§12 正準変換とポアソン括弧式

ポアソン括弧式を用いた**正準共役変数の相互関係**,

$$[q_i, q_k]_C = 0, \quad [p_i, p_k]_C = 0 \ , \quad [p_i, q_k]_C = \delta_{ik} \tag{1}$$

が**正準共役変数の定義**であると述べたが，(1)の関係は，$(q_i, p_i) \to (Q_i, P_i)$の変換後の正準変数$(Q_i, P_i)$においても成立するからである．さらに，**物理量のポアソン括弧式の値**は，正準変換の後も変化しない．逆に，ポアソン括弧式を不変にする変換が正準変換である．このようなポアソン括弧式と正準変換との関係は，既述のように，古典力学を量子力学への拡張の際にも重要となる．

1）ポアソン括弧式について復習

ポアソン括弧式について復習する．ポアソン括弧式は，座標と運動量の関数である任意の関数対 f と g に対しても適用される．

$$[f, g]_C = \sum_k \left(\frac{\partial f}{\partial p_k}\frac{\partial g}{\partial q_k} - \frac{\partial f}{\partial q_k}\frac{\partial g}{\partial p_k}\right) \tag{2}$$

この定義から，ポアソン括弧式は次の性質を持つ．関数の順序を入れ替えると括弧式は符号を変える．一方の関数が定数 c である場合は，ポアソン括弧式は０である．

1）　$[f, g]_C = -[g, f]_C$

2）　$[f, c]_C = 0$

さらに，ポアソン括弧式には次の関係がある．

3）　$[f_1 + f_2, g]_C = [f_1, g]_C + [f_2, g]_C$

4）　$[f_1 f_2, g]_C = f_1[f_2, g]_C + f_2[f_1, g]_C$

５）　$\dfrac{\partial}{\partial t}[f, g]_C = [\dfrac{\partial f}{\partial t}, g]_C + [f, \dfrac{\partial g}{\partial t}]_C$

６）　$[f, [g, h]_C]_C + [g, [h, f]_C]_C + [h, [f, g]_C]_C = 0$　（Jacobi の恒等式）

また，任意の関数$f(q_i, p_i, t)$の時間微分は，H と f **に対するポアソン括弧式**を使って，

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + [H, f]_C \tag{3}$$

である．もし，H が t を陽に含まないならば，

$$\frac{df}{dt} = [H, f]_C \tag{4}$$

となる．

関数 $f(q_i, p_i, t)$ の時間による導関数が０である時，力学変数で与えられる関数 f は，運動の過程で変化しない，f は不変量である．この時，(3)は，

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + [H, f]_C = 0 \tag{5}$$

である．f が時間を陽の形で含まれないならば，第一項は０で，(3)は

$$\frac{df}{dt} = [H, f]_C = 0 \tag{6}$$

となる．

＜ポアソンの定理＞

正準力学変数 (q_i, p_i) で与えられる関数 f, g が共に，運動過程で変化しない不変量である時 （$df/dt = 0$，$dg/dt = 0$），

$$\frac{d[f, g]_C}{dt} = 0,$$

f, g に対するポアソン括弧式も不変量である．ポアソンの定理と呼ばれる．

関数 f, g が共に t を陽に含まない時は，６）の Jacobi の恒等式で h→H として，

$$[f, [g, H]_C]_C + [g, [H, f]_C]_C + [H, [f, g]_C]_C = 0$$

であるが，$df/dt = 0$，$dg/dt = 0$ であるから，$[H, f]_C = 0$，$[H, g]_C = 0$ であり，

$$[H, [f, g]_C]_C = 0$$

これは，(5)と比べて，

$$\frac{d[f, g]_C}{dt} = [H, [f, g]_C]_C = 0 \tag{7}$$

となる．f, g に対するポアソン括弧式も不変量である．

関数 f, g が t を陽に含む時は，(2)の f を $[f, g]_C$ に置き換えて，

$$\frac{d[f, g]_C}{dt} = \frac{\partial [f, g]_C}{\partial t} + [H, [f, g]_C]_C \tag{8}$$

