

§6 ポアソン (Poisson) 括弧式と保存量

Hamiltonian (H) と他の物理量が保存量であることを示すには、ポアソン括弧式を使うと極端に単純になる。正準共役変数の議論、正準変換の議論で多用される。

1) ポアソン括弧式と保存量

いま、正準変数と時間 t で与えられる任意の関数 $F(q_i, p_i, t)$ を考える。 (q_i, p_i) は $i=1, 2, \dots, f$ の全ての正準変数を表すものとし、 (q_i, p_i) はもちろん時間 t の関数であるが、取り敢えず陽の形でも関数 F に関わるとする。

この関数 F の時間微分を考える。まず、 F の全微分を考え、この両辺を Δt で割り、 $\Delta t \rightarrow 0$ を考えれば良い。

$$\begin{aligned}\Delta F &= \frac{\partial F}{\partial t} \Delta t + \left(\frac{\partial F}{\partial q_1} \Delta q_1 + \dots + \frac{\partial F}{\partial q_i} \Delta q_i + \dots \right) + \left(\frac{\partial F}{\partial p_1} \Delta p_1 + \dots + \frac{\partial F}{\partial p_i} \Delta p_i + \dots \right) \\ \frac{\Delta F}{\Delta t} &= \frac{\partial F}{\partial t} + \left(\frac{\partial F}{\partial q_1} \frac{\Delta q_1}{\Delta t} + \dots + \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\Delta q_i}{\Delta t} + \dots \right) + \left(\frac{\partial F}{\partial p_1} \frac{\Delta p_1}{\Delta t} + \dots + \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\Delta p_i}{\Delta t} + \dots \right) \\ \frac{dF}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial t} + \left(\frac{\partial F}{\partial q_1} \frac{dq_1}{dt} + \dots + \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \dots \right) + \left(\frac{\partial F}{\partial p_1} \frac{dp_1}{dt} + \dots + \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} + \dots \right)\end{aligned}$$

従って、

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} \right) \quad (17)$$

この右辺側で、正準方程式、 $\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$, $\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$ で置き換えると、

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial F}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial F}{\partial p_i} \right) \quad (18)$$

となる。この右辺の第二項が、 \mathbf{H} と \mathbf{F} に対するポアソン括弧式 又は、ポアソン括弧 (Poisson bracket) である。通常次の様な括弧の記号で表現される。

$$[H, F]_C \equiv \sum_{i=1}^f \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial F}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial F}{\partial p_i} \right) \quad (19)$$

括弧に付けた下付き C は”古典力学のポアソン括弧”であることを表す。 Dirac

は, ”古典力学は量子力学の一つの極限でなければならない”との立場からこの古典力学のポアソン括弧に基づいて量子化条件(正準量子化)を提案した. この”量子力学に拡張されたポアソン括弧”と区別するための下付き C である.

H と F に対するポアソン括弧式を使って, 任意の関数 $F(q_i, p_i, t)$ 時間微分は,

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + [H, F]_C \quad (20)$$

となる. もし, H が t を陽に含まないならば,

$$\frac{dF}{dt} = [H, F]_C \quad (21)$$

である. F を力学系物理量とすると, (20),(21)はその時間発展, 即ち, 運動を与えている. Newton 方程式が時間の一階微分に姿を変えた一般的運動方程式である.

