

§ 13 誘電体と静電場

電気伝導度が極めて小さい非金属物質の絶縁体や不良導体は、一般に誘電体と呼ばれる。誘電体内部には、金属導体のように自由に移動できる電子のような電荷は存在しない。しかし、電場の下におかれると、誘電体を構成する原子・分子の持つ正負の電荷は、僅かに相互変位し、**分極**を生じる。その結果、誘電体表面には正負の電荷が分離して現れ、誘電体内部では外部電場を減少させる効果をもつ。誘電体における静電場は、真空における静電場の記述をより一般化した形で与えられる。そこでは、真空の誘電率はその**誘電体の誘電率**で置き換えられ、新たに定義される**電束密度**が用いられる。

1) 絶縁体と誘電体

電気伝導度が極めて大きな金属を理想化したものが「導体」であった (§ 8)。非金属物質の多くは電気伝導度が極めて小さいので、これをゼロと理想化して「絶縁体」と見なすことができる。電気伝導度が実質的にゼロであるのは、その物質には自由に移動できる電荷が無いためである。しかし、「絶縁体」も他の物質と同様に、正負の電荷を持つ原子・分子から構成されているので、静電場の下に置かれた場合、正電荷は電場の方向に、負電荷は電場と反対の方向に、それぞれ力を受け、僅かな相互変位を生じる。その結果、導体の静電誘導の現象に類似して、正負の電荷が「絶縁体」の異なる表面に現れる。この現象は**誘電分極** (dielectric polarization) と呼ばれ、表面に生じた電荷を**分極電荷** (polarization charge) と言う。金属導体の伝導電子のように自由には移動できないが、電場により正負の電荷はその平衡位置から微小な相対変位を起こし、物質内部での電場は外部電場を小さくしたものとなる。このような意味で、絶縁体あるいは不良導体は、**誘電体** (dielectric materials) と呼ばれる。誘電分極の大きさは外部電場の大きさとその物質の性質 (誘電率) に依存する。金属においても、正電荷を持つ原子核とこれに束縛された電子は、誘電体としての性質をもっている。しかし、金属全体の電气的特性は伝導電子によって決まるため、誘電体としての性質は現れない。誘電体の静電場について考えよう。

2) 誘起電気双極子と永久電気双極子

非金属物質の多くは電気伝導度が極めて小さいが、それらの物質を構成するのは原子や分子であって、巨視的には $10^{20} \sim 10^{23}$ 個オーダーの膨大な個数の原子や分子の集合体である。例えば、固体金属化合物では、陽イオンと陰イオンが規則的な結晶格子を作って、熱運動を伴いながら巨視的集合体をなしている。このような物質は電氣的に中性であるが、外部電場の下では、陽イオンと陰イオンは、僅かであっても、平均的平衡位置から相互に逆方向に変位するので、原子間距離程度の微視的スケールでは、§6-8 で考えた**電気双極子**が各陽イオン-陰イオン対に生じ、**外部電場に誘起された電気双極子モーメント**を生じる。

一方、§6-8 でも指摘したように、水分子のように、個々の分子で正電荷と負電荷の中心位置が一致していない分子は、有極性分子と呼ばれ、その分子固有の**永久的な電気双極子モーメント**を持っている。液体の水を考えると、個々の水分子の電気双極子モーメントは熱的条件に従ってランダムな方向を向き、熱運動しているので、巨視的物質としての液体の水全体では電気双極子モーメントを示さない。しかし、外部電場の下に置かれると、水分子固有の電気双極子モーメントも電場の方向に揃う傾向を示すので、液体の水の部分部分で電気双極子モーメントの値を平均しても正確にはゼロにはならない。これは**配向分極**と呼ばれる。

