N,e}^{a-} \\ &= 2q \left(\frac{eG_{NN\pi}}{8\pi M} \right)^2 \{ I(v)R_3 + J_1(v, \theta)R_4/m_\pi^2 - J_2(v, \theta)R_5/m_\pi^2 \\ & \quad + J_3(v, \theta)R_6/m_\pi^2 + J_3(v, \theta)R_7/m_\pi^4 \}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

with $R_7 = i\sigma \cdot (k' \times k)(\epsilon^* \cdot k)(\epsilon \cdot k')$. Here, $I(v) = (1$

$-v^2)/(2v) \ln\{(1+v)/(1-v)\}$ with v the pion velocity defined as $v = q/\omega$ in the static kinematics, and $J_i(v, \theta)$ are functions depending on v and θ . At $\theta=0$ they are given by

$$J_1(v, 0) = (1-v^2) \left[\frac{1}{2} - \frac{1-v^2}{4v} \ln \left(\frac{1+v}{1-v} \right) \right], \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} J_2(v, 0) &= J_3(v, 0)/(1-v^2) \\ &= (1-v^2) \left[-\frac{3}{4} + \frac{3-v^2}{8v} \ln \left(\frac{1+v}{1-v} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.8)$$

It is known that the spin factor R_7 of the last term in Eq. (2.6) is not independent of the other spin factors; actually, we have

$$R_7 = [\omega^4 - (k' \cdot k)^2]R_3 + (k' \cdot k)R_5 - \omega^2 R_6, \quad (2.9)$$

where we have used the relation $\omega = \omega'$. Redistributing the last term in Eq. (2.6) into the first, the third, and the fourth terms in Eq. (2.6), we find that $\text{Im } A_5(\omega, 0) = \text{Im } A_6(\omega, 0) = 0$ due to the cancellation $J_2(v, 0) - J_3(v, 0)/(1-v^2) = 0$. The naive application of the dispersion integrals, therefore, yields $\gamma_3^{N,e} = \gamma_4^{N,e} = 0$, except for the anomalous term. However, we point out that the last term in Eq. (2.6) should not be taken into account as the contribution to the spin polarizabilities: Let us consider the coefficient function of R_7 , which we denote temporarily as $A_7(\omega, 0)$ at $\theta=0$. Following the argument by Low [12], we see that $A_7(\omega, 0)$ has no singularities as $\omega \rightarrow 0$, because we are considering the non-Born terms of the Compton scattering with the minimum excitation energy to be m_π . This means that $A_7(\omega, 0)$ behaves as ω or higher at low energies, and then $A_7(\omega, 0)R_7$ does not contribute to the spin polarizabilities, because R_7 itself is of order of ω^4 , while the spin polarizabilities are defined as the coefficients of ω^3 terms of the amplitudes $A_i(\omega, 0)R_i$'s. We must, therefore, disregard the $A_7(\omega, 0)R_7$ term, and neglect it in the application of the dispersion relations. Thus, both $\text{Im } A_5(\omega, 0)$ and $\text{Im } A_6(\omega, 0)$ are proportional to $J_2(v)$ and do not vanish.¹ We shall see in the Appendix how this situation is described in the case of HBChPT.

The spin polarizabilities are thus given through the dispersion integrals of the electric part in $A_i(\omega, 0)$'s with $i=3, \dots, 6$ in the $N\pi$ channel as

$$\gamma_1^{N,e} = 2\gamma_2^{N,e} = 4\gamma_3^{N,e} = -4\gamma_4^{N,e} = \frac{e^2 G_{NN\pi}^2}{96\pi^3 M^2 m_\pi^2}, \quad (2.10)$$

which are the same as those of the $N\pi$ loops in HBChPT [5]. Because the proton-neutron difference depends on the amplitude $f_{N,e}^{(0)}$, we cannot predict the difference between them. It

¹L'vov already argued about this problem and states that the dispersion relation does not work in this case from the high-energy behavior of the relativistic invariant amplitudes with Regge-pole assumption [13].

is also known that the prediction of HBChPT up to chiral order ϵ^3 yields no isospin dependence.

III. CONTRIBUTIONS FROM MAGNETIC BORN AMPLITUDES AND INTERFERENCE TERMS

The magnetic Born amplitude for the $\gamma+N \rightarrow \pi+N$ process is written as

$$f_{N,m}^{\pm} = \left(\frac{eG_{NN\pi}\mu_V}{16\pi M^2} \right) \{ t_1^{(\pm)} P_1(\hat{q}, \hat{s}) + t_3^{(\pm)} P_3(\hat{q}, \hat{s}) \}, \quad (3.1)$$

where μ_V is the vector part of the nucleon magnetic moment defined by $(\mu_p - \mu_n)/2$ in units of the nuclear magneton. $P_1(\hat{q}, \hat{s}) = (\sigma \cdot \hat{q})(\sigma \cdot \hat{s})$ and $P_3(\hat{q}, \hat{s}) = 3(\hat{q} \cdot \hat{s}) - (\sigma \cdot \hat{q})(\sigma \cdot \hat{s})$ are the P -wave projection operators for the $J=1/2$ and $3/2$ states, respectively, and $\hat{q} = q/q$ and $\hat{s} = s/k$ with $s = k \times \epsilon$. $t_i^{(\pm)}$ are given by

$$\begin{aligned} t_1^{(+)} &= 2t_1^{(-)} = -\frac{2q}{3M} \frac{\Delta}{\omega + \Delta}, \\ t_3^{(+)} &= \frac{q\omega}{2M} \left[-\frac{2\Delta}{\omega^2 - \Delta^2 + i\Delta\Gamma_\Delta} + \frac{2}{3} \frac{\Delta}{\omega(\omega + \Delta)} \right], \\ t_3^{(-)} &= \frac{q\omega}{2M} \left[\frac{\Delta}{\omega^2 - \Delta^2 + i\Delta\Gamma_\Delta} - \frac{2}{3} \frac{\Delta}{\omega(\omega + \Delta)} \right], \end{aligned} \quad (3.2)$$

with Δ being the mass difference of the nucleon and the $\Delta(1232)$. In the above we use the relation $\mu_V^{\Delta N} = -(3/\sqrt{2})\mu_V$ as well as $G_{\Delta N\pi} = -(3/\sqrt{2})G_{NN\pi}$ obtained in the chiral soliton model, which are shared with the large N_c baryon model [8]. Here, in order to avoid the pole at $\omega = \Delta$ on the real axis, we have introduced the finite width of the Δ state given by $\Gamma_\Delta = (1/6\pi)(G_{\Delta N\pi}/2M)^2 q^3$. This is the expression given by Kokkedee without relativistic correction [14], and yields 145 MeV with the experimental value of $G_{NN\pi}$ at $q=227$ MeV.

It should here be noted that each of the N - and Δ -pole terms in $f_{N,m}^{\pm}$ is of $\mathcal{O}(N_c^{3/2})$ owing to the isovector magnetic moment, $e\mu_V/2M$, of $\mathcal{O}(N_c)$ [8,14], but the sums reduce to $\mathcal{O}(N_c^{1/2})$ due to the cancellation among the N - and Δ -pole terms, that is due to the large N_c consistency condition. This is a remarkable point of the chiral soliton model as well as the large N_c baryon model, because the cancellation makes the amplitudes finite at infinite ω at the same time. The amplitude $f_{N,m}^{(0)}$ is of $\mathcal{O}(N_c^{-1/2})$, where the consistency condition does not work, and is then discarded in the following.

For the magnetic part we obtain

$$\gamma_2^{N,m} = -\gamma_4^{N,m} = \gamma_0^{N,m}, \quad \gamma_1^{N,m} = \gamma_3^{N,m} = 0, \quad (3.3)$$

where

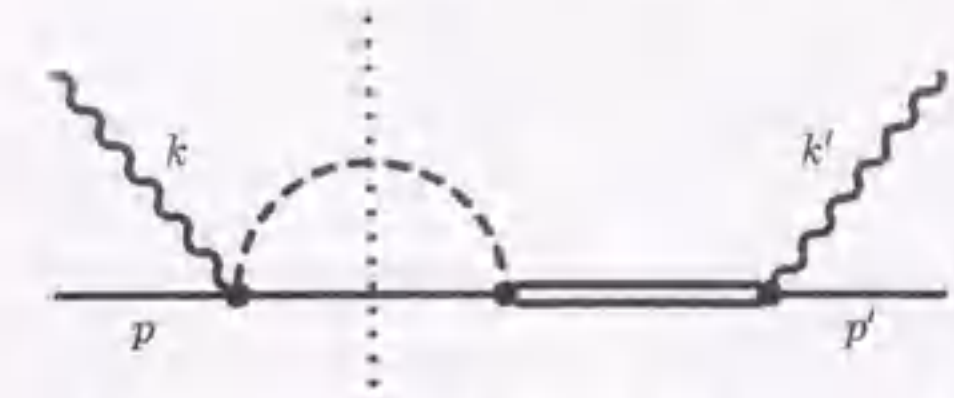


FIG. 1. An example of the diagrams of the interference between the electric and magnetic amplitudes. The solid, double-solid, dashed, and wavy lines denote the nucleon, Δ particle, pion, and photon, respectively. The vertical dotted line denotes the on shell.

$$\begin{aligned} \gamma_0^{N,m} &= -\frac{e^2 G_{NN\pi}^2 \mu_V^2}{192\pi^3 M^4} \int_{\omega_p}^{\infty} \frac{d\omega}{\omega^4} q^3 \left[\frac{\omega \Delta^2 (\omega + 8\Delta)}{(\omega^2 - \Delta^2)^2 + \Delta^2 \Gamma_\Delta^2} \right. \\ & \quad \left. - \frac{2\Delta^2}{(\omega + \Delta)^2} \right], \end{aligned} \quad (3.4)$$

Since the above integrand contains $(G_{NN\pi}/2M)^2 q^3$, the same form as $\Gamma_\Delta(q)$ appears in the numerator, and then we may obtain, at the limit of $\Gamma_\Delta \rightarrow 0$,

$$\gamma_0^{N,m} = -\frac{e^2 \mu_V^2}{8\pi M^2 \Delta^2}, \quad (3.5)$$

which is equal to the results of the Δ -pole contribution in HBChPT [5].

The interference term between the electric and magnetic terms is also calculated similarly. As an example we show a diagram for the interference part in Fig. 1. This kind of diagrams is not taken into account in HBChPT, because they are of higher order. Contrary, the baryon propagator in the $1/N_c$ expansion is the same order as the pion propagator, so that such terms are not of higher order. The interference term in the $N\pi$ channel is calculated to be

$$\begin{aligned} \gamma_2^{N,i} &= -\frac{e^2 G_{NN\pi}^2 \mu_V}{16\pi^3 M^3} \int_{\omega_p}^{\infty} \frac{d\omega}{\omega^3} q \left[[v^2 - 1 + I(v)] \right. \\ & \quad \times \left. \frac{\omega \Delta (\omega^2 - \Delta^2)}{(\omega^2 - \Delta^2)^2 + \Delta^2 \Gamma_\Delta^2} - \left(\frac{2}{3} v^2 - 1 + I(v) \right) \frac{\Delta}{\omega + \Delta} \right], \\ \gamma_4^{N,i} &= -\frac{e^2 G_{NN\pi}^2 \mu_V}{64\pi^3 M^3} \int_{\omega_p}^{\infty} \frac{d\omega}{\omega^3} q [1 - I(v)] \\ & \quad \times \left[\frac{\omega \Delta (\omega^2 - \Delta^2)}{(\omega^2 - \Delta^2)^2 + \Delta^2 \Gamma_\Delta^2} - \frac{2\Delta}{\omega + \Delta} \right], \end{aligned} \quad (3.6)$$

and $\gamma_1^{N,i} = \gamma_3^{N,i} = 0$.

IV. CONTRIBUTIONS FROM $\Delta\pi$ CHANNEL

In this section we examine the $\gamma+N \rightarrow \pi+\Delta$ contribution. The amplitude is also decomposed into three terms as

$$f_\Delta^a = i\epsilon_{abc} \tau^b f_\Delta^{a-} + T^a f_\Delta^{(0)} + T_{ab} f_\Delta^{a+}, \quad (4.1)$$

TABLE I. Calculated spin polarizabilities of the nucleon in the large N_c baryon model. For a comparison those in HBChPT are also shown. Parameters are taken to be empirical ones, except for the $N\Delta$ transition parameters predicted in the soliton model. In the result of the large N_c model E , M , and I denote the contributions of the electric, magnetic, and interference parts, respectively, and the values at the narrow-width limit of the Δ particle are given in the parentheses. For the results of HBChPT the numbers in the parentheses are the values with the old estimation of the $\pi N\Delta$ and $\gamma N\Delta$ couplings. All values are in units of 10^{-4} fm^4 .

	Large N_c model						HBChPT [5]				
	$N\pi$ channel			$\Delta\pi$ channel			Sum.	$N\pi$ loop	Δ pole	$\Delta\pi$ loop	Sum.
	E	M	I	E	M	I					
γ_1	5.1	0.0	0.0	-0.4	0.0	0.0	4.7	4.56	0	-0.21	4.35
										(-0.4)	(4.1)
γ_2	2.5	-2.5	-0.1	-0.4	0.1	0.5	0.1	2.28	-2.40	-0.23	-0.35
		(-4.0)	(0.0)				(-1.3)		(-4.0)	(-0.5)	(-2.2)
γ_3	1.3	0.0	0.0	-0.2	0.0	0.0	1.1	1.14	0	-0.12	1.02
										(-0.2)	(0.9)
γ_4	-1.3	2.5	1.2	0.2	-0.1	-0.1	2.5	-1.14	2.40	0.12	1.38
		(4.0)	(0.0)				(2.8)		(4.0)	(0.2)	(3.1)
γ_0	5.1	-2.5	-2.4	-0.4	0.1	-0.3	-0.4	4.5	-2.4	-0.2	2.0
		(-4.0)	(0.0)				(0.5)		(-4.0)	(-0.4)	(0.1)

where T^a is the transition isospin matrix from N to Δ , and $T_{N\Delta}^+ = T_{\Delta N}^+ \tau^3 + \frac{1}{2} T_{\Delta\Delta}^+ T^a$. The electric part is obtained by replacing σ and $G_{NN\pi}$ in Eq. (2.5) by the transition spin operator $S_{\Delta N}$ and $G_{\Delta N\pi}$, respectively. The magnetic part is given by

$$f_{\Delta,m}^{\Delta,\sigma} = \left(\frac{eG_{\Delta N\pi}\mu_V}{16\pi M^2} \right) \left\{ - \frac{(S_{\Delta N} \cdot q)(\sigma \cdot s)}{\omega} - \frac{4}{5} \frac{(S_{\Delta\Delta} \cdot q)(S_{\Delta N} \cdot s)}{\omega_q} + 2 \frac{(S_{\Delta N} \cdot s)(\sigma \cdot q)}{\omega_q} - \frac{1}{5} \frac{(S_{\Delta\Delta} \cdot s)(S_{\Delta N} \cdot q)}{\omega} \right\},$$

$$f_{\Delta,m}^{\Delta,\pi} = \left(\frac{eG_{\Delta N\pi}\mu_V}{16\pi M^2} \right) \left\{ - \frac{(S_{\Delta N} \cdot q)(\sigma \cdot s)}{\omega} - \frac{1}{5} \frac{(S_{\Delta\Delta} \cdot q)(S_{\Delta N} \cdot s)}{\omega_q} + \frac{(S_{\Delta N} \cdot s)(\sigma \cdot q)}{\omega_q} + \frac{1}{5} \frac{(S_{\Delta\Delta} \cdot s)(S_{\Delta N} \cdot q)}{\omega} \right\}, \quad (4.2)$$

where $S_{\Delta\Delta}$ is the spin matrix for the Δ state, and ω_q is the energy of pion. The above amplitudes are also finite at infinite energy owing to the cancellation between the N and Δ pole terms. The results are as follows. The electric part is given by

$$\gamma_1^{\Delta,\sigma} = - \frac{e^2 G_{\Delta N\pi}^2}{864\pi^3 M^2} \left[\frac{\Delta^2 + 2m_\pi^2}{(\Delta^2 - m_\pi^2)^2} - \frac{3m_\pi^2 \Delta \ln R}{(\Delta^2 - m_\pi^2)^{3/2}} \right],$$

$$\gamma_2^{\Delta,\sigma} = 2\gamma_3^{\Delta,\sigma} = -2\gamma_4^{\Delta,\sigma} = - \frac{e^2 G_{\Delta N\pi}^2}{864\pi^3 M^2} \left[\frac{1}{\Delta^2 - m_\pi^2} - \frac{\Delta \ln R}{(\Delta^2 - m_\pi^2)^{3/2}} \right], \quad (4.3)$$

with $R = \Delta/m_\pi + \sqrt{\Delta^2/m_\pi^2 - 1}$. The results are the same as the results of the $\Delta\pi$ loops in HBChPT. For the magnetic terms we obtain $\gamma_1^{\Delta,\pi} = \gamma_3^{\Delta,\pi} = 0$, and

$$\gamma_2^{\Delta,\pi} = -\gamma_4^{\Delta,\pi} = - \frac{e^2 G_{\Delta N\pi}^2 \mu_V^2 m_\pi^3}{432\pi^3 M^4 \Delta^3} \left[\frac{\Delta(24m_\pi^4 - 20m_\pi^2 \Delta^2 - \Delta^4)}{6m_\pi^3 (\Delta^2 - m_\pi^2)} + 2\pi + \frac{(8m_\pi^4 - 12m_\pi^2 \Delta^2 + 3\Delta^4) \ln R}{2m_\pi (\Delta^2 - m_\pi^2)^{3/2}} \right], \quad (4.4)$$

The interference part yields $\gamma_1^{\Delta,\sigma} = \gamma_3^{\Delta,\sigma} = 0$, and

$$\gamma_2^{\Delta,\sigma} = \frac{e^2 G_{\Delta N\pi}^2 \mu_V \Delta}{72\pi^3 M^3} \int_{\omega_{th}}^{\infty} \frac{d\omega}{\omega^3} \left[\frac{1-I(v)}{2b} + \frac{1}{b^2} \left(\frac{v^2}{3} - \frac{1-I(v)}{2} \right) \right],$$

$$\gamma_4^{\Delta,\sigma} = - \frac{e^2 G_{\Delta N\pi}^2 \mu_V \Delta}{144\pi^3 M^3} \int_{\omega_{th}}^{\infty} \frac{d\omega}{\omega^3} \frac{1-I(v)}{2b}, \quad (4.5)$$

where $b = \omega/\omega_q$ with ω_q the energy of pion. The magnetic and interference parts in Eqs. (4.4) and (4.5) are not taken into account in HBChPT.

V. RESULTS AND DISCUSSION

Numerical results of the polarizabilities calculated by means of the dispersion relations are given in Table I, where empirical values of the constants in the formulas are used in order to compare the results with those by HBChPT: namely, $f_\pi = 93 \text{ MeV}$, $M = 939 \text{ MeV}$, $\Delta = 293 \text{ MeV}$, $G_{\pi NN} = 13.5$, and $m_\pi = 138 \text{ MeV}$, provided that the relative sizes of $G_{\Delta N\pi}$ and $\mu_{\Delta N}$ are taken so as to satisfy the large N_c consistency condition. The results of HBChPT [5] are also given in the table. In the results of HBChPT we give two cases for the Δ pole and $\Delta\pi$ -loop terms: the upper ones are obtained using the $\pi N\Delta$ and $\gamma N\Delta$ coupling constants determined by the "small scale expansion" itself, while the lower in the parentheses are by a tree-level relativistic analysis.

