

## § 16 光子気体とプランクの空洞輻射公式

ここでは、「光子気体」の立場から空洞輻射の公式を導き、この公式から Wien の変位則、Stefan-Boltzmann 則へと、§ 11 で述べた「Planck の思考」とは逆の過程をたどってみる。光子はボゾンであるが、 ${}^4\text{He}$  の気体粒子であるボゾンとは同じようには扱えない。光子は「光速度の粒子」だから、特殊相対性論への留意が必要となる。また、「光子気体」の総粒子数は、物質による光子の吸収・放出が起こるので、固定された一定値とはならない。その物質と光子気体との間の熱力学平衡により、揺らぎをもつ一定値となると考える。 ${}^4\text{He}$  の気体粒子数のように、与えられた粒子数が保存される訳ではない。この章の後半では、「光子気体」の熱力学量を大正準分布とボーズ分布から考える。

### 16-1) 光子の気体

既に § 11 で述べたように、Planck のたどり着いた空洞輻射（黒体輻射）エネルギー密度の公式は、

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{\exp(h\nu/k_B T) - 1} \quad \text{§ 11-(3-5)}$$

である。 $u(\nu, T)$  の次元は  $[J] \cdot [m^{-3}] \cdot [(1/s)^{-1}]$  であり、 $u(\nu, T)$  は、 $(\nu + d\nu, \nu)$  の振動数区間の輻射光を考えた場合の「単位体積当り」、「単位振動数区間当たり」の輻射エネルギーを意味する。空洞輻射（黒体輻射）は「光子気体」から考えることができる。電磁気学の法則（マックスウェルの方程式）では線形の重ね合わせの原理が成立するので、光子間には相互作用はなく、「光子気体」は理想ボゾン気体と見なすことが出来る<sup>26,76)</sup>。

しかし、粒子としての「光子」を考えることは、「光速度の粒子」を考えるこ

とだから、特殊相対性論に留意する必要がある。これまでの議論は、暗黙のうちに非相対性論を前提にしているので、「光子気体」の議論はこの点で異なる。特殊相対論の次の二つの式を受け入れる。第一は粒子の運動速度に依存する質量に関する式で、 $c$  を光速、 $m_0$  を粒子の静止質量とすると、静止系に対して  $V$  の速度で運動する粒子の質量は、

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (V/c)^2}} \quad (18)$$

である。もう一つの式は特殊相対論での粒子の全エネルギーを与える式

$$\varepsilon^2 = c^2(p^2 + m_0^2 c^2) \quad (19)$$

である。この二式に留意すると、(18)から、 $V \rightarrow c$  の時、 $m_0 \neq 0$  ならば  $m$  は無限大となってしまうので、光子の静止質量はゼロ  $m_0 = 0$  としなければならない。従って、(19)に  $m_0 = 0$  を代入して、

$$\varepsilon = c|\mathbf{p}| \quad \text{または} \quad |\mathbf{p}| = \varepsilon/c \quad (20)$$

である。非相対論での質量が  $m$  である古典的粒子の運動エネルギーと運動量は

$$\varepsilon = \frac{1}{2} m V^2 = \frac{1}{2m} \mathbf{p}^2 \quad (21)$$

の関係にあるから、(21)は(20)とは全く異なる。光子のように「 $m_0 = 0$  の粒子」からなる気体、あるいは、(19)で  $p^2 \gg m_0^2 c^2$  である場合の気体は、「超相対論的気体」と呼ばれる<sup>17, 60)</sup>。

$c$  を光速とすると、光の振動数( $\nu$ )、角振動数( $\omega$ )、波長( $\lambda$ )には

$$\varepsilon = c|\mathbf{p}| = h\nu, \quad \omega = 2\pi\nu, \quad c = \lambda \cdot \nu \quad (22)$$

の関係がある。§ 11-4 で議論した「進行波の進行方向とその大きさ」を指定する波数ベクトル  $\mathbf{k}$  は、方向は波の進行方向に一致し、その大きさは、

$$|\vec{k}| = 2\pi\nu/c = 2\pi/\lambda \quad \S 11-4 (4-3)$$

と定義した．これと(22)による $|\vec{p}| = h\nu/c$ を使うと，

$$|\vec{p}| = \frac{h}{2\pi} \cdot |\vec{k}| = \hbar \cdot |\vec{k}| \quad (23)$$

となる．右辺側は，平面進行波に結びつく「波動的な運動量」を表すが，これを「粒子の運動量」とみなす．

もう一つ，光子が通常のボゾン粒子と異なることがある．それは「光子の総数」が常に与えられた一定の値にはないことである．例えば，ボゾン粒子の $^4\text{He}$ の場合，一旦空洞に注入されれば，その粒子の総数は保存されると考えることができる．しかし，光子の場合は，空洞の壁を為す物質に吸収されたり，壁から放出されたりするから，その総数は予め与えられた定数ではない．光子の総数は保存されず，空洞の壁の物質との間での光子のやり取り，即ち，壁の物質と光子ガスとの間の熱平衡によって決まると考えねばならない．与えられた (T, V) の下で，気体のヘルムホルツの自由エネルギーF が最小となる条件，

$$\left(\frac{\partial F}{\partial N}\right)_{T,V} = \mu = 0 \quad (24)$$

が実現すると考える（この点は § 16-4 でも再論する）．(24)の左辺は「光子」の化学ポテンシャルの定義でもあるから，「光子」の化学ポテンシャルが0であること意味する．§ 14-3 で述べたように，「ボゾン粒子が準位 $\varepsilon_r$ を占有する平均粒子数 $\bar{n}_r$ 」は，一般に，

$$\bar{n}_r = \frac{e^{-(\varepsilon_r - \mu)/k_B T}}{1 - e^{-(\varepsilon_r - \mu)/k_B T}} = \frac{1}{e^{(\varepsilon_r - \mu)/k_B T} - 1} \quad \S 14-3 (26)$$

とボーズ分布関数で与えられる．しかし，(24)より，光子ガスでは $\mu = 0$ だから，

「準位  $\varepsilon_r$  を占有する平均粒子数  $\bar{n}_r$ 」は、

$$\bar{n}_r = \frac{1}{e^{\varepsilon_r / k_B T} - 1} \quad \rightarrow \quad \bar{n}_{\mathbf{k}} = \frac{1}{e^{\varepsilon_{\mathbf{k}} / k_B T} - 1} \quad (25)$$

となる．ここでは準位  $r$  を、(22)、(23)の進行波を区別する波数ベクトル  $\mathbf{k}$  に留意して、量子状態  $\mathbf{k}$  と改めた．(25)の第二式は、運動量が  $\hbar\mathbf{k}$  でエネルギーが  $\varepsilon_{\mathbf{k}}$  である光子の平均占有数が  $\bar{n}_{\mathbf{k}}$  であることを意味する．

## 16-2) ボーズ分布から得られる空洞輻射エネルギー密度

既に§11-4 で議論したように、 $(\nu + d\nu, \nu)$  の振動数区間を考えた場合、

$$n(\nu)d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} d\nu \quad \text{§11-4 (4-9)}$$

