付録：質点系力学の要点

質点に対する Newton の運動方程式を前提にして、複数の質点からなる質点系の運動について考え，その中で、力学についての基礎事項，中心力場，運動量の保存則，角運動量の保存則などについてその内容をまとめた.

１）質点と質点系の運動方程式の違い：外力と内力

質点系に働く力としては，重力のような、各質点の位置・速度だけで決まる外力と、質点間相互の位置、速度により決まる内力を区別しておく必要がある.質点系の質点相互に作用する内力に関しては，次のような中心力場を**仮定**する.任意の二つの質点間に作用する力は，それらの各質点を結ぶ直線に沿って働き，大きさは等しく，働く向きは反対である（作用・反作用の法則：Newton の第三法則）．即ち、質点 m_i に質点 m_j が及ぼす力を $\vec{F}_{ij}$ とすると， k_{ij} を相互作用の定数として，

$$\vec{F}_{ij} = k_{ij}(\vec{r}_i - \vec{r}_j),\quad \vec{F}_{ij} = k_{ij}(\vec{r}_i - \vec{r}_j) = -\vec{F}_{ji} = -\{k_{ji}(\vec{r}_j - \vec{r}_i)\} \tag{1-1}$$

である．従って， $\vec{F}_{ij}$ と $(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$ は同一直線上にあるので，両ベクトルの外積は 0 である．相互作用の定数 k_{ij} と k_{ji} は等しい.

$$(\vec{r}_i - \vec{r}_j)\times\vec{F}_{ij} = 0,\qquad k_{ij} = k_{ji}\quad (i \neq j) \tag{1-2}$$

一つの質点に対する Newton の運動方程式は，

$$m\vec{\alpha} = m\frac{d^2}{dt^2}\vec{r} = \vec{F} \tag{1-3}$$

であるが，質点系に対する Newton の運動方程式を考えるに当たっては，その各質点 (m_i)に作用する力は，外力（$\vec{F}_i$）だけではなく，系内部の他の点が及ぼす内力（$\vec{F}_{ij}$）の合計を考えねばならない．従って、その運動方程式は，

$$m_i \frac{d^2}{dt^2}\vec{r}_i = \vec{F}_i + \sum_{j(\neq i)} \vec{F}_{ij} \tag{1-4}$$

となる．(1-3)は質点は一つしかないから，(1-4)の第二項に当たる内力を考える必要がない．

２）質点系の運動量

質点系の各質点部分に対する運動方程式(1-4)を全構成質点について加えると，

$$\sum_i m_i \frac{d^2}{dt^2}\vec{r}_i = \sum_i \vec{F}_i + \sum_i \sum_{j(\neq i)} \vec{F}_{ij} \tag{2-1}$$

である．右辺第二項は内力（$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$）の総和であるから 0 となる．足し算と微分は順番を入れ替えても良いから，

$$\frac{d^2}{dt^2}\{\sum_i m_i \vec{r}_i\} = \sum_i \vec{F}_i \tag{2-2}$$

である．$m_i \frac{d\vec{r}_1}{dt}$ は各部分の運動量 $\vec{p}_i = m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}$ であるから，この総和は，質点系全体の運動量で，

$$\vec{P} = \sum_i m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} \tag{2-3}$$

と書けるのでの，(2-1)は，

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i \tag{2-4}$$

である．これは，質点系全体の運動量の時間変化は外力の総和に等しいことを意味している．

一方，重心の座標 $\vec{r}_G = (x_G, y_G, z_G)$ は，各部分の質量 m_i の全質量 M に対する比を重み係数とする平均値であるから，

$$\vec{r}_G = \sum_i (m_i / M)\vec{r}_i = (1/M)\sum_i m_i \vec{r}_i \tag{2-5}$$

であり，従って，$\sum_i m_i\vec{r}_i = M\cdot\vec{r}_G$ である．この両辺を時間で微分したものは，系全体の運動量に等しいから，

$$\vec{P} = \sum_i m_i\frac{d\vec{r}_i}{dt} = M\cdot\frac{d\vec{r}_G}{dt} \qquad (2\text{-}6)$$

である．これを更に時間で微分して，(2-4)と比べれば，

$$M\cdot\frac{d^2\vec{r}_G}{dt^2} = \sum_i \vec{F}_i \qquad (2\text{-}7)$$

となる．(2-7)と一つの質点に対する Newton の運動方程式(1-3)を比較すれば，次のように言うことが出来る．”**質点系の重心の運動は、質点系に作用する全ての外力の和が、全質量 M の質点に作用する場合の運動に等しい**”．