We note that, although the electric part of the polarizabilities is the same as the $N\pi$ and $\Delta\pi$ loops in HBChPT, the numerical values are slightly different, because we did not use the Goldberger-Treiman relation. For the $\Delta\pi$ loops the values in the parentheses are corresponding to the electric part for the $\Delta\pi$ channel. The results of the magnetic part of the $N\pi$ channel with the narrow-width limit shown in the parentheses, are the same as those of the Δ poles in HBChPT. The finite-width effect of the Δ particle reduces the magnetic contribution in the same as for the magnetic polarizability β [7]. In HBChPT the numerical results with the parameters which are determined by the "small scale expansion" are similar to the ones with the finite width.

As shown in Sec. III, no interference part of the electric and magnetic amplitudes is calculated in HBChPT, because these terms are of higher orders. We see that the interference part contributes to γ_2 and γ_4 , and that their values are small in γ_2 , but considerably large in γ_4 . For the forward spin polarizability γ_0 the contribution of the magnetic part becomes smaller by the effect of the finite width of the Δ state, but that of the interference part becomes large; as a result, the sum of them is nearly the same as that at the narrow-width limit of the Δ state.

The electric part of the $\Delta\pi$ channel is rather small in agreement with the result for the $\Delta\pi$ loops in HBChPT. The magnetic and the interference parts in the $\Delta\pi$ channel are almost negligible small. It is expected that the contributions of the $\Delta\pi$ channel are small compared with those of the $N\pi$ channel because of the factor ω^4 in the denominator of the dispersion relation. We infer that the effect of the higher resonances other than the Δ state is very small.

The anomalous part is also calculated within the chiral soliton model, which turns out to be the same form as the conventional one [15] and given as follows:

$$\gamma_1^{\text{anom}} = -2\gamma_3^{\text{anom}} = 2\gamma_4^{\text{anom}} = - \frac{e^2 G_{NN\pi}}{16\pi^3 M f_\pi m_\pi^2} \tau_3, \quad (5.1)$$

and $\gamma_2^{\text{anom}} = 0$. The numerical values are

$$\gamma_1^{\text{anom}} = -2\gamma_3^{\text{anom}} = 2\gamma_4^{\text{anom}} = -22.8\tau_3 \quad (5.2)$$

in units of 10^{-4} fm^4 for the parameters.

In Table II we show the calculated results of the spin

TABLE II. Spin polarizabilities of the nucleon in the large N_c baryon model compared with the results in HBChPT and of the multipole analysis. In the parentheses the values at the narrow-width limit of the Δ particle are given in the former one. All values are in unit of 10^{-4} fm^4 .

	Large N_c model	HBChPT [5]	Multipole analysis			
			HDT [10]		SAID [11]	
			p	n	p	n
γ_1	4.7	4.4	5.1	6.1	3.1	6.3
γ_2	0.1	-0.3	-1.1	-0.8	-0.8	-0.9
	(-1.3)					
γ_3	1.1	1.1	-0.6	-0.6	0.3	-0.7
γ_4	2.5	1.3	3.4	3.4	2.7	3.8
	(2.8)					
γ_0	-0.1	2.0	-0.6	-0.2	-1.5	-0.4
	(0.5)					

polarizabilities and compare those with the results of HBChPT [5] and of the multipole analysis, where HDT and SAID refer to [10] and [11], respectively. We see good agreement with the results of HBChPT, but the value of γ_4 is large compared with that of HBChPT, and seems to be close to the results of the multipole analysis. This is due to the effect of the interference part between the electric and magnetic amplitudes. As a result, the forward spin polarizability γ_0 is also close to those of the multipole analysis. We cannot evaluate the proton and neutron difference, since we have discarded the amplitude $f^{(0)}$ as it is of higher orders.

In conclusion we have calculated the spin polarizabilities of the nucleon, where the dispersion relation was used with the imaginary part of the Compton scattering amplitudes constructed from the pion photoproduction amplitudes through the unitarity condition. The form of these amplitudes is model independent, but we imply the large N_c consistency condition on the coupling constants. It may be said, therefore, that our approach is a large N_c chiral perturbation theory. We have shown that the electric and magnetic parts agree with the results of the $N\pi$ loops, Δ poles, and $\Delta\pi$ loops calculated in HBChPT. The numerical results are also similar with each other and qualitatively agree with those of the multipole analysis. The interference term of the electric and magnetic amplitudes in the $N\pi$ channel, which is not considered in HBChPT as higher orders, is, however, large especially in γ_4 , and the resulting values of the polarizabilities are closer to those of the multipole analysis. The next-to-leading-order calculation with the $f^{(0)}$ amplitudes is necessary to evaluate the difference between the proton and neutron.

APPENDIX: DISPERSION RELATION FOR $N\pi$ ELECTRIC PART

The relevant structure function of the forward scattering amplitude, $A_5(\omega, \theta=0)$, which is equal to $-A_6(\omega, \theta=0)$, in HBChPT [15] is given by two terms as follows:

$$A_{51}(\omega, 0) = -\frac{e^2 g_A^2}{32\pi^3 f_\pi^2 m_\pi} \int_0^1 dx \frac{(1-x)^2 \sin^{-1} ux}{\sqrt{1-u^2 x^2}} \quad (\text{A1})$$

and

$$A_{52}(\omega, 0) = \frac{e^2 g_A^2}{32\pi^3 f_\pi^2 m_\pi} u^2 \int_0^1 dx \frac{x(1-x)^3}{3(1-u^2 x^2)^{3/2}} (\sin^{-1} ux + xu\sqrt{1-u^2 x^2}), \quad (\text{A2})$$

where $u = \omega/m_\pi$, and $1/(4\pi)$ is multiplied so as to fit our definition of A_i . The integration over x can be carried out and leads to

$$A_{51}(\omega, 0) = -\frac{e^2 g_A^2}{32\pi^3 f_\pi^2 m_\pi} \left(\frac{u}{12} + \frac{u^3}{90} + \mathcal{O}(u^5) \right) \quad (\text{A3})$$

and

$$A_{52}(\omega, 0) = \frac{e^2 g_A^2}{32\pi^3 f_\pi^2 m_\pi} \left(\frac{u^3}{90} + \mathcal{O}(u^5) \right), \quad (\text{A4})$$

where the u^3 and the higher order terms are the same except for the signs in both functions. The sum is exactly given by

$$A_5(\omega, 0) = A_{51}(\omega, 0) + A_{52}(\omega, 0) = -\frac{e^2 g_A^2}{32\pi^3 f_\pi^2 m_\pi} \frac{u}{12}. \quad (\text{A5})$$

This shows that there is no branch cut on the real axis in the complex ω plane; namely, $\text{Im } A_5(\omega, 0) = 0$, but each of $A_{51}(\omega, 0)$ and $A_{52}(\omega, 0)$ has the same imaginary part except for the signs. The analytic continuation to $\omega > m_\pi$ gives

$$\begin{aligned} \text{Im } A_{52}(\omega, 0) &= -\text{Im } A_{51}(\omega, 0) \\ &= \frac{e^2 g_A^2}{32\pi^3 f_\pi^2 m_\pi} \frac{\pi}{8u^3} \left(-6u\sqrt{u^2-1} \right. \\ &\quad \left. + (1+2u^2)\ln u + \sqrt{\frac{u^2-1}{u-\sqrt{u^2-1}}} \right). \end{aligned} \quad (\text{A6})$$

The fact that $\text{Im } A_5(\omega, 0) = 0$ is the same as the situation that the imaginary part of $A_5(\omega, 0)$ vanishes after the redistribution of the last term of Eq. (2.6) as we encountered in Sec. II. Indeed, we can see with use of the Goldberger-Treiman relation that Eq. (A6) is equal to the last term in Eq. (2.6) multiplied by ω^2 coming from the identity, Eq. (2.9).

Now, let us consider the dispersion relations for $A_{51}(\omega, 0)$ and $A_{52}(\omega, 0)$. We have for $A_{51}(\omega, 0)$

$$\begin{aligned} \text{Re } \frac{A_{51}(\omega, 0)}{\omega} \Big|_{\omega=0} &= \frac{2}{\pi} \text{P} \int_{m_\pi}^{\omega_{\text{max}}} d\omega' \frac{\text{Im } A_{51}(\omega', 0)}{\omega'^2} \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \text{Im} \int_C d\omega' \frac{A_{51}(\omega', 0)}{\omega'^2}, \end{aligned} \quad (\text{A7})$$

where the second term denotes the semicircle integral with the radius ω_{max} . The same is valid for $A_{52}(\omega, 0)$. From Eq. (A3) the left-hand side (LHS) in Eq. (A7) is

$$-\frac{e^2 g_A^2}{32\pi^3 f_\pi^2} \frac{1}{12m_\pi^2}.$$

In the right-hand side (RHS) the dispersion integral with the imaginary part in Eq. (A6) is found to be equal to the LHS with the vanishing semicircle integral. On the other hand, for the dispersion relation of $A_{52}(\omega, 0)$, the fact that the LHS is zero is realized as the cancellation between the second (semicircle) integral and the first conventional one in the RHS. Therefore, if we consider the dispersion relation of the sum $A_5(\omega, 0)$ with $\text{Im } A_5(\omega, 0) = 0$, it is necessary to calculate the semicircle integral, which is generally very difficult. However, when we notice the fact that $\text{Re } A_{52}(\omega, 0)$ is of $\mathcal{O}(\omega^3)$ and higher at low energies, as seen in Eq. (A4), the amplitude $A_{52}(\omega, 0)$ does not participate in determining the coefficient of the amplitude at ω^3 . Thus, we are allowed to consider only the conventional dispersion relation in Eq. (A7), where the semicircle integral vanishes because of its asymptotic behavior. This is in complete agreement with the prescription we adopt in Sec. II.

- [1] S. Ragusa, Phys. Rev. D **47**, 3757 (1993); **49**, 3157 (1994).
 [2] V. Bernard, N. Kaiser, J. Kambor, and Ulf-G. Meissner, Nucl. Phys. **B388**, 315 (1992).
 [3] A. M. Sandorfi, C. S. Whisnant, and M. Khandaker, Phys. Rev. D **50**, R6681 (1994).
 [4] T. R. Hemmert, B. R. Holstein, and J. Kambor, Phys. Rev. D **55**, 5598 (1997).
 [5] T. R. Hemmert, B. R. Holstein, J. Kambor, and G. Knöchlein, Phys. Rev. D **57**, 5746 (1998).
 [6] S. Saito and M. Uehara, Phys. Rev. D **51**, 6059 (1995).
 [7] Y. Tanushi, Y. Nakahara, S. Saito, and M. Uehara, Phys. Lett. B **425**, 6 (1998).
 [8] R. Dashen, E. Jenkins, and A. V. Manohar, Phys. Rev. D **49**, 4714 (1994); E. Jenkins and A. V. Manohar, Phys. Lett. B **335**, 452 (1994).
 [9] E. Jenkins, hep-ph/9803349.
 [10] D. Drechsel, G. Krein, and O. Hanstein, Phys. Lett. B **420**, 248 (1998).
 [11] D. Babusci, G. Giordano, A. I. L'vov, G. Matone, and A. M. Nathan, Phys. Rev. C **58**, 1013 (1998).
 [12] F. E. Low, Phys. Rev. **96**, 1428 (1954).
 [13] A. I. L'vov, nucl-th/9810032.
 [14] G. S. Adkins, C. R. Nappi, and E. Witten, Nucl. Phys. **B288**, 552 (1983); G. S. Adkins and C. R. Nappi, *ibid.* **B233**, 109 (1984).
 [15] V. Bernard, N. Kaiser, and Ulf-G. Meissner, Int. J. Mod. Phys. E **4**, 193 (1995).

One-loop calculations of hyperon polarizabilities under the large N_c consistency condition

Y. Tanushi* and S. Saito†

Department of Physics, Nagoya University, Nagoya 464-8602, Japan

M. Uehara‡

Department of Physics, Saga University, Saga 840-8502, Japan

(February 2, 2000)

The spin-averaged electromagnetic polarizabilities of the hyperons Λ and Σ are calculated within the one-loop approximation by use of the dispersion theory. The photon and meson couplings to hyperons are determined so as to satisfy the large N_c consistency condition. It is shown that in order for the large N_c consistency condition to hold exotic hyperon states such as Σ^{**} with $I = 2$ and $J = 3/2$ are required in the calculation of the magnetic polarizability of the Σ state.

I. INTRODUCTION

Beyond the spin averaged electromagnetic polarizabilities of the nucleon, the spin polarizabilities [1] have recently attracted theoretical attention, because these quantities serve as a crucial test of the low energy effective theories. Using the heavy baryon chiral perturbation theories (HBChPT) [2–4], the spin polarizabilities have been calculated and compared with the multipole analyses [5–7]. The spin polarizabilities are also calculated by using the dispersion theory, where the imaginary parts are given by the Born terms of the one pion photoproduction amplitude [8,9]. The dispersion theory with the Born terms is a method to calculate loop diagrams [10–12], and it reproduces almost the same results by HBChPT up to $O(p^3)$ or $O(\epsilon^3)$, but it includes partially higher chiral order diagrams than $O(p^3)$; for example Ref. [9] gives the forward spin polarizability $\gamma_0 = -0.4 \times 10^{-4} \text{ fm}^4$, while HBChPT up to $O(\epsilon^3)$ does $\gamma_0 = 2.0 \times 10^{-4} \text{ fm}^4$ [4].

As to hyperons the spin-averaged polarizabilities have so far been studied in the quark model [13], the $SU(3)$ extension of the HBChPT results [14] and the bound-state soliton model [15], but the study of hyperon polarizabilities is quite insufficient, because the hyperon polarizabilities involve much more physical contents than that of the nucleon. Further, since measurements of $\gamma\Sigma$ interactions are planned [16], detailed and comprehensive studies will be required.

In this paper we calculate the spin-averaged polarizabilities of the Λ and Σ hyperons within the one-loop approximation by applying the dispersion theory to the Compton scattering amplitude, where the imaginary parts of the amplitudes are given by the Born terms of the pion and kaon photoproduction amplitudes. The coupling constants of the photon and meson to the nucleon and hyperons in the meson

*E-mail: tanushi@nuc-th.phys.nagoya-u.ac.jp

†E-mail: saito@nuc-th.phys.nagoya-u.ac.jp

‡E-mail: ueharam@cc.saga-u.ac.jp

photoproduction amplitudes are given by the spin-flavor symmetry which leads to the large N_c consistency condition. We refer sometimes to the bound state approach to strangeness in the chiral soliton model [17,18], because it is an explicit model realizing the spin-flavor symmetry for baryons in large N_c QCD [19,20], and the results are shared with any large N_c baryon theories at leading order in the $1/N_c$ expansion. We call the model as the bound kaon-soliton model(BKSM) hereafter.

The Born terms in the pion and kaon photoproduction amplitudes with the electric coupling of the photon, which we call the electric Born terms, contribute to the electric and magnetic polarizabilities. The polarizabilities by the pion electric Born terms are of $O(N_c)$ in the $1/N_c$ expansion, while those by the kaon electric Born terms are of $O(N_c^0)$.

The Born terms through the magnetic coupling of the photon, which we call the magnetic Born terms, also contribute to the magnetic polarizabilities. The magnetic Born terms can interfere with the electric Born ones through the unitarity relation and contribute also to the magnetic polarizabilities. The magnetic Born term is written as the sum of the spin 1/2 and 3/2 baryon poles, each of which is of $O(N_c^{3/2})$. The large N_c consistency condition leads to the cancellation among the pole terms: The whole amplitude reduces to $O(N_c^{1/2})$, and as a result the amplitude is finite at infinite energies. We show that in order for the large N_c consistency condition to work in the pion production process off the Σ target the exotic strange baryon state denoted as Σ^{**} with the isospin 2 and spin 3/2, has to contribute to the amplitudes. Similarly, the condition requires two exotic states, Ξ_1^{**} and Ξ_3^{**} with isospin 3/2 and spin 1/2 and 3/2, respectively, for the kaon production amplitudes. The necessity of such exotic states is common to the large N_c baryon theories in order for the unitarity relations not to violate a definite N_c dependence of amplitudes, that is of $O(N_c^{1-n/2})$ for n -meson reaction amplitudes [19,20]. The contributions from the magnetic Born terms are of the same order as those from the electric ones in the $1/N_c$ expansion, but the magnetic Born contributions partially go beyond the calculation of $O(p^3)$ chiral order diagrams in HBChPT.

This paper is organized as follows: We discuss the pion and kaon electric Born contributions in the next section. The pion and kaon magnetic Born terms are given in Sec. III, and it is also discussed how the large N_c consistency condition works with the exotic states. The conclusions and discussion are given in the last section.

II. CONTRIBUTIONS FROM THE PION AND KAON ELECTRIC BORN TERMS

As stated in Introduction we use the dispersion integrals to compute the one-loop diagrams in the Compton scattering amplitudes, the imaginary parts of which are given through the electric Born terms.

A. Pion loop contributions

We start with the pion photoproduction amplitude, $T_a = \varepsilon_\mu T_a^{\mu}$ for $\gamma + Y \rightarrow \pi_a + Y'$ with $Y(Y')$ being the initial(final) hyperon with the strangeness $S = -1$, which is decomposed as

$$T_a = t_a^{(-)} T^{(-)} + t_a^{(+)} T^{(+)} + t_a^{(0)} T^{(0)} + t_a^{(\delta)} T^{(\delta)}, \quad (2.1)$$

where each amplitude is a function of the pion momentum q and photon k , and the isospin factors are as follows: For $I = 1$ channel such as $\gamma\Sigma \rightarrow \pi\Sigma$, $t_a^{(-)} = i\varepsilon_{a3b} I_b$, $t_b^{(+)} = \{I_a, I_3\}$, $t_a^{(0)} = I_a$, $t_a^{(\delta)} = \delta_{a3} I$ with I_b being the conventional isospin matrix, and I the 3×3 unit matrix, and for $\gamma\Lambda \rightarrow \pi\Sigma$, $t_a^{(-)} = i\varepsilon_{a3b} T_b^{\Sigma\Lambda}$ and $t_a^{(+)} = 0$ with $(T_b^{\Sigma\Lambda})_{m0} = \delta_{mb}$.

The electric Born term of $O(N_c^{1/2})$, that is of leading order in the $1/N_c$ expansion, is written model-independently as

$$T_E^{(-)} = \left(\frac{ef_{Y'Y\pi}}{4\pi m_\pi} \right) \left[i\sigma \cdot \varepsilon + 2i\sigma \cdot t \frac{\varepsilon \cdot q}{m_\pi^2 - (q-k)^2} \right], \quad (2.2)$$

where $t = k - q$, and ε is the polarization vector. Since other electric Born terms $T_E^{(+,0)}$ are of $O(N_c^{-1/2})$ and break the unitarity limit at high energy, we ignore them hereafter [11].

