§5　真空中の電磁場における荷電粒子の運動：その Lagrangian と Hamiltonian

真空中の電磁場における荷電粒子の運動は，ローレンツ力から説明されるが，Lagrangian,　Hamiltonian はどのように書けるか考える．荷電粒子の正準運動量$\mathbf{p}$は，$\mathbf{p} = m\mathbf{v} + (e/c)\mathbf{A}$ となり，粒子の運動量$m\mathbf{v}$ に電磁場に固有なベクトルポテンシャル$\mathbf{A}$が加わったものとなる．荷電粒子は単なる質点ではなく，質量と電荷を持つ粒子だからである．荷電粒子に作用するローレンツ力と電磁ポテンシャルについては，電磁気学の結果として，これらを受け入れて議論するが，電磁ポテンシャルの問題は，少し回り道をして，電磁気学の Maxwell 方程式から考える．

1）電磁場における荷電粒子の運動とローレンツ力

真空中の電磁場における荷電粒子の運動において，質量 m，電荷 e の荷電粒子に作用する力は**ローレンツ力**（**F**）である．**CGS ガウス単位系**でこれを書くと，

$$\mathbf{F} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{H} \tag{1-1}$$

である．c は光速度，$\mathbf{v}$は荷電粒子の速度ベクトルで，$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = d\mathbf{r}/dt$ である．$\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$は電場の強さ（電場強度）を表すベクトル，　$\mathbf{H}(\mathbf{r},t)$は磁場の強さ（磁場強度）を表すベクトルである．$\mathbf{v} \times \mathbf{H}$は二つのベクトルの外積を意味する．$e\mathbf{E}$ は電場による力，$\frac{e}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{H}$は磁場による力を表す．$\mathbf{v} \times \mathbf{H}$はベクトルの外積であるから，磁場に依る力は粒子の運動方向と直交している．

図 7
磁場による力は運動方向と直交している

SI−単位系（MKSA 単位系）を用いて，(1-1)に相当するローレンツ力を表現すると，

$$\mathbf{F} = e\mathbf{E} + e\mathbf{v} \times \mathbf{B} \tag{1-1'}$$

である．形式上 c は消え，CGS ガウス単位系での磁場の強さ（磁場強度）$\mathbf{H}(\mathbf{r},t)$ が，MKSA 単位系の磁束密度$\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$に代わる．何故こうなるかはここでは議論しない．章末に記した電磁気のテキストなどを参照して頂きたい．電磁気学での単位系の選択とこれに関連した物理量の表現方法の違い，相互変換の問題は，電磁気学の根本にかかわる問題であり，一度は整理しておいた方が良い．例えば，今井　功 (1990)「電磁気学を考える」，サイエンス社，7 章が参考になる．川邊(2011)「電磁気学の基礎事項」付録 D にも述べた．以下の議論では，CGS ガウス単位系を使い，SI−単位系（MKSA 単位系）の式は(1-1')だけにとどめる．

荷電粒子に対する Newton 方程式は，

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{H} \tag{1-2}$$

である．磁場に依る力は粒子の運動方向と直交しているので，粒子の $\mathbf{v}$ が決める軌道経路 $\mathbf{s}$ に沿った(1-2)の線積分，即ち，仕事

$$\int m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}d\mathbf{s} = \int m\frac{d\mathbf{v}}{dt}d\mathbf{s} = \int \mathbf{F}d\mathbf{s}$$

に対し，(1-2)右辺の第二項は全く寄与しない．

電場と磁場を同時に取り扱う場合，電磁場のスカラーポテンシャルとベクトルポテンシャルを統合した**電磁ポテンシャル**を用いる必要がある．電磁ポテンシャルの導入は Maxwell 方程式に基づくが，そこでの議論では grad, div, rot, ∇ などが乱舞する．電磁ポテンシャルの議論に入る前に，ベクトル解析の grad, div, rot, ∇ などについて最小限の知識を要約しておこう．

２）ベクトル解析の要約: grad, div, rot など

1. ナブラ・ベクトル演算子（ ∇）と grad

ナブラ・ベクトル演算子(2-1)は，Hamilton の演算子と呼ばれ，ナブラと読む

記号∇を用いて表現する．直交座標系の x，y，z 座標による偏微分演算を x，y，z の各成分とするベクトルである． $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ を x，y，x 軸の単位ベクトルとして，偏微分演算子を成分とする行ベクトルの形に書くことができる．

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k} = (\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}) \qquad (2\text{-}1)$$

これは演算子であるので, スカラー関数 $f(x,y,z)$ に作用した結果は, 勾配 (gradient) grad と呼ばれ， 以下のように表記する．

$$grad\, f = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k} = (\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}) \qquad (2\text{-}2)$$

これは，そのスカラー関数を各座標成分で偏微分した結果を成分とするベクトルである． $grad\, f = \nabla f$ は，空間座標で与えられるスカラー量 f の空間勾配大きさとその方向を表現している．

座標変数（場所）のみで決まるベクトル **A**(x,y,z)とスカラー$f(x,y,z)$があって，

$$\mathbf{A}(x,y,z) = -\nabla f(x,y,z) \qquad (2\text{-}3)$$

が成立する時，f は **A** の**スカラーポテンシャル，又は単に，ポテンシャル**と呼ぶ.

2. ベクトルの**発散**と div

ナブラベクトル演算子∇と任意のベクトル **A** との**内積**は，ベクトル **A** の**発散** (divergence)と呼ばれる．div **A** と表記する．

$$div\, A = \nabla \bullet A = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \qquad (2\text{-}4)$$

ベクトルとベクトルの内積とみなすことができるから，これはスカラー量である．ベクトル **A** が流体の速度ベクトル **v** に密度 ρ を掛けたもの，**A** ＝ ρ **v** である場合，div A は単位体積からの流体の湧出量（発散量）になるので，このような呼び方をする．章末に記した連続に式に関するメモを参照のこと．

ベクトル **A** が $grad\, f = \nabla f$ である時は，

$$div\; grad\, f = \nabla \bullet (\nabla f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = (\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}) f = \nabla^2 f \qquad (2\text{-}5)$$

これは, 微分演算子$\nabla(\nabla f) = \nabla^2 f$を作用させたものと同じと考える．$\nabla^2$は Laplace 演算子（Laplacian)と呼ばれる．ナブラ二乗と読む．この Laplace 演算子はΔとも書かれるので,

$$\nabla^2 \equiv \Delta \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \tag{2-6}$$

である.

3. ベクトルの回転: rot

ナブラベクトル演算子∇と任意のベクトル **A** との外積は，ベクトル **A** の**回転** (rotation)と呼ばれる．rot **A** と表記するが，curl **A** とも書く．

$r$ot **A** (= $curl$ **A**)

$$= \nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{i} - \left(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{k} \tag{2-7}$$

である．**回転** (rotation)の呼称は，ナブラベクトル演算子∇を回転を表すベクトル，**A** を位置座標ベクトルとして両者の外積をとると，その結果が回転を表す変位ベクトルとなることに由来する．

ベクトル **A**(x,y,z)が，あるベクトル関数 **p** の回転である時，即ち，

$$\mathbf{A} = rot\,\mathbf{p} = \nabla \times \mathbf{p} \tag{2-8}$$

の時，ベクトル関数 **p** は**A** の**ベクトルポテンシャル**と呼ばれる．(2-3)の**スカラーポテンシャル**の定義,

$$\mathbf{A}(x,y,z) = -\nabla f(x,y,z) \tag{2-3}$$

とあわせて覚えておくこと.

4. **rot に関する恒等式**

rot に関する以下の恒等式は電磁気学の議論展開の中で繰り返し使用され, 結果として重要な意味をもつ.