3) 電気分極ベクトル

外的電場の下に置かれた誘電体を考えて、その微小体積 ΔV の中に N 個の電気双極子モーメント \mathbf{p}_k が含まれているとする。そして、 N 個の電気双極子モーメントの平均値 $\bar{\mathbf{p}} = \frac{1}{N} \sum_k \mathbf{p}_k$ を、微小体積 ΔV における平均的な電気双極子モーメントとして定義する。そして、単位体積当たりの電気双極子数を $\bar{n} = N/\Delta V$ とすると、**単位体積当たりの電気双極子モーメント** \mathbf{P} は、

$$\mathbf{P} = \frac{\sum \mathbf{p}_k}{\Delta V} = \frac{N\bar{\mathbf{p}}}{\Delta V} = \bar{n} \cdot \bar{\mathbf{p}} \quad (1)$$

となる. この \mathbf{P} を電気分極ベクトル (polarization vector), 誘電分極ベクトル, あるいは単に分極ベクトルと言う.

個別の電気双極子モーメントは, § 6-8 で述べたように, 電荷を $(+q)$, $(-q)$ として, これらが距離 d だけ離れている時, 大きさ $p = qd$, 方向は $(-q)$ から $(+q)$ に向かうベクトルである. だから, 電気双極子モーメントの次元は $[C \cdot m]$ である. 電気分極ベクトル \mathbf{P} は, (1) から判るように, 単位体積あたりの電気双極子モーメントの和であるから, \mathbf{P} の次元は $[C/m^2]$ である.

図 13-1 は, 紙面に垂直に上下に重なって分布していた正負の電荷対が, 外部電場により, 微小水平距離 δ だけ相対変位を起こす場合を模式的に描いたものである. 紙面に垂直方向にこのような層が積み重なったものを考える.

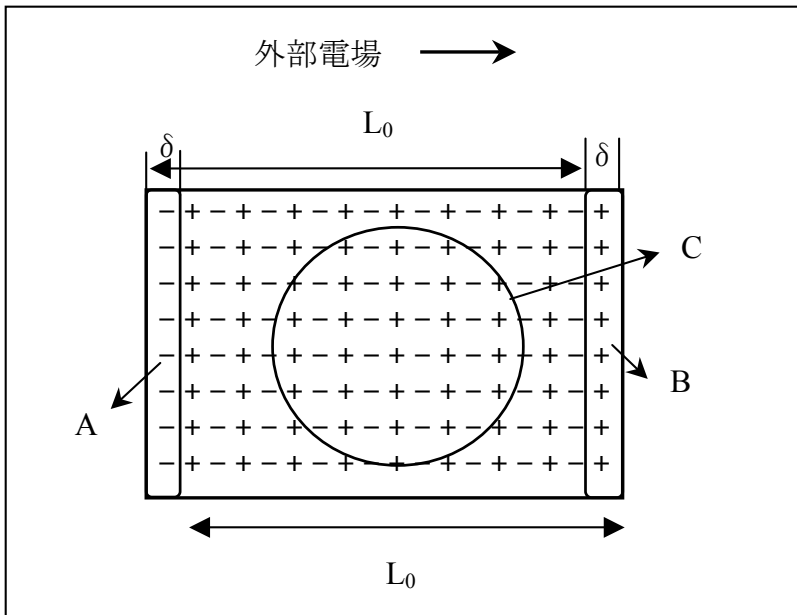


図 13-1. 上下に重なって分布していた正負の電荷対が, 外部電場により, 原子間距離より小さな水平距離 δ だけ相対変位を起こす. その結果, 誘電体の左右表面(A, B) のみに正負の分極電荷が現れる. 内部(C)でも, 微視的スケールの分極は起きているが, 巨視的スケール ($L_0 \gg \delta$) では, 分極が生じる前と同様に, 電荷は中和されている.