$\vec{F}_i = 0$ で，外力が作用しない場合は、系全体の運動量$\vec{P}$は一定であり，時間に依存しない．これを**運動量保存則が成立**していると言う．

３）質点系の角運動量

(1-4)の両辺に対し座標ベクトル（$\vec{r}_i$）とのベクトルの外積をとり、これを全個別質点について和を取ると、

$$\sum_i \vec{r}_i\times(m_i\frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2}) = \sum_i \vec{r}_i\times\vec{F}_i + \sum_i\sum_{j\neq i}\vec{r}_i\times\vec{F}_{ij} \qquad (3\text{-}1)$$

右辺の第二項は、(1-2)の結果を使うと、次のように$(\vec{r}_i - \vec{r}_j)\times\vec{F}_{ij}$の一重和と同じであることが判る．

$$\sum_i\sum_{j\neq i}\vec{r}_i\times\vec{F}_{ij} = \sum_{i<j}(\vec{r}_i\times\vec{F}_{ij} + \vec{r}_j\times\vec{F}_{ji}) = \sum_{i<j}(\vec{r}_i - \vec{r}_j)\times\vec{F}_{ij} = 0 \qquad (3\text{-}2)$$

$(\vec{r}_i - \vec{r}_j)\times\vec{F}_{ij}$のベクトル積は、両ベクトルが同一方向にあることから 0 となる．

また，(3-1)の左辺に関しては、ベクトル積の微分は通常の積の微分と同じな

ので，

$$\frac{d}{dt}(\vec{r}_i \times \frac{d\vec{r}_i}{dt}) = \frac{d\vec{r}_i}{dt} \times \frac{d\vec{r}_i}{dt} + \vec{r}_i \times \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2}$$

であるが，同一ベクトルの外積は 0 であるから，

$$\frac{d}{dt}(\vec{r}_i \times \frac{d\vec{r}_i}{dt}) = \vec{r}_i \times \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} \tag{3-3}$$

である．結局，(3-1)に(3-2)と(3-3)を代入すれば，

$$\sum_i \frac{d}{dt}(\vec{r}_i \times m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}) = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i \tag{3-4}$$

が得られる．ここで、$\vec{l}_i \equiv \vec{r}_i \times m_i \dfrac{d\vec{r}_i}{dt}$ は**質点 m_i の角運動量**である．これらの総和を**全角運動量**

$$\vec{L} \equiv \sum_i (\vec{r}_i \times m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}) = \sum_i \vec{l}_i \tag{3-5}$$

と呼ぶ．一方、$\vec{N}_i \equiv \vec{r}_i \times \vec{F}_i$ は**質点 m_i の外力によるモーメント**である．その総和を**外力による全モーメント**と呼ぶ.

$$\vec{N} \equiv \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i \tag{3-6}$$

結局，(3-1)は全角運動量（$\vec{L}$）と外力による全モーメント（$\vec{N}$）の関係として，

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N} \tag{3-7}$$

となる．即ち、”**質点間には中心力のみが作用する場合は、質点系の全角運動量（$\vec{L}$）の時間変化の割合は、外力のモーメントの総和に等しい**”と表現できる．

$\vec{F}_i = 0$ で、外力が作用しない場合は，質点系の全角運動量（$\vec{L}$）は時間に依存せず，一定である．これを**全角運動量保存則が成立**していると言う．

角運動量は位置ベクトルと運動量ベクトルの外積，力のモーメントは位置ベ

クトルと力のベクトルの外積，で定義される．ベクトルの外積を使う場合は，座標系の右手系と左手系の選択が関わってくることに注意．図 A 1 にベクトルの外積の定義を掲げる．右ネジの回転方向とネジの進行方向で外積が定義されている．左ネジの関係は使用しない．A×B=−B×A であることに注意．右手系の x、y と左手系の x と y を一致させると，z は右手系と左手系で反対方向を向く．右手系の x、y 面を鏡面とすると，この鏡像が左手系になっている． y、z で考えても．z、x で考えても同様である．