1) スカラー関数$f(x,y,z)$の勾配，$grad\,f = \nabla f$，の回転を取ると 0 となる.

$$rot\,(grad\,f(x,yz)) = rot\ grad\,f = \nabla \times (\nabla f) = 0 \tag{2-9}$$

2) 任意のベクトル A の rot を作り，さらにその div を取ると 0 となる．

$$div\ rot\ \mathbf{A} = \nabla \bullet (\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \tag{2-10}$$

3) 任意のベクトル A の rot を作り，さらにもう一回 rot を取ると，

$$rot\ rot\ \mathbf{A} = grad\ div\ \mathbf{A} - \Delta\ \mathbf{A} \tag{2-11}$$

となる．$\Delta \equiv \nabla^2$を使えば，

$$rot\ rot\ \mathbf{A} = grad\ div\ \mathbf{A} - \nabla^2\ \mathbf{A} \tag{2-11'}$$

である．電磁気学では，$div\ \mathbf{A} = 0$ の場合に，$rot\ rot\ \mathbf{A} = -\Delta\ \mathbf{A}$として使うことが多い．

1), 2), 3)が成立することは，以下の通り確認できる．

(2-9)については，$grad\, f = \nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z})$ を(2-7)に代入してみれば，

$$rot\ grad\, f(x,yz) = \nabla \times (\nabla f) \ = (\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z})\vec{i} + (\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z})\vec{j} + (\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x})\vec{k} = 0$$

微分の順序は無関係だから全ての成分が 0 となる．

(2-10)の場合も(2-7)の rot **A** の div を取って，

$$div\ rot\ \mathbf{A} = \nabla \bullet (\nabla \times \mathbf{A}) = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}) + \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial z}(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}) = 0$$

全てが打ち消しあって 0 となる．

(2-11)の $rot\ rot\ \mathbf{A}$ はベクトルであるから，その x 成分$(rot\ rot\ \mathbf{A})_x$を考えると，

$$\begin{aligned}
(rot\ rot\mathbf{A})_x &= \frac{\partial}{\partial y}(rot\ \mathbf{A})_z - \frac{\partial}{\partial z}(rot\ \mathbf{A})_y \\
&= \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}) - \frac{\partial}{\partial z}(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}) - (\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2})A_x \\
&= (grad\ div\ \mathbf{A})_x - (\Delta \mathbf{A})_x
\end{aligned}$$

$(rot\ rot\ \mathbf{A})_y$, $(rot\ rot\ \mathbf{A})_z$ についても同様の結果が得られるので，(2-11)が成立する．

5. 三つのベクトル　A,B,C に関する三重積の公式

三つのベクトル A,B,C に関するスカラー三重積とベクトル三重積の公式があり，しばしば電磁気学の議論の中でも使われる．これらの証明は省くが，定義通りの演算をやれば確認できる．

5.1)　スカラー三重積 : $A\bullet(B\times C)$

このスカラー量は，同一面にない三つのベクトル A,B,C が平行六面体の稜である時，その平行六面体の体積に等しい．三つのベクトル A,B,C が結晶の単位セルの基本ベクトルであれば，このスカラー三重積が単位セル体積になる．

$$A\bullet(B\times C)=\begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} \tag{2-12-1}$$

5.2)　ベクトル三重積 : $A\times(B\times C)$

これはベクトル量であり，

$$A\times(B\times C)=B(A\bullet C)-C(A\bullet B) \tag{2-12-2}$$

が成立する．ベクトル A は二つのベクトルとの内積に姿を変え，ベクトル B とベクトル C の一次結合係数になる．ベクトル B とベクトル C のみが生き残っている．

6. ガウスの定理とストークスの定理

ガウスの定理は，面積分を体積積分に変換する定理である．　一方，ストークスの定理は，線積分を面積分に変換する定理で，グリーンの定理とも呼ばれる．各自ベクトル解析のテキストでその内容を確認されたい．電磁気学のテキストにもこの説明があるので，そのようなテキストでも良い．川邊「電磁気学の基礎事項」にも記してある．

３）電磁ポテンシャル

真空中の電磁場を記述する Maxwell 方程式の一つとして，

$$div\,\mathbf{H}=0 \qquad (3\text{-}1\text{-}1)$$

がある．磁場の強さ H の発散は０であることを言う．磁場は源を持たない（単磁荷はないこと）に対応する．だから，

$$div\,\mathbf{H}=\nabla\bullet\mathbf{H}=\frac{\partial H_x}{\partial x}+\frac{\partial H_y}{\partial y}+\frac{\partial H_z}{\partial z}=0 \qquad (3\text{-}2)$$

が成立する．これを，自明の恒等式式(20-10)

$$div\,rot\,\mathbf{A}=\nabla\bullet(\nabla\times\mathbf{A})=0$$

と比べると，A を任意のベクトルとして，

$$\mathbf{H}=rot\,\mathbf{A} \qquad (3\text{-}3)$$

であることが判る．ベクトル **H** がベクトル **A** の回転に等しい訳だから，**A は任意ではあるが，H のベクトルポテンシャル**であることになる．

一方，この真空中の電磁場に関する Maxwell 方程式には．Faraday の電磁誘導の法則に対応する

$$rot\,\mathbf{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}=0 \qquad (3\text{-}1\text{-}2)$$

が含まれている． $rot=\nabla\times$ であるから，

$$\nabla\times\mathbf{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}=0 \qquad (3\text{-}1\text{-}2')$$

とも書く．(3-3)の $\mathbf{H}=rot\,\mathbf{A}$ をここに代入すると，

$$rot\,\mathbf{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}=rot\,\mathbf{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(rot\mathbf{A})=rot(\mathbf{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t})=0 \qquad (3\text{-}4)$$

ナブラを使うと，

$$\nabla\times\mathbf{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}=\nabla\times\mathbf{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\ \mathbf{A})=\nabla\times(\mathbf{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t})=0 \qquad (3\text{-}4')$$

となる． φを任意のスカラー関数として，もう一つの自明の恒等式 (2-9)の $rot\,grad\,\varphi=\nabla\times(\nabla\,\varphi)=0$ が成り立つので，負符号をつけて

$$rot(-\,grad\,\varphi)=\nabla\times(-\nabla\,\varphi)=0 \qquad (2\text{-}9')$$

と書くことができる．負符号を付けることは，(2-3)の**スカラーポテンシャルの**

定義に対応させるためである．(2-9')と (3-4) あるいは(3-4')を比べれば，

$$\mathbf{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}=-grad\,\varphi,\quad \text{または}\quad \mathbf{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}=-\nabla\,\varphi$$

であることがわかる．このように，電場の強さ **E** には，スカラーポテンシャルφとこのベクトルポテンシャル A の両方が関与しており，

$$\mathbf{E}=-grad\varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \tag{3-5}$$

である．$\mathbf{H}=rot\,\mathbf{A}$，$\mathbf{E}=-grad\varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ の形で磁場と電場の強さを与えるスカラーポテンシャルφとベクトルポテンシャル **A** を合わせて**電磁ポテンシャル**と言う．(1-1)のローレンツ力，(1-2)の**運動方程式**の右辺側にある（**E**，**H**）は，この**電磁ポテンシャル**$(\varphi,\mathbf{A})$を用いて表現できる．

電磁ポテンシャル$(\varphi,\mathbf{A})$の導入の意味は次の通りである．電磁気学の基礎である Maxwell 方程式は幾つかの方程式から成り，(3-1-1)と(3-1-2)はそのうちの二つである．詳しくは次節で述べる．多くの変数が登場するが，$(\varphi,\mathbf{A})$を導入することで，この内の(3-1-1)と(3-1-2)は常に自動的に満足される式なってしまう．直接的に解くべき方程式が絞られることで，実質的変数として残るものを少なくできる．(3-3),(3-5)を合わせて見ると，左辺側の（**E**，**H**）では，変数は 3+3=6 だが，右辺側の**電磁ポテンシャル**$(\varphi,\mathbf{A})$では変数は 1+3=4 である．(3-1-1)と(3-1-2)の Maxwell 方程式を満足していることは同じであるものの，$(\varphi,\mathbf{A})$の導入で確かに実質的変数が減少している．

４）電磁ポテンシャル$(\varphi,\mathbf{A})$とゲージ変換不変性

4.1　Maxwell 方程式と電磁ポテンシャル$(\varphi,\mathbf{A})$

真空中の電磁場に対する Maxwell 方程式には，既出の(3-1-1)，(3-1-2)の他に，二つの方程式が含まれている．ひとつは，下記の(3-1-3)で，クーロンの法則に由来し，Gauss の定理を微分形で書いたものである．ρ は電荷密度を表す．もう一つの方程式は(3-1-4)で，アンペールの法則に相当する．電流には磁場が伴うことを表す．　**J** は電流密度である．単磁荷は存在せず磁場は源を持たないこと(3-1-1)，Faraday の電磁誘導 (3-1-2)，についての方程式では右辺が 0 であるが，残りの二つの方程式右辺は 0 ではなく，電荷密度 ρ と電流密度 **J** がある．

$$div\,\mathbf{H}=0 \qquad (3\text{-}1\text{-}1)$$

$$rot\,\mathbf{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}=0 \qquad (3\text{-}1\text{-}2)$$

$$div\,\mathbf{E}=4\pi\rho \qquad (3\text{-}1\text{-}3)$$

$$rot\,\mathbf{H}-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}=\frac{4\pi}{c}\mathbf{J} \qquad (3\text{-}1\text{-}4)$$