正電荷は負電荷に対して $+\delta$ だけ変位し、負電荷は正電荷に対し $-\delta$ だけ変位していることを表す。誘起された個々の電気双極子モーメントは、変位した電荷の絶対値を q_p とすると、

$$p = q_p \cdot \delta \quad (2)$$

である。誘電体内部では $+q_p$ と $-q_p$ の電荷対で電氣的に中和されている状況は、分極が起った後でも同じである。 $\pm q_p$ の電荷に対応する電荷の体積密度を $\pm\rho_p$ とすると、 $\bar{n} = N/\Delta V$ は単位体積当たりの電気双極子数であるから、

$$\pm\rho_p = \pm\bar{n} \cdot q_p \quad (3)$$

が成立するはずである。誘電体内部を、原子間距離より大きな空間スケールで考えるとこれらは相互に打ち消しあっている。しかし、分極を起こした誘電体の表面では $+q_p$ と $-q_p$ の中和されない正負の分極電荷が生じる。図 13-1 の場合、左右表面 A, B には厚さ δ に相当する表面電荷層ができるとし、その表面電荷密度を $\pm\sigma_p$ とすると、

$$\pm\sigma_p = \pm\rho_p \cdot \delta = \pm(\bar{n} \cdot q_p) \cdot \delta = \pm P \quad (4)$$

となる。第一の等号は、分極電荷の表面密度は分極電荷の体積密度に相対変位 δ を掛けたものに等しいことを意味する。第二の等号は、これを(3)を用いて表現したもので、第三の等式は、図 13-1 の場合、分極電荷の面密度が分極ベクトルの大きさ P になることを示している。別の表現をすれば、図 13-1 の誘電体の表面 B に平行な単位面積表面を横切って移動した正の分極電荷が、分極ベクトル P の大きさであると言える。即ち、(4)は

$$\sigma_p = \rho_p \cdot \delta = (\bar{n} \cdot q_p) \cdot \delta = P \quad (5)$$

と表現しても良い。(5)は分極ベクトルのもう一つの定義、「分極ベクトル \mathbf{P} は、方向は正電荷が変位した方向で、その大きさは分極ベクトルに垂直な単位面積を横切った正電荷量である」、に対応している。

図 13-1 は、誘電体の外形表面が分極ベクトル（外部電場）の方向に平行又は垂直である場合を示している。だから、分極ベクトル（外部電場）の方向に垂直な表面には正の分極電荷が現れ、負方向の表面には負の分極電荷が生じる。しかし、分極ベクトル（外部電場）の方向に平行な面には分極電荷は生じない。

この面の単位面積当たりを横切って移動した正電荷は0であるからである。誘電体内部ではどこでも、正電荷が変位した方向に垂直な単位面積を横切った正電荷量は同じであるから、電気分極ベクトル (\mathbf{P}) は同じである。しかし、正電荷の相対変位 δ は微視的な距離であるから、電荷は分極前も分極後の中和されており分極電荷に相当するものは生じない。

一般には誘電体の外的形状は任意であるので、図 13-1 はこのような一般的状況を表現していない。図 13-2 は、任意の外形を持つ誘電体の電気分極ベクトル (\mathbf{P})、表面分極電荷層 (厚さ d)、表面に垂直で外向きに定義される単位法線ベクトル (\mathbf{n}) の関係を模式的に示している。