が成立する．右辺第一項に，5）の $\dfrac{\partial}{\partial t}[f,g]_C=[\dfrac{\partial f}{\partial t},g]_C+[f,\dfrac{\partial g}{\partial t}]_C$ を用い，第二項の $[H,[f,g]_C]_C$ に6）の Jacobi の恒等式を用いると，(7)は次のようになる．

$$\frac{d}{dt}[f,g]_C=[\frac{\partial f}{\partial t},g]_C+[f,\frac{\partial g}{\partial t}]_C-[f,[g,H]_C]_C-[g,[H,f]_C]_C$$

$$=[\frac{\partial f}{\partial t}+[H,f]_C,g]_C+[f,\frac{\partial g}{\partial t}+[H,g]_C]_C$$

$df/dt=0$，$dg/dt=0$ であるから，$[H,f]_C=0$，$[H,g]_C=0$ である．従って

$$\frac{d}{dt}[f,g]_C=[\frac{\partial f}{\partial t},g]_C+[f,\frac{\partial g}{\partial t}]_C=0 \tag{9}$$

となる．$df/dt=0$，$dg/dt=0$ であることを再度使えば０である．

２）正準変換で不変なポアソン括弧式

$(q_i,p_i)\to(Q_i,P_i)$ の正準変換を考えた場合，正準変数を二組考えているので，同一の関数対 f,g に対するポアソン括弧式も，(q_i,p_i) による微分と，(Q_i,P_i) による微分の二つが考えられ，ポアソン括弧式を二つ考えることが出来る．それぞれ，$[f,g]_{C(q,p)}$ と $[f,g]_{C(Q,P)}$ と書くことにすると，

$$[f,g]_{C(q,p)}=[f,g]_{C(Q,P)}=[f,g]_C \tag{10}$$

が成立する．f,g に対するポアソン括弧式は，どのような正準変数でも同じ値を持ち，正準変数を明示する必要はない．正準変換でポアソン括弧式は不変である．このことを以下で確認しよう．

2.1 正準変換とポアソン括弧式を用いた正準変数の定義

(q_i,p_i) は正準変数であるから，(1)は，

$$[q_i,q_k]_{C(q,p)}=0, \quad [p_i,p_k]_{C(q,p)}=0 \quad , \quad [p_i,q_k]_{C(q,p)}=\delta_{ik} \tag{11}$$

(Q_i,P_i) も正準変数とすると，同様に，

$$[Q_i,Q_k]_{C(Q,P)}=0, \quad [P_i,P_k]_{C(Q,P)}=0 \quad , \quad [P_i,Q_k]_{C(Q,P)}=\delta_{ik} \tag{12}$$

である．

それでは，$[Q_i,Q_k]_{C(q,p)}$，$[P_i,P_k]_{C(q,p)}$，$[P_i,Q_k]_{C(q,p)}$ はどうなるのであろうか？

1. $[Q_i,Q_k]_{C(q,p)}=\sum_{j=1}^{f}(\frac{\partial Q_i}{\partial p_j}\frac{\partial Q_k}{\partial q_j}-\frac{\partial Q_i}{\partial q_j}\frac{\partial Q_k}{\partial p_j})$

$W(q,P,t)\rightarrow p_i=\frac{\partial W}{\partial q_i}$，$Q_i=\frac{\partial W}{\partial P_i}$，$H'=H+\frac{\partial W}{\partial t}$の関係から，

$$\frac{\partial Q_k}{\partial q_j}=\frac{\partial}{\partial q_j}(\frac{\partial W}{\partial P_k})=\frac{\partial^2 W}{\partial q_j\partial P_k}=\frac{\partial^2 W}{\partial P_k\partial q_j}=\frac{\partial}{\partial P_k}(\frac{\partial W}{\partial q_j})=\frac{\partial p_j}{\partial P_k}\quad\rightarrow\quad\frac{\partial Q_k}{\partial q_j}=\frac{\partial p_j}{\partial P_k}\tag{14}$$

$W(p,P,t)\rightarrow q_i=-\frac{\partial W}{\partial p_i}$，$Q_i=\frac{\partial W}{\partial P_i}$，$H'=H+\frac{\partial W}{\partial t}$を使うと，

$$\frac{\partial Q_i}{\partial p_j}=\frac{\partial}{\partial p_j}(\frac{\partial W}{\partial P_i})=\frac{\partial^2 W}{\partial p_j\partial P_i}=\frac{\partial^2 W}{\partial P_i\partial p_j}=\frac{\partial}{\partial P_i}(\frac{\partial W}{\partial p_j})=-\frac{\partial q_j}{\partial P_i}\quad\rightarrow\quad\frac{\partial Q_i}{\partial p_j}=\frac{\partial q_j}{\partial P_i}\tag{15}$$