電荷の動きが電流であるから，電荷密度 ρ と電流密度 **J** には次のような関係，

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+div\,\mathbf{J}=0 \qquad (3\text{-}1\text{-}5)$$

が成立している．**電荷保存則**に対応する．これは流体運動の**連続の式**と同じである．連続の式の導出は章末の 7）に記す．(3-1-4)左辺第二項は，Maxwell が導入した**変位電流**に由来する．これを移行してみると，

$$rot\,\mathbf{H}=\frac{4\pi}{c}\mathbf{J}+\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}$$

である．もし，変位電流の項がなければ，定常電流が作る磁場の式（アンペールの法則）である．変位電流の導入で，アンペールの法則が非定常電流の場合に一般化されている．この両辺の div を取ってみると，(3-1-3)を使って

$$div\,rot\,\mathbf{H}=\frac{4\pi}{c}div\,\mathbf{J}+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(div\mathbf{E})=\frac{4\pi}{c}(div\,\mathbf{J}+\frac{\partial\rho}{\partial t})=0$$

となり，電荷保存則になる．コンデンサーからの放電を含むような開回路の電流は時間変化し，これによる磁場も時間変化する．このような場合にも電荷保

存則が成立するように，変位電流が導入されている．

実験則の総括から真空中の電磁場に対する Maxwell 方程式に至る過程の詳しい議論は，章末に記した電磁気学のテキストなどを参照されたい．真空中ではなく，金属や誘電体内部の電磁場の問題をも含めた電磁気学の一般論では，Maxwell 方程式はもう少し複雑になる．これについても電磁気学のテキストを参照されたい. CGS-Gauss 単位系での簡素で要領を得た議論は, 例えば, Slater-Frank の「理論物理学入門，上・下（岩波書店）」19−23 章（上巻）にある．

４つの方程式（Maxwell 方程式）と電荷保存則が真空電磁場の基礎であるが，ともかく，(3-1-1)，(3-1-2)の Maxwell 方程式,

$$div\,\mathbf{H} = 0$$

$$rot\,\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = rot(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}) = 0$$

は，**電磁ポテンシャル**$(\varphi,\mathbf{A})$を導入することで，常に満足されている関係式になった．**電磁ポテンシャル**$(\varphi,\mathbf{A})$で与えられる電磁場を考えるだけで良い．

$$\mathbf{H} = rot\,\mathbf{A} \tag{3-6-1}$$

$$\mathbf{E} = -grad\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \tag{3-6-2}$$

これらは, 残りの Maxwell 方程式(3-1-3)と(3-2-4)と電荷保存則(3-1-5)と結合され，$(\varphi, \mathbf{A})$が求められ，$(\mathbf{E}, \mathbf{H})$が決まる道筋になる．

せっかく，真空中の電磁場に対する Maxwell 方程式の半分まで来ているのだから，もう少し時間を取って，この道筋をたどることにする．

4.2　ベクトルポテンシャル A の任意性とゲージ変換

電磁ポテンシャルによって変数が減ることは了解するとしても，スカラーポテンシャルφもベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ も任意であり一意的には決まらない．これは困ったことではないのか？　確かにその通りである．しかし，この時点で重要なことは，**任意であることを根拠に，最も一般的な表現法を確保したこと**である．後の議論の中で，必要な条件を（φ, $\mathbf{A}$）に課し，これらを具体的なものとするのである．このような立場は，後の章で述べる正準変換の考え

方にも共通している．

この立場から，f を任意のスカラー関数として，再度，恒等式 (2-9) $rot\, grad f = \nabla \times (\nabla f) = 0$ を使う．これを(3-3)に加えても何も変化しないから，

$$\mathbf{H} = rot\,\mathbf{A} + rot\, grad f = rot\,(\mathbf{A} + grad f) \tag{3-7}$$

である．しかし，これは，電磁場を与える(3-3),(3-5)のベクトルポテンシャル**A**

$$\mathbf{A} \quad \rightarrow \quad \mathbf{A}' = \mathbf{A} + grad f,\quad \mathbf{H}' = rot\,\mathbf{A}'$$

の**変更**，あるいは，**変換**と見なすことが出来る． このベクトルポテンシャルの変換に対応して，スカラーポテンシャルも，

$$\varphi \quad \rightarrow \quad \varphi' = \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}$$

と変更する．何故これで良いかは後で議論するとして，この変換された電場，

$$\mathbf{E}' = -grad\varphi' - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t} = -grad(\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}) - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t}$$

を使って，電磁誘導の Maxwell 方程式左辺 $rot(\mathbf{E}' + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t})$ を求めてみる．

$$rot(\mathbf{E}' + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t}) = rot\{-grad(\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t})\} = -rot\, grad(\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}) = 0$$

となる．

$$div\,\mathbf{H}' = 0,\ \text{かつ},\quad rot\,\mathbf{E}' + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}'}{\partial t} = rot(\mathbf{E}' + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t}) = 0$$

であり，上記の変換後も，(3-1-1)，(3-1-2)の Maxwell 方程式は満足されている．即ち，$\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}$ がどんなスカラー関数であっても，$rot\, grad\,(\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}) = 0$ が成立するから， $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + grad f$，$\varphi \rightarrow \varphi' = \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}$ と電磁ポテンシャルが変換されても，Maxwell 方程式(3-1-1)，(3-1-2)は成立し，電磁場 **E**，**H** (3-6-1),(3-6-1) も不変である．この様に変換すると Maxwell 方程式も電磁場 **E**, **H** も不変になることが，上記スカラーポテンシャルの変換式を採用した理由である．

$$\mathbf{A} \rightarrow \quad \mathbf{A}' = \mathbf{A} + grad f, \qquad \varphi \ \rightarrow \quad \varphi' = \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t} \tag{3-8}$$

この**電磁ポテンシャルの変換**を**ゲージ変換**と言う．電磁場のこのような性質

は，「電磁場の$(\varphi,\mathbf{A})$はゲージ場である」とも表現する．**電磁場 E, H がゲージ変換で不変であるから, ローレンツ力もゲージ変換に不変**である. **従って, 荷電粒子に対する Newton の方程式もゲージ変換に不変**である.

電磁場の$(\varphi,\mathbf{A})$の方からすると，(3-8)の変換ではスカラーポテンシャルfだけの任意性があることになる．しかしながら，このスカラーポテンシャルfの任意性を積極的に使うことで, 残りの Maxwell 方程式(3-1-3)と(3-2-4)が単純化出来る. その過程で，電磁ポテンシャル$(\varphi,\mathbf{A})$に**具体的条件を課する**．議論はそのような道筋をたどる.

電磁ポテンシャル$(\varphi,\mathbf{A})$で与えられる電磁場 **E**, **H** (3-6-1),(3-6-1)を，残りの Maxwell 方程式(3-1-3), (3-1-4)に代入する.

$$div\ grad f = \nabla \bullet (\nabla f) = (\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}) f = \nabla^2 f$$ であるから，

$$\nabla^2 \varphi + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(div\mathbf{A}) = -4\pi\rho \tag{3-9-1}$$

$$rot\ rot\ \mathbf{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(grad\varphi) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J} \tag{3-9-2}$$

となる．しかし，φはφだけが，**A** は **A** だけが関与するような変数が分離された方程式の形にはなっていない．だから，スカラーポテンシャルf*の任意性を使って，そのような簡素な形に変えることを考える.*

4.3　ローレンツ条件（ローレンツ・ゲージ）

(3-8)の変換,

$$\mathbf{A} \to \quad \mathbf{A}' = \mathbf{A} + grad f, \qquad \varphi \ \to \quad \varphi' = \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t} \tag{3-8}$$

でfをうまく選んで,

$$div\mathbf{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \tag{3-10}$$

が実現するように出来る．この条件は**ローレンツ条件**と呼ばれる．ローレンツ条件が常に満足されることを以下で確認しよう.