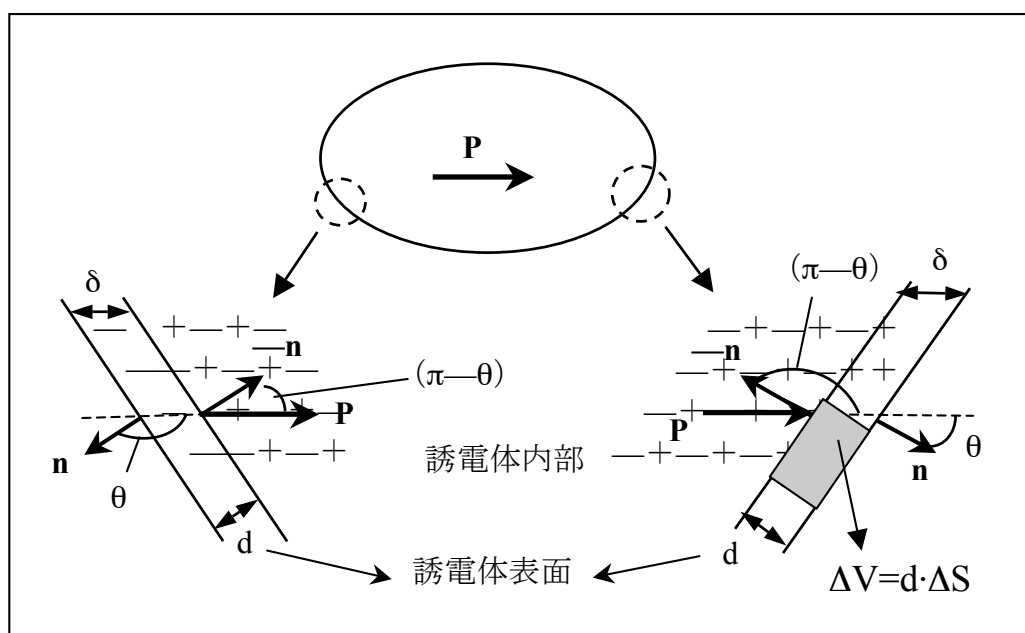


図 13-2. 任意の外形をもつ誘電体の分極ベクトル (\mathbf{P})、表面分極電荷層 (厚さ d)、表面に垂直で外向きに定義される単位法線ベクトル (\mathbf{n})。表面の微小体積要素 $\Delta V = d \cdot \Delta S$ に対して発散定理を用いる。

分極ベクトル \mathbf{P} と表面の単位法線ベクトル \mathbf{n} のなす角度を θ 、表面電荷層の厚さを $d = |\delta \cos \theta|$ とする時、表面に現れる分極電荷と分極ベクトル \mathbf{P} の関係は、表面電荷が存在する微小体積要素 $\Delta V = d \cdot \Delta S$ に発散定理を適用して求めることが出来る。微小体積要素 $\Delta V = d \cdot \Delta S$ の外側の面には分極ベクトル \mathbf{P} は存在せず、内側の面のみに存在するから、発散定理の面積分で外側の面に関する積分は0で

ある。また、 d を含む面は ΔS に比べて事実上無視できることから、面積分は分極ベクトル \mathbf{P} が存在する内側の面に関するものだけとなる。

$$\int_{\Delta V} \text{div} \mathbf{P} dV = \int_{\Delta S} \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} dS = P \cos(\pi - \theta) \cdot \Delta S \quad (6)$$

この右辺は、(5) と $d = |\delta \cos \theta|$ から、

$$-P \cos \theta \cdot \Delta S = -\bar{n} q_p \delta \cos \theta \cdot \Delta S = -\rho_p d \cdot \Delta S = -\int_{\Delta V} \rho_p d^3 \mathbf{x}$$

となるので、結局、

$$\text{div} \mathbf{P} = -\rho_p \quad (7)$$

との関係が得られる。(7) の意味するところを再度考えてみよう。

ベクトルの発散 (divergence) については §4-4 で述べた。ベクトル量 \mathbf{A} を“粒子速度”や“体積速度”とすると、 $\text{div} \mathbf{A}$ はスカラー量で、その点の微小体積について、単位体積あたり、単位時間内に、流出 (発散) する“粒子数”、“体積量”を意味する。ここでのベクトル量は次元 $[C/m^2]$ をもつ分極ベクトル \mathbf{P} であるので、「単位時間あたり」については考えなくてもよい (後に、 \mathbf{P} の時間微分を考える。そこでは「単位時間あたり」が意味を持つ)。正の分極電荷が生じている微小体積要素 $\Delta V = d \cdot \Delta S$ では、「 \mathbf{P} の流入」のみが起こっている。これは「 \mathbf{P} の負の湧出」であるから、 $\text{div} \mathbf{P} < 0$ であり、結果として、 $-\text{div} \mathbf{P} = \rho_p > 0$ で、正の分極電荷が生じている。(7) はこれを意味する。負の分極電荷が生じている場所に微小体積要素 $\Delta V = d \cdot \Delta S$ を考えた場合は、「 \mathbf{P} の流失」のみが起こっているから、 $\text{div} \mathbf{P} > 0$ であり、「正電荷が流失」した結果、負の分極電荷が生じること、 $\text{div} \mathbf{P} = -\rho_p > 0$ を意味する。