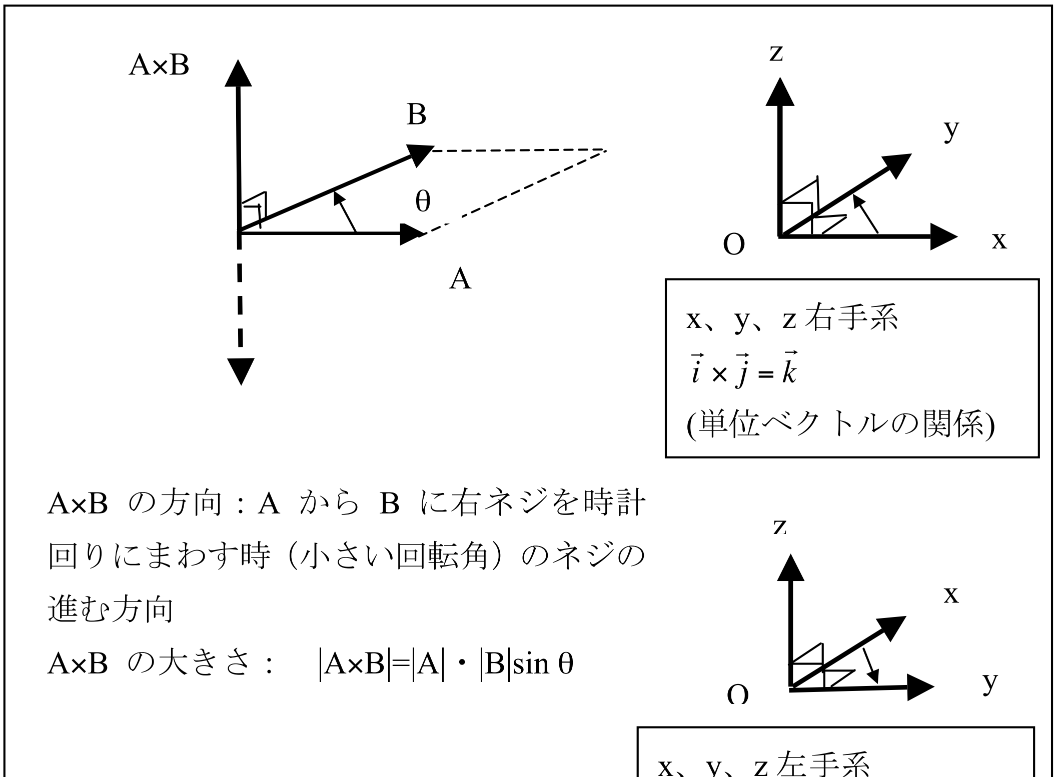


図 A1. ベクトルの外積の定義

二つのベクトル $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$ と $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$ の外積の成分を直接求める場合は，$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ を x, y, z 方向の単位ベクトルとして，次の行列式を計算する．

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$　の係数が，$\vec{A} \times \vec{B}$の x, y, z 成分を与える．

x，y，z の直交座標系には、右手系と左手系が存在するが，通常は，右手系を採用する．これはベクトルの外積の定義と共通である．

４）内力を与えるポテンシャル　V の仮定と運動量、角運動量の関係

内力は、各質点の相互位置だけで決まるポテンシャル V から次のようにして与えられると**仮定**する．即ち，各質点 m_i　に働く内力の x, y, z 成分は，

$$(F_{x_i}, F_{y_i}, F_{z_i}) = (-\frac{\partial V}{\partial x_i}, -\frac{\partial V}{\partial y_i}, -\frac{\partial V}{\partial z_i}) \tag{4-1}$$

で与えられると考える． 多くの場合がこのケースが該当するので，この仮定が当てはまる場合を考える．５）で(4-1)に関連する事項を補足するので参照されたい．

内力のポテンシャル $V(x_1, y_1, z_1, \cdots, x_i, y_i, z_i, \cdots)$は質点の相互の位置だけで決まるということは，次のことを意味している：各質点に$\cdots, (\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i), \cdots$の微小変位を考えた時のポテンシャル V の全微分は，

$$\delta V = \sum_i (\frac{\partial V}{\partial x_i} \cdot \delta x_i + \frac{\partial V}{\partial y_i} \cdot \delta y_i + \frac{\partial V}{\partial z_i} \cdot \delta z_i) \tag{4-2}$$

である． ここで，$(\delta x_1 = \varepsilon,\ \delta y_1 = 0,\ \delta z_1 = 0), \cdots, (\delta x_i = \varepsilon,\ \delta y_i = 0,\ \delta z_i = 0), \cdots$のような微小変位εを各質点の x 座標のみに考える．これは，x 方向への平行移動であり，質点間の相互座標は変化しない．従って，仮定より，(4-2)の左辺は$\delta V = 0$ であり， (4-2)の右辺も 0 となる．即ち、

$$\sum_i \frac{\partial V}{\partial x_i} = 0 \tag{4-3}$$

同様に考えて，$\sum_i \frac{\partial V}{\partial y_i} = 0$，$\sum_i \frac{\partial V}{\partial z_i} = 0$ も得られる．これは、各質点に作用する内