(3-10)はスカラーであるが，はじめに選んだ電磁ポテンシャル$(\varphi',\mathbf{A}')$が(3-10)

を満足せず，

$$div\mathbf{A}'+\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi'}{\partial t}=g\neq 0 \qquad (3\text{-}11)$$

であっても，(3-8)のゲージ変換で$(\varphi,\mathbf{A})$に変わるとすると，(3-11)の$(\varphi',\mathbf{A}')$を(3-8)の$(\varphi,\mathbf{A})$で表現して，

$$div\mathbf{A}+div\ grad f+\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}=g$$

となる．　ローレンツ条件左辺に相当する項と*これ以外*の項を左右に分けてみると，

$$div\mathbf{A}+\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=g-(\nabla^2 f-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}) \qquad (3\text{-}12)$$

となる．右辺のfは任意であるから，(3-12)の右辺が0となるようにfを選ぶことが出来る．即ち，

$$(\nabla^2 f-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2})=g,\qquad \text{又は，}\ (\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2})f=g \qquad (3\text{-}12')$$

を満足するfが存在する．だから(3-10)の条件が満足される．スカラーポテンシャルfは，方程式(3-12')を満足するものに限定される．

任意のfをこのように決めることは，**ゲージの固定**とか**ゲージの選択**と呼ばれる．(3-10)は**ローレンツ条件**は，**ローレンツゲージ**が選択されていると表現される．

(3-10)のローレンツ条件，$div\mathbf{A}+\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0$，を 残りの Maxwell 方程式(3-9-1), (3-9-2)に代入すると，

$$\nabla^2\varphi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-4\pi\rho \qquad (3\text{-}13\text{-}1)$$

$$\nabla^2\mathbf{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}=-\frac{4\pi}{c}\mathbf{J} \qquad (3\text{-}13\text{-}2)$$

が得られる．(3-9-2)の場合は，$rot\ rot\ \mathbf{A}+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(grad\varphi)+\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}=\frac{4\pi}{c}\mathbf{J}$ であるから， (2-11)の恒等式，$rot\ rot\ \mathbf{A}=grad\ div\ \mathbf{A}-\Delta\mathbf{A}$，も同時に使う．恒等式と(3-10)

から， $rot\,rot\,\mathbf{A} = -\frac{1}{c} grad\,\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \Delta\,\mathbf{A}$ である．これを(3-9-2)に代入すると，(3-13-2)となる．

(3-13-1), (3-13-2)は，φだけ，**A** だけの方程式であり，望んだ形になっている．しかも，左辺側は波動方程式の形になっている．c の光速度はその伝播速度で，電荷密度 ρ と電流密度 **J** はそれぞれの源である．Maxwell 方程式も随分単純な方程式になった． (3-13-1)と(3-13-2) の右辺には，電荷密度 ρ と電流密度 **J** があるが，両者は**電荷保存則**を通じて繋がっているはずである．

電荷保存則は，電荷密度 ρ と電流密度 **J** に関する連続の式，(3-1-5)として与えられている．改めて書くと

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\,\mathbf{J} = 0 \qquad (3\text{-}14)$$

である．(3-13-1)の電荷密度 ρ を時間で偏微分し，(3-13-2)の電流密度 **J** の発散を取り，これらを電荷保存の式(3-14)に代入し，整理すると，

$$(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2})(div\,\mathbf{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t}) = 0 \qquad (3\text{-}15)$$

が得られる．スカラー量$(div\,\mathbf{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t})$が波動方程式を満足していることが判る．しかし，これは，(3-10)の**ローレンツ条件** $div\mathbf{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$として前提にしたものである．**ローレンツ条件は電荷保存則に矛盾していない**．即ち，ローレンツ条件 $div\mathbf{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$ が常に成立していれば，電荷保存則はつねに満足されていることになる．Maxwell 方程式 (13-2-1)，(13-2-2)を解けば，それが，**ローレンツゲージ**が選択された場合の電磁ポテンシャル$(\varphi,\mathbf{A})$である．

4.4 クーロン条件（クーロン・ゲージ）

ローレンツ・ゲージ（条件），$div\mathbf{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$，を選択した結果，残りの Maxwell 方程式は(3-13-1),(3-13-2)となり，源を持つ波動方程式になった．電荷保存則も満足している．ところで，我々は，電荷から無限遠にある位置でスカラーポテン

シャルをφ＝0と定義してこれを取扱っている．しかし，もともと，ベクトルポテンシャル **A** だけではなく，スカラーポテンシャルφも一意的には決まらないものであった．一方，一般の波動ベクトルは，進行方向に平行な縦波成分とこの方向に垂直な面内にある横波成分に分解できる．$div\mathbf{A}=0$である波動ベクトルAは，縦波成分は0で，横波成分のみを持つ．もし$rot\,\mathbf{A}=0$であるなら，波動ベクトル **A** は横波成分は0で，縦波成分しか持たない．この観点からすると，ローレンツ条件の意味は，変位電流に由来する$\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}$を加えることで，縦波成分$div\mathbf{A}$を強制的に0にしているとも解釈できる．そうであるなら，はじめから

$$div\mathbf{A}=0 \tag{3-16}$$

としてみることはどうであろうか．これは**クーロン条件，クーロンゲージ**と呼ばれる．

クーロンゲージを選んだ時，たとえ

$$div\mathbf{A}'=g\neq 0 \tag{3-17}$$

であっても，(3-8)のゲージ変換，

$$\mathbf{A}\rightarrow\quad \mathbf{A}'=\mathbf{A}+grad\,f,\qquad \varphi\ \rightarrow\quad \varphi'=\varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t} \tag{3-8}$$

の第一式を(3-17)に代入すれば，$div\mathbf{A}+div\,grad\,f=g$　であるから，

$$div\mathbf{A}=g-\nabla^2 f \tag{3-18}$$

となる．fが任意であることから$\nabla^2 f=g$ であるfにより，$div\mathbf{A}=0$と出来るはずである．

このクーロン条件を，(3-9-1), (3-92)の残りの Maxwell 方程式に改めて代入してみる．$div\mathbf{A}=0$と (2-11)の恒等式，$rot\,rot\,\mathbf{A}=grad\,div\,\mathbf{A}-\Delta\,\mathbf{A}$，も併用すると$rot\,rot\,\mathbf{A}=-\Delta\,\mathbf{A}$であるから．$\Delta\,\mathbf{A}\equiv\nabla^2\mathbf{A}$を用いて，

$$\nabla^2\varphi=-4\pi\rho \tag{3-19-1}$$

$$\nabla^2\mathbf{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}=-\frac{4\pi}{c}\mathbf{J}_t \tag{3-19-2}$$

が得られる．ただし，

$$\mathbf{J}_t=(\mathbf{J}-\frac{1}{4\pi}\nabla\frac{\partial\varphi}{\partial t}) \tag{3-19-3}$$

であり，これは横波成分だけを持つ．何故なら，$div\,\mathbf{J}_t = \nabla \bullet \mathbf{J}_t$を作ると，

$$div\,\mathbf{J}_t = div\,\mathbf{J} - \frac{1}{4\pi} div\,\nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} = div\,\mathbf{J} - \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2 \varphi = div\,\mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \qquad (3\text{-}19\text{-}4)$$

となるからである．最後から２番目の等号は(3-19-1)を用いている．また，最後の等号は電荷保存則である．クーロン条件も電荷保存則を満足している．

クーロン条件（$div\mathbf{A} = 0$）と**ローレンツ条件**（$div\mathbf{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$）を比べれば，両者の違いは，$\partial\varphi/\partial t = 0$ とするか，それとも$\partial\varphi/\partial t \neq 0$とするかにある．電磁ポテンシャルに戻って考えてみれば，

$$\mathbf{H} = rot\,\mathbf{A} \qquad (3\text{-}6\text{-}1)$$

$$\mathbf{E} = -grad\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \qquad (3\text{-}6\text{-}2)$$