これらの結果を使うと，

$$[Q_i,Q_k]_{C(q,p)}=\sum_{j=1}^{f}(\frac{\partial Q_i}{\partial p_j}\frac{\partial Q_k}{\partial q_j}-\frac{\partial Q_i}{\partial q_j}\frac{\partial Q_k}{\partial p_j})=\sum_{j=1}^{f}(\frac{\partial Q_i}{\partial p_j}\frac{\partial p_j}{\partial P_k}+\frac{\partial Q_i}{\partial q_j}\frac{\partial q_j}{\partial P_k})=\frac{\partial Q_i}{\partial P_k}=0\tag{16}$$

第三の等号は，$Q_i(q_1,q_2,....,q_f;p_1,p_2,.....,p_f)$を$P_k$で偏微分する際の間接微分式であり，$\frac{\partial Q_i}{\partial P_k}=\sum_{j=1}^{f}(\frac{\partial Q_i}{\partial p_j}\frac{\partial p_j}{\partial P_k}+\frac{\partial Q_i}{\partial q_j}\frac{\partial q_j}{\partial P_k})$は常に成立する．第四の等号は，$Q_i,P_k$が正準変数であることによる．

2. $[P_i,P_k]_{C(q,p)}=\sum_{j=1}^{f}(\frac{\partial P_i}{\partial p_j}\frac{\partial P_k}{\partial q_j}-\frac{\partial P_i}{\partial q_j}\frac{\partial P_k}{\partial p_j})$

$W(q,Q,t)\rightarrow p_i=\frac{\partial W}{\partial q_i}$，$P_i=-\frac{\partial W}{\partial Q_i}$，$H'=H+\frac{\partial W}{\partial t}$の関係を使って

$$\frac{\partial P_k}{\partial q_j}=\frac{\partial}{\partial q_j}(-\frac{\partial W}{\partial Q_k})=-\frac{\partial^2 W}{\partial q_j\partial Q_k}=-\frac{\partial^2 W}{\partial Q_k\partial q_j}=-\frac{\partial}{\partial Q_k}(\frac{\partial W}{\partial q_j})=-\frac{\partial p_j}{\partial Q_k}$$

Wが現れない関係として，

$$\frac{\partial P_k}{\partial q_j}=-\frac{\partial p_j}{\partial Q_k}\tag{17}$$

$W(p,Q,t)\rightarrow q_i=-\frac{\partial W}{\partial p_i}$，$P_i=-\frac{\partial W}{\partial Q_i}$，$H'=H+\frac{\partial W}{\partial t}$から，

$$\frac{\partial P_i}{\partial p_j}=\frac{\partial}{\partial p_j}(-\frac{\partial W}{\partial Q_i})=-\frac{\partial^2 W}{\partial p_j\partial Q_i}=-\frac{\partial^2 W}{\partial Q_i\partial p_j}=\frac{\partial}{\partial Q_i}(-\frac{\partial W}{\partial p_j})=\frac{\partial q_j}{\partial Q_i}$$

同様にして，

$$\frac{\partial P_i}{\partial p_j} = \frac{\partial q_j}{\partial Q_i} \tag{18}$$

これらの結果を使うと，

$$[P_i, P_k]_{C(q,p)} = \sum_{j=1}^{f} \left(\frac{\partial P_i}{\partial p_j} \frac{\partial P_k}{\partial q_j} - \frac{\partial P_i}{\partial q_j} \frac{\partial P_k}{\partial p_j} \right) = \sum_{j=1}^{f} \left(\frac{\partial P_k}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial Q_i} + \frac{\partial P_k}{\partial p_j} \frac{\partial q_j}{\partial Q_i} \right) = \frac{\partial P_k}{\partial Q_i} = 0 \tag{19}$$