(21)を用いて, 正準方程式, $\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$, $\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$, をこのポアソン括弧を使って表

現にしてみる. (21)で $F \rightarrow q_i$ とした結果が正準方程式の第一式, $F \rightarrow p_i$ とした結果が第二式に対応する.

$$\frac{dq_i}{dt} = [H, q_i]_C, \quad \frac{dp_i}{dt} = [H, p_i]_C \quad (22)$$

右辺側を(19)の定義に従って, 実際に計算してみると, 以下のように, 確かに, (22)が成立していることが判る.

$$[H, q_i]_C = \sum_{k=1}^f \left(\frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial q_i}{\partial q_k} - \frac{\partial H}{\partial q_k} \frac{\partial q_i}{\partial p_k} \right) = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

$$[H, p_i]_C = \sum_{k=1}^f \left(\frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial p_i}{\partial q_k} - \frac{\partial H}{\partial q_k} \frac{\partial p_i}{\partial p_k} \right) = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

第一式では, $k=i$ である $\left(\frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial q_i}{\partial q_k} \right) = \frac{\partial H}{\partial p_k}$ だけが残る, 他は全て 0 となる. 第二式でも

同様に, $k=i$ である $-\left(\frac{\partial H}{\partial q_k} \frac{\partial p_i}{\partial p_k} \right) = -\frac{\partial H}{\partial q_k}$ だけが残る. (22)は, **H** と正準変数に対する

ポアソン括弧式で表した正準方程式である. 左辺の微分される量と同じものが右

辺の括弧右側にあり，微分方程式としてわかり易い形になっている．

また，(22)は，

$$\frac{dq_i}{dt} = [H, q_i]_c, \quad \frac{dp_i}{dt} = [H, p_i]_c$$

であり，座標と運動量の時間微分が H と座標，H と運動量のポアソン括弧で与えられることを示している．即ち，座標と運動量は，H とこれらのポアソン括弧式の時間積分で与えられるということである．

もし，(21)で

$$\frac{dF}{dt} = [H, F]_c = 0 \quad (23)$$

が成立するなら，F の時間微分は 0 であり，F は時間に依らず一定である．F を色々な物理量，例えば，エネルギー，角運動量，運動量とすれば，これらの保存則は(23)のポアソン括弧式で表現される．

2) ポアソン括弧式を用いた保存量の表現

2.1 H と”交換可能な”物理量

H と F に対するポアソン括弧式で，H と F を入れ替えた結果が，元のポアソン括弧式等しいことを，”F が H と交換可能である”とは言う．従って，”保存則が成り立っている一定の物理量 F は H と交換可能である”と言える．

交換可能であるから，

$$[H, F]_c = [F, H]_c \quad (24)$$

と書ける．(19)の定義から，

$$[H, F]_c = \sum_{i=1}^f \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial F}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial F}{\partial p_i} \right) \text{であるから, } [F, H]_c = \sum_{i=1}^f \left(\frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} - \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) = -[H, F]_c$$

従って，F が H と交換可能であるなら，

$$[H, F]_c = [F, H]_c = -[H, F]_c = 0$$

(23)と同じ意味になる．

古典力学のポアソン括弧は，量子力学でさらに拡張され，この交換可能性（可換性），非可換性は重要な意味を担う．

2.2 エネルギー-保存

式(21)は， $\frac{dF}{dt} = [H, F]_c$ であるが，ここで $F=H$ とすると，(19)のポアソン括弧

の定義， $[H, F]_c \equiv \sum_{i=1}^f \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial F}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial F}{\partial p_i} \right)$ に従えば，

$$\frac{dH}{dt} = [H, H]_c \equiv \sum_{i=1}^f \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) = 0 \quad (24)$$

である．これはエネルギー-保存則である．

2.3 中心力場における一粒子系における角運動量の保存

中心力場における質点の角運動量を考える．既に述べたように，質量 m_i の角運動量ベクトルは位置ベクトルと運動量ベクトルの外積で与えられる．

$$\vec{l}_i \equiv \vec{r}_i \times m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$

また，二つのベクトル $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$ と $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$ の外積の成分を直接求める場合は， $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ を x, y, z 方向の単位ベクトルとして，次の行列式を計算し，

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ の係数が， $\vec{A} \times \vec{B}$ の x, y, z 成分を与えることも既にのべた．これから，一質点系の場合は i がなくても良いから，

$$\begin{aligned} l_x &= y \cdot p_z - z \cdot p_y \\ l_y &= z \cdot p_x - x \cdot p_z \\ l_z &= x \cdot p_y - y \cdot p_x \end{aligned} \quad (25)$$