であるから，**電場が時間変動しない**こと（**静電場**であること）は，$\partial\varphi/\partial t = 0$であり，かつ，$\partial\mathbf{A}/\partial t = 0$であること，即ち，(3-6-2)が

$$\mathbf{E} = -grad\varphi(x,y,z) \qquad (3\text{-}6\text{-}2a)$$

となることである．静電場であることは，$\partial\varphi/\partial t = 0$だけではなく，$\partial\mathbf{A}/\partial t = 0$の条件も付随するから，磁場 $\mathbf{H}$ に関しても時間変動はなく，静磁場を意味する．静電場の問題は，(3-6-2)から判るように，静的な磁場の問題と分離して考えることができる．

もう一つ，**クーロン条件**（$div\mathbf{A} = 0$，$\partial\varphi/\partial t = 0$）を満足する重要な場合がある．それは，$\varphi$＝０である**真空の自由空間**のことである．**電荷のない空間**は，電荷から無限遠の位置にあるとすることができるので，スカラーポテンシャルはφ＝０として良い．電荷のない空間では当然電流も無い．(3-6-2)は，

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \qquad (3\text{-}6\text{-}2b)$$

となる．しかし，ベクトルポテンシャルの時間変動に由来する電場が存在する，(3-6-1)の$\mathbf{H} = rot\,\mathbf{A}$もそのまま残るので，静電場の場合とは異なり，**磁場と電場は相互に結びついている**．真空中に実在する電磁場のことである．

クーロン条件（$div\mathbf{A} = 0$）は**ローレンツ条件**（$div\mathbf{A} + (1/c)(\partial\varphi/\partial t) = 0$）の特殊ケースであるが，これを用いて，$\varphi$＝０である**真空の自由空間の電磁場**につ

いて以下で考える．

4.5 真空中の電磁場

電荷も電流もない真空中の電磁場(**E**, **H**)問題は，$div\mathbf{A}=0$のクーロン条件で，$\rho=0$，$\mathbf{J}=0$の問題として解けば良い．

$$\varphi=0,\quad div\mathbf{A}=0 \qquad (3\text{-}20\text{-}1)$$

$$\mathbf{H}=rot\,\mathbf{A} \qquad (3\text{-}20\text{-}2)$$

$$\mathbf{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \qquad (3\text{-}20\text{-}3)$$

$$\nabla^2\mathbf{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial^2 t}=0 \qquad (3\text{-}20\text{-}4)$$

の連立方程式となる．

(3-20-2)の div を取ってみると，何度も使った自明の恒等式(2-10)から

$$div\,\mathbf{H}=div\,rot\mathbf{A}=0$$

である．また，(3-20-3)の div を取ってみると，**A** は横波で，$div\mathbf{A}=0$であるから

$div\,\mathbf{E}=-\frac{1}{c}div\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}=-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(div\mathbf{A})=0$．従って，

$$div\,\mathbf{H}=0,\qquad div\,\mathbf{E}=0 \qquad (3\text{-}20\text{-}5)$$

である．**H** も **E** も横波である．さらに，(3-20-3)の rot を取って，(3-20-2)を代入すると，

$$rot\,\mathbf{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}$$

となる．また，$rot\,rot\,\mathbf{A}=-\Delta\,\mathbf{A}$から，$rot\,\mathbf{H}=-\Delta\,\mathbf{A}$．(3-20-3)を時間で微分し

$\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}=-\frac{1}{c}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}$，これを (3-20-4)に代入して，

$$rot\,\mathbf{H}=\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}$$

となる．要するに，

$$rot\,\mathbf{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} \qquad (3\text{-}20\text{-}6)$$

$$rot\,\mathbf{H}=\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} \qquad (3\text{-}20\text{-}7)$$

である．(3-20-6)の rot を取ると，

$$rot\, rot\, \mathbf{E} = -\frac{1}{c} rot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(rot\, \mathbf{H}) = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \tag{3-20-8}$$

最後二つの等式は，(3-20-7)を代入した結果である．

一方， 恒等式 $rot\, rot\, \mathbf{E} = grad\, div\, \mathbf{E} - \Delta\, \mathbf{E}$ と (3-20-5)の $div\, \mathbf{E} = 0$ から，$rot\, rot\, \mathbf{E} = -\Delta\, \mathbf{E}$ である．これを(3-20-8)の左辺に入れれば，

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \Delta\, \mathbf{E} = \nabla^2\, \mathbf{E} = (\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial z^2}) \tag{3-20-9}$$

E に関する波動方程式が得られる．(3-20-7)の rot を取って同じことをやれば，**H** について同様の波動方程式が得られる．

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = \Delta\, \mathbf{H} = \nabla^2\, \mathbf{H} = (\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial z^2}) \tag{3-20-10}$$

である．後に続く平面波の解については電磁気学のテキストを参照されたい．

以上の過程を振り返ると，Maxwell 方程式は，(3-20-1)〜(3-20-4)の真空の電磁場の解を与える為に作られている．歴史的にも，Maxwell は真空中を光速度で伝播する電磁波の存在を予言し，後に Hertz がそれを実験的に確認した形になっている．しかも，現在 Maxwell 方程式として広く受け入れられているものは，Maxwell の未整理の議論を Hertz が整理した結果とされる（砂川重信，電磁気学，岩波書店，p.216）．電磁波の発見者である Hertz の当時の問題意識そのものであるように思える．**物質が何もない真空空間でも，電磁場が実在することを示すのは簡単ではない**．このことが，Maxwell 方程式の判り難さに繋がっているように思う．

真空中ではなく，金属や誘電体内部の電磁場の問題をも含めた電磁気学の一般論では，Maxwell 方程式はもう少し複雑になり，電束密度 **D** と誘電率**ε**，磁束密度 **B** と透磁率**μ**が加わってくる．電磁気学のテキストを参照されたい．

５）荷電粒子の運動に対する L と H

議論の道筋を，電磁ポテンシャルと Maxwell 方程式から，真空中の荷電粒子の運動方程式に戻す．荷電粒子に対する Newton の運動方程式(1-2)の右辺は，ローレンツ力(CGS ガウス単位系)

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{H} \tag{1-2}$$

となっている．これら右辺側の **E**，**H** は (3-2),(3-3)の電磁ポテンシャル

$$\mathbf{H} = rot\,\mathbf{A}, \qquad \mathbf{E} = -grad\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}$$

で与えられるので，(1-2)はゲージ変換に不変である．電磁ポテンシャルを(1-2)右辺に代入してみると，

$$e\mathbf{E} + \frac{e}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{H} = -grad\;\varphi e - \frac{e}{c}(\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}) + \frac{e}{c}\mathbf{v}\times(rot\;\mathbf{A}) \tag{4-2}$$

となる．次の(4-3), (4-4)の関係を使って(4-2)右辺を更に書き換える．

$$\frac{d\mathbf{A}(x,y,z,t)}{dt} = \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}$$

$$= \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{v}_x\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial x} + \mathbf{v}_y\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial y} + \mathbf{v}_z\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial z} = \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} + (\mathbf{v}\bullet\nabla)\mathbf{A}$$

これより，

$$\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} = \frac{d\mathbf{A}}{dt} - (\mathbf{v}\bullet\nabla)\mathbf{A} \tag{4-3}$$

また， (2-12-2)のベクトル三重積の公式 $A\times(B\times C) = B(A\bullet C) - C(A\bullet B)$ を使い，

$A\to\mathbf{v}, B\to\nabla, C\to\mathbf{A}$ と置き換えて， $\mathbf{v}\times(\nabla\times\mathbf{A}) = \nabla(\mathbf{v}\bullet\mathbf{A}) - \mathbf{A}(\mathbf{v}\bullet\nabla)$ だから，

$$\mathbf{v}\times(rot\;\mathbf{A}) = \mathbf{v}\times(\nabla\times\;\mathbf{A}) = \nabla(\mathbf{v}\bullet\mathbf{A}) - (\mathbf{v}\bullet\nabla)\mathbf{A} \tag{4-4}$$

である．故に，

$$e\mathbf{E} + \frac{e}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{H} = -grad\;\varphi e - \frac{e}{c}\{(\frac{d\mathbf{A}}{dt}) - (\mathbf{v}\bullet\nabla)\mathbf{A} - \nabla(\mathbf{v}\bullet\mathbf{A}) + (\mathbf{v}\bullet\nabla)\mathbf{A}\}$$

$$= -\nabla\;\varphi e - \frac{e}{c}(\frac{d\mathbf{A}}{dt}) + \frac{e}{c}\nabla(\mathbf{v}\bullet\mathbf{A})$$