力を全て加算した結果が 0 であることを意味する．これは「**２」質点系の運動量に関する定理**」での内力の総和は 0 としたことに対応するので、ポテンシャル $V(x_1, y_1, z_1, \cdots, x_i, y_i, z_i, \cdots)$ は質点の相互の位置だけで決まるとの仮定を置いても，これらの定理は成立する．

次に、質点系全体が回転する場合を考える．図 A2 のような x 軸に回りの微小角度φの回転を考える．右手系で常に回転を考えるので、回転軸の正方向と回転角の関係は，右ネジの時計廻りの回転によって右ネジの進む方向が回転軸の正方向である．図 A2 では, x 軸の正方向は紙面の前方を向いているので，これに対応する回転角度の正方向は，図 A2 に示すように，y 軸から z 軸に向かう反時計廻りとなる．

回転後の座標と回転前の座標との関係は，三角関数の加法定理から，

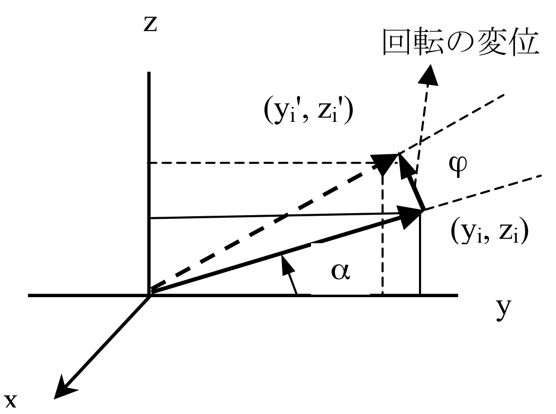


図 A2.　x 軸に関する微小角度φの回転

以下のようになる．

$$x_i' = x$$

$$y_i' = r\cos(\alpha+\varphi) = r\cos\alpha\cos\varphi - r\sin\alpha\sin\varphi = y_i\cos\varphi - z_i\sin\varphi \approx y_i - z_i\varphi$$

$$z_i' = r\sin(\alpha+\varphi) = r\sin\alpha\cos\varphi + r\cos\alpha\sin\varphi = z_i\cos\varphi + y_i\sin\varphi \approx z_i + y_i\varphi$$

φ が微小角であることから、$\cos\varphi\approx1$, $\sin\varphi\approx\varphi$　としている.

これより、

$$\delta x_i = x_i' - x_i = 0,\quad \delta y_i = y_i' - y_i \approx -z_i\varphi,\quad \delta z_i = z_i' - z_i \approx y_i\varphi$$

だから，これらを成分とするベクトルが、x 軸のまわりの微小角φの回転による変位を表す.

$$(\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i) \approx (0, -z_i\varphi, y_i\varphi) \qquad (4\text{-}4)$$

x 軸に関する質点系全体の（微小）回転であるから，質点間の相互座標は変化しない．従って，仮定より，(4-2)の左辺は$\delta V = 0$ で，(4-2)の右辺も 0 となるためには,

$$\sum_i \left(-\frac{\partial V}{\partial y_i}\cdot z_i + \frac{\partial V}{\partial z_i}\cdot y_i\right) = 0 \quad 即ち \quad \sum_i \left(\frac{\partial V}{\partial y_i}\cdot z_i - \frac{\partial V}{\partial z_i}\cdot y_i\right) = 0 \qquad (4\text{-}5)$$

である．同様に, y 軸, z 軸に関する回転を考えて、

$$\sum_i \left(\frac{\partial V}{\partial x_{i\,i}}\cdot z_i - \frac{\partial V}{\partial z_i}\cdot x_i\right) = 0, \qquad \sum_i \left(\frac{\partial V}{\partial y_i}\cdot x_i - \frac{\partial V}{\partial x_i}\cdot y_i\right) = 0 \qquad (4\text{-}6)$$

が得られる.