もし誘電体内部に空洞があれば「内部表面」が存在するので、外部表面に限らず「内部表面」でも、このような状況は同様に実現する。しかし、誘電体内部に空洞がなければ、誘電体内部ではどこでも、 $\text{div} \mathbf{P} = 0$ である。これは、微小体積からの正電荷の「流失」と「流入」が釣り合っている ことに対応し、 $\text{div} \mathbf{P} = -\rho_p = 0$ で分極電荷は生じないことを意味する。これまでは「誘電体内部では、電荷は中和されているので分極電荷は現れない」と便宜的に述べたが、より正確には、 $\text{div} \mathbf{P} = -\rho_p = 0$ の表現に置き換えるべきである。分極ベクトルを

正電荷の変位で考えているから、この変位は「負電荷に対する正電荷の相対変位」であり、負電荷の変位は考えなくても良い。

ρ_p は分極電荷の体積密度で、これを分極電荷の面密度 σ_p に直すと、

$$\sigma_p = \rho_p \cdot d = \rho_p \cdot \delta \cdot \cos\theta = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} \quad (8)$$

となる。ただし、図 13-2 に示すように、 \mathbf{P} は分極ベクトル、 \mathbf{n} は考えている表面に垂直で外向きに定義される単位法線ベクトルである。図 13-1 の表面 B は $\theta = 0$ の場合、表面 A は $\theta = \pi$ の場合に当たる。また、表面 A, B に垂直な面では $\theta = \pm \pi/2$ であり、 $\sigma_p = 0$ となって分極電荷は生じない。

誘電体の表面に限らず内部においても、これを横切る任意の面（図 13-3 の面 S_1 と S_2 ）を考えることができる。そのような面に垂直な外側に向かう単位法線ベクトル (\mathbf{n}) を考える時、 $\mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$ は分極によってその面の単位面積を横切って移動した正電荷 (σ_p) を意味する。(8) をこのように理解すれば、これは分極ベクトルのもう一つの定義 (5) に直接対応することが判る。

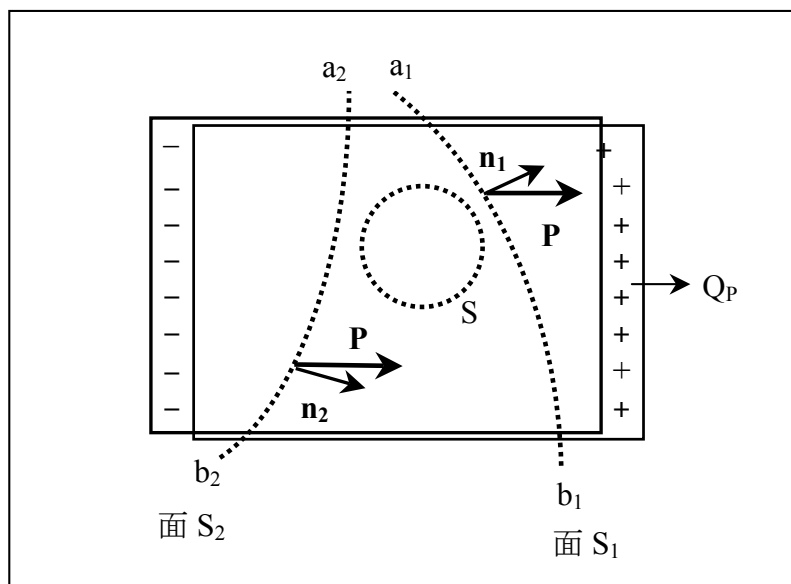


図 13-3. 誘電体の内部を横切る面 S_1 と S_2 の単位法線ベクトル \mathbf{n}_1 と \mathbf{n}_2 、分極ベクトル \mathbf{P} 、正の分極電荷の総量 Q_p 、の関係。 S は誘電体の内部の閉曲面。