が、単位体積当りの電磁波（光子）の個数、正確には、単位体積当りの電磁波である光子の量子状態数を与える．電磁波は横波であるから、進行方向に垂直な面内の二方向に分極した波を考えることができる．この因子 2 は§11-4 (4-9)に既に含まれている． $n(\nu)$  自体は、単位振動数区間当たり、単位体積当りの電磁波（光子）の量子状態数を表す．このように、§11-4 (4-9)は単位体積当たりの値であるから、空洞の体積を  $V$  とすると、§11-4 (4-9) の両辺に  $V$  を掛けたものが、 $(\nu + d\nu, \nu)$  の振動数区間に含まれる電磁波（光子）の量子状態数である．

$$n(\nu) \cdot V \cdot d\nu = V \cdot \frac{8\pi\nu^2}{c^3} d\nu \quad (26)$$

これに(25)の光子の平均占有数を掛ければ、 $(\nu + d\nu, \nu)$  の振動数区間に含まれる実際上の光子数  $dN_\nu$  となる．

$$dN_\nu = V \cdot \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \cdot \frac{d\nu}{e^{h\nu / k_B T} - 1} \quad (27)$$

ここでは、ボーズ分布関数による(25)の光子の平均占有数は、

$$\bar{n}_{\mathbf{k}} = \frac{1}{e^{\varepsilon_{\mathbf{k}}/k_B T} - 1} \rightarrow \frac{1}{e^{h\nu/k_B T} - 1}$$

とした．さらに、光子 1 個のエネルギー  $h\nu (= \hbar\omega)$  を掛ければ、 $(\nu + d\nu, \nu)$  の振動数区間に含まれる輻射エネルギー  $dE_\nu$  となる．

$$dE_\nu = V \cdot \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \cdot \frac{h\nu d\nu}{e^{h\nu/k_B T} - 1} \quad (28)$$

この両辺を  $V \cdot d\nu$  で割った結果は、「単位体積当り」、「単位振動数区間当り」の輻射エネルギー、即ち、 $(\nu + d\nu, \nu)$  の振動数区間での輻射エネルギー密度、となり、

$$u(\nu, T) = \frac{dE_\nu}{V d\nu} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{\exp(h\nu/k_B T) - 1} \quad (29)$$

である．これは、§ 11-(3-5)の Planck の空洞輻射エネルギー密度式に一致する．

このようにして、ボーズ分布式と光子気体の考え方から、空洞輻射エネルギー密度に関する Planck の公式が得られる．

§ 11 で述べたように、 $h\nu \ll k_B T$  の場合は、 $\exp(h\nu/k_B T) = 1 + (h\nu/k_B T) + \cdots$  の近似から、(29)は

$$u(\nu, T) = \frac{dE_\nu}{V d\nu} \approx \frac{8\pi\nu^2}{c^3} k_B T \quad (30)$$

と、Rayleigh-Jeans の式となる．ここでは Planck 定数  $h$  が現れない． $8\pi\nu^2/c^3$  は

「単位体積当たりの振動数  $\nu$  の電磁波の個数」であり、 $k_B T$  は一つの古典論的振動子（波動）の平均エネルギーだから、両者の積は単位体積当たり、単位振動数当たりの振動数  $\nu$  の電磁波の全エネルギーを意味するが、Planck 定数  $h$  がないことは、これが古典論での波動エネルギーであることを意味する．

一方、 $h\nu \gg k_B T$  の場合は、 $\exp(h\nu/k_B T) \gg 1$ 、 $\exp(h\nu/k_B T) - 1 \approx \exp(h\nu/k_B T)$  に  
より、(29)は

$$u(\nu, T) = \frac{dE_\nu}{V d\nu} \approx \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} \cdot \exp(-h\nu/k_B T) \quad (31)$$

となる。Wien の式である。(31)にはプランク定数  $h$  は含まれているものの、Planck  
の空洞輻射式が提案される以前に、Wien は、 $u(\nu, T) = b\nu^3 \cdot \exp(-a\nu/T)$  の関数形  
で空洞輻射の実験データを近似できることを指摘していた (§ 11)。(31)は、

$$u(\nu, T) \approx \frac{8\pi \nu^2}{c^3} \cdot (h\nu) e^{(-h\nu/k_B T)} \quad (32)$$

と書いても良い。 $(h\nu) e^{(-h\nu/k_B T)} = \varepsilon \cdot e^{(-\varepsilon/k_B T)}$  だから、(32)はボルツマン分布を想起  
させる。§ 14-3-(28)で議論したように、ボルツマン分布での「準位  $\varepsilon_r$  を占有す  
る平均粒子数  $\bar{n}_r$ 」は、

$$\bar{n}_r = e^{-(\varepsilon_r - \mu)/k_B T} = \frac{1}{e^{(\varepsilon_r - \mu)/k_B T}} \quad \text{§ 14-3-(28)}$$

であったから、 $\mu = 0$  として考えれば、 $(h\nu) e^{(-h\nu/k_B T)} = \varepsilon \cdot e^{(-\varepsilon/k_B T)}$  は、「1 粒子エネ  
ルギー」と「準位  $\varepsilon$  を占有する平均粒子数」の積を意味し、ボルツマン分布で  
の粒子エネルギーと見なすことが出来る。しかし、元々は、(29)で  
 $\exp(h\nu/k_B T) \gg 1$  としたこと、即ち、 $h\nu/k_B T \gg 1$  に依る。これは、図 14-1 の  
横軸で  $\varepsilon = h\nu$ 、 $\mu = 0$  として考えれば、 $(\varepsilon - \mu)/k_B T \gg 1$  の条件となるから、本当は、  
ボーズ分布でもボルツマン分布でも同じ結果になるという意味でのボルツマン  
分布である。

もし、ボルツマン因子の総和（分配関数  $Z$ ）が調和振動子の場合のように

$\sum_n e^{(-nh\nu/k_B T)}$  で与えられるとすると、このエネルギー期待値は

$$\begin{aligned}
\langle \varepsilon \rangle &= \sum_j \varepsilon_j \cdot e^{(-\varepsilon_j / k_B T)} / \sum_j e^{(-\varepsilon_j / k_B T)} = \sum_n (nh\nu) e^{(-nh\nu / k_B T)} / \sum_n e^{(-nh\nu / k_B T)} \\
&= \frac{(h\nu) e^{(-h\nu / k_B T)}}{1 - e^{(-h\nu / k_B T)}} = \frac{h\nu}{e^{h\nu / k_B T} - 1} \quad (32')
\end{aligned}$$

となり、(32) はボルツマン分布を経て正確に Planck の輻射密度式(29)となる。  
 ここで調和振動子が出てくることには理由がある。Maxwell 方程式で記述される電荷を含まない真空電磁場は、無数の一次元調和振動子の集合と「力学的には等価」であることが証明されるからである（付録 11）。 $\varepsilon = nh\nu$  ( $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ ) を考えることは、電磁場エネルギーの量子化に当る。ただし、§ 11-5 で述べたように、調和振動子の零点エネルギーは無視しなければならない。