The pseudovector pion coupling constants to the hyperons $f_{Y'Y\pi}$ are given as

$$\frac{1}{m_\pi} \frac{f_{Y'Y\pi}}{\sqrt{4\pi}} = \Lambda_{Y'Y} G_\pi \quad (2.3)$$

in the large N_c baryon model and in the BKSM [21], where the overall constant G_π is given empirically in the former and given in terms of the chiral angle $F(r)$ of the Skyrme model in the latter. The factor $\Lambda_{Y'Y}$ satisfies the following spin-flavor symmetry relation¹:

$$\Lambda_{\Lambda\Sigma} = -\Lambda_{\Sigma\Sigma} = -\frac{1}{\sqrt{3}}\Lambda_{\Sigma\Lambda} = -\frac{2}{\sqrt{3}}\Lambda_{\Sigma\pi} = -\Lambda_{NN} = \frac{1}{3}. \quad (2.4)$$

This relation will play an important role for the large N_c consistency condition in the magnetic Born terms. To fix the pseudovector coupling constant we adopt $|f_{\Sigma\Lambda\pi}|/\sqrt{4\pi} = 0.22$ [21], which is close to the empirical value 0.20 ± 0.01 [22], and other coupling constants are obtained according to the Λ factor in the above.

According to Ref. [10–12] the forward dispersion relation with use of the electric Born term is known to give the electromagnetic polarizabilities as follows:

$$\left(\frac{\alpha_Y(Y')}{\beta_Y^E(Y')} \right) = A_{Y'} \left(\frac{ef_{Y'Y\pi}}{4\pi} \right)^2 \frac{1}{24m_\pi^3} \left(\frac{f(d)}{g(d)} \right), \quad (2.5)$$

¹The sign of $\Lambda_{\Sigma\Sigma}$ and $\Lambda_{\Sigma\pi}$ is different from those in [21], because the sign of the isospin matrix for $I = 1$ is changed to the usual one, here.

where the factor $A_{Y'}$ is the multiplicity coming from the sum over a and the spin components. The functions $f(d)$ and $g(d)$ are defined as for $d > -1$ and $d \neq 1$ with $d = (M_{Y'} - M_Y)/m_\pi$

$$\begin{pmatrix} f(d) \\ g(d) \end{pmatrix} = \frac{2}{\pi} \begin{pmatrix} d - 2A(d) + \frac{9(d + 2A(d))}{(d^2 - 1)} \\ -(d + 2A(d)) \end{pmatrix}, \quad (2.6)$$

where

$$A(d) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1-d^2}} \left[\tan^{-1} \frac{d}{\sqrt{1-d^2}} - \tan^{-1} \frac{1+d}{\sqrt{1-d^2}} \right] & (|d| < 1) \\ -\frac{1}{2\sqrt{d^2-1}} \log(d + \sqrt{d^2-1}) & (d > 1) \end{cases} \quad (2.7)$$

and for $d = 1$ we have $f(d) = 16/\pi$, $g(d) = 0$. In the above $\Sigma^*(1385)$ is also included in Y' . We use the empirical mass spectrum for the hyperons, the nucleon and Δ throughout the paper. The calculated results of the electromagnetic polarizabilities from the pion electric Born terms are tabulated in Table I.

We observe from Table I that the electric polarizability of the hyperons are in order

$$\alpha_{\Sigma^\pm} > \alpha_\Lambda > \alpha_{\Sigma^0}. \quad (2.8)$$

Due to the large coupling constant $f_{\Sigma^*\Lambda\pi}$, the contribution from Σ^* to the Λ electric polarizability is rather large, similar to the nucleon case. We note that the effect by the mass difference among the hyperons is rather significant as seen in the difference between the $\Lambda\pi$ contribution in the Σ target and $\Sigma\pi$ in the Λ target, where the former is exothermal and the latter endothermal. The difference between α_{Σ^+} and α_{Σ^-} cannot be calculated within this approximation.

B. Kaon loop contributions

We obtain the kaon electric Born term of $O(N_c^0)$ at leading order in the $1/N_c$ expansion for $\gamma + Y \rightarrow \bar{K}_\alpha(K_\alpha) + B$ with B being N and Δ (Ξ and Ξ^*) by replacing m_π by m_K and the coupling constant $f_{Y'Y\pi}$ by f_{YBK} in Eq.(2.2).

The P-wave kaon coupling constant f_{YBK} is of $O(N_c^0)$ and given as

$$\frac{1}{m_K} \frac{f_{YBK}}{\sqrt{4\pi}} = \Lambda_{YBK} G_K, \quad (2.9)$$

and we fix the pseudovector kaon coupling constant of $\Lambda p K^-$ as $f_{\Lambda p K^-}/\sqrt{4\pi} = 0.92$ [21], while the empirical one is 0.89 ± 0.10 . The value 0.92 in the kaon mass scale as in Eq.(2.9) is reduced to 0.26 in the case of the pion mass scale, that is of the same order as the pion coupling constant. The large N_c relation of Λ_{YBK} for the charged kaons is given as

$$\Lambda_{\Lambda p K^-} = \sqrt{3}\Lambda_{\Lambda \Xi^- K^+} = -\frac{1}{2}\Lambda_{\Lambda \Xi^+ K^+} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad (2.10)$$

for Λ vertices, and

$$\Lambda_{\Sigma^- n K^-} = -\frac{1}{\sqrt{3}}\Lambda_{\Sigma^- \Delta^0 K^-} = -\frac{\sqrt{3}}{5}\Lambda_{\Sigma^- \Xi^0 K^-} = -\frac{1}{2}\Lambda_{\Sigma^+ \Xi^0 K^+} = -\frac{1}{3} \quad (2.11)$$

for Σ vertices.

The kaon contributions are given as

$$\begin{pmatrix} \alpha_Y \\ \beta_Y^E \end{pmatrix} = \sum_B A_B \left(\frac{ef_{YBK}}{4\pi} \right)^2 \frac{1}{24m_K^3} \begin{pmatrix} f(d) \\ g(d) \end{pmatrix}, \quad (2.12)$$

where A_B is the same multiplicity as $A_{Y'}$ in the pion production, and $d = (M_Y - M_B)/m_K$. Note that the factor $(m_\pi/m_K) = 0.279$ reduces the size of the kaon contributions. The numerical results from the kaon electric Born terms are tabulated in Table II.

The kaon-loop contributions to polarizabilities are in order

$$\alpha_\Lambda > \alpha_{\Sigma^+} > \alpha_{\Sigma^0} > \alpha_{\Sigma^-}. \quad (2.13)$$

We see that the contributions from the decuplet baryons in the final states are of the same order as those from the octet baryons.

The kaon contribution leads to the result $\alpha_{\Sigma^+} > \alpha_{\Sigma^-}$, that is of the same sign in Ref. [14]. At the same time the kaon contribution to the nucleon makes the proton polarizabilities larger than the neutron ones, but it does not agree with the experimental tendency: $\alpha_n > \alpha_p$.

III. MAGNETIC BORN TERMS AND THE LARGE N_c CONSISTENCY CONDITION

The spatial part of the electromagnetic current, \mathbf{J} , contributes to the magnetic Born term, where

$$\langle Y'(p') | \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{J} | Y(p) \rangle = \langle Y' | i\mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\mu} | Y \rangle \quad (3.1)$$

with $\mathbf{s} = (\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \times \boldsymbol{\varepsilon}$ and $\boldsymbol{\mu}$ being the magnetic moment operator. The magnetic moment is decomposed as

$$\langle Y' | \boldsymbol{\mu} | Y \rangle = \mathbf{S} \frac{e}{2M_N} (\mu_{Y'Y}^V T_3 + \mu_{Y'Y}^S), \quad (3.2)$$

where $\mathbf{S}(T_3)$ is the transition spin (isospin) matrix, and $\mu_{Y'Y}^V$ ($\mu_{Y'Y}^S$) is the isovector (isoscalar) part of the hyperon magnetic moment in units of Bohr magneton. Since the isovector part, $\mu^V e/2M_N$, is of $O(N_c)$, while the isoscalar part is of $O(N_c^0)$, the leading contributions come from the isovector part of the magnetic moments. We further note that $\mu_{Y'Y}^V$ having the same strangeness S is proportional to the factor $\Lambda_{Y'Y}$ of Eq.(2.4) [19,23,24].

The magnetic Born term for a process $\gamma + Y \rightarrow \pi^a + Y'$ is written as

$$T_M^a = \sum_{Y''} \left\{ \left(\frac{ef_{Y'Y''\pi}}{8\pi m_\pi M_N} \right) \mu_{Y''Y}^V \frac{(\mathbf{S}' \cdot \mathbf{q})^\dagger (\mathbf{S} \cdot \mathbf{s}) T_a^\dagger T_3}{M_{Y''} - M_{Y'} - \omega_q} + \left(\frac{ef_{Y''Y\pi}}{8\pi m_\pi M_N} \right) \mu_{Y'Y''}^S \frac{(\mathbf{S}' \cdot \mathbf{s})^\dagger (\mathbf{S} \cdot \mathbf{q}) T_3^\dagger T_a}{M_{Y''} - M_Y + \omega_q} \right\} \quad (3.3)$$

at leading order of the $O(1/N_c)$ expansion, where $S'(T'_a)$ is the transition spin(isospin) matrix for the $Y'' \rightarrow Y'$ vertex, while those without a prime for the $Y \rightarrow Y''$ vertex. The magnetic Born terms are decomposed as

$$T_M^a = \sum_{\ell=1,3} \sum_{n=\pm, \delta} \mathcal{P}_\ell(\hat{q}, \hat{s}) t_a^{(n)} T_\ell^{(n)}(\omega_q), \quad (3.4)$$

where $\mathcal{P}_1(\mathcal{P}_3)$ is the projection operator for the P-wave pion production amplitude with total angular momentum $j = 1/2(3/2)$:

$$\mathcal{P}_1(\hat{q}, \hat{s}) = (\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{q})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{s}), \quad \text{and} \quad \mathcal{P}_3(\hat{q}, \hat{s}) = 3(\hat{q} \cdot \hat{s}) - (\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{q})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{s}) \quad (3.5)$$

with $\hat{q} = \mathbf{q}/q$ and $\hat{s} = \mathbf{s}/k$ for Y' with spin 1/2. Similar expressions are written for Y' with spin 3/2. The final states are restricted to the states with an octet or decuplet baryon accompanied with a pion or kaon.

We notice here that in order for the large N_c consistency condition to hold the exotic hyperon states are required for the Σ target. Due to the consistency condition the magnetic Born terms keep being of $O(N_c^{1/2})$ and are convergent at infinite energies, as a result. So, we concentrate ourselves to the Σ target both for the pion and kaon magnetic Born terms in the following.

A. The pion magnetic Born terms

Here we discuss explicitly the magnetic Born terms of the process $\gamma + \Sigma \rightarrow \pi^a + \Sigma$. Using the mass abbreviation $\Delta_{Y'Y} = M_{Y'} - M_Y$, we write the non-exotic pole amplitudes with the Σ and Σ^* poles in this channel as

$$T_1^{(\pm)} = \left(\frac{ef_{\Sigma\Sigma\pi}}{8\pi m_\pi M_N} \right) \mu_\Sigma^V \left[-\frac{kq}{2\omega_q} \mp \frac{kq}{6\omega_q} \right] \pm \frac{1}{3} \left(\frac{ef_{\Sigma^*\Sigma\pi}}{8\pi m_\pi M_N} \right) \mu_{\Sigma^*}^V \left[\frac{2}{3} \frac{kq}{\Delta_{\Sigma^*\Sigma} + \omega_q} \right], \quad (3.6)$$

$$T_3^{(\pm)} = \left(\frac{ef_{\Sigma\Sigma\pi}}{8\pi m_\pi M_N} \right) \mu_\Sigma^V \left[\pm \frac{kq}{3\omega_q} \right] + \frac{1}{3} \left(\frac{ef_{\Sigma^*\Sigma\pi}}{8\pi m_\pi M_N} \right) \mu_{\Sigma^*}^V \left[\frac{1}{2} \frac{kq}{\Delta_{\Sigma^*\Sigma} - \omega_q} \pm \frac{1}{6} \frac{kq}{\Delta_{\Sigma^*\Sigma} + \omega_q} \right], \quad (3.7)$$

and those with the Λ pole are similarly written, but not shown explicitly. We note that each pole term is of $O(N_c^{3/2})$.

If we use the relation given by the Λ factors,

$$f_{\Sigma\Sigma\pi} \mu_\Sigma^V = \frac{4}{3} f_{\Sigma^*\Sigma\pi} \mu_{\Sigma^*}^V = f_{\Sigma\Lambda\pi} \mu_{\Sigma\Lambda}^V, \quad (3.8)$$

we see that the cancellation does not occur for the sums of the above amplitudes. Notice, however, that the $\Sigma + \pi$ channel can communicate with the $I = 2$ channel with strangeness -1 . The large N_c baryon theories and BKSM predict two such exotic baryons with spin 3/2 and 5/2, where the P-wave antikaon is bound around the soliton with isospin 2 in the latter model. In this channel we need the exotic state with $I = 2$ and spin 3/2 in order for the large N_c consistency condition to hold. (The exotic state with spin

5/2 cannot interact with P-wave $\pi\Sigma$ states.) We denote the exotic state with spin 3/2 as Σ^{**} . Including the exotic state, we can see that the cancellation occurs with the spin-flavor symmetry relation

$$f_{\Sigma^{**}\Sigma\pi} \mu_{\Sigma^{**}}^V = \frac{3}{2} f_{\Sigma^*\Lambda\pi} \mu_{\Sigma^*}^V = \frac{9}{2} f_{\Sigma\Sigma\pi} \mu_\Sigma^V = \frac{9}{2} f_{\Sigma\Lambda\pi} \mu_{\Sigma\Lambda}^V. \quad (3.9)$$

Indeed, BKSM gives the factor $\Lambda_{\Sigma^{**}\Sigma}$ as

$$\Lambda_{\Sigma^{**}\Sigma} = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (3.10)$$

that is consistent with the above condition for the cancellation, of course. This result is shared with the large N_c baryon theories.

We summarize the resultant Born terms as

$$T_1^{(-)} = \left(\frac{ef_{\Lambda\Sigma\pi}}{8\pi m_\pi M_N} \right) \mu_{\Sigma\Lambda}^V \cdot kq \left[-\frac{1}{6} \frac{\Delta_{\Sigma^*\Lambda}}{(\Delta_{\Sigma^*\Sigma} + \omega_q)(\Delta_{\Sigma\Lambda} - \omega_q)} - \frac{1}{3} \frac{\Delta_{\Sigma^{**}\Sigma}}{\omega_q(\Delta_{\Sigma^{**}\Sigma} + \omega_q)} - \frac{1}{2} \frac{(\Delta_{\Sigma^{**}\Sigma} - \Delta_{\Sigma\Lambda})}{(\Delta_{\Sigma\Lambda} + \omega_q)(\Delta_{\Sigma^{**}\Sigma} + \omega_q)} \right], \quad (3.11)$$

$$T_1^{(+)} = \left(\frac{ef_{\Lambda\Sigma\pi}}{8\pi m_\pi M_N} \right) \mu_{\Sigma\Lambda}^V \cdot kq \left[-\frac{1}{2} \frac{\Delta_{\Sigma\Lambda}}{\omega_q(\Delta_{\Sigma\Lambda} + \omega_q)} - \frac{1}{6} \frac{\Delta_{\Sigma^*\Sigma}}{\omega_q(\Delta_{\Sigma^*\Sigma} + \omega_q)} + \frac{1}{6} \frac{\Delta_{\Sigma^{**}\Lambda}}{(-\Delta_{\Sigma\Lambda} + \omega_q)(\Delta_{\Sigma^{**}\Sigma} + \omega_q)} \right], \quad (3.12)$$

$$T_1^{(\delta)} = \left(\frac{ef_{\Lambda\Sigma\pi}}{8\pi m_\pi M_N} \right) \mu_{\Sigma\Lambda}^V \cdot kq \left[-\frac{\Delta_{\Sigma^{**}\Sigma} - \Delta_{\Sigma\Lambda}}{(\Delta_{\Sigma\Lambda} + \omega_q)(\Delta_{\Sigma^{**}\Sigma} + \omega_q)} + \frac{1}{3} \frac{\Delta_{\Sigma^{**}\Lambda}}{(\Delta_{\Sigma\Lambda} - \omega_q)(\Delta_{\Sigma^{**}\Sigma} + \omega_q)} \right], \quad (3.13)$$

$$T_3^{(-)} = \left(\frac{ef_{\Lambda\Sigma\pi}}{8\pi m_\pi M_N} \right) \mu_{\Sigma\Lambda}^V \cdot kq \left[\frac{1}{4} \frac{\Delta_{\Sigma^*\Sigma}}{(\Delta_{\Sigma^*\Sigma}^2 - \omega_q^2 - i\Delta_{\Sigma^*\Sigma}\Gamma_{\Sigma^*})} - \frac{5}{4} \frac{\Delta_{\Sigma^{**}\Sigma}}{(\Delta_{\Sigma^{**}\Sigma}^2 - \omega_q^2 - i\Delta_{\Sigma^{**}\Sigma}\Gamma_{\Sigma^{**}})} - \frac{1}{3} \frac{\Delta_{\Sigma^{**}\Sigma}}{\omega_q(\Delta_{\Sigma^{**}\Sigma} + \omega_q)} - \frac{1}{6} \frac{\Delta_{\Sigma^{**}\Sigma}}{(\Delta_{\Sigma^*\Sigma} + \omega_q)(\Delta_{\Sigma^{**}\Sigma} + \omega_q)} - \frac{1}{3} \frac{\Delta_{\Sigma^{**}\Lambda}}{(-\Delta_{\Sigma\Lambda} + \omega_q)(\Delta_{\Sigma^{**}\Sigma} + \omega_q)} \right], \quad (3.14)$$

$$T_3^{(+)} = \left(\frac{ef_{\Lambda\Sigma\pi}}{8\pi m_\pi M_N} \right) \mu_{\Sigma\Lambda}^V \cdot kq \left[\frac{1}{4} \frac{\Delta_{\Sigma^*\Sigma}}{(\Delta_{\Sigma^*\Sigma}^2 - \omega_q^2 - i\Delta_{\Sigma^*\Sigma}\Gamma_{\Sigma^*})} - \frac{1}{4} \frac{\Delta_{\Sigma^{**}\Sigma}}{(\Delta_{\Sigma^{**}\Sigma}^2 - \omega_q^2 - i\Delta_{\Sigma^{**}\Sigma}\Gamma_{\Sigma^{**}})} + \frac{1}{3} \frac{\Delta_{\Sigma\Lambda}}{\omega_q(\Delta_{\Sigma\Lambda} - \omega_q)} - \frac{1}{12} \frac{\Delta_{\Sigma^{**}\Sigma}}{(\Delta_{\Sigma^*\Sigma} + \omega_q)(\Delta_{\Sigma^{**}\Sigma} + \omega_q)} \right], \quad (3.15)$$

$$T_3^{(\delta)} = \left(\frac{ef_{\Lambda\Sigma\pi}}{8\pi m_\pi M_N} \right) \mu_{\Sigma\Lambda}^V \cdot kq \left[\frac{2\Delta_{\Sigma^{**}\Sigma}}{\Delta_{\Sigma^{**}\Sigma}^2 - \omega_q^2 - i\Delta_{\Sigma^{**}\Sigma}\Gamma_{\Sigma^{**}}} - \frac{2}{3} \frac{\Delta_{\Sigma^{**}\Lambda}}{(\Delta_{\Sigma\Lambda} - \omega_q)(\Delta_{\Sigma^{**}\Sigma} + \omega_q)} \right]. \quad (3.16)$$

Since the mass differences of $O(N_c^{-1})$ appear in the numerators, the resultant amplitudes are reduced to $O(N_c^{1/2})$ and finite at high energies. We stress here that we have not introduced any vertex functions depending on the meson or photon momentum, because the vertex corrections go beyond the one-loop approximation. In this sense the exotic states play a role similar to a natural cutoff function without destroying the analytic structure of the one-loop amplitudes.