H と角運動量の z 成分とのポアソン括弧(19)をつくと,

$$[H, l_z]_C = \left(\frac{\partial H}{\partial p_x} \frac{\partial l_z}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial l_z}{\partial p_x} \right) + \left(\frac{\partial H}{\partial p_y} \frac{\partial l_z}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial l_z}{\partial p_y} \right) + \left(\frac{\partial H}{\partial p_z} \frac{\partial l_z}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial z} \frac{\partial l_z}{\partial p_z} \right)$$

$l_z = x \cdot p_y - y \cdot p_x$ であり, z と p_z は含まれていないから, 最後の項は消えて,

$$\begin{aligned} [H, l_z]_C &= \left(\frac{\partial H}{\partial p_x} \frac{\partial l_z}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial l_z}{\partial p_x} \right) + \left(\frac{\partial H}{\partial p_y} \frac{\partial l_z}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial l_z}{\partial p_y} \right) \\ &= \left(\frac{1}{m} p_x p_y + \frac{\partial V}{\partial x} y \right) + \left(-\frac{1}{m} p_x p_y - \frac{\partial V}{\partial y} x \right) \\ &= \frac{\partial V}{\partial x} y - \frac{\partial V}{\partial y} x \end{aligned} \quad (26)$$

二行目以降では, 前出の $H = T + V = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + V(x, y, z)$ を使っている.

一方, (x, y, z) 系と極座標系(r, θ , φ)との変換式は, 前出のように,

$$x = r \sin\theta \cos\varphi, \quad y = r \sin\theta \sin\varphi, \quad z = r \cos\theta$$

であるから, 次の方位角によるポテンシャルの偏微分を求めると,

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \varphi} &= \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial V}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \varphi} \\ &= \frac{\partial V}{\partial x} (-r \sin\theta \sin\varphi) + \frac{\partial V}{\partial y} (r \sin\theta \cos\varphi) = \frac{\partial V}{\partial x} \cdot (-y) + \frac{\partial V}{\partial y} \cdot x \\ &= -\left(\frac{\partial V}{\partial x} \cdot y + \frac{\partial V}{\partial y} \cdot x \right) \end{aligned}$$

となるから, これは(26)に負符号を付けたものに等しい. また, 中心力場を考えているから, $V(x, y, z) = V(r, \theta, \varphi) = V(r)$ であり, ポテンシャルは r のみにより決まり, 方位角には依存しない. 故に,

$$\frac{dl_z}{dt} = [H, l_z]_C = -\frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0 \quad (27)$$

これは, 中心力場の一粒子系での角運動量の z 成分の保存則である.

3) ポアソン括弧式の性質と正準共役変数

ポアソン括弧式は、座標と運動量の関数である任意の関数対 f と g に対しても適用される。

$$[f, g]_c = \sum_k \left(\frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial g}{\partial q_k} - \frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial g}{\partial p_k} \right) \quad (28)$$

この定義からすると、ポアソン括弧式は次の性質を持つ。関数の順序を入れ替えると括弧式は符号を変える。一方の関数が定数 c である場合は、ポアソン括弧式は 0 である。

$$1) \quad [f, g]_c = -[g, f]_c$$

$$2) \quad [f, c]_c = 0$$

さらに、ポアソン括弧式には次の関係がある。

$$3) \quad [f_1 + f_2, g]_c = [f_1, g]_c + [f_2, g]_c$$

$$4) \quad [f_1 f_2, g]_c = f_1 [f_2, g]_c + f_2 [f_1, g]_c$$

$$5) \quad \frac{\partial}{\partial t} [f, g]_c = \left[\frac{\partial f}{\partial t}, g \right]_c + \left[f, \frac{\partial g}{\partial t} \right]_c$$

$$6) \quad [f, [g, h]_c]_c + [g, [h, f]_c]_c + [h, [f, g]_c]_c = 0 \quad (\text{Jacobi の恒等式})$$