となる．Newton の方程式は，

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\nabla\{\;\varphi e - \frac{e}{c}(\mathbf{v}\bullet\mathbf{A})\} - \frac{e}{c}(\frac{d\mathbf{A}}{dt}) \tag{4-5}$$

であり，右辺は電磁ポテンシャルによる表現になっている．特に注目すべきは $\{\varphi e-\frac{e}{c}(\mathbf{v}\bullet\mathbf{A})\}$ のスカラー量は，通常のポテンシャル（U）に対応するものであるが，速度が関与しており，座標だけの関数ではないことである．

$$\mathbf{r}=(x,y,z)=(q_1,q_2,q_3),\quad \mathbf{v}=(\dot{x},\dot{y},\dot{z})=(\dot{q}_1,\dot{q}_2,\dot{q}_3) \tag{4-6}$$

として，(4-5)を書き直してみる．

$$m\frac{d\dot{q}_i}{dt}=-\frac{\partial}{\partial q_i}\{\varphi e-\frac{e}{c}(\sum_{k=1}^{3}\dot{q}_kA_k)\}-\frac{e}{c}(\frac{dA_i}{dt})$$

最後の項は，$A_i=\frac{\partial}{\partial\dot{q}_i}(\sum_{k=1}^{3}\dot{q}_kA_k)$ と書くことが出来るから

$$\frac{dA_i}{dt}=\frac{d}{dt}\{\frac{\partial}{\partial\dot{q}_i}(\sum_{k=1}^{3}\dot{q}_kA_k)\}$$

である． 従って，Newton の運動方程式(4-5)右辺は，次のようになる．

$$\begin{aligned}m\frac{d\dot{q}_i}{dt}&=-\frac{\partial}{\partial q_i}\{\varphi e-\frac{e}{c}(\sum_{k=1}^{3}\dot{q}_kA_k)\}-\frac{e}{c}\frac{d}{dt}\{\frac{\partial}{\partial\dot{q}_i}(\sum_{k=1}^{3}\dot{q}_kA_k)\}\\&=-\frac{\partial}{\partial q_i}\{\varphi e-\frac{e}{c}(\sum_{k=1}^{3}\dot{q}_kA_k)\}+\frac{d}{dt}\{\frac{\partial}{\partial\dot{q}_i}(\varphi e-\frac{e}{c}(\sum_{k=1}^{3}\dot{q}_kA_k))\}\end{aligned} \tag{4-7}$$

最後の等式で，φはスカラーポテンシャルであり，$\partial(\varphi e)/\partial\dot{q}_i=0$ であることを使った．そこで，

$$U=\varphi e-\frac{e}{c}(\sum_{k=1}^{3}\dot{q}_kA_k) \tag{4-8}$$

とすると，Newton の運動方程式(4-5)は，次のような簡素な式になる．

$$m\frac{d\dot{q}_i}{dt}=-\frac{\partial U}{\partial q_i}+\frac{d}{dt}(\frac{\partial U}{\partial\dot{q}_i}) \tag{4-9}$$

従って，Lagrangian, L を

$$L=T-U=(1/2)m\{(\dot{q}_1)^2+(\dot{q}_2)^2+(\dot{q}_2)^2\}-U \tag{4-10}$$

と置けば,

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i})=\frac{d}{dt}(m\dot{q}_i-\frac{\partial U}{\partial\dot{q}_i})=m\frac{d\dot{q}}{dt}-\frac{d}{dt}(\frac{\partial U}{\partial\dot{q}_i})=-(\frac{\partial U}{\partial q_i})=(\frac{\partial L}{\partial q_i}) \tag{4-11}$$

の Lagrange 運動方程式となることが判る．最後から二番目の等号は Newton の運動方程式(4-9)が成立することに依る．即ち，Newton の運動方程式 (4-9)が成立

することは，(4-10)の Lagrangian に対して，(4-11)の Lagrange 運動方程式が成立することである．

以上の様に，電磁場の荷電粒子の運動の(4-10)の Lagrangian は,

$$L = T - e\varphi + \frac{e}{c}(\mathbf{v} \bullet \mathbf{A}) \qquad (4\text{-}12)$$

であることがわかる．q_iに共役な運動量は，$p_i = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$の関係から得られ，

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = m\dot{q}_i - \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} = m\dot{q}_i + \frac{e}{c}A_i \qquad (4\text{-}13)$$

となる．運動量ベクトルの形で書けば,

$$\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{q}} + \frac{e}{c}\mathbf{A} \qquad (4\text{-}14)$$

である．**通常の粒子運動量$m\dot{\mathbf{q}}_i$とは異なる**．荷電粒子が質量 m の単なる質点ではなく，電荷 e を持つことによる．$\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{q}} + (e/c)\mathbf{A}$　の**正準運動量**を，粒子の運動量$m\dot{\mathbf{q}}_i$と区別する為に，特に**力学的運動量**と呼ぶことがある．

(4-13)から，力学変数は$(q_i, \dot{q}_i) \to (q_i, p_i)$と変換されて，(4-13)から$\dot{q}_i = (1/m)(p_i - \dfrac{e}{c}A_i)$であるので，L の Legendre 変換から H を求める際に注意が必要である．

$$\begin{aligned}
H &= \sum_{i=1}^{3} p_i\dot{q}_i - L \\
&= \sum_{i=1}^{3} p_i\dot{q}_i - (1/2)m\sum_{i=1}^{3}(\dot{q}_i)^2 + U = \sum_{i=1}^{3} p_i\dot{q}_i - (1/2)m\sum_{i=1}^{3}(\dot{q}_i)^2 + \varphi e - \frac{e}{c}(\sum_{k=1}^{3}\dot{q}_k A_k) \\
&= \sum_{i=1}^{3}(p_i - \frac{e}{c}A_i)\dot{q}_i - (1/2)m\sum_{i=1}^{3}(\dot{q}_i)^2 + \varphi e
\end{aligned}$$

ここでの$\dot{q}_i$は旧変数であるから，$\dot{q}_i = (1/m)(p_i - \dfrac{e}{c}A_i)$　を代入して，

$$= \sum_{i=1}^{3}(\frac{1}{m})(p_i - \frac{e}{c}A_i)^2 - (1/2)m\sum_{i=1}^{3}(\frac{1}{m})^2(p_i - \frac{e}{c}A_i)^2 + \varphi e$$

となる．従って，電磁場における質量 m，電荷 e の荷電粒子の運動の H は,

$$H = \sum_{i=1}^{3}(\frac{1}{2m})(p_i - \frac{e}{c}A_i)^2 + \varphi e = (\frac{1}{2m})(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A})^2 + \varphi e \qquad (4\text{-}15)$$

となる．

一方, 電磁場と無関係な質量 m の粒子が, ポテンシャル V の下で運動する時, その H は,

$$H=\sum_{i=1}^{3}(\frac{1}{2m})(p_i)^2+V=(\frac{1}{2m})(\mathbf{p})^2+V \tag{4-16}$$

であるから，通常のこの運動量とポテンシャル V を,

$$\mathbf{p} \quad \to \quad (\mathbf{p}-\frac{e}{c}\mathbf{A}), \qquad V \quad \to \quad V+\varphi e \tag{4-17}$$

と**形式的に置き換える**ことで，質量 m，電荷 e の荷電粒子の真空電磁場での運動の H が得られる．この場合の V は非電磁的なポテンシャルである．即ち,質量 m，電荷 e の荷電粒子が，非電磁的なポテンシャル V も存在する真空の電磁場で運動する時，その Hamiltonian, H は

$$H=(\frac{1}{2m})(\mathbf{p}-\frac{e}{c}\mathbf{A})^2+V+\varphi e \tag{4-18}$$

となる．これは，**力学的運動量** $\mathbf{p}=m\dot{\mathbf{q}}+(e/c)\mathbf{A}$ を陽に書いたものである，荷電粒子の運動では，**力学的運動量** $\mathbf{p}=m\dot{\mathbf{q}}+(e/c)\mathbf{A}$ が**正準運動量**であるので，量子論に移行する時には，この力学的運動量による H を使わねばならない.