In the above we inserted the total width Γ_{Σ^*} and $\Gamma_{\Sigma^{**}}$ into the pure resonance terms of T_3 . The width Γ_{Σ^*} is given as

$$\Gamma_{\Sigma^*} = \frac{2}{3} \left(\frac{f_{\Sigma^*\Lambda\pi}^2}{4\pi} \right) \frac{q_\Lambda^3}{m_\pi^2} + \frac{4}{3} \left(\frac{f_{\Sigma^*\Sigma\pi}^2}{4\pi} \right) \frac{q_\Sigma^3}{m_\pi^2}, \quad (3.17)$$

where $q_\Lambda(q_\Sigma)$ is the pion momentum decaying into the channel $\Lambda(\Sigma) + \pi$. This form of the width is the same as that adopted in the previous works [9,12], which guarantees the narrow width limit. Numerical values for the widths including recoil are $\Gamma_{\Sigma^*}^{\Lambda\pi} = 44.8$ MeV and $\Gamma_{\Sigma^*}^{\Sigma\pi} = 4.7$ MeV. Similar form of the width of Σ^{**} is used, where Σ^{**} is supposed to decay only to $\Sigma\pi$ channel, because the Σ^{**} mass is not expected to be so higher than the $\Sigma^*\pi$ threshold as seen below. Then, we have $\Gamma_{\Sigma^*}^{\Sigma\pi} = 138$ MeV, but since $\Lambda + 2\pi$ channel is not taken into account, though it opens, the width of Σ^{**} would be underestimated.

Since all the isovector magnetic moments appearing in the amplitudes are for the hyperons with $S = -1$, we take the empirical value, $\mu_{\Sigma\Lambda}^V = -1.61$, to fix the magnetic coupling constants. The isoscalar magnetic moment can give pole terms of $O(N_c^{1/2})$, but they are not of leading order. Since the cancellation among the pole terms does not hold at non-leading order and then the unitarity bound is broken, we disregard them as in the case of the electric pion Born terms.

B. The kaon magnetic Born terms

Contrary to the pion photoproduction processes, the isovector magnetic moments with different strangeness from $S = 0$ to -2 , contribute to the \bar{K} or K photoproduction amplitudes. Although the magnetic moment is not completely proportional to the Λ factor, we take the experimental value for $\mu_{\Sigma\Lambda}^V$ by which the other magnetic moments are fixed, because it may be regarded as giving an average.

In the case of the $\gamma + \Sigma \rightarrow K + \Xi$ process, the cancellation does not occur among the Ξ and Ξ^* pole terms: The two exotic Ξ states with isospin 3/2 contribute to this processes, the one with spin 1/2 denoted as Ξ_1^{**} and the other with spin 3/2 as Ξ_3^{**} . The resultant amplitudes are written as

$$T_1 = \left(\frac{ef_{\Sigma^*\Xi^*K^*}}{8\pi m_K M_N} \right) \mu_{\Sigma\Lambda}^V \cdot kq \left[\frac{16}{45} \frac{\Delta_{\Sigma^*\Xi}}{(\Delta_{\Xi\Sigma} + \omega_q)(\Delta_{\Xi^*\Sigma} + \omega_q)} + \frac{4}{45} \frac{\Delta_{\Xi_1^{**}\Xi}}{(\Delta_{\Xi\Sigma} + \omega_q)(\Delta_{\Xi_1^{**}\Sigma} + \omega_q)} + \frac{4}{9} \frac{\Delta_{\Xi_3^{**}\Xi}}{(\Delta_{\Xi\Sigma} + \omega_q)(\Delta_{\Xi_3^{**}\Sigma} + \omega_q)} \right], \quad (3.18)$$

$$T_3 = \left(\frac{ef_{\Sigma^*\Xi^*K^*}}{8\pi m_K M_N} \right) \mu_{\Sigma\Lambda}^V \cdot kq \left[\frac{1}{5} \frac{\Delta_{\Sigma^*\Sigma}}{(\Delta_{\Xi\Sigma} + \omega_q)(\Delta_{\Sigma^*\Xi} - \omega_q)} + \frac{4}{45} \frac{\Delta_{\Sigma^*\Xi}}{(\Delta_{\Xi\Sigma} + \omega_q)(\Delta_{\Xi^*\Sigma} + \omega_q)} - \frac{8}{45} \frac{\Delta_{\Xi_1^{**}\Xi}}{(\Delta_{\Xi\Sigma} + \omega_q)(\Delta_{\Xi_1^{**}\Sigma} + \omega_q)} + \frac{1}{9} \frac{\Delta_{\Xi_3^{**}\Xi}}{(\Delta_{\Xi\Sigma} + \omega_q)(\Delta_{\Xi_3^{**}\Sigma} + \omega_q)} \right] \quad (3.19)$$

for $\gamma + \Sigma^+ \rightarrow K^+ + \Xi^0$, and similar amplitudes are written for other Σ targets. In the above we used

$$\Lambda_{\Sigma^+\Xi_1^{**}K^+} = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} \quad \text{and} \quad \Lambda_{\Sigma^+\Xi_3^{**}K^+} = \frac{\sqrt{5}}{3}, \quad (3.20)$$

which are predicted by BKSM. Each pole term in the above is of $O(N_c)$, but the resultant amplitudes are of $O(N_c^0)$, because the mass differences appearing in the numerators are of $O(N_c^{-1})$. The large N_c consistency condition also works to reduce the N_c dependence and to converge the asymptotic behavior. Since the resonance poles do not develop in the physical region of ω_q , their contributions are rather small.

C. Mass spectrum of the exotic states

The exotic states are required to satisfy the large N_c consistency condition of the production amplitudes as shown in previous subsections. Here we estimate the masses within BKSM. The baryon mass spectrum of the model is given by the following formula as

$$M = M_s + |s|\omega + \frac{1}{2\Lambda} \left[cJ(J+1) + (1-c)I(I+1) - c(1-c)\frac{|s|}{2} \left(\frac{|s|}{2} + 1 \right) \right], \quad (3.21)$$

where M_s , ω , c and Λ are the parameters to be calculated by the model [18,23]. Instead of calculating these parameters by the model we estimate them by the existing mass spectrum of the non-strange and strange baryons: The result we adopt is $M_s = 866$ MeV, $c = 0.630$, $\omega = 221$ MeV and $M_\Delta - M_N = 3/(2\Lambda) = 293$ MeV. The same parameters give the masses of the exotic states as

$$\begin{aligned} \Sigma^{**}(I=2, J=\frac{3}{2}) &= 1517 \text{ MeV}, \\ \Xi_1^{**}(I=\frac{3}{2}, J=\frac{1}{2}) &= 1444 \text{ MeV}, \quad \Xi_3^{**}(I=\frac{3}{2}, J=\frac{3}{2}) = 1639 \text{ MeV}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

We note that almost the same values are obtained for the masses of the exotic states by the mass formula in the tree level of the large N_c chiral perturbation theory [25].

The mass of Σ^{**} is high enough to decay into $\Sigma\pi$, $\Sigma\pi\pi$ and $\Lambda\pi\pi$ channels, while the mass of Ξ_1^{**} is low and seems to be stable. It should be noticed, however, that the exotic states could disappear at $N_c = 3$. The masses of the exotic states may be sensitive to higher N_c corrections, but we use 1520 MeV for Σ^{**} , 1450 (1640) MeV for Ξ_1^{**} (Ξ_3^{**}) in this paper.

D. Magnetic polarizability from the magnetic Born terms

The magnetic polarizability β_V^M is given by the integration over energy as follows:

$$\beta_V^M = \frac{2}{\pi} \int_{\omega_{th}}^{\infty} \frac{d\omega_k}{\omega_k^2} \frac{q}{\omega_k} \sum_{m,n} \left(T_1^{(n)*} T_1^{(m)} + 2T_3^{(n)*} T_3^{(m)} \right) \sum_a t_a^{(n)\dagger} t_a^{(m)} \quad (3.23)$$

for the spin 1/2 final baryon.

The magnetic Born term can interfere with the electric one: By the angular integration we have

$$\beta_V^M = \sum_{V'} \frac{2G_E}{\pi} \int \frac{d\omega_k}{\omega_k^2} \frac{q}{\omega_k} \left[\frac{1}{v} - \frac{1-v^2}{2v^2} \log \left(\frac{1+v}{1-v} \right) \right] \sum_{n,a} \left(\text{Re} T_1^{(n)} - \text{Re} T_3^{(n)} \right) t_a^{(-)\dagger} t_a^{(n)} \quad (3.24)$$

for the spin 1/2 final baryon, where G_E denotes the corresponding coupling constant in T_E . In the case of the spin 3/2 final baryon, the above expressions are little changed. In Table III we show the numerical results of the magnetic polarizabilities, in which all the contributions are included.

Instead of integrating the full amplitudes, if we pick up only the Σ^* state and ignore the exotic state and the background contributions at all, we may get rid of the contributions from the exotic state. Such a narrow width approximation has been discussed in the case of the nucleon polarizabilities and shown to give the same result as the one by HBChPT in Ref. [9,12]. So, we proceed to the narrow width

approximation for the $\gamma + \Lambda \rightarrow \Lambda + \pi$ channel as a typical example: $|T_3^{(\pm)}|^2$ contains the Σ^* resonance and its contribution in Eq.(3.23) is proportional to

$$\frac{e^2}{4\pi} \left(\frac{\mu_{\Sigma\Lambda}^V}{2M_N} \right)^2 \frac{2}{\pi} \int \frac{d\omega_k}{\omega_k^3} \left(\frac{f_{\Sigma\Lambda\pi}^2 q^3}{4\pi m_\pi^2} \right) \frac{4\Delta_{\Sigma^*\Lambda}^2}{(\Delta_{\Sigma^*\Lambda}^2 - \omega_q^2)^2 + (\Delta_{\Sigma^*\Lambda} \Gamma_{\text{tot}})^2}, \quad (3.25)$$

where Γ_{tot} is the total width of Σ^* . Using the relation

$$\frac{f_{\Sigma\Lambda\pi}^2 q^3}{4\pi m_\pi^2} = \frac{1}{2} \left[\frac{2}{3} \frac{f_{\Sigma^*\Lambda\pi}^2 q^3}{4\pi m_\pi^2} \right] = \frac{1}{2} \Gamma_{\Lambda\pi}, \quad (3.26)$$

and taking the narrow width limit as

$$\lim_{\Gamma_{\text{tot}} \rightarrow 0} \frac{\Delta_{\Sigma^*\Lambda} \Gamma_{\text{tot}}}{(\Delta_{\Sigma^*\Lambda}^2 - \omega_q^2)^2 + (\Delta_{\Sigma^*\Lambda} \Gamma_{\text{tot}})^2} = \pi \delta(\Delta_{\Sigma^*\Lambda}^2 - \omega_q^2), \quad (3.27)$$

we may have

$$\beta_{\Lambda \rightarrow \Lambda}^M |_{\Sigma^*} = \frac{e^2}{4\pi} \left(\frac{\mu_{\Sigma\Lambda}^V}{2M_N} \right)^2 \frac{4}{\Delta_{\Sigma^*\Lambda}} \left(\frac{\Gamma_{\Lambda\pi}}{\Gamma_{\text{tot}}} \right), \quad (3.28)$$

where the spin factor 2 is multiplied and the last factor is the branching ratio of $\Sigma^* \rightarrow \Lambda\pi$. Adding the $\Sigma^\pm \pi^\mp$ channels, we get

$$\beta_{\Lambda}^M |_{\Sigma^*} = \left(\frac{e^2}{4\pi} \right) \left(\frac{\mu_{\Sigma\Lambda}^V}{2M_N} \right)^2 \frac{4}{\Delta_{\Sigma^*\Lambda}}, \quad (3.29)$$

which is similar to the case of the nucleon. For the Σ target we have

$$\beta_{\Sigma^\pm}^M |_{\Sigma^*} = \left(\frac{e^2}{4\pi} \right) \left(\frac{\mu_{\Sigma\Lambda}^V}{2M_N} \right)^2 \frac{1}{\Delta_{\Sigma^*\Sigma}}, \quad \beta_{\Sigma^0}^M |_{\Sigma^*} = 0. \quad (3.30)$$

Since Σ^0 does not have the leading isovector magnetic moment, $\beta_{\Sigma^0}^M |_{\text{narrow}}$ is zero at leading order. Even if the isoscalar magnetic moment is used, it is at most 1/4 of the β_{Σ^\pm} , because $\mu^S \approx 1/2\mu_{\Sigma^*}^V$. The numerical results are as follows:

$$\beta_{\Lambda}^M |_{\Sigma^*} = 6.13 \quad \text{and} \quad \beta_{\Sigma^\pm}^M |_{\Sigma^*} = 2.15$$

in units of 10^{-4} fm^3 .

Similar narrow width approximation to Σ^{**} gives the values,

$$\beta_{\Sigma^\pm}^M |_{\Sigma^{**}} = 3.78 \quad \text{and} \quad \beta_{\Sigma^0}^M |_{\Sigma^{**}} = 5.04.$$

Since $\Gamma_{\Sigma^{**}}$ is broad as seen previously, these values would be an overestimate, but the exotic resonance contributions cannot be discarded, especially to Σ^0 .

Finally, we note that β in the narrow width approximation is of $O(N_c^3)$, because the limit picks up only the relevant pole of $O(N_c^{3/2})$; that is, the limit is not consistent with the $1/N_c$ expansion.

IV. CONCLUSIONS AND DISCUSSION

We have calculated the spin-averaged electromagnetic polarizabilities of the hyperons Λ and Σ within the one-loop approximation. In order to calculate the one-loop diagrams we used the dispersion relations, where the imaginary parts are given by the Born terms in the pion and kaon photoproduction Born terms. The Born terms satisfy the low energy theorems, and their form is model-independent. The coupling constants are determined so as to satisfy spin-flavor symmetry of the large N_c QCD.

The calculated electromagnetic polarizabilities through the pion and kaon Born terms are summarized as $\alpha_\Lambda = 18.05$, $\alpha_{\Sigma^+} = 22.08$, $\alpha_{\Sigma^0} = 13.79$ and $\alpha_{\Sigma^-} = 18.71$, and $\beta_\Lambda = 3.22$, $\beta_{\Sigma^+} = 6.67$, $\beta_{\Sigma^0} = 5.52$ and $\beta_{\Sigma^-} = 7.13$ in units of 10^{-4} fm^3 . These values would be too large as seen from the large values of the polarizabilities of the nucleon given by the same calculation [12] as well as the one-loop calculation in HBChPT [3]. This is because the high energy contributions from the one-loop diagrams are not fully reduced for the spin-averaged polarizabilities compared to the spin polarizabilities owing to the power behavior of the energy denominator in the integrals. In order to reduce the values of the spin-averaged polarizabilities within the one-loop calculations we would have to go to the approximation beyond the one-loop level, such as vertex corrections and the unitarization of the Born amplitudes.

The electric Born terms would give the same spin-averaged polarizabilities as the SU(3) extension of HBChPT [14], if the hyperon mass differences are ignored. But we observed that the polarizabilities strongly depend on the hyperon mass difference, and then SU(3) symmetry of the polarizabilities is further broken besides the symmetry breaking due to the pion and kaon mass difference, even if the coupling constants satisfy SU(3) symmetry with an appropriate F/D ratio.

As to the magnetic Born amplitudes we have shown that exotic hyperon states are inevitably required even in the non-exotic reaction channel in order for the large N_c consistency condition to hold. The consistency condition guarantees meson-baryon reaction amplitudes to have a meaningful N_c limit. Due to the consistency condition the magnetic Born terms remain at $O(N_c^{1/2})$, and as a result they become finite at high energies and give finite magnetic polarizabilities as the electric Born ones. We also noted that the narrow width limit is not consistent with the $1/N_c$ expansion, because the limit picks up the single resonance pole term of $O(N_c^{3/2})$ and the resultant polarizability is of $O(N_c^3)$. If we reduce N_c to 3, the coupling constants of the exotic hyperons to non-exotic ones would vanish, but simultaneously it makes the magnetic Born amplitudes break the unitarity bound at high energies even for such a case of the nucleon. Thus, it is impossible to have finite results within the one-loop approximation. Contrary, it is a serious problem for the large N_c baryon theories to study the $1/N_c$ corrections to physical quantities related to the exotic states and what physical effects are expected by the exotic states besides a role of the natural cutoff, if the leading terms in the $1/N_c$ expansion are valid. These tasks are left to further investigations.

It is known that there is a negative parity hyperon $\Lambda^*(1405)$, which BKSM predicts as an S-wave bound state of the antikaon around the $I = J = 0$ chiral SU(2) soliton. The model also predicts $\Sigma_{1/2^-}$ and

$\Sigma_{3/2^-}$, which are the bound states to the $I = J = 1$ soliton [21]. The electric dipole transition amplitudes with the poles at the negative parity hyperons of spin 1/2 give the electric polarizabilities. Since the transition electric dipole moment is of $O(N_c^0)$ and the S-wave pion coupling constant of $O(N_c^{-1/2})$, the electric polarizabilities are of $O(N_c^{-1})$, compared to the electric Born contributions of $O(N_c)$. Taking the narrow width approximation given by

$$\alpha^D = \frac{e^2}{4\pi} \left(\frac{\kappa_{\Lambda^* Y}}{2M_N} \right)^2 \frac{2}{M_{\Lambda^*} - M_Y},$$

we get $\alpha_{\Lambda^*}^D = 0.18$ and $\alpha_{\Sigma^*}^D = 0.24$ in units of 10^{-4}fm^3 , where we used the transition dipole moments $\kappa_{\Lambda^* \Lambda} = \kappa_{\Lambda^* \Sigma} = 0.41$ in units of the Bohr magneton, which are given by BKSM. The model also predicts that the dipole moment of $\Sigma_{1/2^-}^*$ is $-1/3$ of the Λ^* , and then the contribution to α would be tiny; $\alpha_{\Sigma^*}^D = 0.08$, $\alpha_{\Sigma^0}^D = 0.02$ and $\alpha_{\Sigma^-}^D = 0$. Our values are quite different from those of Ref. [13], but of the same order as Ref. [15]. The interference terms between the electric Born and the electric dipole moment terms are also small.

Gobbi et al. calculated the polarizabilities of the hyperons in BKSM [15], but they used the two-photon seagull terms in the Lagrangian. It is, however, pointed out that it is dangerous to use the two-photon-seagull terms in the Lagrangian to calculate the polarizabilities, because the gauge invariance makes the seagull terms vanish for the electric polarizability [11,26,27]. Although we referred to the same BKSM, our approach to the subject is quite different from theirs, and the results are also different: We point out that the chiral soliton model including BKSM gives the model-independent form of the pion and kaon photoproduction amplitudes at tree level and then the polarizabilities are given by calculating the loop integrals with the dispersion relations.