Rayleigh-Jeans の式、Wien の式、Planck の輻射密度式、の三者の違いは、(32) 右辺の第二因子が、

$$k_B T \quad \leftrightarrow \quad (h\nu) e^{(-h\nu / k_B T)} = \varepsilon \cdot e^{(-\varepsilon / k_B T)} \quad \leftrightarrow \quad \frac{(h\nu) e^{(-h\nu / k_B T)}}{1 - e^{(-h\nu / k_B T)}} = \frac{h\nu}{e^{h\nu / k_B T} - 1}$$

と異なることに対応している。 $k_B T$  は一つ振動子のエネルギーであり、古典論的波動のエネルギーの平均値を表す。一方、 $(h\nu) e^{(-h\nu / k_B T)}$  の場合は、 $(\nu + d\nu, \nu)$  の振動数区間での 1 粒子エネルギーにボルツマン因子（ボルツマン分布に依る平均粒子占有数）を掛けたもので、これを「1 粒子エネルギー期待値」の近似値と見なせば、「粒子」のエネルギーと解釈出来る。その意味で、光（輻射）は波動と粒子の両方の性質を併せ持つと言っても良い。最後の  $\frac{h\nu}{e^{h\nu / k_B T} - 1}$  は、ボー  
 ズ・アインシュタイン分布での 1 粒子エネルギー期待値であり、これが実験値を再現する輻射密度式を与える。しかし、(32') に示すように、ボルツマン因子の総和（分配関数  $Z$ ）を調和振動子のように考えれば、ボルツマン分布でも Planck

の輻射密度式が得られる。

Planck は、空洞の壁を「区別出来る調和振動子」からなる系と考え、壁と空洞輻射の熱平衡では振動子のエネルギーは  $h\nu(= \hbar\omega)$  を単位として吸収・放出されるものと仮定し（エネルギーの量子化）、ボルツマン分布を用いて、空洞輻射エネルギー密度の式を導いた。この式が、上記二つ極限で Rayleigh-Jeans の式と Wien の式の両方を導き、かつ、空洞輻射の測定値全体を正確に再現することを Planck は確認した。「エネルギーの離散化＝量子化」を考える始まりとなった。1900 年のことである（§ 11）。一方、量子統計のボーズ分布式を「粒子を相互に区別できない」光子気体に適用することでも、同じ結論に至ることが確認されるのは 1924 年以降のことである（§ 16-6, 7）。

空洞の壁を「区別出来る調和振動子→ボルツマン分布」と考えても、「粒子を相互に区別できない光子気体→ボーズ分布」を考えても、同一の結果が得られるのは一見すると不思議である。しかし、空洞の壁と光子気体の熱平衡  $(\partial F / \partial N)_{T,V} = \mu = 0$  (24) が議論の前提にあることからすると、合理的な結論である（§ 16-4, -5）。この光子気体に対する熱平衡条件から、大正準分布の分配関数  $\Xi(T, \mu, V)$  は、結局は、正準分布の分配関数  $Z(T, V)$  に戻るなので、上で見たように、プランクの輻射密度式はボルツマン分布を使っても導出される<sup>6, 10)</sup>。この問題は § 16-4, -5 で再論する。



### 16-3) 光子気体と輻射密度公式：Wein の変位則と Stefan-Boltzmann 則

§11-(3-5)のプランクの輻射密度公式,

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi h}{c^3} \cdot \frac{\nu^3}{\exp(h\nu/k_B T) - 1} \quad \S 11-(3-5)$$

を,  $T=3000\text{K}$  から  $6000\text{K}$  の範囲で, 輻射光の振動数  $\nu$  の関数として描くと,

図 16-1 のようになる. 各温度で最大の輻射密度を与える光の振動数 ( $\nu_{\max}$ ) は

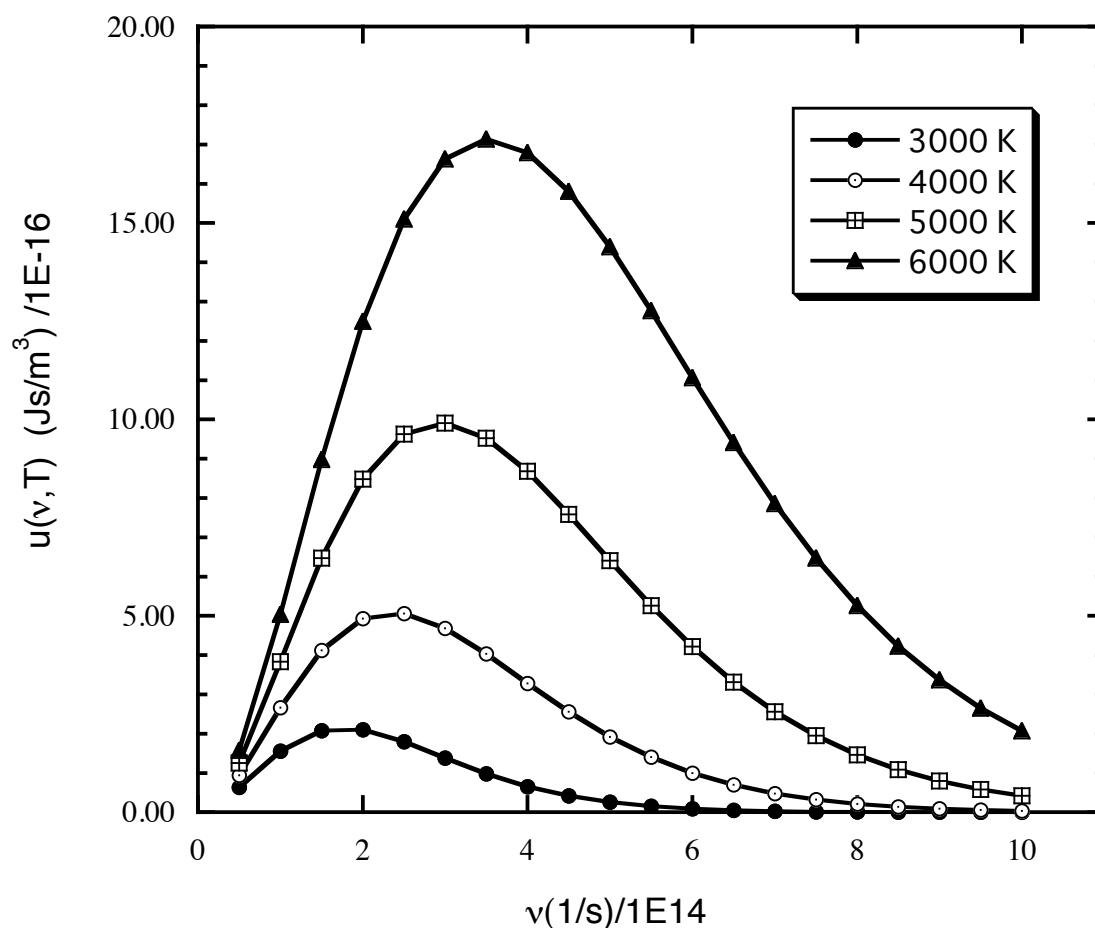


図 16-1. 振動数  $\nu$  に対する Planck 公式の空洞輻射エネルギー密度  $u(\nu, T)$  変化. 最大強度の振動数 ( $\nu_{\max}$ ) は温度  $T$  の増大に伴い増大する.