一方，$(\mathbf{p}-\frac{e}{c}\mathbf{A})=m\dot{\mathbf{q}}$ として．**通常の運動量(** $m\dot{\mathbf{q}}=m\dot{\mathbf{r}}$ **)に戻して表現**すると，

$$H=(\frac{1}{2})(m\dot{\mathbf{q}})^2+V+\varphi e=(\frac{1}{2})(m\dot{\mathbf{r}})^2+V+\varphi e \tag{4-19}$$

となる，運動の全エネルギ−としての Hamiltonian である． 通常の力学的エネルギ−$[(1/2)(m\dot{\mathbf{r}})^2+V]$に，電場が関わるエネルギー（$\varphi e$）が加わったものである．**磁場が関わるエネルギ−項は含まれない**．はじめに述べたように，荷電粒子の運動における磁場による仕事は常に 0 だからである．(4-19)は古典論的全エネルギ−を表す Hamiltonian としては正しい．しかし，荷電粒子の場合，$m\dot{\mathbf{q}}=m\dot{\mathbf{r}}$ はもはや正準運動量ではないので，量子論に移行する際は，(4-19)ではなく，(4-18)を使う必要がある．(4-19)と(4-18)は同じであるが，H の変数が異なるので，意味するものが違ってくることに注意.

６) Lagrangian の任意性と電磁場のゲージ変換

Lagrangian の任意性に関する議論で，Lagrangian が

$$L(q_i,\dot{q}_i)\rightarrow \overline{L}(q_i,\dot{q}_i,t)=L(q_i,\dot{q}_i)+\frac{dF(q_i,t)}{dt} \qquad (5\text{-}1)$$

と変換されると，Hamiltonian は,

$$H(p_k,q_k)\rightarrow \overline{H}(\overline{p}_k,q_k,t)=H(\overline{p}_k-\frac{\partial F}{\partial q_k},q_k)-\frac{\partial F}{\partial t} \qquad (5\text{-}2)$$

また，正準運動量は，(5-3)のように,

$$p_k \quad \rightarrow \quad \overline{p}_k=p_k+\frac{\partial F}{\partial q_k} \qquad (5\text{-}3)$$

変換されるが，Lagrange の運動方程式，Hamilton の正準運動方程式は全く不変であることを見た.

そこで，一つの荷電粒子（電荷 e，質量 m）で，(4-18)を念頭に，正準運動量を $p_k=m\dot{q}_k+(e/c)A_k$， 系のポテンシャルエネルギーを $(V+\varphi e)$ として，更に，(5-3)の変換を考える.

$$F=\frac{e}{c}f(x,y,z,t)=\frac{e}{c}f(q_1,q_2,q_3,t) \qquad (5\text{-}4)$$

とおいてみる．(5-3)の変換は,

$$p_k\rightarrow \overline{p}_k=p_k+\frac{\partial F}{\partial q_k}=m\dot{q}_k+(\frac{e}{c})A_k+(\frac{e}{c})\frac{\partial f}{\partial q_k}\ =m\dot{q}_k+(\frac{e}{c})(A_k+\frac{\partial f}{\partial q_k}) \qquad (5\text{-}5)$$

となる．この時，(5-2)の変換は

$H(p_k,q_k)\rightarrow \overline{H}(\overline{p}_k,q_k,t)=H(\overline{p}_k-\frac{\partial F}{\partial q_k},q_k)-\frac{\partial F}{\partial t}$ であるから，H については，前節(4-18)の Hamiltonian, $H=(\frac{1}{2m})(\mathbf{p}-\frac{e}{c}\mathbf{A})^2+V+\varphi e$，を使って,

$$\begin{aligned}\overline{H}(\overline{p}_k,q_k,t)&=H(\overline{p}_k-(\frac{e}{c}\frac{\partial f}{\partial q_k}),q_k,t)-\frac{\partial F}{\partial t}\\ &=(\frac{1}{2m})(\overline{\mathbf{p}}-\frac{e}{c}\nabla f-\frac{e}{c}\mathbf{A})^2+V+\varphi e-(\frac{e}{c})\frac{\partial f}{\partial t}\\ &=(\frac{1}{2m})\{\overline{\mathbf{p}}-\frac{e}{c}(\mathbf{A}+\nabla f)\}^2+V+e\{\varphi-(\frac{1}{c})\frac{\partial f}{\partial t}\} \qquad (5\text{-}6)\end{aligned}$$

となる．この最後の結果は，前に述べたゲージ変換,

$$\mathbf{A} \to \mathbf{A}' = \mathbf{A} + grad\, f\,,\quad \varphi \to \varphi' = \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}$$

を使うと，　(5-5), (5-6)は,

$$\bar{p}_k = m\dot{q}_k + (\frac{e}{c})(A_k + \frac{\partial f}{\partial q_k}) = m\dot{q}_k + (\frac{e}{c})A'_k \tag{5-7}$$

$$\overline{H}(\bar{p}_k, q_k, t) = (\frac{1}{2m})(\bar{\mathbf{p}} - \frac{e}{c}\mathbf{A}')^2 + V + e\varphi' \tag{5-8}$$

である．　前節の(4-18)では，正準運動量と Hamiltonian は,

$$p_k = m\dot{q}_k + (\frac{e}{c})A_k \tag{5-9}$$

$$H = (\frac{1}{2m})(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A})^2 + V + \varphi e \tag{4-18}$$

であるから，これら右辺で$(\mathbf{A},\varphi) \to (\mathbf{A}',\varphi')$と変換した結果が，(5-7),(5-8)になっていることが判る. 即ち, (5-1)で Lagrangian に$dF(q_i,t)/dt$を加えた効果は, 全て, $(\mathbf{A},\varphi) \to (\mathbf{A}',\varphi')$のゲージ変換に吸収されている．電磁場がゲージ変換に不変で, ローレンツ力，運動方程式もゲージ変換不変であることによる．このように, Lagrangian の任意性は電磁場のゲージ変換不変性に対応している．

7）連続の式と電荷保存則

下図のような$\delta x\delta y\delta z$の六面体体積素片を考え，その中の電荷数は粒子数，電荷密度ρは粒子密度として議論する．粒子密度ρが時間δt後にρ'に変化した時，体積素片中の粒子数は$\rho'\delta x\delta y\delta z$であるとすると，粒子数の時間変化率は，

$$\frac{(\rho'\delta x\delta y\delta z-\rho\delta x\delta y\delta z)}{\delta t}=\frac{(\rho'-\rho)}{\delta t}\delta x\delta y\delta z \quad\rightarrow\quad \frac{\partial\rho}{\partial t}\delta x\delta y\delta z \tag{1}$$

となる．六面体体積素片中の中心（x，y，x）（下図の黒い点）では，粒子は速度(u_x, u_y, u_z)を持っているとする．　この六面体体積素片で，x 軸に垂直な二つの面，粒子が流入する面 A^+と流出する面 A^-を考える．流入面 A^+は$[x-(1/2)\delta x]$ の位置にあり，流出面 A^-は，$[x+(1/2)\delta x]$の位置にある．流入面 A^+を通って，

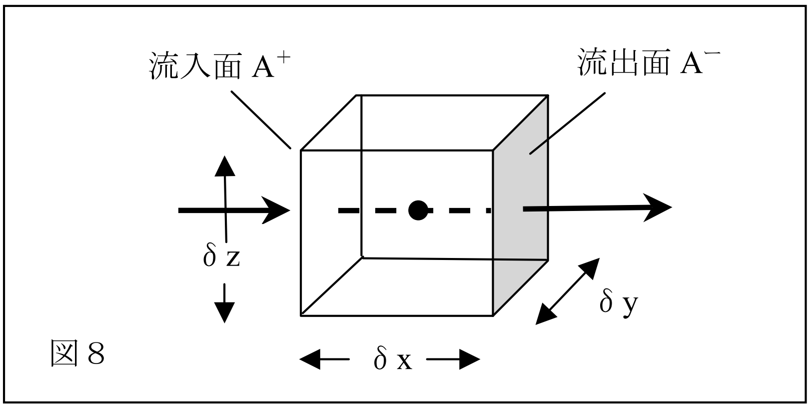

図８

単位時間当たりにこの体積素片に流入する粒子数 n(A^+)は，

$$\text{単位時間当たりの流入粒子数 } n(A^+)=\rho u_x\delta y\delta z-\{\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x}(\frac{1}{2})\delta x\}\delta y\delta z \tag{2}$$