以上の性質は、(28)の定義式から機械的な計算で確かめることが出来る。ただし、6) の証明はかなり面倒であるので以下に少し述べる。

< Jacobi の恒等式について >

以下の Jacobi の恒等式、 $[f, [g, h]_c]_c + [g, [h, f]_c]_c + [h, [f, g]_c]_c = 0$ について考える。この等式の左辺を 1) の規則を用いて、 f を右側に来るように変形すると、

$$-[g, h]_c, f]_c + [g, [h, f]_c]_c - [h, [g, f]_c]_c = 0$$

となる。第一項を移行して、

$$[[g, h]_c, f]_c = [g, [h, f]_c]_c - [h, [g, f]_c]_c \quad (29)$$

であることを示せば良い。ポアソン括弧式の定義(28)に従えば、この右辺各項にある f は、2 回にわたってのポアソン括弧式の微分が作用するので、 f の 2 階の偏微

分を含む. しかし, 右辺では二項の差が取られているので, f の 2 階の偏微項は相殺され, 結果として, f の 1 階の偏微項のみが残る. ポアソン括弧式の定義(28)に従って, (29)の右辺を書き下し, これを確認されたい. 残った f の 1 階の偏微分項は, 以下に示す通り(29)の左辺になっている.

$$\begin{aligned}
(29)の右辺 &= \sum_l \sum_k \left\{ \left(\frac{\partial g}{\partial p_k} \right) \left(\frac{\partial^2 h}{\partial q_k \partial p_l} \right) - \left(\frac{\partial h}{\partial p_k} \right) \left(\frac{\partial^2 g}{\partial q_k \partial p_l} \right) \right\} \left(\frac{\partial f}{\partial q_l} \right) \\
&\quad - \sum_l \sum_k \left\{ \left(\frac{\partial g}{\partial q_k} \right) \left(\frac{\partial^2 h}{\partial p_k \partial p_l} \right) - \left(\frac{\partial h}{\partial q_k} \right) \left(\frac{\partial^2 g}{\partial p_k \partial p_l} \right) \right\} \left(\frac{\partial f}{\partial q_l} \right) \\
&\quad - \left[\sum_l \sum_k \left\{ \left(\frac{\partial g}{\partial p_k} \right) \left(\frac{\partial^2 h}{\partial q_k \partial q_l} \right) - \left(\frac{\partial h}{\partial p_k} \right) \left(\frac{\partial^2 g}{\partial q_k \partial q_l} \right) \right\} \left(\frac{\partial f}{\partial p_l} \right) \right. \\
&\quad \quad \left. - \sum_l \sum_k \left\{ \left(\frac{\partial g}{\partial q_k} \right) \left(\frac{\partial^2 h}{\partial p_k \partial q_l} \right) - \left(\frac{\partial h}{\partial q_k} \right) \left(\frac{\partial^2 g}{\partial p_k \partial q_l} \right) \right\} \left(\frac{\partial f}{\partial p_l} \right) \right] \\
&= \sum_l \frac{\partial}{\partial p_l} \left\{ \left(\frac{\partial g}{\partial p_k} \right) \left(\frac{\partial h}{\partial q_k} \right) - \left(\frac{\partial g}{\partial q_k} \right) \left(\frac{\partial h}{\partial p_k} \right) \right\} \left(\frac{\partial f}{\partial q_l} \right) \\
&\quad - \sum_l \frac{\partial}{\partial q_l} \left\{ \left(\frac{\partial g}{\partial p_k} \right) \left(\frac{\partial h}{\partial q_k} \right) - \left(\frac{\partial g}{\partial q_k} \right) \left(\frac{\partial h}{\partial p_k} \right) \right\} \left(\frac{\partial f}{\partial p_l} \right) \\
&= \sum_l \left\{ \frac{\partial [g, h]_C}{\partial p_l} \left(\frac{\partial f}{\partial q_l} \right) - \frac{\partial [g, h]_C}{\partial q_l} \left(\frac{\partial f}{\partial p_l} \right) \right\} = [[g, h]_C, f]_C \quad (30)
\end{aligned}$$

このように(29)の Jacobi の恒等式は成立する.