$\vec{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$，$(F_{x_i}, F_{y_i}, F_{z_i}) = \left(-\frac{\partial V}{\partial x_i}, -\frac{\partial V}{\partial y_i}, -\frac{\partial V}{\partial z_i}\right)$として、両者のベクトルの外積である力のモーメントを作る．$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ を x, y, z 方向の単位ベクトルとすると、

$$\vec{r}_i \times \vec{F}_i = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_i & y_i & z_i \\ -\frac{\partial V}{\partial x_i} & -\frac{\partial V}{\partial y_i} & -\frac{\partial V}{\partial z_i} \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial V}{\partial y_i}\cdot z_i - \frac{\partial V}{\partial z_i}\cdot y_i\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial V}{\partial x_{i\,i}}\cdot z_i - \frac{\partial V}{\partial z_i}\cdot x_i\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial V}{\partial y_i}\cdot x_i - \frac{\partial V}{\partial x_i}\cdot y_i\right)\vec{k} \qquad (4\text{-}7)$$

であるから，(4-5), (4-6) は，内力に関するモーメントの総和の x, y, z 成分が全て

0 であること，$\sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = 0$　を意味する．故に、「**３）質点系の全角運動量**」に関する定理がそのまま成立する．

５）単一質点に関する運動エネルギー、仕事、位置エネルギー

複数質点から成る系（質点系）の議論の前提として、単一質点の運動エネルギー，仕事、ポテンシャルエネルギ−の考え方について復習する．また，単一質点の運動を例に、保存力についても説明する．質点系の議論は、これらの後に行う．

一つの質点に対する Newton の運動方程式(1-3)、$m(d^2\vec{r}/dt^2)=\vec{F}$ は，$m(\ddot{x},\ddot{y},\ddot{z})=(X,Y,Z)$ のように書くことが出来るから、

$$m\ddot{x}=X,\quad m\ddot{y}=Y,\quad m\ddot{z}=Z \tag{5-1}$$

である．　それぞれの等式両辺に、$\dot{x}$,　$\dot{y}$,　$\dot{z}$　を掛けると，

$$m\dot{x}\ddot{x}=X\dot{x},\quad m\dot{y}\ddot{y}=Y\dot{y},\quad m\dot{z}\ddot{z}=Z\dot{z}$$

となるが、これは、次のように書き直すことが出来る、

$$(1/2)m\frac{d}{dt}(\dot{x})^2=X\frac{dx}{dt},\quad (1/2)m\frac{d}{dt}(\dot{y})^2=Y\frac{dy}{dt},\ (1/2)m\frac{d}{dt}(\dot{z})^2=Z\frac{dz}{dt} \tag{5-2}$$

それぞれの等式を時間 t_0 から t まで積分し、これらの三者を加えれば、次の結果を得る．

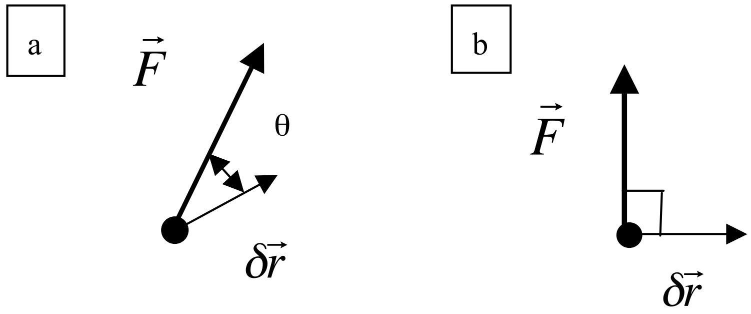
$$(1/2)m[(\frac{dx}{dt})^2+(\frac{dy}{dt})^2+(\frac{dz}{dt})^2]_{t_0}^{t}=\int_{t_0}^{t}(X\frac{dx}{dt}+Y\frac{dy}{dt}+Z\frac{dz}{dt})dt \tag{5-3}$$

左辺は**運動エネルギー**，$T\equiv(1/2)mv^2=(1/2)m[(\dot{x})^2+(\dot{y})^2+(\dot{z})^2]$、の増加量を意味する．

一方、質点に作用する力 $\vec{F}$ と質点の微小変位 $\delta\vec{r}$ のベクトルの内積は,その変位 $\delta\vec{r}=(\delta x,\delta y,\delta z)$ に際し $\vec{F}=(X,Y,Z)$ が行った**仕事**と定義される．即ち,

$$\vec{F}\cdot\delta\vec{r}=X\delta x+Y\delta y+Z\delta z \tag{5-4}$$

である．



$\vec{F}\cdot\delta\vec{r} = \left|\vec{F}\right|\cdot\left|\delta\vec{r}\right|\cos\theta$　　　$\vec{F}\cdot\delta\vec{r} = 0$

図 A3．仕事の定義：力$\vec{F}$と質点の微小変位$\delta\vec{r}$の内積

この仕事の定義からすると，(5-3)の右辺，$\int_{t_0}^{t}(X\frac{dx}{dt}+Y\frac{dy}{dt}+Z\frac{dz}{dt})dt$，は次のように考えることが出来る. 質点の運動は $x \equiv x(t)$，$y \equiv y(t)$，$z \equiv z(t)$ で記述されるが，時間 dt の間の変位は $dx = (dx/dt)dt$，$dy = (dy/dt)dt$，$dz = (dz/dt)dt$ である. 従って，(5-3)の右辺は、時間 t_0 から t までに力$\vec{F}$がなす仕事である.