理由は上に述べたものと同じである．

3. $[P_i, Q_k]_{C(q,p)} = \sum_{j=1}^{f} \left(\frac{\partial P_i}{\partial p_j} \frac{\partial Q_k}{\partial q_j} - \frac{\partial P_i}{\partial q_j} \frac{\partial Q_k}{\partial p_j} \right)$

$$[P_i, Q_k]_{C(q,p)} = \sum_{j=1}^{f} \left(\frac{\partial P_i}{\partial p_j} \frac{\partial Q_k}{\partial q_j} - \frac{\partial P_i}{\partial q_j} \frac{\partial Q_k}{\partial p_j} \right) = \sum_{j=1}^{f} \left(\frac{\partial q_j}{\partial Q_i} \frac{\partial Q_k}{\partial q_j} + \frac{\partial p_j}{\partial Q_i} \frac{\partial Q_k}{\partial p_j} \right) = \frac{\partial Q_k}{\partial Q_i} = \delta_{k,i} \tag{20}$$

第二の等号は，(17),(18)の結果を代入したことを意味する．

2-2．正準変換でポアソン括弧式は不変

以上の(16),(19),(20)の結果を用いて，

$$[f, g]_{C(q,p)} = \sum_{i=1}^{f} \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} \right) \tag{21}$$

の右辺が $[f, g]_{C(Q,P)}$ となることを確認しよう．

$f(q_1,..,q_f; p_1,...,p_f)$，$g(q_1,..,q_f; p_1, p..., p_f)$ であるが，変換 $(q_i, p_i) \to (Q_i, P_i)$ を考えるので，f, g の q_i, p_i による偏微分を，f については Q_j, P_j を介した間接微分，g についいては Q_k, P_k を介した間接微分として表現する．

$$\frac{\partial f}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^{f} \left(\frac{\partial f}{\partial Q_j} \frac{\partial Q_j}{\partial q_i} + \frac{\partial f}{\partial P_j} \frac{\partial P_j}{\partial q_i} \right), \qquad \frac{\partial f}{\partial p_i} = \sum_{j=1}^{f} \left(\frac{\partial f}{\partial Q_j} \frac{\partial Q_j}{\partial p_i} + \frac{\partial f}{\partial P_j} \frac{\partial P_j}{\partial p_i} \right) \tag{22}$$

$$\frac{\partial g}{\partial q_i} = \sum_{k=1}^{f} \left(\frac{\partial g}{\partial Q_k} \frac{\partial Q_k}{\partial q_i} + \frac{\partial g}{\partial P_k} \frac{\partial P_k}{\partial q_i} \right), \qquad \frac{\partial g}{\partial p_i} = \sum_{k=1}^{f} \left(\frac{\partial g}{\partial Q_k} \frac{\partial Q_k}{\partial p_i} + \frac{\partial g}{\partial P_k} \frac{\partial P_k}{\partial p_i} \right) \tag{23}$$

これらを(21)に代入すると，以下のように，(16),(19),(20)の結果が使えるよう整理できる．

$$[f,g]_{C(q,p)} = \sum_{i=1}^{f}\{\sum_{j=1}^{f}(\frac{\partial f}{\partial Q_j}\frac{\partial Q_j}{\partial p_i} + \frac{\partial f}{\partial P_j}\frac{\partial P_j}{\partial p_i})\sum_{k=1}^{f}(\frac{\partial g}{\partial Q_k}\frac{\partial Q_k}{\partial q_i} + \frac{\partial g}{\partial P_k}\frac{\partial P_k}{\partial q_i})$$
$$-\sum_{j=1}^{f}(\frac{\partial f}{\partial Q_j}\frac{\partial Q_j}{\partial q_i} + \frac{\partial f}{\partial P_j}\frac{\partial P_j}{\partial q_i})\sum_{k=1}^{f}(\frac{\partial g}{\partial Q_k}\frac{\partial Q_k}{\partial p_i} + \frac{\partial g}{\partial P_k}\frac{\partial P_k}{\partial p_i})\}$$