温度が上昇するに従い,  $\nu_{\max}$  は高振動数側に変位する. 最大強度の振動数 ( $\nu_{\max}$ )

を求めるには、 $u(\nu, T)$ を $\nu$ で微分して、 $\partial u(\nu, T)/\partial \nu = 0$ と置けば良い。

$$\begin{aligned}\frac{\partial u(\nu, T)}{\partial \nu} &= \left(\frac{8\pi h}{c^3}\right) \cdot \left\{ \frac{3\nu^2}{e^{h\nu/k_B T} - 1} + \frac{(-1)\nu^3}{(e^{h\nu/k_B T} - 1)^2} \cdot e^{h\nu/k_B T} \cdot \left(\frac{h}{k_B T}\right) \right\} \\ &= \left(\frac{8\pi h}{c^3}\right) \cdot \left(\frac{\nu^2}{e^{h\nu/k_B T} - 1}\right) \cdot \left\{ 3 - \left(\frac{\nu}{e^{h\nu/k_B T} - 1}\right) \left(\frac{h}{k_B T}\right) e^{h\nu/k_B T} \right\} = 0\end{aligned}\quad (33)$$

(33)が0となる為には、 $\{ \quad \}$ の項が0であれば良い。  $x \equiv \left(\frac{h\nu}{k_B T}\right)$  とすると、この

条件は、次の超越方程式

$$(3 - x)e^x = 3 \quad (34)$$

となる。この解は数値解として次のように決まる。

$$x = 2.821 = \frac{h\nu_{\max}}{k_B T} \quad (35)$$

最大輻射強度の振動数 ( $\nu_{\max}$ ) は温度に比例して増加する。

$$\nu_{\max} = 2.821 \left(\frac{k_B}{h}\right) T \quad (36)$$

これは振動数から見た場合の Wein の変位則に相当する。次に見るように、

$\nu = c/\lambda$  の関係から、最大輻射強度の波長は温度の逆数に比例する。

§11-2 では、振動数と波長の二つの変数で表現した輻射エネルギー密度式を相互に変換する際には、

$$u(\nu, T)|d\nu| = u(\lambda, T)|d\lambda| \quad \S 11-2(2-2)$$

と等置して、 $\lambda = c/\nu$ からの生じる条件、

$$d\lambda = -(c/\nu^2)d\nu \quad \S 11-2(2-3)$$

を使うと述べた。しかし、§11-2(2-3)は $\nu = c/\lambda$ として

$$d\nu = -(c/\lambda^2)d\lambda \quad \S 11-2(2-3)'$$

と考えても同じことである。 §11-2(2-2)の意味は「振動数区間の輻射エネルギー

一密度と対応する波長区間の輻射エネルギー密度が等しい」と言う意味である。  
 輻射エネルギー密度は、どちらの変数で表現しても正の値であるが、 §11-2(2-3)  
 または (2-3)' から、  $d\nu$  を正とすると  $d\lambda < 0$ 、  $d\nu$  を負とすると  $d\lambda > 0$  である。 だ  
 から、これまで通り  $d\nu$  を正とすると、 §11-2(2-2)は

$$u(\nu, T)d\nu = u(\lambda, T)|d\lambda| = -u(\lambda, T)d\lambda$$

これより、

$$u(\lambda, T)d\lambda = -u(\nu, T)d\nu \quad (37)$$

である。プランクの公式

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{\exp(h\nu/k_B T) - 1}$$

の右辺に  $\nu = c/\lambda$  を代入したものを作り、更に  $d\nu = -(c/\lambda^2)d\lambda$  を掛ければ、輻射光  
 の波長を変数とする輻射エネルギー密度の表現(6)が得られる。

$$u(\lambda, T)d\lambda = -u(\nu, T)d\nu = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \cdot \frac{d\lambda}{\exp(hc/\lambda k_B T) - 1} \quad (38)$$

輻射エネルギー密度を最大にする輻射光の波長( $\lambda_{\max}$ )は、(38)の分母を最小にする  
 波長であるから、

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \{ \lambda^5 \cdot [\exp(hc/\lambda k_B T) - 1] \} = 0 \quad (39)$$

として決めることが出来る。  $y \equiv hc/(\lambda k_B T)$  とすると、次の超越方程式

$$y = 5 \cdot [1 - \exp(-y)]$$

の解 ( $y = 4.96$ ) が、輻射エネルギー密度を最大にする輻射光の波長( $\lambda_{\max}$ )を与  
 える。従って、

$$\lambda_{\max} = \frac{1}{4.96} \left( \frac{hc}{k_B T} \right) \quad (40)$$

である．温度上昇に伴い，輻射エネルギー密度を最大にする輻射光の波長( $\lambda_{\max}$ )は短くなる．波長で考えた Wein の変位則である．

図 16-1 に示した  $T=6000\text{K}$  の輻射エネルギー密度分布は，太陽表面が周囲に放射している輻射エネルギー分布にほぼ等しい． また，1964 年に Penzias, A. と Wilson, R. A. が偶然発見した「宇宙の背景輻射」は， $T=3\text{K}$  の空洞（黒体）輻射に当る．「3K の宇宙の背景輻射」の発見は，「ビッグバン宇宙論」を支持する重要な観測事実となった．

一方，プランクの輻射密度公式，

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi h}{c^3} \cdot \frac{\nu^3}{\exp(h\nu/k_B T) - 1} \quad \S 11-(3-5)$$

を，全振動数範囲で積分すれば，輻射エネルギー密度．即ち，単位体積当たりの輻射エネルギーとなる．これが絶対温度の 4 乗に比例することは，Planck が輻射密度公式を発見する前に，Stefan-Boltzmann 則として知られていた (§ 11). §11-(3-5)を全振動数範囲で積分した結果を  $u^*=(U/V)$  と記すと， $U$  は体積が  $V$  である光子気体の全エネルギーを意味する．

$$u^* = \frac{U}{V} = \frac{8\pi h}{c^3} \int_{\nu=0}^{\infty} \frac{\nu^3}{\exp(h\nu/k_B T) - 1} d\nu \quad (41)$$

ここで， $x \equiv h\nu/(k_B T)$  とおくと， $\nu^3 d\nu = (k_B T/h)^4 x^3 dx$  となるから

$$u^* = \frac{U}{V} = \frac{8\pi (k_B)^4 T^4}{c^3 h^3} \int_{x=0}^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx$$