(5-3)の等式は、『ある時間内に$\vec{F}$の作用により質点が運動する場合には、運動エネルギーの増加は、その時間内に$\vec{F}$がなした仕事に等しい』ことを意味する.

図 A3 の b のように、質点の変位と力のベクトルが常に直交しているなら，$\vec{F}$がなす仕事は常に 0 である．これ以外の力が作用していないならば，運動エネルギーの増加は 0 であり、運動エネルギーは保存される．等速円運動はこれである.

＜保存力と保存力場＞

$\int_{t_0}^{t}(X\frac{dx}{dt}+Y\frac{dy}{dt}+Z\frac{dz}{dt})dt$　に現れる力 $\vec{F}=(X,Y,Z)$ が，速度に依存せず，位置 $\vec{r}=(x,y,z)$　だけの関数である場合は、P_0, P　を時間 t_0, t の位置として，

$$\int_{t_0}^{t}(X\frac{dx}{dt}+Y\frac{dy}{dt}+Z\frac{dz}{dt})dt=\int_{P_0}^{P}(Xdx+Ydy+Zdz)=\int_{P_0}^{P}\vec{F}\cdot d\vec{r} \qquad (5\text{-}5)$$

である． $(Xdx+Ydy+Zdz)$ は一般に微分式と呼ばれるが，この微分式がある位置の関数 V（x、y、z）の全微分に一致する場合、その微分式は**完全微分式**と呼ばれる．ここでは、全微分に負符号を付けた -dV を考え，これが $(Xdx+Ydy+Zdz)$ に等しいとする．即ち，

$$(Xdx+Ydy+Zdz)=-dV \qquad (5\text{-}6)$$

であるような位置のスカラー関数 V(x, y, z) が存在すると仮定する． (5-6)は完全微分式であるから積分できて、

$$\int_{P_0}^{P}(Xdx+Ydy+Zdz)=\int_{P_0}^{P}\vec{F}\cdot d\vec{r}=-\{V(P)-V(P_0)\} \qquad (5\text{-}7)$$

となる．力学的仕事は、始めと終わりの位置のみで決まる．また，(5-6)から、

$$X=-(\partial V/\partial x),\ Y=-(\partial V/\partial y),\ Z=-(\partial V/\partial z) \qquad (5\text{-}8)$$

である．力の各成分はスカラー関数 V(x, y, z)を各位置成分で偏微分することで得られる．この場合、(5-3)は、

$$(1/2)m[(\frac{dx}{dt})^2+(\frac{dy}{dt})^2+(\frac{dz}{dt})^2]_{t_0}^{t}=\int_{t_0}^{t}(X\frac{dx}{dt}+Y\frac{dy}{dt}+Z\frac{dz}{dt})dt=-\{V(P)-V(P_0)\}$$

となるから， $V=V(P)$，　$V_0=V(P_0)$　と書くと， $T-T_0=-(V-V_0)$ であるから，

$$T+V=T_0+V_0=const. \qquad (5\text{-}9)$$

となる．これは運動エネルギ−と位置エネルギ−の和である全エネルギ−が保存されることを意味する．**エネルギ−保存則が成立する**．その意味で，(5-6)で仮定

したスカラー関数 V(x, y, z)から得られる力は，**保存力**と呼ばれる．このような力が作用する場を**保存力場**と言う．スカラー関数 V(x, y, z)自体は**ポテンシャル**と呼ばれる．位置エネルギ−はポテンシャルエネルギ−とも言う．

(5-6)の条件は、$(Xdx+Ydy+Zdz)$が完全微分式であることを述べているが，完全微分式の必要十分条件は，(X,Y,Z)が以下の条件を満たすこと，

$$\frac{\partial X}{\partial y}=\frac{\partial Y}{\partial x},\ \frac{\partial Y}{\partial z}=\frac{\partial Z}{\partial y},\ \frac{\partial Z}{\partial x}=\frac{\partial Y}{\partial z} \tag{5-10}$$

である．

ベクトル解析で使われる（スカラー点関数に対する空間）微分演算子(grad，∇),

$$grad\ \phi(x,y,z)\equiv\nabla\phi(x,y,z)=\vec{i}\cdot\frac{\partial\phi}{\partial x}+\vec{j}\cdot\frac{\partial\phi}{\partial y}+\vec{k}\cdot\frac{\partial\phi}{\partial z}$$