$$= \sum_{i=1}^{f}\sum_{j=1}^{f}\{\frac{\partial f}{\partial Q_j}\frac{\partial g}{\partial Q_k}\sum_{k=1}^{f}(\frac{\partial Q_j}{\partial p_i}\frac{\partial Q_k}{\partial q_i} - \frac{\partial Q_j}{\partial q_i}\frac{\partial Q_k}{\partial p_i}) + \frac{\partial f}{\partial Q_j}\frac{\partial g}{\partial P_k}\sum_{k=1}^{f}(\frac{\partial Q_j}{\partial p_i}\frac{\partial P_k}{\partial q_i} - \frac{\partial Q_j}{\partial q_i}\frac{\partial P_k}{\partial p_i})$$
$$+\frac{\partial f}{\partial P_j}\frac{\partial g}{\partial Q_k}\sum_{k=1}^{f}(\frac{\partial P_j}{\partial p_i}\frac{\partial Q_k}{\partial q_i} - \frac{\partial P_j}{\partial q_i}\frac{\partial Q_k}{\partial p_i}) + \frac{\partial f}{\partial P_j}\frac{\partial g}{\partial P_k}\sum_{k=1}^{f}(\frac{\partial P_j}{\partial p_i}\frac{\partial P_k}{\partial q_i} - \frac{\partial P_j}{\partial q_i}\frac{\partial P_k}{\partial p_i})\}$$

$\sum_{i=1}^{f}$ を中にいれ，$\sum_{k=1}^{f}$ を外に持っていって良いから，

$$= \sum_{k=1}^{f}\sum_{j=1}^{f}\{\frac{\partial f}{\partial Q_j}\frac{\partial g}{\partial Q_k}[Q_j,Q_k]_{C(p,q)} + \frac{\partial f}{\partial Q_j}\frac{\partial g}{\partial P_k}[Q_j,P_k]_{C(p,q)}$$
$$+\frac{\partial f}{\partial P_j}\frac{\partial g}{\partial Q_k}[P_j,Q_k]_{C(p,q)} + \frac{\partial f}{\partial P_j}\frac{\partial g}{\partial P_k}[P_j,P_k]_{C(p,q)}\}$$

(16),(19),(20)の結果を使うと，

$$= \sum_{k=1}^{f}\sum_{j=1}^{f}\{\frac{\partial f}{\partial Q_j}\frac{\partial g}{\partial P_k}[Q_j,P_k]_{C(p,q)} + \frac{\partial f}{\partial P_j}\frac{\partial g}{\partial Q_k}[P_j,Q_k]_{C(p,q)}\}$$
$$= \sum_{k=1}^{f}\sum_{j=1}^{f}\{-\frac{\partial f}{\partial Q_j}\frac{\partial g}{\partial P_k}[P_k,Q_j]_{C(p,q)} + \frac{\partial f}{\partial P_j}\frac{\partial g}{\partial Q_k}[P_j,Q_k]_{C(p,q)}\}$$
$$= \sum_{k=1}^{f}\sum_{j=1}^{f}\{\frac{\partial f}{\partial P_j}\frac{\partial g}{\partial Q_k}[P_j,Q_k]_{C(p,q)} - \frac{\partial f}{\partial Q_j}\frac{\partial g}{\partial P_k}[P_k,Q_j]_{C(p,q)}\}$$

$\{P_j,Q_k\}_{C(p,q)} = \delta_{j,k}$ であるから，$\sum_{j=1}^{f}$ の内部では $j=k$ の項のみが１，他の $j \neq k$ の項は全て０となるので，$\sum_{k=1}^{f}$ だけが残る．これは $[f,g]_{C(Q,P)}$ に等しい．

$$= \sum_{k=1}^{f}\{\frac{\partial f}{\partial P_k}\frac{\partial g}{\partial Q_k} - \frac{\partial f}{\partial Q_k}\frac{\partial g}{\partial P_k}\} = [f,g]_{C(Q,P)}$$

このように，任意の物理量 f, g に対して，

$$[f,g]_{C(q,p)} = [f,g]_{C(Q,P)} \tag{24}$$

となる．

次に，ポアソン括弧式を不変にする変換が正準変換であることを確認する．

３．ポアソン括弧式を不変にする変換は正準変換

ポアソン括弧式が変数変換に不変であること

$$[f,g]_{C(q,p)}=\{f,g\}_{C(Q,P)} \tag{24}$$

を仮定すると，$(q_i,p_i)\to(Q_i,P_i)$の変換が正準変換であることになる．以下でこれを確認しよう．

(24) で $f\to H$, $g\to Q_k$　として，変数を（q_i, p_i）とすれば，

$$\frac{dQ_k}{dt}=\frac{\partial Q_k}{\partial t}+[H,Q_k]_{C(q,p)} \tag{25}$$

が成立する．ポアソン括弧式は(q_i,p_i)で書いても(Q_i,P_i)で書いても等しいとの(24)を使って，

$$[H,Q_k]_{C(q,p)}=[H,Q_k]_{C(Q,K)}=\sum_{i=1}^{f}\left(\frac{\partial H}{\partial P_i}\frac{\partial Q_k}{\partial Q_i}-\frac{\partial H}{\partial Q_i}\frac{\partial Q_k}{\partial P_i}\right)=\frac{\partial H}{\partial P_k}$$