もし、閉曲面 S 全体を誘電体内部に考えて (図 13-3)、発散定理を用いると、内

部では $\text{div}\mathbf{P} = -\rho_p = 0$ であるから,

$$\int_S \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \text{div}\mathbf{P} d^3\mathbf{x} = 0$$

となる. しかし, 誘電体内部を完全に横切る面 S_1 と S_2 を考え, その単位法線ベクトル \mathbf{n}_1 と \mathbf{n}_2 , 分極ベクトル \mathbf{P} , 正の分極電荷の総量 Q_p とすると (図 13-3), 各面を横切って移動した全正電荷 Q_p は, $\mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$ をそれぞれの面で積分したものに等しく, これは異なる横断面面 S_1 と S_2 を考えても同じである. 面 S_1 と S_2 は, 誘電体の外に延びる閉局面の一部とすると, 誘電体が存在しない空間では分極はないので, $\mathbf{P} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0}$ であり, 考えるべき面積はその面が誘電体を完全に横切る形で $a_1 \sim b_2, a_2 \sim b_2$ で切り取る面積だけである.

$$Q_p = \int_{S_1} \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}_1 dS = \int_{S_2} \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}_2 dS \quad (9)$$

移動した全正電荷量 Q_p は, 誘電体内部で分極ベクトル \mathbf{P} が一定で均一である限り, 横切る面 S_1 と S_2 が異なっても等しい. (9) は(8)の積分形表現である.

4) 電束密度と誘電率

図 13-4 は、正電荷 Q をもつ帯電体を誘電体を取り囲んだ状況を示している。誘電体にまつわりつかれた正電荷 Q である。面 S_0 の内側に分布する帯電体正電荷 Q による電場は、帯電体を取り囲む誘電体表面 S_0 に負の分極電荷 ($-Q_p$) を与える。この負電荷と対になる正の分極電荷 (Q_p) は、誘電体の外側境界面 S_∞ に沿って現れる。界面 S_0 と S_∞ に囲まれた誘電体内部は均質な分極状態にあり、分極電荷は存在しない。界面 S_0 と S_∞ の間にさらに任意の閉曲面 S を考えて、これに積分形のガウスの法則を適用する。界面 S_∞ は閉曲面 S から十分遠方にあり、境界面 S_∞ にある正の分極電荷は、閉曲面 S 上の電場 E に影響しないとする。

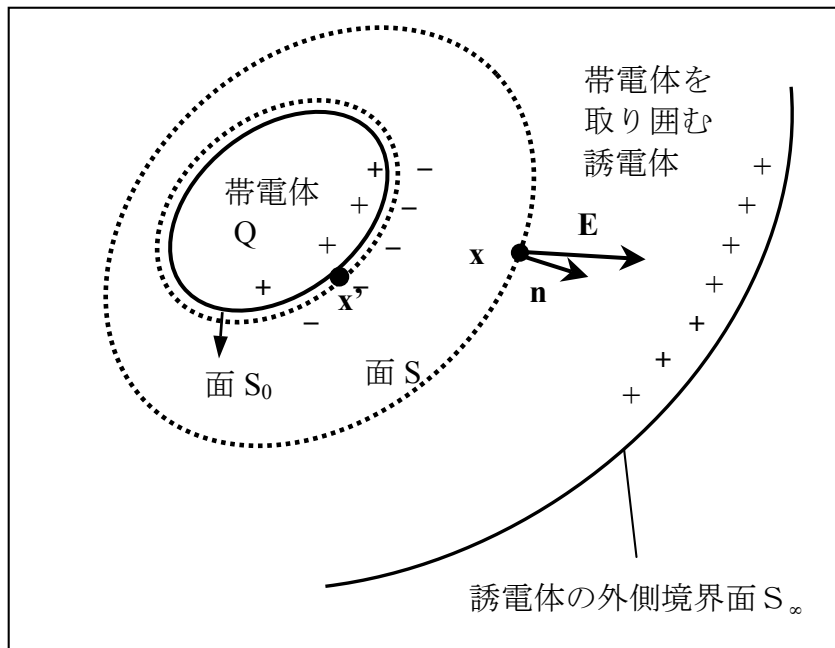


図 13-4. 正電荷 Q を持つ帯電体を取り囲む誘電体。誘電体の内部表面 S_0 と外部表面 S_∞ の間に閉局面 S を考え、これに積分形のガウスの法則を用いる。