- [1] S. Ragusa, Phys. Rev. D **47**, 3757 (1993); Phys. Rev. D **49**, 3157 (1994).
[2] V. Bernard, N. Kaiser, J. Kambor and Ulf-G. Meissner, Nucl. Phys. B **388**, 315 (1992).
[3] T. R. Hemmert, B. R. Holstein and J. Kambor, Phys. Rev. D **55**, 5598 (1997).
[4] T. R. Hemmert, B. R. Holstein, J. Kambor and G. Knöchlein, Phys. Rev. D **57**, 5746 (1998).
[5] A. M. Sandorfi, C. S. Whisnant and M. Khandaker, Phys. Rev. D **50**, R6681 (1994).
[6] D. Drechsel, G. Krein and O. Hanstein, Phys. Lett. B **420**, 248 (1998).
[7] D. Babusei, G. Giordano, A. I. L'vov, G. Matone and A. M. Nathan, Phys. Rev. C **58**, 1013 (1998).
[8] A. I. L'vov, nucl-th/9810032.
[9] Y. Tanushii, S. Saito and M. Uehara, nucl-th/9901010, to appear in Phys. Rev. C.
[10] A. I. L'vov, Phys. Lett. B **304**, 29 (1993).
[11] S. Saito and M. Uehara, Phys. Rev. D **51**, 6059 (1995).
[12] Y. Tanushii, Y. Nakahara, S. Saito and M. Uehara, Phys. Lett. B **425**, 6 (1998).
[13] H. J. Lipkin and M. A. Moinester, Phys. Lett. B **287**, 179 (1992).
[14] V. Bernard, N. Kaiser, J. Kamber and U-G. Meissner, Phys. Rev. D **46**, R2756 (1992); Phys. Lett. B **319**, 269 (1993).
[15] C. Gobbi, C. L. Schat and N. Scoccola, Nucl. Phys. A **598**, 318 (1996).
[16] M. A. Moinester, Proc. on Chiral Dynamics: Theory and Experiment at MIT(1994), p. 152. A. M. Bernstein and B. R. Holstein(Eds.); B. R. Holstein, hep-ph/9910369.
[17] C. G. Callan and I. Klebanov, Nucl. Phys. B **262**, 365 (1985).

- [18] N. N. Scoccola, H. Nadeau, M. A. Nowak and M. Rho, Phys. Lett. B **201**, 425 (1988); C. G. Callan, K. Hornboster and I. Klebanov, Phys. Lett. B **202**, 269 (1988).
[19] E. Jenkins and A. V. Manohar, Phys. Lett. B **335**, 452 (1994); R. Dashen, E. Jenkins and A. V. Manohar, Phys. Rev. D **49**, 4714 (1994).
[20] E. Jenkins, hep-ph/9803349.
[21] Y. Kondo, S. Saito, Y. Tanushii and M. Uehara, Nucl. Phys. A **609**, 501 (1996).
[22] O. Dumbrajs et al., Nucl. Phys. B **216**, 277 (1983).
[23] J. Kunz and P. J. Mulders, Phys. Rev. D **41**, 1578 (1990).
[24] Y. Oh, D-P. Min and M. Rho, Nucl. Phys. A **543**, 443 (1991).
[25] Y. Oh and W. Weise, Eur. Phys. J. A **4**, 363 (1999).
[26] A. I. L'vov, Int. J. Mod. Phys. A **30**, 5267 (1993).
[27] S. Saito and M. Uehara, Nucl. Phys. A **628**, 112 (1998); Phys. Lett. B **325**, 20 (1994).

TABLE I. The electromagnetic polarizabilities from the pion electric Born terms in units of 10^{-4}fm^3 . $f_{\Sigma\Lambda\pi}/\sqrt{4\pi} = 0.22$ is used to fix the pion coupling constants.

Y	Λ			Σ^\pm				Σ^0		
Y'	Σ	Σ^*	total	Λ	Σ	Σ^*	total	Σ	Σ^*	total
α_Y	5.40	7.13	12.54	11.89	4.30	0.98	17.17	8.61	1.95	10.56
β_Y^E	0.34	-1.29	-0.95	0.87	0.43	-0.07	1.23	0.86	-0.14	0.72

TABLE II. The electromagnetic polarizabilities from the kaon electric Born terms in units of 10^{-4}fm^3 . $f_{\Lambda\rho K}/\sqrt{4\pi} = 0.92$ is used to fix the kaon coupling constants.

Y	Λ			Σ^+			Σ^0			Σ^-		
B	$N + \Xi$	Ξ^*	total	Ξ	$\Delta + \Xi^*$	total	$N + \Xi$	$\Delta + \Xi^*$	total	N	Δ	total
α_Y	3.16	2.36	5.52	2.36	2.56	4.91	1.62	1.61	3.23	0.88	0.67	1.55
β_Y^E	0.28	0.06	0.34	0.21	0.22	0.44	0.14	0.14	0.28	0.07	0.07	0.13

TABLE III. Total magnetic polarizability β and each contribution β_Y^E , β_Y^M or β_Y^I in units of 10^{-4}fm^3 . $\mu_{\Sigma\Lambda}^V = -1.61$ is used to fix the isovector part of hyperon magnetic moments.

Y	total β	π or K -loop	β^E	β^M	β^I	sum
Λ	3.22	$\pi + \Lambda, \Sigma$	0.34	5.36	-0.73	4.97
		$\pi + \Sigma^*$	-1.29	0.24	-1.25	-2.31
		$\bar{K} + N, K + \Xi$	0.28	1.04	-0.58	0.74
		$K + \Xi^*$	0.06	0.07	-0.31	-0.18
Σ^+	6.67	$\pi + \Lambda, \Sigma$	1.30	5.08	0.24	6.61
		$\pi + \Sigma^*$	-0.07	0.13	-0.20	-0.13
		$\bar{K} + N, K + \Xi$	0.21	0.40	-0.34	0.27
		$\bar{K} + \Delta, K + \Xi^*$	0.22	0.14	-0.45	-0.08
Σ^0	5.52	$\pi + \Sigma$	0.86	4.06	0.46	5.38
		$\pi + \Sigma^*$	-0.14	0.52	-0.42	-0.03
		$\bar{K} + N, K + \Xi$	0.14	0.18	-0.19	0.13
		$\bar{K} + \Delta, K + \Xi^*$	0.14	0.16	-0.25	0.05
Σ^-	7.13	$\pi + \Lambda, \Sigma$	1.30	5.08	0.24	6.61
		$\pi + \Sigma^*$	-0.07	0.13	-0.20	-0.13
		$\bar{K} + N, K + \Xi$	0.07	0.40	0.04	0.51
		$\bar{K} + \Delta, K + \Xi^*$	0.07	0.14	-0.07	0.14

Faint, illegible text on the left page, possibly bleed-through from the reverse side of the paper.

NUCLEAR PHYSICS A

Faint, illegible text on the right page, possibly bleed-through from the reverse side of the paper.

Reprinted from

NUCLEAR PHYSICS A

Nuclear Physics A 609 (1996) 501-518

Meson-hyperon couplings in the bound-state
approach to the Skyrme model

Y. Kondo^a, S. Saito^{b,1}, Y. Tanushi^{b,2}, M. Uehara^{c,3}

^a *Suzuka University of Medical Science and Technology, Suzuka 510-02, Japan*

^b *Department of Physics, Nagoya University, Nagoya 464-01, Japan*

^c *Department of Physics, Saga University, Saga 840, Japan*

Received 27 March 1996; revised 22 July 1996



ELSEVIER

NUCLEAR PHYSICS A

Journal devoted to the experimental and theoretical study of the fundamental constituents of matter and their interactions

Editorial Board

Supervisory Editor: G.E. BROWN, Stony Brook

Executive Editor: C.L. Schwarz, Amsterdam

Associate Editors: G. Baym, Urbana; J. Bondorf, Copenhagen; K. Dietrich, Munich; J.P. Elliott, Sussex; J.D. Garrett, Oak Ridge; M.N. Harakeh, Groningen; S.E. Koonin, Pasadena; W. Nörenberg, Darmstadt; A. Richter, Darmstadt; R.A. Sorensen, Carnegie-Mellon; I. Tanihita, RIKEN; D. Vautherin, Orsay; D.H. Wilkinson, Sussex

Associate Editors for Intermediate Energy: G. Baym, Urbana; H.A. Bethe, Cornell; J.-P. Blaizot, Saclay; T. Ericson, CERN; J.L. Friar, Los Alamos; A. Gal, Jerusalem; J.W. Harris, Berkeley; J. Hüfner, Heidelberg; M. Johnson, Los Alamos; K. Nakai, KEK; D.O. Riska, Helsinki; F. Scheck, Mainz; I.S. Shapiro, Moscow; I. Sick, Basel; M. Soyeur, Saclay; J. Stachel, Heidelberg; R. Stock, Frankfurt; E. Vogt, Vancouver; K. Yazaki, Tokyo

Aims and Scope

Nuclear Physics A covers the domain of general nuclear physics together with intermediate energy and heavy-ion physics, and astrophysics. The emphasis is on original research papers. A number of carefully selected and reviewed conference proceedings are published as an integral part of the journal.

Abstracted/Indexed in:

Current Contents: Physical, Chemical & Earth Sciences/Physics Briefs.

Subscription Information 1996

Volumes 596–611 are scheduled for publication in 64 issues. Publication frequency: weekly. Subscription prices are available upon request from the Publisher. A combined subscription to *Nuclear Physics A* – ISSN 0375-9474 (volumes 596–611), *Nuclear Physics B* – ISSN 0550-3213 (volumes 458–482) and *Nuclear Physics B Proceedings Supplements* – ISSN 0920-5632 (volumes 45–51) is available at a reduced rate. Subscriptions are accepted on a prepaid basis only and entered on a calendar year basis. Issues are sent by SAL (Surface Air Lifted) mail wherever this service is available. Airmail rates are available on request. Please address all your enquiries regarding orders and subscriptions to:

Elsevier Science B.V.

Order Fulfilment Department

P.O. Box 211, 1000 AE Amsterdam

The Netherlands

Tel.: +31 20 485-3642, Fax: +31 20 485-3598

Claims for issues not received should be made within six months of our publication (mailing) date.

Advertising Offices

International: Elsevier Science, Advertising Department, The Boulevard, Langford Lane, Kidlington, Oxford OX5 1GB, UK. Tel: +44 (0)1865 843565; Fax: +44 (0)1865 843976.

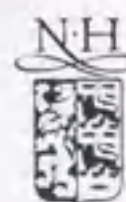
USA and Canada: Weston Media Associates, Dan Lipner, P.O. Box 1110, Greens Farms, CT 06436-1110, USA. Tel: +1 (203) 261 2500; Fax: +1 (203) 261 0101.

Japan: Elsevier Science Japan, Marketing Services, 1-9-15 Higashi-Azabu, Minato-ku, Tokyo 106, Japan. Tel: +81 3 5561 5033; Fax: +81 3 5561 5047.

US mailing notice – *Nuclear Physics B* (ISSN 0550-3213) is published weekly by Elsevier Science B.V., Molenwerf 1, P.O. Box 211, 1000 AE Amsterdam, The Netherlands. The annual subscription price in the USA is US\$ 9909 (valid in North, Central and South America only), including air speed delivery. Periodicals postage paid at Jamaica, NY 11431. USA Postmasters: send address changes to *Nuclear Physics B*, Publications Expediting, Inc., 200 Meacham Avenue, Elmont, NY 11003. Airfreight and mailing in the USA by Publications Expediting.

© The paper used in this publication meets the requirements of ANSI/NISO Z39.48-1992 (Permanence of Paper).

Printed in The Netherlands



North-Holland,
an imprint of Elsevier Science



ELSEVIER

Nuclear Physics A 609 (1996) 501–518

NUCLEAR
PHYSICS A

Meson–hyperon couplings in the bound-state approach to the Skyrme model

Y. Kondo^a, S. Saito^{b,1}, Y. Tanushi^{b,2}, M. Uehara^{c,3}

^a Suzuka University of Medical Science and Technology, Suzuka 510-02, Japan

^b Department of Physics, Nagoya University, Nagoya 464-01, Japan

^c Department of Physics, Saga University, Saga 840, Japan

Received 27 March 1996; revised 22 July 1996

Abstract

Kaon and pion coupling constants to hyperons are calculated in the bound-state approach to strangeness in the Skyrme-soliton model. The pion and kaon coupling constants are properly defined as matrix elements of source terms of the mesons sandwiched between two single-baryon states. Numerical calculation of the coupling constants shows that the bound-state approach well reproduces the empirical values.

1. Introduction

Two methods have been proposed in order to extend the $SU(2)$ Skyrme-soliton model to strange baryons, starting with the $SU(3)_L \times SU(3)_R$ chiral symmetric meson theory. One is the $SU(3)$ collective-coordinate method, which is a natural extension of the $SU(2)$ model [1,2]. The other is the bound-state approach to strangeness, in which the flavor $SU(3)$ symmetry in the baryon sector is not presumed [3].

The non-linear sigma model supplemented by the Wess–Zumino term is supposed to be an effective theory of QCD at the large N_c limit, where N_c is the number of colors [4]. Baryons are described in terms of solitons which are given as a classical solution of the non-linear sigma model with appropriate stabilizing terms at leading order in the $1/N_c$ expansion. The Skyrme model has been revived as such a theory [5,6]. Thus, extension of the $SU(2)$ Skyrme-soliton model to the strange baryons should be

¹ E-mail address: saito@nuc-th.phys.nagoya-u.ac.jp.

² E-mail address: tanushi@nuc-th.phys.nagoya-u.ac.jp.

³ E-mail address: ueharam@cc.saga-u.ac.jp.

consistent with the $1/N_c$ expansion in the large N_c world. In this respect the bound-state approach to strangeness seems to be more suitable for the extension of the $SU(2)$ soliton model to strangeness and other heavy flavors [7,8].

Since the proposal by Callan and Klebanov [3] it has been found that the bound-state approach to strangeness works fairly well in describing the mass spectra, magnetic moments and weak decays of hyperons [9–17]. Kaon–nucleon background scattering has also been studied [18]. There have been attempts to obtain the kaon coupling constants in the bound-state approach [19,20]. However, meson–baryon scattering amplitudes including the strangeness exchange processes have not fully been developed so far within this approach.

In this paper we calculate the kaon coupling constants at hyperon–nucleon vertices and the pion ones at hyperon–hyperon vertices, where the positive-parity hyperons such as Λ , Σ and $\Sigma(1385)$ denoted as Σ^* are the P-wave bound states of antikaon to the $SU(2)$ soliton and $\Lambda(1405)$ denoted as Λ^* is the S-wave bound state. We also discuss the possible existence of negative-parity Σ states with spin $\frac{1}{2}$ and $\frac{3}{2}$, which are induced from the S-wave bound kaon. The kaon and pion coupling constants are properly defined as matrix elements of the source terms of the mesons sandwiched between the two single-baryon states according to the prescription developed for resolving the Yukawa coupling problem in the $SU(2)$ Skyrme-soliton model [21,22]. Our method is simple, transparent and applicable to a wide range of meson vertices. Since we are interested in formulating the meson–baryon vertices including heavy quantum numbers, we restrict ourselves to the simplest Lagrangian which preserves the essentials of the bound-state approach.

In order to make numerical calculations we take two sets of the parameters of the model, the pion decay constant f_π and the Skyrme constant e ; Set I consists of $f_\pi = 54$ MeV and $e = 4.84$, and Set II consists of $f_\pi = 93$ MeV and $e = 4.0$. The parameters in Set I have been tuned so as to fit the masses of the nucleon and the Δ isobar by Adkins et al. [6]. In Set II the pion decay constant is kept equal to the physical value and the Skyrme constant is taken so as to give a reasonable size of the soliton and to reproduce the mass difference between the nucleon and the Δ isobar. Although the soliton has a large classical mass in Set II, it is reduced to a reasonable value if the one-loop corrections of $O(N_c^0)$ are taken into account [23,24]; for example, the resultant Skyrmion mass is 873 MeV according to Ref. [24].

The magnitudes of the pseudovector coupling constants f_{YNK} to the positive hyperons are found to be close to those given by the compilation of the coupling constants [25,26]. The coupling constant G_{Λ^*NK} in Set II is close to the phenomenological value [27], but the one in Set I may be too large. Our results suggest that the parameter set II is more favorable than those of Set I.

In the next section the Lagrangian and Hamiltonian in the bound-state approach are given. The matrix element of the Hamiltonian in the intrinsic frame of the soliton is discussed in Appendix A. The kaon and pion coupling constants to the positive-parity hyperons are defined in Section 3. The kaon coupling to Λ^* is given, and the possibility of Σ states with negative parity predicted by the model are discussed in Section 4. The conclusions and discussion are given in the last section.

2. Lagrangian and Hamiltonian

For the sake of being self-contained, we give the Lagrangian and the Hamiltonian in this section. We start with the chiral $SU(3) \times SU(3)$ symmetric Lagrangian broken only by finite masses of the pion and kaon. The kaon fields are introduced as the fluctuations around the $SU(2)$ soliton according to the standard Callan–Klebanov ansatz [3]:

$$U = \sqrt{U_\pi} U_K \sqrt{U_\pi}. \quad (2.1)$$

The kaon part is written as

$$U_K = \exp \left\{ i \frac{\sqrt{2}}{f_\pi} \begin{pmatrix} 0 & K \\ K^\dagger & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad (2.2)$$

where

$$K = \begin{pmatrix} K^+ \\ K^0 \end{pmatrix}, \quad K^\dagger = (K^-, \bar{K}^0), \quad (2.3)$$

and the pion part is

$$U_\pi = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

with

$$u = \frac{1}{f_\pi} (\Phi_0 + i\tau_a \Phi_a), \quad (2.5)$$

where Φ_a is the total pion field, which consists of the classical Skyrmion configuration of $O(N_c^{1/2})$ and the fluctuation field of $O(N_c^0)$ under the constraint $\Phi_0^2 = f_\pi^2 - \sum \Phi_a^2$ [21].