を使うと，(5-6)は

$$(F_{x_i},F_{y_i},F_{z_i})=(-\frac{\partial V}{\partial x_i},-\frac{\partial V}{\partial y_i},-\frac{\partial V}{\partial z_i})=-gradV(\vec{r}_i)=-\nabla V(\vec{r}_i) \tag{5-11}$$

である．

(5-6)と(5-11)では、マイナス符号に注意．地球表面上の質点 m に作用する重力 g は鉛直下方に作用する．z 座標の正は鉛直上方に取るから，$(F_x,F_y,F_z)=(0,0,-mg)$ である．重力ポテンシャル V= mgz で，z＝h（高度）が大きい程大きい．$-\partial V/\partial z=-mg$ であり，鉛直下方に重力 g が作用することを表す．マイナス符号に意味があることが判る．また、x 方向だけの一次元調和振動子の変位を x とすると，変位の逆方向に $F_x=-kx$ の力を受ける．そのポテンシャル V は $V=(1/2)kx^2$ であるから，$F_x=-kx=-(\partial V/\partial x)$ であり，マイナス符号に意味がある．

６）質点系に関する運動エネルギー，仕事，全エネルギ−

質点に対して(5-1)から(5-3)を導いたように，質点系に対する Newton の運動方程式(1-4),

$$m_i \frac{d^2}{dt^2}\vec{r}_i = \vec{F}_i + \sum_{j(\neq i)} \vec{F}_{ij} = \vec{F}_i + \vec{F}_i^* \tag{1-4}$$

に対しても同様に考えることが出来る． $\sum_{j(\neq i)} \vec{F}_{ij} = \vec{F}_i^*$ は、質点 i に対する内力の総和を表す．(5-3)　に対応して、質点 i に対して,

$$(1/2)m_i[(\frac{dx_i}{dt})^2 + (\frac{dy_i}{dt})^2 + (\frac{dz_i}{dt})^2]_{t_0}^{t} = \int_{t_0}^{t} (X_i \frac{dx_i}{dt} + Y_i \frac{dy_i}{dt} + Z_i \frac{dz_i}{dt})dt$$

$$+\int_{t_0}^{t} (X_i^* \frac{dx_i}{dt} + Y_i^* \frac{dy_i}{dt} + Z_i^* \frac{dz_i}{dt})dt$$

となるから、質点 i に対する総和をとると,

$$(1/2)[\sum_i m_i (\frac{d\vec{r}}{dt})^2]_{t_0}^{t} = \int_{t_0}^{t} \{\sum_i \vec{F}_i \cdot \frac{d\vec{r}_i}{dt} + \sum_i \vec{F}_i^* \cdot \frac{d\vec{r}_i}{dt}\}dt \tag{6-1}$$

が得られる．この左辺は，時間 t_0 から t までの間における質点系全体の運動エネルギーT の差，T−T_0　を表す．右辺は、時間 t_0 から t までの間に外力と内力がなした仕事の和，W＋W*である．内力がポテンシャル V に由来する場合は,

$$W^* = -(V - V_0) \tag{6-2}$$

である．(6-1)は， $T - T_0 = W + W^* = W + -(V - V_0)$ となる．これを書き直すと,

$$T + V - (T_0 + V_0) = W \tag{6-3}$$

であるから，**運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの和を質点系の全エネルギーE** とすると,

$$T + V \equiv E \tag{6-4}$$

(6-3)は,

$$E - E_0 = W \tag{6-5}$$

である．即ち、**質点系の全エネルギ−の増加は外力による仕事に等しい**．

もし，**外力が存在せず，内力がポテンシャル V に由来する場合は**，質点系の全エネルギ−$E = T + V$は時間に依らず一定であり, **エネルギ−保存則**が成立する．

7） 重心についての定理

重心の運動については，(2-5)から(2-7)で議論した．重心を座標原点とした場合の各質点の位置ベクトルを$\vec{r}_i' = (x_i', y_i', z_i')$とすると，各質点の位置ベクトル$\vec{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$は，重心座標　$\vec{r}_G = (x_G, y_G, z_G)$　と$\vec{r}_i' = (x_i', y_i', z_i')$の和である．

$$\vec{r}_i = \vec{r}_G + \vec{r}_i' \tag{7-1}$$

質点系の角運動量と運動エネルギーとの関連を考える．

既に論じたように，重心の位置ベクトルは、

$$\vec{r}_G = \sum_i (m_i / M)\vec{r}_i = (1/M)\sum_i m_i \vec{r}_i \tag{2-5}$$

であるから，$\sum_i m_i \vec{r}_i = M \cdot \vec{r}_G$　である．これに(7-1)を代入すると、

$\sum_i m_i (\vec{r}_G + \vec{r}_i') = M \cdot \vec{r}_G$　　であるので、

$$\sum_i m_i \vec{r}_i' = 0, \qquad \sum_i m_i \frac{d\vec{r}_i'}{dt} = 0 \tag{7-2}$$