となる．定積分は  $\int_{x=0}^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^4}{15}$  であるから，Stefan-Boltzmann 則となる．

$$u^* = \frac{U}{V} = \frac{8\pi^5 (k_B)^4}{15c^3 h^3} T^4 \quad (42)$$

従って，光子気体の全エネルギー  $U$  は，

$$U = \frac{8\pi^5 (k_B)^4 V}{15c^3 h^3} T^4 \quad (43)$$

である。

#### 16-4) 光子気体の大正準分配関数と熱力学量

光子気体の熱力学量を系統的に考えるには、大正準分配関数  $\Xi(T, \mu, V)$  を利用すると良い。(43)の結果はこの立場からも導くことができる。ここでは、大正準分配関数  $\Xi(T, \mu, V)$  を用いて、光子気体の熱力学量を系統的に導出する。

§ 9-3 では、大正準分配関数  $\Xi(T, \mu, V)$  が、一般的関係として、

$$k_B T \ln \Xi(T, \mu, V) = pV \quad \text{§ 9-3 (58)}$$

であり、また、

$$pV = G - F = N\mu - F = N\mu - E + ST \quad \text{§ 9-3 (56)}$$

が成立することも述べた ( $E$  は  $U$  の意味で用いている)。これらの二式より

$$k_B T \ln \Xi(T, \mu, V) = pV = N\mu - F \quad (44)$$

である。ところが、光子気体の化学ポテンシャル  $\mu$  は 0 であるから、 $N$  の値によらず

$$F = -k_B T \ln \Xi \quad (45)$$

となる。 $\mu = 0$  で、 $N$  が保存されないことの意味は § 16-5 でさらに議論する。

一方、§ 14-2 では、ボーズ粒子に対する大正準分配関数は、

$$\Xi = \prod_r \frac{1}{1 - e^{-(\epsilon_r - \mu)/k_B T}} \quad \text{§ 14-2 (14)}$$

であった。光子気体にこれを適用すれば、光子気体の化学ポテンシャル  $\mu = 0$  であるから

$$\Xi = \prod_r \frac{1}{1 - e^{-(\varepsilon_r - \mu)/k_B T}} = \prod_k \frac{1}{1 - e^{-\varepsilon_k/k_B T}} \quad (46)$$

となる．異なる量子状態を表現する  $r$  は  $\mathbf{k}$  に変更した．この両辺の自然対数をとって，(45) に代入すれば，

$$F = -k_B T \ln \Xi = k_B T \sum_k \ln(1 - e^{-\varepsilon_k/k_B T}) \quad (47)$$

となる．

(47)における全ての量子状態  $\mathbf{k}$  に関する離散的な総和は，振動数  $\nu$  に関する  $(0, \infty)$  の積分に直すことができる．既に§16-2 で議論したように，体積  $V$  の光子気体では， $(\nu + d\nu, \nu)$  の振動数区間に含まれる電磁波（光子）の量子状態数は

$$n(\nu) \cdot V \cdot d\nu = V \cdot \frac{8\pi\nu^2}{c^3} d\nu \quad \text{§16-2 (26)}$$

であるから，(47)右辺側の総和は，振動数  $\nu$  に関する  $(0, \infty)$  の次の積分となる．

$$\begin{aligned} F &= k_B T \sum_k \ln(1 - e^{-\varepsilon_k/k_B T}) = k_B T \cdot \int_{\nu=0}^{\infty} \left\{ V \cdot \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \cdot \ln(1 - e^{-h\nu/k_B T}) \right\} d\nu \\ &= k_B T \cdot V \cdot \frac{8\pi}{c^3} \int_{\nu=0}^{\infty} \{ \nu^2 \cdot \ln(1 - e^{-h\nu/k_B T}) \} d\nu \end{aligned} \quad (48)$$

積分は， $x = h\nu/(k_B T)$  とおいて，部分積分を行うと，

$$\begin{aligned} \int_{\nu=0}^{\infty} \{ \nu^2 \cdot \ln(1 - e^{-h\nu/k_B T}) \} d\nu &= \left( \frac{k_B T}{h} \right)^3 \int_{x=0}^{\infty} x^2 \cdot \ln(1 - e^{-x}) dx \\ &= \left( \frac{k_B T}{h} \right)^3 \int_{x=0}^{\infty} \left( \frac{x^3}{3} \right)' \ln(1 - e^{-x}) dx \\ &= \left( \frac{k_B T}{h} \right)^3 \left\{ \left( \frac{x^3}{3} \right) \ln(1 - e^{-x}) \right\}_{x=0}^{\infty} - \int_{x=0}^{\infty} \left( \frac{x^3}{3} \right) \frac{e^{-x}}{(1 - e^{-x})} dx \} \\ &= -\left( \frac{1}{3} \right) \left( \frac{k_B T}{h} \right)^3 \int_{x=0}^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx = -\left( \frac{\pi^4}{45} \right) \left( \frac{k_B T}{h} \right)^3 \end{aligned}$$

となる（類似の計算は § 12-4(20)でも既に行っている）．(48) は，結局，

$$F = -\frac{8\pi^5}{45} \cdot V \cdot \frac{(k_B T)^4}{(hc)^3} \quad (49)$$

である．熱力学関係式より，光子気体のエントロピー $S$ は $F$ から決まる．

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T} = \frac{32\pi^5}{45} \cdot V \cdot \frac{(k_B)^4}{(hc)^3} \cdot T^3 \quad (50)$$

である．また，全エネルギー $U$ は， $F = U - TS$ の関係から，

$$U = F + TS = \frac{8\pi^5}{15} \cdot V \cdot \frac{(k_B)^4}{(hc)^3} \cdot T^4 \quad (51)$$

となる．(51)は，Stefan-Boltzmann 則として得た(43)に一致する．光子気体の熱容量と圧力は，それぞれ， $U$ の温度微分と $F$ の体積微分から以下のように決まる：

$$C_V = \frac{\partial U}{\partial T} = \frac{32\pi^5}{15} \cdot V \cdot \frac{(k_B)^4}{(hc)^3} \cdot T^3 \quad (52)$$

$$P = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T = \frac{8\pi^5}{45} \cdot \frac{(k_B T)^4}{(hc)^3} \quad (53)$$

である．さらに，(51)と(53)から $PV$ を作ると，光子気体では

$$PV = \frac{1}{3}U \quad (54)$$

となる．一方，古典的単原子ガスでは $PV = nRT$ ， $U = (3/2)nRT$ より，

$$PV = \frac{2}{3}U \quad (55)$$

である．(55)は，§1-2(16')で理想気体に対する Bernoulli (ベルヌーイ) の式と述べたものである．(54)の関係は，光子気体が相対論的気体であることを表している．一方，(55)の関係は非相対論気体であることによる．(54)と(55)は相対論的気体と非相対論的気体を区別する重要な式である．(54)は輻射圧(光圧)に関連した重要な関係式である．

### 16-5) 光子の総数 $N$ が保存されない意味

(44), (45)に関連して,  $\mu = 0$  で, 光子の総数  $N$  が不定で保存されないことは後にさらに議論すると述べた. この問題について考える. 光子の総数  $N$  を固定する条件がないことは, § 14-1 で説明した大正準分配関数( $\Xi$ )を使う理由がないことに繋がる. 正準分配関数 ( $Z$ ) で対応出来る. ただし, 多粒子系の量子状態に対する粒子数表示の考え方はそのまま生かされる.