The Lagrangian density \mathcal{L} can be written as

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{Sky}} + \mathcal{L}_K + O(K^3), \quad (2.6)$$

where \mathcal{L}_{Sky} is the $SU(2)$ Skyrme Lagrangian,

$$\mathcal{L}_{\text{Sky}} = \frac{1}{2} \dot{\Phi}_a G_{ab} \dot{\Phi}_b - \mathcal{V}[\Phi_a, \nabla \Phi_a], \quad (2.7)$$

where the explicit expressions of G_{ab} and \mathcal{V} are not given here. \mathcal{L}_K is bilinear in K^\dagger and K :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_K = & (D_\mu K)^\dagger (D^\mu K) - m_K^2 K^\dagger K + \frac{1}{2} m_\pi^2 \left(1 - \frac{\Phi_0}{f_\pi} \right) K^\dagger K \\ & - \frac{1}{4 f_\pi^2} K^\dagger K \left\{ \partial_\mu \Phi_a X_{ab} \partial^\mu \Phi_b - \frac{2}{f_\pi^2 \kappa^2} [(\partial_\mu \Phi_a X_{ab} \partial^\mu \Phi_b)(\partial_\nu \Phi_c X_{cd} \partial^\nu \Phi_d) \right. \\ & \left. - (\partial_\mu \Phi_a X_{ac} \partial_\nu \Phi_c)(\partial^\mu \Phi_b X_{bd} \partial^\nu \Phi_d)] \right\} \\ & + \frac{1}{4 \kappa^2 f_\pi^2} \left\{ (D_\mu K)^\dagger (D_\nu K)(\partial^\mu \Phi_a X_{ab} \partial^\nu \Phi_b) - (D_\mu K)^\dagger (D^\mu K)(\partial_\nu \Phi_a X_{ab} \partial^\nu \Phi_b) \right\} \end{aligned}$$

$$-(D_\mu K)^\dagger [3i\varepsilon_{abc}\partial^\mu\Phi_a\partial^\nu\Phi_b\tau_c + 6f_\pi(V^\mu\partial^\nu\Phi_0 - V^\nu\partial^\mu\Phi_0)](D_\nu K) \Big\} \\ -i\frac{N_c}{4f_\pi^2}B^\mu\{K^\dagger(D_\mu K) - (D_\mu K)^\dagger K\}, \quad (2.8)$$

where $\kappa = ef_\pi$ and

$$D_\mu = \partial_\mu + V_\mu, \quad (2.9)$$

$$V^\mu = \frac{1}{2f_\pi^2} \frac{1}{1 + \Phi_0/f_\pi} i\varepsilon_{abc}\tau_a\Phi_b\partial^\mu\Phi_c, \quad (2.10)$$

$$B^\mu = \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \frac{1}{24\pi^2} \text{Tr}(u^\dagger\partial_\nu u u^\dagger\partial_\alpha u u^\dagger\partial_\beta u) \quad \text{with} \quad \varepsilon^{0123} = -1, \quad (2.11)$$

$$X_{ab} = \delta_{ab} + \frac{\Phi_a\Phi_b}{\Phi_0^2}. \quad (2.12)$$

In order to get the Hamiltonian we extract the time-derivative terms from \mathcal{L}_K ,

$$\mathcal{L}_K = \dot{K}^\dagger f \dot{K} + \dot{K}^\dagger \eta_a \dot{\Phi}_a + \dot{\Phi}_a \eta_a^\dagger \dot{K} + \dot{K}^\dagger i\lambda K - K^\dagger i\lambda \dot{K} - i\Xi_a \dot{\Phi}_a + \dot{\Phi}_a \widetilde{G}_{ab} \dot{\Phi}_b + \mathcal{L}', \quad (2.13)$$

where \mathcal{L}' does not include any time derivatives of the kaon and pion fields, and

$$f = 1 + \frac{1}{4\kappa^2 f_\pi^2} (\partial_i \Phi_a X_{ab} \partial_i \Phi_b), \quad (2.14)$$

$$\lambda = \frac{N_c}{4f_\pi^2} B^0, \quad (2.15)$$

$$\eta_a = f V_a^0 K + \frac{1}{4\kappa^2 f_\pi^2} \left\{ -X_{ab} \partial_i \Phi_b + 3i\varepsilon_{abc} \partial_i \Phi_b \tau_c \right. \\ \left. + 6f_\pi \left(V_a^0 \partial_i \Phi_0 + V_i \frac{\Phi_a}{\Phi_0} \right) \right\} (D_i K), \quad (2.16)$$

$$\Xi_a = 2K^\dagger (\lambda V_a^0 - \lambda_i^a V_i) K + \lambda_i^a (\partial_i K^\dagger K - K^\dagger \partial_i K). \quad (2.17)$$

When Φ_a is set to the leading classical configuration, the term \widetilde{G}_{ab} bilinear in the kaon fields is of $O(N_c^{-1})$, but η_a and Ξ_a are of $O(N_c^{-1/2})$. We neglect the term $\dot{\Phi}_a \widetilde{G}_{ab} \dot{\Phi}_b$ hereafter. In the above V_a^0 and λ_i^a are defined as

$$V_a^0 \Phi_a = V^0, \quad (2.18)$$

$$\lambda_i^a \Phi_a = \frac{N_c}{4f_\pi^2} B_i. \quad (2.19)$$

We define the momentum fields canonically conjugate to $K(x)^\dagger$ and $\Phi_a(x)$ as

$$\Pi(x) = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{K}^\dagger(x)} = f \dot{K} + i\lambda K + \eta_a \dot{\Phi}_a, \quad (2.20)$$

$$\pi_a(x) = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{\Phi}_a(x)} = G_{ab} \dot{\Phi}_b - i\Xi_a + \dot{K}^\dagger \eta_a + \eta_a^\dagger \dot{K}. \quad (2.21)$$

Note that $\dot{\Phi}_a$, \dot{K} and \dot{K}^\dagger are solved in terms of π , Π and Π^\dagger without any constraints:

$$\dot{K} = f^{-1} [\Pi - i\lambda K - \eta_a G^{-1}{}_{ab} \pi_b] + O(K^3), \quad (2.22)$$

$$\dot{\Phi}_a = G^{-1}{}_{ab} \left\{ \pi_b + i\Xi_b - \left(\eta_b^\dagger f^{-1} [\Pi - i\lambda K - \eta_c G^{-1}{}_{cd} \pi_d] + \text{h.c.} \right) \right\}. \quad (2.23)$$

Then the canonical commutation relations hold among the fields:

$$[\Phi_a(x, t), \pi_b(y, t)] = i\delta_{ab} \delta(x - y), \quad (2.24)$$

$$[K_\alpha^\dagger(x, t), \Pi_\beta(y, t)] = i\delta_{\alpha\beta} \delta(x - y). \quad (2.25)$$

This is because the massive kaon fields do not contain the zero-mode wave functions of the $SU(2)$ Skyrme configuration, and because the pion fields are the total fields [21].

We can construct the Hamiltonian density by the conventional method as

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\text{Sky}} + \mathcal{H}_K + \mathcal{H}_{\pi K}, \quad (2.26)$$

where \mathcal{H}_{Sky} is the one of the $SU(2)$ Skyrme model,

$$\mathcal{H}_{\text{Sky}} = \frac{1}{2} (\pi_a G^{-1}{}_{ab} \pi_b) + \mathcal{V}[\phi, \nabla\phi]. \quad (2.27)$$

The Hamiltonian density \mathcal{H}_K is given as

$$\mathcal{H}_K = [\Pi^\dagger + iK^\dagger \lambda] f^{-1} [\Pi - i\lambda K] + (D_i K)^\dagger d_{ij} (D_j K) \\ + \left[m_K^2 - \frac{1}{2} m_\pi^2 \left(1 - \frac{\Phi_0}{f_\pi} \right) - v_0 \right] K^\dagger K, \quad (2.28)$$

with

$$d_{ij} = \delta_{ij} f + \frac{1}{4\kappa^2 f_\pi^2} \left\{ -\partial_i \Phi_a X_{ab} \partial_j \Phi_b + 3i\varepsilon_{abc} \partial_i \Phi_a \partial_j \Phi_b \tau_c + 6f_\pi (V_i \partial_j \Phi_0 - V_j \partial_i \Phi_0) \right\}, \quad (2.29)$$

$$v_0 = \frac{1}{4f_\pi^2} \left\{ \partial_i \Phi_a X_{ab} \partial_i \Phi_b + \frac{2}{\kappa^2 f_\pi^2} [(\partial_i \Phi_a X_{ab} \partial_i \Phi_b)(\partial_j \Phi_c X_{cd} \partial_j \Phi_d) \right. \\ \left. - (\partial_i \Phi_a X_{ac} \partial_j \Phi_c)(\partial_i \Phi_b X_{bd} \partial_j \Phi_d)] \right\}. \quad (2.30)$$

The last part, $\mathcal{H}_{\pi K}$, is linear in π_a and written as

$$\mathcal{H}_{\pi K} = i\pi_a G^{-1}{}_{ab} \Xi_b - \left\{ (\pi_a G^{-1}{}_{ab} \eta_b)^\dagger D^{-1} (\Pi - i\lambda K) + \text{h.c.} \right\}. \quad (2.31)$$

We should note that all the fields are defined in the laboratory system.

The Hamiltonian written in terms of the fields in the intrinsic frame of the Skyrme soliton is given in Appendix A. The bound-state parameters are tabulated in Table 1. The masses of the positive-parity hyperons are less than the empirical values, and the mass difference between Λ and Σ is a little bit large for both sets of the model parameters. On the other hand, the mass difference between Λ^* and Λ is a little bit small. However, our aim is not to search for the best parameters fitting to the baryon masses in this paper.

Table 1

Bound-state parameters. The parameters of the model are taken to be $f_\pi = 54$ MeV and $e = 4.84$ in Set I, and $f_\pi = 93$ MeV and $e = 4.0$ in Set II. The pion and kaon masses are taken as 138 MeV and 495 MeV, respectively, for both sets.

	ω_1 (MeV)	ω_0 (MeV)	c_1	c_0	$1/A_5$ (MeV)
Set I	147	339	0.513	0.816	195
Set II	183	434	0.388	0.788	167

3. Kaon and pion couplings to positive-parity hyperons

In order to get the scattering amplitudes for the kaon, we introduce the asymptotic fields of the kaon, $K_{in}(x)$ and $K_{out}(x)$, which satisfy the free field equations

$$K_{\alpha in}(x) = \sum_k \frac{1}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2\omega_k}} \{ b_\alpha(k) e^{-ikx} + a_\alpha^\dagger(k) e^{ikx} \}, \quad (3.1)$$

$$K_{\alpha in}^\dagger(x) = \sum_k \frac{1}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2\omega_k}} \{ a_\alpha(k) e^{-ikx} + b_\alpha^\dagger(k) e^{ikx} \} \quad (3.2)$$

with $\omega_k = \sqrt{k^2 + m_k^2}$, and $a_\alpha(k)$ ($b_\alpha(k)$) is the annihilation operator of the antikaon (kaon) of the in-state with isospin index $\alpha = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$. The same forms are defined for the out-fields. The field $K_\alpha(x)$ in the previous section is the interpolating field from the in-state to the out-state. Similar in- and out-fields are introduced to the pion fields, where the total field $\Phi_a(x)$ itself plays the role of the interpolating field from the in-state to the out-state [21]. The single-baryon state with definite spin, isospin and momentum is given as the rotating and translating Skyrme soliton including a bound-state antikaon, if the baryon has strangeness. The Fock space is spanned by the in- and out-states composed of the in and out creation operators of the mesons acting on the single-baryon state. The baryon state is not the eigenstate of $H = \int d^3x \mathcal{H}$, but $\langle B(p') | H | B(p) \rangle = E_B(p) \delta(p' - p)$, as shown in Appendix A, where $E_B = M_B + p^2/2M_B$ and terms of $O(N_c^{-2})$ are discarded.

Thus, the scattering amplitude can be written through the LSZ reduction formula [28] as follows:

$$T_{\bar{K}N \rightarrow \bar{K}N} = i(2\pi)^3 \int d^4x e^{ik'x} \langle N(p') | T \left(J_\beta^{K^\dagger}(x) J_\alpha^K(0) \right) + \delta(x^0) [\bar{K}_\beta^\dagger(x), J_\alpha^K(0)] - i\omega_k \delta(x^0) [K_\beta^\dagger(x), J_\alpha^K(0)] | N(p) \rangle \quad (3.3)$$

for $\bar{K}_\alpha(k) + N(p) \rightarrow \bar{K}_\beta(k') + N(p')$. The second line of the above expression consisting of the equal-time commutators is called the seagull terms or contact terms. The factor $(2\pi)^3$ comes from the normalization of the baryon wave function. Strangeness exchange scattering is described in terms of the kaon and pion source terms as follows:

$$T_{\bar{K}N \rightarrow \pi Y} = i(2\pi)^3 \int d^4x e^{iqx} \langle Y(p') | T \left(J_b^\pi(x) J_a^K(0) \right) + \delta(x^0) [\bar{\Phi}_b(x), J_a^K(0)] - i\omega_q \delta(x^0) [\Phi_b(y), J_a^K(0)] | N(p) \rangle \quad (3.4)$$

for $\bar{K}_\alpha(k) + N(p) \rightarrow \pi_b(q) + Y(p')$. In the above the kaon and pion source terms are defined as

$$J_\alpha^K(x) = \ddot{K}_\alpha + (-\nabla^2 + m_K^2) K_\alpha(x), \quad (3.5)$$

$$J_a^\pi(x) = \ddot{\Phi}_a + (-\nabla^2 + m_\pi^2) \Phi_a(x). \quad (3.6)$$

Inserting the single-baryon states into the time-ordered product term, we get the Born terms, the residues of which are written in terms of the kaon and pion source terms sandwiched between two single-baryon states.

3.1. Kaon couplings

The source term in this section is restricted to leading order in the $1/N_c$ expansion when it is sandwiched between the single-baryon states. The second derivative with respect to t is written as

$$\ddot{K} = f^{-1} \left\{ -2i\lambda \dot{K} + \left(v_0 + \frac{1}{2} m_\pi^2 \left(1 - \frac{\Phi_0}{f_\pi} \right) - m_K^2 \right) K + D_i (d_{ij} D_j K) \right\} \quad (3.7)$$

at $O(N_c^0)$ through the commutator $i[H_K, \dot{K}]$, where $H_K = \int d^3x \mathcal{H}_K$, and

$$\dot{K} = f^{-1} (\Pi - i\lambda K). \quad (3.8)$$

The commutator with H_{Sky} gives higher order terms. Note that Eq. (3.7) is the equation of motion of K_α in the laboratory system.

When we calculate the matrix element of the source term sandwiched between the hyperon and nucleon, the kaon fields are transformed into the fields defined in the intrinsic frame, while the pion fields are reduced to the classical Skyrmin fields in the tree approximation as follows:

$$K_\alpha(x) = A_{\alpha i} \mathcal{K}_i(x - X(t), t), \quad (3.9)$$

$$\Phi_a(x) = R_{ai}(t) \hat{\phi}_i(x - X(t)), \quad (3.10)$$

$$\Phi_0(x) = \hat{\phi}_0(x - X(t)), \quad (3.11)$$

$$\hat{\phi}_0(r) = f_\pi \cos F(r), \quad \hat{\phi}_i(r) = f_\pi \hat{r}_i \sin F(r), \quad (3.12)$$

where $\hat{r} = r/r$ and $F(r)$ is the profile function of the Skyrmin, $\mathbf{A}(t)$ the $SU(2)$ matrix as the collective coordinates for the iso-rotation, R_{ai} the orthogonal rotation matrix, and $X(t)$ the center of the Skyrmin as another set of the collective coordinates for the translational motion.

The kaon field in the intrinsic frame is expanded as

$$\mathcal{K}(r, t) = \sum_N \left\{ b_N k_N(r) e^{-i\omega_N t} + a_N^\dagger k_N^c(r) e^{i\omega_N t} \right\}, \quad (3.13)$$

where $N = \{\ell, T, T_3\}$ with ℓ being the orbital angular momentum and T and T_3 being the quantum numbers of $\mathbf{T} = \mathbf{L} + \boldsymbol{\tau}/2$, and a_N and ω_N (b_N and $\tilde{\omega}_N$) are the destruction operator and energy of the strangeness $S = -1$ (+1) kaon with the quantum number N . We only take the part associated with $S = -1$ in the eigenmode expansion, hereafter. The charge-conjugate eigenmode is written as

$$k_N^c(\mathbf{r}) = k_{T_3}^*(\mathbf{r}) \mathbf{Y}_{TT_3}^c(\theta, \phi) \quad (3.14)$$

with

$$\mathbf{Y}_{TT_3}^c = \begin{pmatrix} \langle T, T_3 | \ell, T_3 + \frac{1}{2}; \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle Y_{\ell, T_3+1/2}^*(\theta, \phi) \\ -\langle T, T_3 | \ell, T_3 - \frac{1}{2}; \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle Y_{\ell, T_3-1/2}^*(\theta, \phi) \end{pmatrix}, \quad (3.15)$$

where $Y_{\ell m}(\theta, \phi)$ are the usual spherical harmonics.

We now calculate the matrix elements of $J_\alpha^K(0)$, which is a function of $\Phi(0)$ and $K(0)$, sandwiched between $\langle Y |$ and $|N\rangle$:

$$\begin{aligned} \langle Y(\mathbf{p}') | J_\alpha^K[\Phi(0), K(0)] | N(\mathbf{p}) \rangle &= \langle Y(\mathbf{p}') | A_{ai} \mathcal{J}_i^K[\hat{\phi}(-X(0)), \mathcal{K}(-X(0))] | N(\mathbf{p}) \rangle \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3r e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \langle Y | A_{ai} \mathcal{J}_i^K[\hat{\phi}(\mathbf{r}), \mathcal{K}(\mathbf{r})] | N \rangle \\ &\equiv \frac{1}{(2\pi)^3} \langle Y | A_{ai} \tilde{\mathcal{J}}_i^K(\mathbf{k}) | N \rangle, \end{aligned} \quad (3.16)$$

where $\mathbf{k} = \mathbf{p}' - \mathbf{p}$. In the above the eigenstate of $X(0)$, $|\mathbf{r}\rangle$, is introduced and use has been made of $\langle \mathbf{r} | N(\mathbf{p}) \rangle = \exp(i\mathbf{r}\cdot\mathbf{p}) / (2\pi)^{3/2} |N\rangle$ [21]. We denoted the source term in the intrinsic frame as $\mathcal{J}_i^K(\mathbf{r}, 0)$, which is written as

$$\begin{aligned} \mathcal{J}^K(\mathbf{r}, 0) &= \tilde{\mathcal{K}}(\mathbf{r}, 0) + (-\nabla^2 + m_K^2) \mathcal{K}(\mathbf{r}, 0) \\ &= \sum_N a_N^\dagger (-\omega_N^2 - \nabla^2 + m_K^2) k_N^c(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (3.17)$$

with ω_N being the bound-state energy, where we discarded $\dot{\mathbf{A}}$ and $\ddot{\mathbf{A}}$, because they are of higher order in the $1/N_c$ expansion, and used the equation of motion of $\mathcal{K}_i(\mathbf{r})$.

For the positive-parity hyperons we take the values $\ell = 1$ and $T = 1/2$, and then

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_P(\mathbf{r}, t) &= k_1^*(r) e^{i\omega_1 t} \begin{pmatrix} a_{1/2}^\dagger \sqrt{\frac{2}{3}} Y_{11}^* + a_{-1/2}^\dagger \sqrt{\frac{1}{3}} Y_{10}^* \\ a_{1/2}^\dagger \sqrt{\frac{1}{3}} Y_{10}^* + a_{-1/2}^\dagger \sqrt{\frac{2}{3}} Y_{1-1}^* \end{pmatrix} \\ &\equiv k_1(r) e^{i\omega_1 t} \Omega_1(a^\dagger; \theta, \phi), \end{aligned} \quad (3.18)$$

where $k_1(r)$ is the radial wave function, and a_t^\dagger with $t = \pm \frac{1}{2}$ denotes $a_{1,1/2,t}^\dagger$. Thus, we can write the Fourier transform of \mathcal{J}_i^K as

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{J}}^K(\mathbf{k}) &= \int d^3r e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \mathcal{J}^K(\mathbf{r}) \\ &= (\omega_k^2 - \omega_1^2) \int d^3r j_1(kr) k_1(r) i\Omega_1(a^\dagger; \hat{\mathbf{k}}), \end{aligned} \quad (3.19)$$

Table 2

A_{YN} and the pseudovector coupling constants f_{YNK} . The pseudoscalar coupling constant is given by $G_{YNK} = (M_Y + M_N)/m_K \cdot f_{YNK}$

	A_{YN}	$ f_{YNK}/\sqrt{4\pi} $		
		Set I	Set II	Empirical
$A_{\Lambda p} = -A_{\Lambda n}$	$1/\sqrt{2}$	1.35	0.92	0.89 ± 0.10^a 0.94 ± 0.03^b
$A_{\Sigma^+ p} = A_{\Sigma^- n}$	$-1/3$	0.64	0.43	
$A_{\Sigma^0 p} = A_{\Sigma^0 n}$	$-1/3\sqrt{2}$	0.45	0.31	$< 0.43 \pm 0.07^a$ 0.25 ± 0.05^b
$A_{\Sigma^+ p} = A_{\Sigma^* n}$	$-2/\sqrt{3}$	2.21	1.50	
$A_{\Sigma^* 0 p} = A_{\Sigma^* 0 n}$	$-\sqrt{2/3}$	1.55	1.06	

^a Taken from Ref. [24].