であるから，(25)は

$$\frac{dQ_k}{dt}=\frac{\partial Q_k}{\partial t}+\frac{\partial H}{\partial P_k} \tag{26}$$

となる．そこで，母関数 W を，$Q_i=\dfrac{\partial W}{\partial P_i}$を与える

$$W(q,P,t)\to p_i=\frac{\partial W}{\partial q_i},\quad Q_i=\frac{\partial W}{\partial P_i},\quad H'=H+\frac{\partial W}{\partial t}$$

$$W(p,P,t)\to q_i=-\frac{\partial W}{\partial p_i},\quad Q_i=\frac{\partial W}{\partial P_i},\quad H'=H+\frac{\partial W}{\partial t}$$

のいずれかを想定する．そうすると (26)は

$$\frac{dQ_k}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial W}{\partial P_k}\right)+\frac{\partial H}{\partial P_k}=\frac{\partial}{\partial P_k}\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)+\frac{\partial H}{\partial P_k}=\frac{\partial}{\partial P_k}\left(\frac{\partial W}{\partial t}+H\right)=\frac{\partial H'}{\partial P_k}$$

即ち，

$$\dot{Q}_k=\frac{\partial H}{\partial P_k} \tag{27}$$

である．

(24) で $f\to H$, $g\to P_k$　として，変数を（q_i, p_i）とすれば，

$$\frac{dP_k}{dt}=\frac{\partial P_k}{\partial t}+[H,P_k]_{C(q,p)} \tag{28}$$

である．

$$[H,P_k]_{C(q,p)}=[H,P_k]_{C(Q,K)}=\sum_{i=1}^{f}(\frac{\partial H}{\partial P_i}\frac{\partial P_k}{\partial Q_i}-\frac{\partial H}{\partial Q_i}\frac{\partial P_k}{\partial P_i})=-\frac{\partial H}{\partial Q_k}$$

であるから， (28) は

$$\frac{dP_k}{dt}=\frac{\partial P_k}{\partial t}-\frac{\partial H}{\partial Q_k} \qquad (29)$$

となる．母関数 W を， $P_i=-\dfrac{\partial W}{\partial Q_i}$ を与える

$$W(q,Q,t)\to p_i=\frac{\partial W}{\partial q_i},\quad P_i=-\frac{\partial W}{\partial Q_i},\quad H'=H+\frac{\partial W}{\partial t}$$

$$W(p,Q,t)\to q_i=-\frac{\partial W}{\partial p_i},\quad P_i=-\frac{\partial W}{\partial Q_i},\quad H'=H+\frac{\partial W}{\partial t}$$

の何れかを考えると，

$$\frac{dP_k}{dt}=-\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial W}{\partial Q_k})-\frac{\partial H}{\partial Q_k}=-\frac{\partial}{\partial Q_k}(\frac{\partial W}{\partial t}+H)=-\frac{\partial H'}{\partial Q_k}$$

$$\dot{P}_k=-\frac{\partial H'}{\partial Q_k} \qquad (30)$$

となる．(27) と (30)は，

$$\dot{Q}_k=\frac{\partial H}{\partial P_k},\quad \dot{P}_k=-\frac{\partial H'}{\partial Q_k} \qquad (31)$$

である．これは正準方程式である．

このように，ポアソン括弧式が変数変換に不変で，$[f,g]_{C(q,p)}=[f,g]_{C(Q,P)}$，であるとすると，$(q_i,p_i)\to(Q_i,P_i)$の変換は正準方程式を不変に保つ正準変換であることが判る．

一方，前節で確認したことは，この逆で，$(q_i,p_i)\to(Q_i,P_i)$の変換が正準方程式を不変に保つ正準変換である時，ポアソン括弧式は不変であると言うことであった．従って，$(q_i,p_i)\to(Q_i,P_i)$**の変換が正準変換である必要十分条件は，ポアソン括弧式が不変であること**となる．