復習の意味も込めて, § 14-1) 「量子状態の粒子数表示と正準分配関数」に戻って考えよう. 少し編集した記述を再掲すると,

『・・・同種粒子から成る多粒子系では, 個々の粒子は区別できない為, 各粒子がどのような量子状態にあるかを議論することは意味がない. しかし, 1 粒子の量子状態の方は識別可能と考えるので, そのような 1 粒子量子状態に番号  $r$  を付け,  $r$  番目の 1 粒子量子状態を占めている粒子数を  $n_r$  とし, 占有粒子数  $n_r$  を  $r$  の順番に横に並べた一つの数列,

$$\{i\} = (n_0, n_1, n_2, \dots, n_r, \dots) \quad \S 14 (1)$$

を考え, これを用いて粒子系全体の量子状態 $\{i\}$ を指定する. これは多粒子系全体の一つの量子状態 $\{i\}$ の**粒子数表示**(number representation)である. フェルミ粒子では, 同一の 1 粒子量子状態を占める粒子数には,

$$n_r = 0, 1 \quad \S 14 (2)$$

の制限がある. 一方, ボーズ粒子は,

$$n_r = 0, 1, 2, \dots, \infty \quad \S 14 (3)$$

の全ての非負整数を取ることが出来る. 粒子系の全粒子数を  $N$  とし, 粒子数表示を使うと,



$$N = n_0 + n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_r + \dots = \sum_r n_r \quad \S 14 (4)$$

である．また，粒子系全体の一つの量子状態*{i}*のエネルギーは，*r* 番目の 1 粒子量子状態のエネルギーを  $\varepsilon_r$  とすると，

$$E_i = \varepsilon_0 n_0 + \varepsilon_1 n_1 + \varepsilon_2 n_2 + \varepsilon_3 n_3 + \dots + \varepsilon_r n_r + \dots = \sum_r \varepsilon_r n_r \quad \S 14 (5)$$

である．一方，この多粒子系に対する分配関数 *Z* は，正準分布の原理により，

$$Z = \sum_i \exp(-E_i / k_B T) \quad \S 14 (6)$$

である．この和は，区別できる粒子系全体の量子状態*{i}*のエネルギー  $E_i$  の全てに適用される．これに粒子数表示の § 14 (5) を用いると，次のように表現される：

$$Z = \sum_i \exp(-E_i / k_B T) = \sum_{\substack{n_0 \\ (n_0 + n_1 + n_2 + \dots = N)}} \sum_{n_1} \sum_{n_2} \dots \exp\left(-\frac{1}{k_B T} \sum_r \varepsilon_r n_r\right) \quad \S 14 (7)$$

この多重和では，占有数  $n_r$  の異なる組  $(n_0, n_1, n_2, \dots, n_r, \dots)$  の全てにわたって和を取る．そして，多重和の記号の下に書いた条件  $n_0 + n_1 + n_2 + \dots = N$  は，全粒子数が *N* であることを示しており，その多重和が実行される際の拘束条件である．§ 14 (7) は正準分布の考え方に従う分配関数であるが， $n_0 + n_1 + n_2 + \dots = N$  の拘束条件があるため，異なる占有数  $(n_0, n_1, n_2, \dots, n_r, \dots)$  についての和は，相互に独立ではない．即ち，残念ながら，§ 14 (7) の右辺は，

$$\neq \left( \sum_{n_0} (e^{-\varepsilon_0 / k_B T})^{n_0} \right) \cdot \left( \sum_{n_1} (e^{-\varepsilon_1 / k_B T})^{n_1} \right) \cdot \left( \sum_{n_2} (e^{-\varepsilon_2 / k_B T})^{n_2} \right) \dots \quad \S 14 (8)$$

であり，§ 14 (8) 右辺のような独立な和の積の形には出来ない．．．． 近似を使わずに § 14 (7) の多重和を実際に求めるには工夫を要する．その為の工夫とは，「同種多粒子系に対する粒子数表示」と § 9-2, 3, 4 で述べた「大正準 (grand

canonical) 分配関数」を結合することである．大正準分配関数がその力を発揮する．』

ところが，光子ガスの場合は， $n_0 + n_1 + n_2 + \dots = N$ の拘束条件はない．わざわざ  $N$  に関する和を作る必要はない．この種の拘束条件はないので， $i$  番目の準位  $\varepsilon_i$  の占有数  $n_i$  はそれぞれ独立に（ $0 \sim$ 無限大）と変化すると考えて良い．従って，§ 14 (7)左辺と § 14 (8)右辺を等号で結ぶことができる．

$$\begin{aligned}
 Z &= \sum_i \exp(-E_i / k_B T) = \left( \sum_{n_0} (e^{-\varepsilon_0 / k_B T})^{n_0} \right) \cdot \left( \sum_{n_1} (e^{-\varepsilon_1 / k_B T})^{n_1} \right) \cdot \left( \sum_{n_2} (e^{-\varepsilon_2 / k_B T})^{n_2} \right) \cdots \\
 &= \left( \sum_{n_0} (e^{-n_0 \varepsilon_0 / k_B T}) \right) \cdot \left( \sum_{n_1} (e^{-n_1 \varepsilon_1 / k_B T}) \right) \cdot \left( \sum_{n_2} (e^{-n_2 \varepsilon_2 / k_B T}) \right) \cdots \\
 &= \left( \frac{1}{1 - e^{-\varepsilon_0 / k_B T}} \right) \cdot \left( \frac{1}{1 - e^{-\varepsilon_1 / k_B T}} \right) \cdot \left( \frac{1}{1 - e^{-\varepsilon_2 / k_B T}} \right) \cdots \\
 &= \prod_i \left( \frac{1}{1 - e^{-\varepsilon_i / k_B T}} \right) \tag{56}
 \end{aligned}$$

となる．この結果は，大正準分配関数を使って得た(46)の右辺と同じである．

$$\Xi = \prod_r \frac{1}{1 - e^{-(\varepsilon_r - \mu) / k_B T}} = \prod_k \frac{1}{1 - e^{-\varepsilon_k / k_B T}} \tag{46}$$

従って，(46)以降の議論での大正準分配関数( $\Xi$ )は，正準分配関数( $Z$ ) に置き換えることができる．(56)が得られたことは，数表示で考えた場合は (32')で述べた調和振動子と同じタイプの正準分配関数( $Z$ )となり，Boltzmann 分布からも Planck の輻射密度式に至ることを意味する．

これは以下のように直接確認出来る．(46)以降の議論では，輻射密度  $u(\nu, T)$  を  $\nu = 0 \sim \infty$  で積分した形が使われているので，(51) の関係

$$u^* \equiv U/V = \frac{8\pi^5}{15} \cdot \frac{(k_B)^4}{(hc)^3} \cdot T^4$$

を，既に(41),(42)で使った関係， $\int_{x=0}^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^4}{15}$ ， $x = h\nu/(k_B T)$  を用いて積分