^b Taken from Ref. [25].

where ω_1 is the P-wave bound-state energy and $\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{k}/k$.

Now we define here the nucleon state as [6]

$$|N\rangle = |i_3, j_3\rangle = \sqrt{\frac{2}{8\pi^2}} (-1)^{1/2+i_3} D_{-i_3, j_3}^{1/2}(\Theta) |0\rangle, \quad (3.20)$$

and the hyperon Λ , Σ and Σ^* states as

$$\begin{aligned} |Y\rangle &= |I, I_3; J, J_3\rangle \\ &= \sum_t \langle J, J_3 | I, J_3 - t; \frac{1}{2}, t \rangle \sqrt{\frac{2I+1}{8\pi^2}} (-1)^{I+I_3} D_{-I_3, J_3-t}^I(\Theta) a_t^\dagger |0\rangle, \end{aligned} \quad (3.21)$$

where Θ denotes the three Euler angles of the iso-rotation [19,17]. We express the $SU(2)$ iso-rotation \mathbf{A} as $A_{ai} = D_{a,i}^{1/2}(\Theta)$. Thus we have

$$\langle Y | A_{ai} \tilde{\mathcal{J}}_i^K(\mathbf{k}) | N \rangle = A_{YN} i(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k}) \tilde{G}_1(k), \quad (3.22)$$

where the vertex function $\tilde{G}_1(k)$ for the P-wave kaon is given as

$$\tilde{G}_1(k) = \sqrt{4\pi} \frac{(\omega_k^2 - \omega_1^2)}{k} \int dr r^2 j_1(kr) k_1(r), \quad (3.23)$$

and $\boldsymbol{\sigma}$ should be replaced by the transition spin matrix, S , from $J = \frac{1}{2}$ to $J = \frac{3}{2}$ for $Y = \Sigma^*$, which we define as $(S_i)_{mn} = \langle \frac{3}{2}, m | 1, i; \frac{1}{2}, n \rangle$. The coefficients A_{YN} are given in Table 2, where we note that the minus sign is multiplied to the vertices with K^- meson, because the correct isospin multiplet of the antikaon is $(\bar{K}^0, -K^-)$, while our antikaon multiplet is (K^-, \bar{K}^0) .

Fixing the common mass scale at m_K for the kaon coupling constants, we define the pseudovector coupling constant f_{YNK}/m_K as

$$\frac{f_{YNK}}{m_K} = \sqrt{4\pi} A_{YN} \lim_{\omega_k \rightarrow \omega_1} \frac{\omega_k^2 - \omega_1^2}{k} \int dr r^2 j_1(kr) k_1(r), \quad (3.24)$$

because the Born term has the pole at $\omega_k = M_Y - M_N$, that is $\omega_k = \omega_1$ at leading order in the $1/N_c$ expansion. Using the asymptotic form of the normalized bound-state wave function,

$$k_1(r) \sim \alpha_1 \frac{1 + \kappa_1 r}{r^2} e^{-\kappa_1 r}, \quad (3.25)$$

with $\kappa_1 = \sqrt{m_K^2 - \omega_1^2}$, we have

$$\frac{f_{YNK}}{m_K} = \sqrt{4\pi} \Lambda_{YN} \alpha_1. \quad (3.26)$$

Note that the dimension of α_1 is linear in length from the normalization condition on k_1 . The pseudoscalar coupling constant G_{YNK} is given by

$$G_{YNK} = \frac{M_N + M_Y}{m_K} f_{YNK}. \quad (3.27)$$

According to the compilation of coupling constants of the 1982 Edition [25] and Ref. [26] the empirical coupling constants are given, respectively, as

$$\begin{aligned} \left| \frac{f_{\Lambda p K^-}}{\sqrt{4\pi}} \right| &= 0.89 \pm 0.10, & \left| \frac{f_{\Sigma^0 p K^-}}{\sqrt{4\pi}} \right| &< 0.43 \pm 0.07, \\ \left| \frac{f_{\Lambda p K^-}}{\sqrt{4\pi}} \right| &= 0.94 \pm 0.03, & \left| \frac{f_{\Sigma^0 p K^-}}{\sqrt{4\pi}} \right| &= 0.25 \pm 0.05, \end{aligned} \quad (3.28)$$

while our results on $|f_{\Lambda p K^-}/\sqrt{4\pi}|$ are 1.35 for Set I and 0.92 for Set II, and the results on $|f_{\Sigma^0 p K^-}/\sqrt{4\pi}|$ are 0.45 and 0.31 for Set I and II, respectively. The parameter set II seems to be better than Set I. These results are very encouraging to the model. The coefficients Λ_{YN} and the pseudovector coupling constants $f_{YN\pi}/\sqrt{4\pi}$ are summarized in Table 2.

3.2. Pion couplings

In order to derive the pion source term we have to calculate the second derivatives of the total pion field with respect to time: $\ddot{\Phi}_a$ is given through the commutator with H_{Sky} as

$$\ddot{\Phi}_a = -G^{-1}_{ab} \frac{\delta \mathcal{V}[\Phi, \nabla \Phi]}{\delta \Phi_b} + \text{terms with } \pi^2. \quad (3.29)$$

Note that if the Φ_a are replaced by the classical fields of $O(N_c^{1/2})$, $\delta \mathcal{V}/\delta \Phi_b = 0$ is the equation of motion of the classical soliton configuration, and that the terms with π^2 are discarded, since they are of $O(N_c^{-3/2})$. Thus, the leading pion source term J_a^π comes from $(-\nabla^2 + m_\pi^2)\Phi_a$, which gives the pion coupling constants of $O(N_c^{1/2})$ to the positive-parity hyperons as shown for the nucleon and Δ couplings [21]. For the positive-parity hyperons the leading source term of the pion is given as

$$J_a^\pi(0) = (-\nabla^2 + m_\pi^2)\Phi_a(0), \quad (3.30)$$

and then the pion coupling constant is written as

$$\langle Y' | \widetilde{J}_a^\pi(\mathbf{q}) | Y \rangle = \langle Y' | R_{ai} \widetilde{\mathcal{J}}_i^\pi(\mathbf{q}) | Y \rangle, \quad (3.31)$$

where the rotational matrix $R_{ai} = \frac{1}{2} \text{Tr}(\tau_a \mathbf{A} \tau_i \mathbf{A}^\dagger)$ is represented by $(-1)^a D_{-a,i}^1(\theta)$ as the function of the Euler angles of the iso-rotation, which is consistent with $A_{ai} = D_{ai}^{1/2}(\theta)$ used previously, and

$$\widetilde{\mathcal{J}}_i^\pi(\mathbf{q}) = i q_i \frac{\omega_q^2}{q} \int d^3 r j_1(qr) f_\pi \sin F(r). \quad (3.32)$$

Then we have

$$\langle Y' | \widetilde{J}_a^\pi(\mathbf{q}) | Y \rangle = \Lambda_{Y'Y} (i \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{q}) \mathbf{I}_a^{I' I} \widetilde{G}_\pi(\mathbf{q}) \quad (3.33)$$

for $Y' = \Sigma$ and $Y = \Sigma$ or Λ , and $(I_a^{I' I})_{I_3' I_3} = \langle I' I_3' | 1a; I I_3 \rangle$ is the transition isospin matrix from I to I' . For $Y' = Y = \Sigma$ we define the isospin matrix for $I = 1$ as $(I_a)^{I_3' I_3} = \sqrt{2} \langle 1 I_3' | 1a; 1 I_3 \rangle$. The vertex function $\widetilde{G}_\pi(\mathbf{q})$ is given as

$$\widetilde{G}_\pi(\mathbf{q}) = 4\pi \frac{\omega_q^2}{q} f_\pi \int dr r^2 j_1(qr) \sin F(r). \quad (3.34)$$

For $Y' = \Sigma^*$ and $Y = \Sigma, \Lambda$,

$$\langle Y' | \widetilde{J}_a^\pi(\mathbf{q}) | Y \rangle = \Lambda_{\Sigma^* Y} (i \mathbf{S} \cdot \mathbf{q}) \mathbf{I}_a^{I' I} \widetilde{G}_\pi(\mathbf{q}). \quad (3.35)$$

The residue of the Σ^* resonance in the elastic $\pi \Lambda \rightarrow \Sigma^* \rightarrow \pi \Lambda$ process is written as

$$(S \cdot \mathbf{q}')^\dagger (S \cdot \mathbf{q}) \Lambda_{\Sigma^* \Lambda}^2 \widetilde{G}_\pi^2(\mathbf{q}) = P_3(\mathbf{q}', \mathbf{q}) \Lambda_{\Sigma^* \Lambda}^2 \frac{1}{3} \widetilde{G}_\pi^2(\mathbf{q}), \quad (3.36)$$

$$P_3(\mathbf{q}', \mathbf{q}) = 3(\mathbf{q}' \cdot \mathbf{q}) - (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{q}')(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{q}), \quad (3.37)$$

where $P_3(\mathbf{q}', \mathbf{q})$ is the projection operator of $J^P = \frac{3}{2}^+$. Note that an extra factor $\frac{1}{3}$ appears in the residue.

Setting the mass scale to the pion mass for the pion coupling constants, we define the pseudovector pion coupling constant $f_{Y'Y\pi}$ as

$$\frac{f_{Y'Y\pi}}{m_\pi} = 4\pi f_\pi \Lambda_{Y'Y} \lim_{\omega_q \rightarrow 0} \frac{\omega_q^2}{q} \int dr r^2 j_1(qr) \sin F(r), \quad (3.38)$$

because the Born term has the pole at $\omega_q = M_{Y'} - M_Y$, which is zero at leading order. The argument similar to Eq. (3.26) gives the pion coupling constant as

$$\frac{f_{Y'Y\pi}}{m_\pi} = 4\pi \Lambda_{Y'Y} f_\pi \alpha_\pi, \quad (3.39)$$

where we used the form of $F(r)$ for large r ,

$$F(r) \sim \alpha_\pi \frac{1 + m_\pi r}{r^2} e^{-m_\pi r}. \quad (3.40)$$

We find that the pion coupling constants of the hyperons are near the empirical values: $f_{\Sigma \Lambda \pi}/\sqrt{4\pi} = 0.20 \pm 0.01$ and $f_{\Sigma \Sigma \pi}/\sqrt{4\pi} = 0.21 \pm 0.02$ [25]. The pseudovector

Table 3

$A_{Y'Y}$ and the pseudovector coupling constants. $f_{NN\pi}$ and $f_{\Delta N\pi}$ are also given for comparison. $G_{Y'Y\pi} = (M_Y + M_{Y'})/m_\pi \cdot f_{Y'Y\pi}$

$Y'Y$	$A_{Y'Y}$	$ f_{Y'Y\pi}/\sqrt{4\pi} $		
		Set I	Set II	Empirical
ΣA	1/3	0.25	0.22	0.20 ± 0.01 ^a
$\Sigma\Sigma$	1/3	0.25	0.22	0.21 ± 0.02 ^a
$\Sigma^* A$	-1/√3	0.43	0.38	0.35 ^b
$\Sigma^* \Sigma$	1/√12	0.21	0.19	0.19 ^b
NN	-1/3	0.25	0.22	0.27
ΔN	-1/√2	0.54	0.47	0.60 ^b

^a Taken from Ref. [24].

^b Calculated through the formula for the width $\Gamma = 2/3(f^2/4\pi)(k^3/m_\pi^2)E/M_R$, where M_R is the resonance mass, k the CM momentum and E the energy of the baryon in the decay channel.

coupling constants and the coefficients are summarized in Table 3, where we also give those of the non-strange nucleon and Δ . The coefficients give the same ratios of the pion coupling constants as the $SU(3)$ symmetry at the large N_c limit [8]; for example

$$(\Sigma^{*+} \rightarrow \Sigma^0 \pi^+) / (\Sigma^{*+} \rightarrow \Lambda \pi^+) = -1/2,$$

$$(\Delta^{++} \rightarrow p \pi^+) / (\Sigma^{*+} \rightarrow \Sigma^0 \pi^+) = -\sqrt{6}.$$

The $NN\pi$ coupling constant $f_{NN\pi}$ is a little bit smaller for Set II than for Set I and the empirical value. We think, however, that the value of $f_{NN\pi}$ is much improved in Set II, since f_π is kept equal to the physical value and the axial vector coupling constant g_A becomes 1.03 in Set II compared to $f_\pi = 54$ MeV and $g_A = 0.65$ in Set I.

4. Kaon coupling to $\Lambda^*(1405)$ and negative-parity Σ states

In the bound-state approach to strangeness Λ^* is the bound state of the S-wave kaon. The S-wave bound state disappears as the kaon mass becomes small below the physical one, for example the zero-energy bound state appears near $m_K \sim 300$ MeV for the parameter set II, i.e. the bound-state pole on the physical sheet moves to a resonance pole on the unphysical sheet of the $\bar{K}-N$ scattering amplitude.

The kaon wave function in the intrinsic frame is given as

$$\mathcal{K}_S(r, t) = k_0^*(r) e^{i\omega_0 t} \begin{pmatrix} a_{-1/2}^+ Y_{00}^* \\ -a_{1/2}^+ Y_{00}^* \end{pmatrix} \equiv k_0^\dagger(r) e^{i\omega_0 t} \Omega_0(a^\dagger; \theta, \phi), \quad (4.1)$$

where k_0 is the radial wave function, and $a_i^\dagger = a_{0,1/2,i}^\dagger$. The Λ^* state is expressed as

$$|\Lambda^*; j_3\rangle = \sum_t \sqrt{\frac{1}{8\pi^2}} D_{0,j_3-1}^0(\theta) a_t^\dagger |0\rangle = \sqrt{\frac{1}{8\pi^2}} D_{0,0}^0(\theta) a_{j_3}^\dagger |0\rangle. \quad (4.2)$$

Then, we have

$$\langle \Lambda^*; J_3 | A_{ai} \tilde{\mathcal{T}}_i^K(k) | N; j_3 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \tilde{G}_0(k) \delta_{J_3 j_3}, \quad (4.3)$$

where

$$\tilde{G}_0(k) = \sqrt{4\pi} (\omega_k^2 - \omega_0^2) \int dr r^2 j_0(kr) k_0(r) \quad (4.4)$$

with ω_0 being the S-wave bound-state energy. The pseudoscalar kaon coupling constant to $K\Lambda^*N$ is of $O(N_c^0)$, the same as the kaon coupling constants for the positive-parity hyperons, and are given as follows: Since the pole is at $\omega_k = M_{\Lambda^*} - M_N = \omega_0 + O(N_c^{-1})$, we have

$$G_{\Lambda^*NK} = \sqrt{4\pi} A_{\Lambda N} \lim_{\omega_k \rightarrow \omega_0} (\omega_k^2 - \omega_0^2) \int dr r^2 j_0(kr) k_0(r) \\ = \sqrt{4\pi} A_{\Lambda N} \alpha_0 \kappa_0, \quad (4.5)$$

where $\kappa_0 = \sqrt{m_K^2 - \omega_0^2}$ and asymptotically

$$k_0(r) \sim \frac{\alpha_0 K}{r} e^{-\kappa_0 r}. \quad (4.6)$$

Note that $\alpha_0 \kappa_0$ is dimensionless.

We get

$$G_{\Lambda^*pK^-} / \sqrt{4\pi} = -1.45 \quad \text{and} \quad -0.72 \quad (4.7)$$

for Set I and II, respectively. According to the phenomenological analysis of the contributions of the Λ^* resonance to KN and $\bar{K}N$ scattering length gives it to be 0.75 and 0.58 for $\bar{g}_{\Lambda^*}^2 = 0.25$ and 0.15, respectively, where $|G_{\Lambda^*pK^-}| = \bar{g}_{\Lambda^*} m_K / f_\pi$ [27]. So, the coupling constant in Set I seems to be too large. However, the experimental value of $\text{Im} A_{K^-p} \sim 0.7$ fm would restrict the upper bound of $G_{\Lambda^*pK^-}^2 / \sqrt{4\pi}$ to about 0.6 for $\Gamma^* = 50$ MeV with Γ^* being the decay width of Λ^* , because the imaginary parts coming from various channels sum up due to the unitarity of the elastic amplitude, and the imaginary part of the resonance amplitude is written as

$$i \frac{\Gamma^*/2}{(M_{\Lambda^*} - M_N - m_K)^2 + (\Gamma^*/2)^2} G_{\Lambda^*pK^-}^2. \quad (4.8)$$

Since the $SU(2)$ soliton has the rotational $I = J$ band with I being an integral number 0, 1, ... for $S = -1$ channel, the bound-state approach generates Σ states with negative parity besides the Λ^* state. We denote these states as $\Sigma_{1/2}^-$ and $\Sigma_{3/2}^-$ with spin $\frac{1}{2}$ and $\frac{3}{2}$, respectively. Here we examine whether the Σ_S^- states can interact with non-exotic channels such as $\bar{K}N$ and πY channels.

The $\Sigma_{1/2}^-$ state is written as

$$|\Sigma_{1/2}^-; I_3, J_3\rangle = \sqrt{\frac{3}{8\pi^2}} \sum_{t=\pm 1/2} (-1)^{1+I_3} \langle \frac{1}{2}, J_3 | 1, J_3 - t; \frac{1}{2}, t \rangle D_{-I_3, J_3 - t}^1 a_t^\dagger |0\rangle. \quad (4.9)$$

The $\Sigma_{1/2}^- NK$ coupling constant is given as

$$\langle \Sigma_{1/2}^-; J_3, I_3 | A_{oi} \tilde{J}_i^K(k) | N; j_3 \rangle = A_{\Sigma_{1/2}^- N} \tilde{G}_0(k) \delta_{J_3 j_3}, \quad (4.10)$$

where $A_{\Sigma_{1/2}^0 p} = 1/\sqrt{2}$ and $A_{\Sigma_{1/2}^- p} = -1$. $\Sigma_{1/2}^-$ would couple to $A\pi$ and $\Sigma\pi$ as $G_{A^* \Sigma\pi}$, which are of $O(N_c^{-1/2})$. Thus, the $\Sigma_{1/2}^-$ state can strongly interact with $\bar{K}^0 p$ and $\pi\Sigma$, which are the elastic channels.