と近似できる．第一項は中心点 x での評価値だが，流入面 A^+は$x-(\frac{1}{2})\delta$の位置にある為．x 座標が異なることに依る補正が必要となる．同様に，流出面 A^-を横切って単位時間当たりに体積素片から流出する粒子数は，

$$\text{単位時間当たりの流出粒子数 } n(A^-)=\rho u_x\delta y\delta z+\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x}(\frac{1}{2})\delta x\delta y\delta z \tag{3}$$

である．従って，単位時間内に，体積素片に残される粒子数は n(A^+)−n(A^-)である．x 軸方向の流れでは，

$$n_x = n(A^+) - n(A^-) = -\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x}\delta x\delta y\delta z \quad (4)$$

となる．同様の議論は，y 軸，z 軸に垂直な面でも同じ結果になるから，単位時間内に体積素片に残される総粒子数 n は，

$$n = -\{\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x}\delta x\delta y\delta z + \frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y}\delta x\delta y\delta z + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z}\delta x\delta y\delta z)\} \quad (5)$$

である． $\delta x\delta y\delta z$ の六面体体積素片内で**粒子が創成されたり，消滅しないならば**，この n が先ほどの粒子数の時間変化率(1)， $\frac{\partial\rho}{\partial t}\delta x\delta y\delta z$，に等しいことが粒子数の保存則である．(1)と(5)が等しいとして，両辺を $\delta x\delta y\delta z$ で割って移行すれば，

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z} = 0 \quad (6)$$

となる，これが保存則の表現である．

電磁気学における電流密度 **J** の定義は，微小体積 ΔV を考えて，その内部に分布する各荷電粒子の電荷を q_i，速度を $\mathbf{v}_i$ として，

$$\mathbf{J} = \frac{\sum_i q_i \mathbf{v}_i}{\Delta V} \quad (7)$$

である． 粒子密度 ρ を電荷密度 ρ に戻すと，$\rho u_x = J_x$，$\rho u_y = J_y$，$\rho u_z = J_z$ と対応することが判る．故に，

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial\rho}{\partial t} + div\,\mathbf{J} = 0 \quad (8)$$

である．

流体力学などでの連続の式では，粒子密度 ρ ではなく，粒子に固有の質量を与えて，質量密度 ρ となる．その場合，

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z} = 0 \quad (6)$$

となる．元々の，単位体積あたり単位時間当たりの粒子増加率は，正味の流入量に等しく，

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\{\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z}\} = -div(\rho\mathbf{u}) \quad (7)$$

である．質量密度 ρ が変化しない非圧縮性物質（$\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$）では，(7)は

$$\{\frac{\partial(u_x)}{\partial x}+\frac{\partial(u_y)}{\partial y}+\frac{\partial(u_z)}{\partial z}\}=div\,\mathbf{u}=0 \tag{8}$$

となり，非圧縮性物質の連続の式となる．(6)は圧縮性物質（$\frac{\partial\rho}{\partial t}\neq 0$）に関する連続の式である．(7)から判るように，(8)の左辺に負符号をつけたものは，$-div\,\mathbf{u}$ が単位体積あたり単位時間当たりの**粒子の正味の流入量**であるから，符号を変えた $div\,\mathbf{u}$ は，正味の流入量の符号を変えたもの，即ち，単位体積当たり単位時間当たりの粒子の**流出量（発散量）**である．

８）電磁気学の構成とその教科書

MKSA あるいは SI 単位系を使った電磁気学のテキストとして，筆者は

砂川重信　著　物理テキストシリーズ４．電磁気学，　岩波書店

溝口　正　著　電磁気学−SI　units−，　裳華房

長岡洋介　著　電磁気学 I, II　（物理入門コース３，４）岩波書店

を参照することが多い．古典電磁気学と特殊相対性論との関連については

砂川重信　著　理論電磁気学（第２版）　紀伊国屋書店

に詳しい．CGS-Gauss 単位系での教科書としては，

Slater-Frank　（井上　健訳）「理論物理学入門，上・下（岩波書店）」

の 19−23 章（上巻）を読むことが多い．

砂川氏の岩波テキストシリーズ版では，従来からの「電磁気学の構成」，即ち，実験的法則（クーロンの法則，アンペールの法則，ファラディーの電磁誘導の法則，ビオ・サバールの法則など）からマックスウェル方程式を導く形に進み，電磁波の問題をマックスウェル方程式を用いて議論する．小冊子ながら非常に丁寧な記述で良いテキストである．大著である紀伊国屋書店版のエッセンスをわかり易くまとめたものに当たる．紀伊国屋書店版の最後の部分では，マックスウェル方程式がローレンツ変換に不変であることを示し，特殊相対性論と合致していることが指摘されているが，岩波テキストシリーズ版ではこの

部分の記述は省略されている．溝口氏のテキストは，実験的事実から電磁気学を組み立てる立場が強く意識されており，多くの工夫があるように思う．長岡氏の著書は丁寧な記述が特徴である． CGS ガウス単位系（電荷の CGS 静電単位系と磁荷の CGS 電磁単位系を併用する単位系）での電磁気学のテキストは今や出版されないから，３０年前の学生時代に読んだ Slater-Frank の上記テキスト 19−23 章は，私にとっては今も貴重で．簡素な記述が良い．

しかし，以下のテキスト，

今井　功 (1990)　「電磁気学を考える」　（サイエンス社）pp. 421

今井　功 (2003)　「新感覚物理入門」　（岩波書店）　pp. 226

では，従来からの「電磁気学の構成」を一新する内容が提案されている．

I. 運動量とエネルギ−の保存則,

II. 電気力線と磁力線の幾何学的性質

III. 電気力線と磁力線の力学的性質,

IV. 電磁場の相対性

を**真空中の「電磁場の基本法則」**とし，従来から電磁場の基本法則とされて来たマックスウェル方程式を，クーロンの法則，アンペールの法則，ファラディーの電磁誘導の法則，ビオ・サバールの法則など同様に，上記基本法則から導ける定理として「格下げ」することが詳述されている．

重要なのは，エネルギー・運動量の保存則であるとの立場である．『流体力学の基礎方程式 Navier-Stokes の方程式は，これらの保存則から導けるので，必ずしも Navier-Stokes の方程式を知らなくても，保存則からすれば流体の挙動は理解できる．電磁気学のマックスウェル方程式は Navier-Stokes の方程式に相当するものであり，マックスウェル方程式を知らなくても，エネルギー・運動量の保存則から電磁気現象は理解可能である』との立場が述べられている．今井功 著 (2003)「新感覚物理入門」の第 II 部は，「電磁気学を考える」のエッセンスに当たる．力学や電磁気学に縁遠いと思う人は，この小冊子から読んだ方がわかり易いかも知れない．

私も大学入学後に電磁気学を学んだ．もやもやしたものを抱えて，マックス

ウェル方程式に至るが，これが「美しい電磁場の基本法則」であると言われても，もはやその魅力を感じる精神的余裕はまったく失われていた．後に，大学院での研究テーマを考える際や，教師となって化学熱力学などを教える際に，「電磁気学のもやもや」解消のために，幾つかのテキストを購入した．結局，上記の著書などで納得することにした．

このような「電磁気学のもやもや」は，程度の差はあれ，今井　功先生も含めて，何十年も前から多数の物理の学生も繰り返し感じて来たものであることを知って，安堵するとともに納得した．「電磁気学」を勉強しても，なかなか「なるほど」と思えなかったのは，学ぶ側の問題ばかりではなく，教える側の「電磁気学の構成」にも問題があるとの今井先生の意見に賛同したい．

筆者なりの感想を述べると，**真空中の電磁波**を論ずるために，マックスウェル方程式は準備されているように思う．物質が何もない空間での電場，磁場の実在を説明するためにはマックスウェル方程式が必要である．4)末尾に記したように，これは歴史的な経緯とも符号している．従って，今井先生のように，マックスウェル方程式を用いないで真空中の電磁場について説明する方法を提示できれば，初学者が抱く「電磁気学のもやもや」は相当低減する．砂川氏の岩波テキストシリーズ版も良く書かれている小冊子なので，今井　功 (1991)「電磁気学を考える」との併読を是非薦めたい．

筆者自身も「電磁気学の基礎事項」(2011)と題するテキストを記してみた．