前に戻せば，

$$\begin{aligned} u^* \equiv U/V &= \frac{8\pi^5}{15} \cdot \frac{(k_B)^4}{(hc)^3} \cdot T^4 = \frac{8\pi^5 h}{15 c^3} \cdot \left(\frac{k_B T}{h}\right)^4 \cdot \int_{x=0}^{\infty} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} \\ &= \int_{\nu=0}^{\infty} \left( \frac{8\pi^5 h}{15 c^3} \cdot \frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_B T} - 1} \right) d\nu = \int_{\nu=0}^{\infty} u(\nu, T) d\nu \end{aligned}$$

となる．ここでの被積分関数が Planck の輻射密度公式である．

同種粒子から成る多粒子系では，個々の粒子は区別できない．しかし，1 粒子量子状態の方は識別可能と考え，各 1 粒子量子状態に何個の粒子があるかで多粒子系量子状態を表現すると（数表示），このような多粒子系量子状態は相互に区別できる量子状態だから，Boltzmann 分布（正準分布）で考える．全粒子数  $N$  が保存される場合は，この Boltzmann 分布（正準分布）に  $N = \text{一定}$  との拘束が付随するので，そのままでは多重和が正確に計算出来ない．その為に，全ての  $N$  の値と化学ポテンシャル  $\mu$  を用いて大正準分布を使う．しかし，光子気体では，化学ポテンシャル  $\mu = 0$  で総粒子数  $N$  の保存則が成立しないので，多粒子系量子状態に対する正準分布（Boltzmann 分布）の段階で話は終了となる． Bose 粒子である光子気体に，Boltzmann 分布が現れる理由である． § 16-2 で述べた「マックスウェル方程式で記述される（電荷を含まない）真空電磁場は，無数の一次元調和振動子の集まりと力学的には等価であること（付録 11）」とも整合する．

## 16-6) Bose と言う名の二人のインド人物理学者

ボーズ統計，ボーズ粒子の呼称は，インドの物理学者 Satyendra Nath Bose (1894-1974) に由来する．S. N. Bose は 1924 年に，今日のボーズ統計の考え方に基づきプランク分布を導いた．その論文は当時有名であったイギリスの学術誌 Philosophical Magazine 誌に投稿されたが，掲載は拒否された．そこで，S. N. Bose はその原稿を Einstein に送り，「もし価値があると認められるなら学術誌に掲載されるよう斡旋してほしい」と手紙に記し，Einstein の意見を求めた<sup>78)</sup>．Bose 論文の本質的重要性を理解した Einstein は，その英語原稿を自らドイツ語に訳し，Zeitschrift für Physik に送付し，Bose 論文は結局そのドイツの学術誌に採択された．§ 11-6 で紹介したように，Einstein (1917) は，光子 (= 光量子) 仮説の立場から，自然遷移と誘導遷移を区別し，ボルツマン分布を用いて Planck 分布式の導出している．Einstein は Langvin を通じて知ったドブロイ (de Broglie, 1924) の物質波の考えに関心を寄せていた<sup>34)</sup>．Bose 論文は Einstein の思考の延長上にあった．Einstein 自身も S. N. Bose の方法を理想気体の統計力学に応用する論文を 1924, 1925 年に発表し，ボーズ・アインシュタイン凝縮を予言することになる<sup>34, 78)</sup>．このような経緯から，Bose 統計は Bose-Einstein 統計とも呼ばれる．ランダウ・リフシッツの教科書<sup>17)</sup> では，“Bose statistics or Bose-Einstein statistics was introduced by S. N. Bose (1924) for light quanta, and generalised by Einstein.”との脚注が記されている．ボーズがプランク分布を導いた統計的状态の数は，同種粒子の統計性を再考する端緒となった．Pauli の排他原理の提唱は 1925 年，Fermi 統計が Fermi によって提案されるのは 1926 年である．一方，1925 年には Heisenberg の行列力学が，1926 年には Schrödinger 方程式が，

それぞれ発表され、量子力学の数学的定式化が整う。 Bose 統計あるいは Bose-Einstein 統計は、Pauli の排他原理と量子力学の数学的定式化が実現する直前に提起されている。

S. N. Bose は、インド東部のカルカッタで生まれた（都市名カルカッタ Calcutta は、2001 年からコルカタ Kolkata に変更されたが、ここでは元の名称を使う）。そして、彼はカルカッタのプレジデンシー・カレッジで教育を受けた<sup>8 0)</sup>。プレジデンシーとは、英国のインド統治時代の三地域（Bengal, Bombay, Madras）の総称である。1857 年には、英語による高等教育機関がこの三地域の都市カルカッタ、ボンペイ、マドラスに設置された。これらの高等教育機関がプレジデンシー・カレッジと呼ばれ、英国統治時代のインドでの名門高等教育機関となった。管区大学との訳語が使われることもあるらしい<sup>8 0)</sup>。S. N. Bose は、プレジデンシー・カレッジ修了後、カルカッタ理科大学の講師となったが、当時の研究中心であった欧州への留学経験はなかった<sup>8 0)</sup>。しかし、彼はカルカッタやダッカ（現在はバングラディシュ）の地で貪欲に新しい物理学を学び、Einstein も賞賛する先見的な着想を得るに至った。科学の発展にとって、人的・物的環境は確かに重要であるが、それよりも研究者個人の意欲と努力が如何に重要かを示す事例であろう。欧州留学の経験はなかったが、1935 年に中間子論を提唱した湯川秀樹の場合もそうである。

インドには、インド科学の父と呼ばれるもう一人の著名な物理学者・生理学者 Jagadis Chandra Bose(1858-1937) がいる。ボーズ統計の Satyendra Nath Bose (1894-1974) と混同してはいけない。私が手元に置いている“American Heritage Dictionary (1979 版)”では、ボゾン粒子の説明に Jagadis Chandra Bose が登場す

る．明らかに Satyendra Nath Bose と混同されている．Jagadis Chandra Bose に関する伝記の日本語訳が 2009 年に出版されたので<sup>7 9)</sup>，こちらの Bose の業績についても伺い知ることができる．Jagadis Chandra Bose はインド科学の父と呼ばれているだけあり，なかなか興味深い人物である．