第二式は第一式を時間で微分した結果である．

質点系の全角運動量は，(3-5)で示したように,

$$\vec{L} \equiv \sum_i (\vec{r}_i \times m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}) = \sum_i \vec{l}_i \tag{3-5}$$

であるから，(7-1)を代入すると,

$$\vec{L} \equiv \sum_i (\vec{r}_G + \vec{r}_i') \times m_i \frac{d}{dt}(\vec{r}_G + \vec{r}_i')$$

$$= \sum_i (\vec{r}_G \times m_i \frac{d\vec{r}_G}{dt} + \vec{r}_G \times m_i \frac{d\vec{r}_i'}{dt} + \vec{r}_i' \times m_i \frac{d\vec{r}_G}{dt} + \vec{r}_i' \times m_i \frac{d\vec{r}_i'}{dt})$$

$$= \vec{r}_G \times \frac{d\vec{r}_G}{dt} \sum_i m_i + \vec{r}_G \times (\sum_i m_i \frac{d\vec{r}_i'}{dt}) + (\sum_i m_i \vec{r}_i') \times \frac{d\vec{r}_G}{dt} + \sum_i (m_i \vec{r}_i' \times \frac{d\vec{r}_i'}{dt})$$

(7-2) が該当する第二項、第三項は 0 となる．第一項は重心の位置ベクトルとその速度ベクトルの外積であり，重心運動の角運動量（$\vec{L}_G$ ）である．第四項は，重心に対する各質点の位置ベクトルとその速度ベクトルの外積の総和であり，重心に相対的な質点系の角運動量（ $\vec{L}'$）である．

$$\vec{L} = \vec{r}_G \times \frac{d\vec{r}_G}{dt} \sum_i m_i + \sum_i (m_i \vec{r}_i' \times \frac{d\vec{r}_i'}{dt}) = \vec{r}_G \times M \frac{d\vec{r}_G}{dt} + \sum_i (\vec{r}_i' \times m_i \frac{d\vec{r}_i'}{dt})$$

$$= \vec{L}_G + \vec{L}' \qquad (7\text{-}3)$$

両者の和が全角運動量である．

運動エネルギーについては、(6-1)の T の式に(7-1)を代入する．

$$T = (1/2)\sum_i m_i (\frac{d\vec{r}_i}{dt})^2 = (1/2)\sum_i m_i (\frac{d\vec{r}_G}{dt} + \frac{d\vec{r}_i'}{dt})^2$$

$$= (1/2)\sum_i m_i (\frac{d\vec{r}_G}{dt})^2 + (1/2)\sum_i m_i (\frac{d\vec{r}_i'}{dt})^2 + (\frac{d\vec{r}_G}{dt})\sum_i m_i (\frac{d\vec{r}_i'}{dt}) \qquad (7\text{-}4)$$

第三項は，(7-2)から 0 となる．結果として、第一項と第二項は

$$T = T_G + T' \qquad (7\text{-}5)$$

となる． T_G は質量 M の重心と同じ運動をなす質点の運動エネルギー． T' は重心に対する質点系の相対運動の運動エネルギーを表す.

力のモーメントについても，(7-1)を代入して、

$$\vec{N} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum_i (\vec{r}_G + \vec{r}_i') \times \vec{F}_i = \vec{r}_G \times \sum_i \vec{F}_i + \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

$$= \vec{N}_G + \vec{N}' \qquad (7\text{-}6)$$

全角運動量と力のモーメントの関係は、$\dfrac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}$　が成立している.

重心の角運動量と力のモーメントは、

$$\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \vec{r}_G \times M\frac{d^2\vec{r}_G}{dt^2} = \vec{r}_G \times \sum_i \vec{F}_i = \vec{N}_G \tag{7-7}$$

であるから、重心に対する相対運動の角運動量と力のモーメントに関しても,

$$\frac{d\vec{L}'}{dt} = \vec{r}_i' \times \sum_i \vec{F}_i = \vec{N}' \tag{7-8}$$

となる.