

物質科学を学ぶための
解析力学の基礎事項

名古屋大学大学院・環境学研究科
名古屋大学理学部・地球惑星科学科

教授 川邊 岩夫

(2006年4月4日)

目 次

はじめに	v
§1 Lagrange 関数と Lagrange の運動方程式	1
1) 極座標系で表現した Newton の運動方程式	1
2) Lagrange 関数と Lagrange の運動方程式	7
3) 正電荷を持つ核の廻りの電子の運動: Lagrange の方程式の応用	9
4) 一般化座標, 運動の自由度, Lagrange の運動方程式	13
5) 座標変換に不変な Lagrange の運動方程式	14
§2 微小振動と基準振動	18
1) 連成振動系の微小振動	18
2) 座標変数の一次変換と基準振動	20
3) 直交する基準振動の変位	22
4) 座標変換の意味	23
5) 多質点系の微小振動問題	26
5.1 多質点系微小振動の Lagrangian とその運動方程式	26
5-2. 運動方程式の解法: 固有方程式の固有値と固有ベクトル	29
5.3 固有ベクトルの直交性と規格化	31
5.4 微小振動の独立解と一般解	36
5.5 Lagrangian の行列表現	38
§3 Hamilton 関数と Hamilton の運動方程式	41
1) 保存力場の一粒子系に対する Hamilton の運動方程式	41
2) 一般化運動量と正準方程式	42
§4 変分原理 (Hamilton の原理)	45
1) 作用積分と変分原理: Euler-Lagrange 方程式の導出	45
2) Hamilton の正準方程式: Lagrangian から Hamiltonian へ	48
3) Hamilton 関数 (Hamiltonian) の具体例	51
4) 循環座標と運動量の保存	52
5) Lagrangian の任意性と Hamiltonian	54
§5 電磁場での荷電粒子の運動とその Lagrangian と Hamiltonian	60
1) 電磁場における荷電粒子の運動とローレンツ力	60
2) ベクトル解析の要約: grad, div, rot など	61
3) 電磁ポテンシャル	66
4) 電磁ポテンシャル (φ, \mathbf{A}) とゲージ変換不変性	68
4.1 Maxwell 方程式と電磁ポテンシャル (φ, \mathbf{A})	68
4.2 ベクトルポテンシャル \mathbf{A} の任意性とゲージ変換	69

4.3	ローレンツ条件	71
4.4	クーロン条件	73
4.5	真空中の電磁場	75
5)	荷電粒子の運動に対する L と H	78
6)	Lagrangian の任意性と電磁場のゲージ変換	82
7)	連続の式と電荷保存則	84
8)	電磁気学の構成とその教科書	86
§6	ポアソン (Poisson) 括弧式と保存量	89
1)	ポアソン括弧式と保存量	89
2)	ポアソン括弧式を用いた保存量の表現	91
2.1	H と”交換可能な”物理量	91
2.2	エネルギー保存	92
2.3	中心力場における一粒子系における角運動量の保存	92
3)	ポアソン括弧式の性質と正準共役変数	94
§7	Lagrange の未定乗数法	97
1)	拘束条件が一つである場合の極値問題	97
2)	拘束条件が複数存在する場合の極値条件	99
§8	正準変数としてのエネルギーと時間	101
1)	変分法の復習	101
2)	時間 t も正準変数と見なす場合: t を陽に含む H を考える	102
3)	正準量子化手続きとの関連	105
4)	量子力学のポアソン括弧式と正準共役の定義について	107
§9	正準変換とその母関数	110
1)	正準変換	110
2)	正準変換の母関数	111
§10	正準変換の母関数, 熱力学法則, Schrödinger 方程式	117
1)	閉鎖系における熱力学の基本則	117
2)	閉鎖系準静的無限小過程に対する熱力学の基本式	118
3)	独立変数の組み合わせを変更する Legendre 変換	121
4)	開放系準静的無限小変化に対する熱力学の基本則	125
5)	熱力学関数と正準変換の母関数の対応	129
6)	[エネルギー・時間] の次元を持つ母関数 W : 量子力学との関連	131
§11	Hamilton-Jacobi の偏微分方程式	134
1)	力学系運動の記述を単純化する正準変換	134
2)	Hamilton-Jacobi の方程式の意味すること	136
3)	H が時間 t を陽に含まない場合の Hamilton-Jacobi の方程式	137

4) 座標変数の相互分離	141
5) Hamilton-Jacobi の方程式の解法例	142
§ 12 正準変換とポアソン括弧式	148
1) ポアソン括弧式について復習	148
2) 正準変換で不変なポアソン括弧式	150
2.1 ポアソン括弧式を用いた正準変数の定義と正準変換	150
2.2 正準変換で不変なポアソン括弧式	152
3) ポアソン括弧式を不変にする変換は正準変換	155
§ 13 正準変換の積分不変量	157
1) 積分不変量：配位空間での閉曲線経路積分	157
2) 積分不変量：位相空間における 2次元積分	158
§ 14 位相空間と Liouville の定理	164
1) 位相空間と配位空間での軌跡と位相空間体積の時間変化	164
2) 正準変換で不変な位相空間の体積積分	168
3) 正準方程式の行列表示と正準変換	170
4) 無限小正準変換と力学系の時間発展	174
付録 質点系の力学の要点	176
参考図書	193