三上喜貴氏による「インドの科学者」<sup>8 0)</sup>と題する著書が 2009 年 10 月に出版された．三上氏は，英国統治時代から現在までの，主として自然科学，数学，工学の分野での代表的なインドの科学者を紹介し，インドの教育史とその特色について論じている．この書でも，Jagadis Chandra Bose は第一に取り上げられている．J. C. Bose に続いて，化学と化学工業の父とされる P. C. Ray (1861-1944)，天才数学者 S. Ramanujan (1887-1920)，1930 年アジア初のノーベル物理学賞受賞者となる「ラマン効果」発見者 C. V. Raman (1888-1970)，「サハの電離式」で知られる M. Saha (1893-1956)，ボース統計の S. N. Bose (1894-1974)，星の重力崩壊に関する「チャンドラセカール限界」の提唱者で 1983 年ノーベル物理学賞受賞者 S. Chandrasekhar (1910-1995)，遺伝子情報の解読で 1968 年ノーベル賞受賞者となる H. G. Khorana (1922- )，2007 年ノーベル平和賞を受賞した「気候変動に関する政府間パネル(IPCC)」の議長を務める R. Pachauri (1940-)，そして，米国を舞台に計算機科学，遺伝子工学などの分野で活躍するインド人科学者たちの記述がある．

ただし，IPCC とその議長 R. Pachauri 氏については，以下の私見も付記しておきたい．三上氏の著書出版の一ヶ月後の 2009 年 11 月，「クライメートゲート事件」<sup>8 9)</sup>が起った．この事件では，一部の IPCC 指導者らが，気温変動データを「改ざん・捏造」し，「炭酸ガスによる地球温暖化説」の根拠データに利用し

ているとの疑惑を示唆する e-メール通信記録が暴露された。この事件の重大性に留意すると、IPCC 議長の R. Pachauri 氏については、C. V. Raman や S. Chandrasekhar らの科学者と同列に扱うべきではないと思う。

サハの電離式の M. Saha と ボース統計の S. N. Bose は共に、カルカッタのプレジデンシー・カレッジで教育を受け、二人は修士課程修了時に首席と次席を分け合った優秀な同級生であったと三上氏は記している。一方、Jagadis Chandra Bose は、ケンブリッジ留学から帰国した 1884 年に、カルカッタのプレジデンシー・カレッジに職を得た物理学者である。1897 年にはイギリスの王立研究所・金曜講座に招かれ、電波について公開実験と講演を行った程の学者であった<sup>7 9)</sup>、<sup>8 0)</sup>。ヘルツ (Hertz, H. R., 1857-1894) によって電磁波が発見されたのは 1888 年であるから、Jagadis Chandra Bose が当時の電磁気学の最先端を走っていたことが判る。長年わたってカルカッタのプレジデンシー・カレッジの教授を務め、多くの後輩の育成に尽力した。引退は 1915 年で、この 2 年後に念願の研究所を設立し、人生後半の研究課題とした生理学や生物学の研究に励んだ<sup>7 9)</sup>。

M. Saha と S. N. Bose の二人は、J. C. Bose が引退する直前の頃のカルカッタのプレジデンシー・カレッジに在籍したことになる。この当時、P. C. Ray と C. V. Raman は、それぞれ、化学担当教授、物理学担当教授であった<sup>8 0)</sup>。S. Chandrasekhar は、C. V. Raman の甥であることは何所かで読んだことがあるが、M. Saha と S. N. Bose が同級生であったことは三上氏の著書で初めて知った。Bose という名の二人のインド人物理学者、Jagadis Chandra Bose と Satyendra Nath Bose は、1900~1920 年頃のカルカッタのプレジデンシー・カレッジを舞台にした「インド科学勃興のうねり」の中で、確かに繋がっている。

## § 16-7) S. N. Bose の自問の言葉

S. N. Bose に対する前節の記述は、やや教科書的過ぎる評価かもしれない。これとは反対にもっと限定的な評価を下す人々もいる。Das and Sengupta<sup>8 1)</sup> は、S. N. Bose の貢献を再検討する論文で、ボーズ・アインシュタイン統計の発見は一種の serendipity (間違いがもたらす好運な偶然の結果)であるとする意見を紹介している。この二人の著者はインドの物理学者であるが、彼ら自身の評価もこれに近い。1924 年に出版された S. N. Bose の 2 編の論文と Einstein の第 1 論文を検討しても、S. N. Bose 自身が量子統計の基礎である「同種粒子の識別不能性」の理解に達していたとは思えないと述べている。「同種粒子の識別不能性」が述べられるのは、Einstein の第二論文であり、長岡<sup>78)</sup> も、「同種粒子の識別不能性」は Einstein の第二論文ではじめて言及されると記している。湯川秀樹 著「量子力学序説」<sup>8 2)</sup> の § 25, p.319 には、Bose 統計に関する次の記述がある：

“Planck は最初輻射と相互作用している物質の方を振動子の集まりと見なし、その運動を量子化することによって、この式 (*Planck の輻射式*) に到達した。上 (*Bose*) のように輻射場自身を直接量子化することは、量子力学の出現以前に既に Debye が試み、(*Planck の輻射式である式*) ( $2.5 \cdot 3.5$ ) を演繹することに成功している。” 括弧内の斜体文字は引用者が挿入した。

Das and Sengupta<sup>8 1)</sup> も湯川が指摘した Debye 論文<sup>8 3)</sup> について言及し、次のように述べている： S. N. Bose が「同種粒子の識別不能性」を認識すること無しに「ボーズ統計の発見」に至ったのは、多分、S. N. Bose は “Planck の輻射密度式は、Planck の振動子モデルでも、Einstein の粒子モデル (光量子) でも、数学的には同じであるに違いない” と直感的に確信し、さらに、その直感を Debye



論文を介して理解したからではないか？ Debye 論文を受け入れることにより、

「同種粒子の識別不能性」の問題は結果的に避けて通ることが出来たのではないかと推測している。そして、S. N. Bose の晩年でのインタビューでの次の言葉を紹介している。

“ I had no idea that what I had done was really novel . . . . Instead of thinking of the light quantum just as particles, I talked about these states. Somehow, this was the same question which Einstein asked when I met him (in October or November 1925), how had I arrived at this method of deriving Planck’s formula.”

「ボーズ統計」ではなく、やはり「ボーズ・アインシュタイン統計」なのであるというのが、Das and Sengupta<sup>8 1)</sup> の結論のようである。

ところで、この二人の著者は、S. N. Bose が「同種粒子の識別不能性」について曖昧な認識しかなかったと批判している。しかし、§ 16-2, 16-4 で述べたように、物質と熱平衡にある空洞輻射は、ボルツマン分布で考えてもボーズ分布で考えても同じ結果となるので、これはやや的外れの批判であると思う。当時の理解の状況に戻って考えればなおさらのことであろう<sup>8 4)</sup>。科学史家や科学者の伝記作家は、その科学者を美化し易い。一方、同一分野の後世の研究者は、過去の先達の欠点を詳しく指摘できる立場にある。後世の評価とは、このような矛盾する二つの性向を常に含むと思う。しかし、たとえ、S. N. Bose の論文が「直感的思考」の産物であっても、Einstein を突き動かすことになった。また、その結果、「ボーズ・アインシュタイン凝縮」の予言に至った。これだけで、S. N. Bose は十分に賞賛されるに値すると思う。インド科学の担い手は、欧州で教育を受けた第一世代 (J. C. Bose) から、第一世代によってインドで育まれた第二世代 (S. N. Bose) へと、着実にバトン・リレーされたのである。