<ポアソン括弧式を用いた正準共役変数の定義>

関数対 f と g が座標や運動量そのものである場合を考えると,

$f=p_i, g=q_i$ の場合は,

$$[p_i, q_i]_C = \sum_k \left(\frac{\partial p_i}{\partial p_k} \frac{\partial q_i}{\partial q_k} - \frac{\partial p_i}{\partial q_k} \frac{\partial q_i}{\partial p_k} \right) = \left(\frac{\partial p_i}{\partial p_i} \frac{\partial q_i}{\partial q_i} - \frac{\partial p_i}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial p_i} \right) = 1$$

$f=p_i, g=q_k$ ($i \neq k$) の場合は,

$$[p_i, q_k]_C = \sum_k \left(\frac{\partial p_i}{\partial p_k} \frac{\partial q_k}{\partial q_k} - \frac{\partial p_i}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial p_k} \right) = 0$$

$f=p_i, g=p_i$ では,

$$[p_i, p_i]_C = \sum_k \left(\frac{\partial p_i}{\partial p_k} \frac{\partial p_i}{\partial q_k} - \frac{\partial p_i}{\partial q_k} \frac{\partial p_i}{\partial p_k} \right) = \left(\frac{\partial p_i}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial q_i} - \frac{\partial p_i}{\partial q_i} \frac{\partial p_i}{\partial p_i} \right) = 0$$

$f=p_i, g=p_k$ ($i \neq k$) の場合は,

$$[p_i, p_k]_C = \sum_k \left(\frac{\partial p_i}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial q_k} - \frac{\partial p_i}{\partial q_k} \frac{\partial p_k}{\partial p_k} \right) = 0$$

$f=q_i, g=q_i$ では,

$$[q_i, q_i]_C = \sum_k \left(\frac{\partial q_i}{\partial p_k} \frac{\partial q_i}{\partial q_k} - \frac{\partial q_i}{\partial q_k} \frac{\partial q_i}{\partial p_k} \right) = \left(\frac{\partial q_i}{\partial p_i} \frac{\partial q_i}{\partial q_i} - \frac{\partial q_i}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial p_i} \right) = 0$$

$f=q_i, g=q_k$ ($i \neq k$) の場合は,

$$[q_i, q_k]_C = \sum_k \left(\frac{\partial q_i}{\partial p_k} \frac{\partial q_k}{\partial q_k} - \frac{\partial q_i}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial p_k} \right) = \left(\frac{\partial q_i}{\partial p_i} \frac{\partial q_k}{\partial q_i} - \frac{\partial q_i}{\partial q_i} \frac{\partial q_k}{\partial p_i} \right) = 0$$

以上の結果は、クロネッカーの δ_{ik} ($i=k$ の時 $\delta_{ik} = 1$, $i \neq k$ の時 $\delta_{ik} = 0$) を用いて、次の様にまとめることが出来る。

$$[q_i, q_k]_C = 0, \quad [p_i, p_k]_C = 0, \quad [p_i, q_k]_C = \delta_{ik} \quad (29)$$

この結果は、ポアソン括弧式を用いた正準共役変数の定義である。正準変換の議論で再論する。この古典力学における p_i と q_i が正準共役であるとの定義は、

「量子力学での拡張されたポアソン括弧式」を用いる際にも踏襲される。ただし、量子力学で p_i と q_i は演算子に姿を変える。これについても後で少し述べる。