As to $\Sigma_{3/2}^-$ the model predicts that it cannot interact with the elastic $\bar{K}N$ channel, but it can do with the $\bar{K}\Delta$ at $O(N_c^0)$:

$$\langle \Sigma_{3/2}^-; I_3, J_3 | A_{oi} \tilde{J}_i^K(k) | \Delta; i_3, j_3 \rangle = A_{\Sigma_{3/2}^- \Delta} \tilde{G}_0(k) \delta_{J_3 j_3}. \quad (4.11)$$

The pion couplings among the negative-parity states A^* , $\Sigma_{1/2}^-$ and $\Sigma_{3/2}^-$ occur at leading order $O(N_c^{1/2})$. For example,

$$\langle \Sigma_{3/2}^-; I_3, J_3 | J_a^\pi(q) | A^*; j_3 \rangle = -\frac{1}{\sqrt{3}} i(\mathbf{S} \cdot \mathbf{q}) \tilde{G}_\pi(q), \quad (4.12)$$

but it is also impossible to couple to the πY channels in the model. Thus, the $\Sigma_{3/2}^-$ could not interact with the elastic channels.

Is there a candidate for the $\Sigma_{1/2,1/3}^-$ state? If c_0 is larger than c_1 , the mass difference between $\Sigma_{1/2}^-$ and A^* cannot be larger than the mass difference between Σ and A . Therefore, $\Sigma_{1/2}^-$ could not be attributed to the established $\Sigma(1750)$, because the mass spacing from A^* is too large. There is an indication of an enhancement near 1480 MeV in the $\bar{K}^0 p$ mass spectrum, whose spin and parity are not known [29,30]. $\Sigma_{1/2}^-$ may be attributed to this $\Sigma(1480)$, though it is not yet established, and if $\Sigma_{1/2}^-$ exists really, it would lie above but not far from the $\bar{K}N$ threshold. The resonance above the $\bar{K}N$ threshold contributes a positive value to the K^-n scattering length. The mass difference between $\Sigma_{3/2}^-$ and A^* would be larger than $c_0(M_\Delta - M_N)$, but since it does not interact with the elastic channels, it may be difficult to observe the $\Sigma_{3/2}^-$ state.

5. Conclusions and discussion

We have formulated the pion and kaon coupling constants to baryons with strangeness in the bound-state approach to strangeness in the Skyrme-soliton model. The positive-parity hyperons $\Lambda(1115)$, $\Sigma(1192)$ and $\Sigma^*(1385)$ appear as the bound states of the P-wave kaon to the $SU(2)$ soliton, whereas the $\Lambda^*(1405)$ shows up as the S-wave bound state in this approach.

The pion fields used in the Lagrangian and Hamiltonian are defined as the total fields consisting of the classical Skyrme fields and the fluctuation. The kaon fields are introduced as the fluctuation around the $SU(2)$ soliton in the laboratory system according to the Callan-Klebanov ansatz [3]. The meson-baryon vertices are defined

as the source terms of the pion and kaon fields sandwiched between the single-baryon states. The sandwiched source term is rewritten in terms of the variables in the intrinsic frame of the soliton; the pion field becomes the Skyrme field and the kaon field becomes the bound-state one. The kaon coupling to the positive-parity hyperon is of non-relativistic pseudovector type. The coupling constant is defined as the residue at the pole of the Born term. According to this definition, the magnitude of the kaon coupling constant is controlled by the asymptotic behavior of the normalized bound-state wave function just as the pion coupling constant is controlled by the asymptotic behavior of the chiral angle. Thus, if the equation of the bound state is the same, irrespective of the ansatz by Callan-Klebanov or Blom et al., the resultant coupling constant does not depend on the ansatz adopted.

The order of the coupling constants in the $1/N_c$ expansion is such that f_{YNK} is of $O(N_c^0)$, $f_{Y^*Y\pi}$ of $O(N_c^{1/2})$ and G_{A^*NK} is of $O(N_c^0)$. We found that the kaon vertex to the hyperon is of non-relativistic pseudovector type, as is the πNN vertex. Since the A^* state is the bound state of the S-wave kaon, strangeness cannot flow within the baryon line from A^* to the positive-parity hyperon states. In order to obtain $G_{A^* \Sigma\pi}$, we have to construct higher-order pion source terms of $O(N_c^{-1/2})$, which are bilinear in \bar{K} and K . This elaborate task of constructing the higher-order source term of the pion will appear elsewhere.

According to Refs. [19,20] the kaon Lagrangian bilinear in K^\dagger and K of Eq. (2.8) is changed into an effective Lagrangian, the matrix elements of which are regarded as the kaon couplings, by transforming $K(x)$ to the intrinsic field $\mathbf{AK}(x)$ and $K^\dagger(x)$ to the free field. Their vertices for the positive hyperons are not of the pure non-relativistic pseudovector coupling. On the contrary, our kaon-baryon vertices are of the pure non-relativistic pseudovector type as is the pion coupling, and much more simple and transparent than theirs with respect to the definition of the vertices. As to the A^*NK coupling, their coupling constant is simply reduced to

$$\frac{G_{A^* pK^-}}{\sqrt{4\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int dr r^2 k_0(m_K - \omega_0)(f\omega_0 + \lambda) \quad (5.1)$$

by using the equation of motion of k_0 , while ours is written as

$$\frac{G_{A^* pK^-}}{\sqrt{4\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int dr r^2 k_0(m_K^2 - \omega_0^2) \quad (5.2)$$

at $k=0$, as seen from Eq. (4.5). The magnitudes of the kaon coupling constants both for the P- and S-wave couplings in Set I in our method are about twice as large as those of Ref. [19], even if we take the kaon decay constant f_K to be $f_K/f_\pi = 1.22$ as in their Set I.

If we adopt the $SU(3)$ collective-coordinate method instead of the bound-state approach, the Lagrangian for the kaon fields as the fluctuation around the non-strange soliton is written as bilinear forms of the kaon fields just as in the bound-state approach. But it cannot straightforwardly give the Yukawa vertices, because the hyperons appear as the $SU(3)$ rotating soliton and do not involve any kaons as the fluctuation at the tree

level as in the $SU(2)$ case for the fluctuating pion vertices. The Yukawa coupling of the kaon occurs as a higher-order term coming from the fact that the rotating solitons break the equations of motion. Our method can be applicable to the $SU(3)$ collective-coordinate method as in the $SU(2)$ case [31], though it would be much involved.

From the comparison of the calculated kaon and pion coupling constants with the phenomenological analyses [25-27], we found that the parameters of the model in Set II are better than those in Set I. We also note that the magnitude of g_A of the nucleon is $g_A = 1.03$ in Set II, but it is 0.65 in Set I. Although the value of f_π is fixed to the empirical value of 93 MeV, the Skyrme constant is set to a rather small value, $e = 4.0$ in Set II. Such a small value of the Skyrme constant could not be supported by the chiral perturbation theory in the meson sector, but it seems that the Skyrme Lagrangian with the parameters of Set II, having no chiral sixth-order terms, is effectively equivalent to the one with a large value of the Skyrme constant supplemented by the standard sixth-order term $-\frac{1}{2}e_6^2 B^\mu B_\mu$ [23,24].

Since the $SU(2)$ soliton has the rotational $I = J$ band with I being an integral number 0, 1, ... for $S = -1$ channel, the bound-state approach generates baryons with the isospin such as $I \geq 2$ for the P-wave bound state and $I \geq 1$ for the S-wave bound state. None of the Σ states with negative parity are exotic, because the $\Sigma_{1/2}^-$ can interact with the $\bar{K}N$ and πY channels as discussed in the previous section. If the low-lying Σ states with negative parity predicted by the model are not observed at all, the prediction of the Σ states with negative parity may be a defect of the bound-state approach to the Skyrme model. It is important, therefore, to reveal experimentally low-energy resonances in the $\bar{K}N$ and πY channels for the validity of the model. Nevertheless, we emphasize that the model can be applicable to low-energy physics in a great variety of ways as an effective theory.

Acknowledgements

This work was partially supported by a Grant-in-Aid for Scientific Research of Japan Ministry of Education, Science and Culture (No. 06640405).

Appendix A. Hamiltonian in the intrinsic frame

If we sandwich the total Hamiltonian $H = \int d^3x \mathcal{H}$ between two single-hyperon states $|Y(p)\rangle$,

$$\langle Y(p') | H[\Phi, \pi; K, \Pi] | Y(p) \rangle, \quad (\text{A.1})$$

the total fields Φ_a and π_a are reduced to the classical Skyrmion configuration in the tree approximation [21], and also the kaon fields are reduced to the bound-state fields with a specific angular momentum, both of which are defined in the intrinsic frame of

the Skyrme soliton. These are defined in Eqs. (3.9)-(3.13). Their time derivatives are given as

$$\dot{K}(x) = \mathbf{A}(t)\dot{\mathcal{K}} + \dot{\mathbf{A}}\mathcal{K} - \dot{\mathbf{X}} \cdot \nabla \mathcal{K}, \quad (\text{A.2})$$

$$\dot{\phi}_a(x) = \dot{R}_{ai}\hat{\phi}_i - R_{ai}\dot{\mathbf{X}} \cdot \nabla \hat{\phi}_i \quad (\text{A.3})$$

with

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^\dagger \dot{\mathbf{A}} &= \frac{i\tau_a}{2} \dot{\theta}_a, \\ R_{aj}\dot{R}_{ai} &= \varepsilon_{jib} \dot{\theta}_b, \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

where $\dot{\theta}_a$ is the angular velocity around the a th iso-spin axis and \mathbf{X} is the center of the Skyrmion. Since the mixing terms of the rotational and translational modes vanish or are of higher order, $\dot{\theta}_a$ and \dot{X}_i are given separately by their conjugate momenta, which are defined as

$$I_a = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_a} = A_S \dot{\theta}_a - c_t T_a, \quad (\text{A.5})$$

$$P_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{X}_i} = M_S \dot{X}_i + P_i^K, \quad (\text{A.6})$$

where I_a is the angular momentum of the soliton in the intrinsic frame, \mathbf{T} is the spin of the bound kaon, $(T_a)_{t'v} = a_t^\dagger (\tau_a/2) a_{t'}$, and the constant c_t depends on the angular momentum of the bound kaon, which are given as

$$c_1 = 1 - \int dr r^2 k_1^2 \omega_1 \left\{ \frac{4}{3} (1+c) \left(f + \frac{s^2}{2\kappa^2 r^2} \right) - \frac{1}{\kappa^2 r^2} \frac{d}{dr} (r^2 F' s) \right\}, \quad (\text{A.7})$$

$$c_0 = 1 - \int dr r^2 k_0^2 \omega_0 \left\{ \frac{4}{3} (1-c) \left(f + \frac{s^2}{2\kappa^2 r^2} \right) + \frac{1}{\kappa^2 r^2} \frac{d}{dr} (r^2 F' s) \right\}. \quad (\text{A.8})$$

For the linear momentum, \mathbf{P}^K denotes the kaon momentum defined as

$$\mathbf{P}^K = - \int d^3r \{ \hat{\Pi}^\dagger \nabla \mathcal{K} + \text{h.c.} \}, \quad (\text{A.9})$$

where $\hat{\Pi}$ is the momentum field in the intrinsic frame, which can be defined as $f\dot{K}_\beta + i\lambda K_\beta$. Thus, we can regard $\mathbf{P}_S = \mathbf{P} - \mathbf{P}^K$ as the baryon momentum. We note that there are additional higher-order terms in Eq. (A.6), which vanish for the bound-state kaon, because the bound-state kaon has a definite angular momentum and parity.

Then we have the intrinsic Hamiltonian responsible for the bound states in the tree approximation:

$$H = M_S + \sum_{\ell=0,1} \frac{(\mathbf{I} + c_\ell \mathbf{T})^2}{2A_S} + \frac{\mathbf{P}_S^2}{2M_S} + \sum_{\ell=0,1, \ell=\pm 1/2} \omega_\ell a_{\ell,t}^\dagger a_{\ell,t}. \quad (\text{A.10})$$

We see that $\mathcal{H}_{\pi K}$ is absorbed into the first term through the transformation from the laboratory to the intrinsic frame. Thus, we see that

$$\begin{aligned} \langle Y(p') | H[\Phi, \pi; K, \Pi] | Y(p) \rangle &= \left(M_s + \omega_f + \frac{(\mathbf{I} + c\mathbf{T})^2}{2A_s} + \frac{p^2}{2M_s} \right) \delta(p' - p) \\ &= \left(M_Y + \frac{p^2}{2M_Y} \right) \delta(p' - p) + O(N_c^{-2}), \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

which is the non-relativistic energy of the hyperon in the tree approximation.

References

- [1] E. Guadanini, Nucl. Phys. B 236 (1984) 35; P.O. Mazur, M.A. Novak and M. Praszlowicz, Phys. Lett. B 147 (1984) 137; M. Praszlowicz, Phys. Lett. B 158 (1985) 214.
- [2] H. Yabu and K. Ando, Nucl. Phys. B 301 (1988) 601.
- [3] C.G. Callan and I. Klebanov, Nucl. Phys. B 262 (1985) 367.
- [4] E. Witten, Nucl. Phys. B 223 (1983) 422; B 223 (1983) 825.
- [5] G.S. Adkins, C.R. Nappi and E. Witten, Nucl. Phys. B 288 (1983) 552.
- [6] G.S. Adkins and C.R. Nappi, Nucl. Phys. B 233 (1984) 109.
- [7] D.B. Kaplan and I. Klebanov, Nucl. Phys. B 335 (1990) 45.
- [8] R. Dashen, E. Jenkins and A.V. Manohar, Phys. Rev. D 49 (1994) 4713.
- [9] C.G. Callan, K. Hornbostel and I. Klebanov, Phys. Lett. B 202 (1988) 269.
- [10] N.N. Scoccola, H. Nadeau, M.A. Nowak and M. Rho, Phys. Lett. B 201 (1988) 425; J.P. Blaizot, M. Rho and N.N. Scoccola, Phys. Lett. B 209 (1988) 27.
- [11] U. Blom, K. Dannbom and D.O. Riska, Nucl. Phys. A 491 (1989) 384.
- [12] E.M. Nyman and D.O. Riska, Nucl. Phys. B 325 (1989) 593.
- [13] N.N. Scoccola, D.-P. Min, H. Nadeau and M. Rho, Nucl. Phys. A 505 (1989) 497.
- [14] J. Kunz and P.J. Mulders, Phys. Rev. D 41 (1990) 1578.
- [15] Y. Oh, D.-P. Min, M. Rho and N.N. Scoccola, Nucl. Phys. A 534 (1991) 493.
- [16] M. Rho, D.O. Riska and N.N. Scoccola, Z. Phys. A 341 (1992) 343.
- [17] Y. Kondo, S. Saito and T. Otofujii, Phys. Lett. B 236 (1990) 1; B 256 (1991) 316.
- [18] N.N. Scoccola, Phys. Lett. B 236 (1990) 245.
- [19] C. Gobbi, D.O. Riska and N.N. Scoccola, Nucl. Phys. A 544 (1992) 671.
- [20] C.L. Schat, N.N. Scoccola and C. Gobbi, Nucl. Phys. A 585 (1995) 627.
- [21] A. Hayashi, S. Saito and M. Uehara, Phys. Rev. D 46 (1992) 4856.
- [22] S. Saito and M. Uehara, Phys. Rev. D 51 (1995) 6059.
- [23] B. Moussallam, Ann. Phys. 225 (1993) 264.
- [24] G. Holtzwarth and H. Walliser, Nucl. Phys. A 587 (1995) 721.
- [25] O. Dumbrajs, R. Koch, H. Pilkuhn, G.C. Oades, H. Behrens, J.J. de Swart and P. Kroll, Nucl. Phys. B 216 (1983) 277.
- [26] R.G.E. Timmermann, Th.A. Rijken and J.J. de Swart, Nucl. Phys. A 585 (1995) 143c.
- [27] C.-H. Lee, H. Jung, D.-P. Min and M. Rho, Phys. Lett. B 326 (1994) 14; C.-H. Lee, G.E. Brown, D.-P. Min and M. Rho, Nucl. Phys. A 585 (1995) 401.
- [28] H. Lehmann, K. Symanzik and W. Zimmermann, Nuovo Cim. 1 (1955) 205.
- [29] J.J. Engelen et al., Nucl. Phys. B 133 (1980) 61.
- [30] Particle Data Group, Phys. Rev. D 50 (1994) 1753, and references therein.
- [31] A. Hayashi, S. Saito and M. Uehara, Phys. Rev. D 43 (1991) 1520.

NUCLEAR PHYSICS A

Journal devoted to the experimental and theoretical study of the fundamental constituents of matter and their interactions

Instructions to Authors – Short Version

(A more detailed version of these instructions is published in the preliminary pages of each volume of the journal)

Submission of papers

Manuscripts should be sent to:

Before acceptance

Nuclear Physics A, Editorial Office
Matrix Building, Science Center WCW
Kruislaan 419, 1098 VA Amsterdam, The Netherlands
Tel.: +31 20 5618161 Fax: +31 20 6654969
e-mail: npa@jnl.nucphys.nl

Original material. Submission of a paper implies that the material has not been published before and that it is not being considered for publication elsewhere. *Referees.* All submitted papers are subject to a refereeing process. Electronic submission of LaTeX files by e-mail is preferred. Hard copy contributions should be sent in triplicate.

Types of paper

Concise written research papers are welcome. Letter-type contributions and unnecessarily long papers cannot be accepted.

Manuscript preparation

Language. Manuscripts should be written in good English. *Structure.* Please adhere to the following order: Title, Authors, Affiliations, Abstract, PACS codes, Keywords, Main text, Acknowledgements, Appendix, References, Vitae, Figure legends, Tables. *Corresponding author.* Please indicate the corresponding author: full postal address, e-mail address, telephone and fax numbers on the title page. *Abstract.* All papers should have an abstract of no more than 150 words. *PACS classification codes/Keywords.* Please supply us with one or more relevant PACS classification codes and 1-6 keywords of your own choice for indexing purposes. *References.* References to other work should be consecutively numbered in the text using square brackets and listed by number at the end of the article. *Illustrations.* Illustrations should also be submitted in triplicate. One set must be in publishable condition. Figures should be clearly numbered. *Colour.* If judged essential by the Editor figures may be published in colour. The Publisher and the author will each bear part of the extra costs involved. Further information is available from the Publisher.

Copyright transfer

You will be asked to transfer the copyright to the Publisher. This will ensure the widest possible dissemination of scientific information.

Electronic publishing

The Publisher welcomes the receipt of your accepted manuscript as an electronic file (LaTeX). For further information, please refer to the more detailed Instructions to Authors or contact the Publisher at the address below.

Author benefits

No page charge. Publishing in Nuclear Physics A is free. *Free offprints.* The corresponding author will receive 50 offprints of the article free of charge. An offprint order form will be supplied for ordering any additional paid offprints. *Discount.* Contributors to Elsevier Science journals are entitled to a 30% discount on all Elsevier books. A coupon will be sent to you. *Contents Alert.* Nuclear Physics A is included in Elsevier's pre-publication service Contents Alert. *Nuclear Physics Electronic.* Nuclear Physics A is included in Nuclear Physics Electronic.

For further information

After acceptance

Elsevier Science BV, Nuclear Physics A
Issue Management Physics and Materials Science
P.O. Box 2759, 1000 CT Amsterdam, The Netherlands
Tel.: +31 20 485-2573 Fax: +31 20 485-2431
e-mail: nhpnuclear@elsevier.nl



North-Holland, an imprint of Elsevier Science