表面 S_0 に存在する負の全分極電荷 ($-Q_p$) は、(9) に負符号を付けたものであるから、

$$-Q_p = -\int_{S_0} \mathbf{P}(\mathbf{x}') \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}') dS \quad (10)$$

となる。閉曲面 S に関して積分形のガウスの法則を用いる。関係する電荷は、帯電体の正電荷 Q と表面 S_0 に存在する負の全分極電荷 ($-Q_p$) だけだから、

$$\epsilon_0 \int_S \mathbf{E}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS = Q - Q_p \quad (11)$$

となる。右辺の電荷 Q は、図 13-4 で帯電体が持つ正電荷である。このような通常の電荷を、分極電荷 Q_p と区別する意味で、特に**真電荷** (true charge) と呼ぶ。

この言葉は議論のための便宜的な区別を意味するに過ぎず、両者は同じ電荷である。(10) を使うと、

$$\epsilon_0 \int_S \mathbf{E}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS = Q - \int_{S_0} \mathbf{P}(\mathbf{x}') \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}') dS \quad (12)$$

である。さらに、(9) で示した様に、正の分極電荷の総量は誘電体内を完全に横断する任意の面で同一であるから、 S_0 に関する分極電荷の面積分は閉局面 S に関するものに変更できる。

$$\int_{S_0} \mathbf{P}(\mathbf{x}') \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}') dS = \int_S \mathbf{P}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS \quad (13)$$

故に、(12), (13) から、

$$\epsilon_0 \int_S \mathbf{E}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS = Q - \int_S \mathbf{P}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS$$

となる。真電荷を誘電体を取り囲むと、真電荷の値を減じる形で誘電体の分極電荷が寄与することが判る。分極電荷を左辺に移行すれば、

$$\int_S [\epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{x}) + \mathbf{P}(\mathbf{x})] \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS = Q \quad (14)$$

となる。これは正電荷 Q をもつ帯電体を取り囲んだ誘電体内部の点 \mathbf{x} に対する式である。同じ正電荷 Q をもつ帯電体が真空中に置かれた場合の電場 $\mathbf{E}_0(\mathbf{x})$ と同一電荷 Q の関係式、

$$\int_S \epsilon_0 \mathbf{E}_0(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS = Q \quad (15)$$

と比べてみる。次に述べるように、分極ベクトルは外的電場に比例すると考えると、誘電体内における電場 $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ は、真空中での電場 $\mathbf{E}_0(\mathbf{x})$ より小さいことが判る。即ち、誘電体では、外部電場により分極が起こるが、分極は誘電体内部での外部電場を減少させるように生じていることになる。

(14)左辺の $[\epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{x}) + \mathbf{P}(\mathbf{x})]$ を、**電束密度 \mathbf{D}** (electric flux density)として新たに定義する。

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}) \equiv \epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{x}) + \mathbf{P}(\mathbf{x}) \quad (16)$$

この \mathbf{D} は電気変位 (electric displacement)とも呼ばれるが、これは分極による正電荷の移動 (変位) に由来する。§1 で述べたように、真空の誘電率は $\epsilon_0 = 8.8542 \times 10^{-12} (\text{C}^2 \cdot \text{N}^{-1} \cdot \text{m}^{-2})$ であり、電場の次元は $[\text{N} \cdot \text{C}^{-1}]$ であるから、 $\epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{x})$ の次元は $[\text{C} \cdot \text{m}^{-2}]$ で、分極ベクトルと同じである。電束密度 $\mathbf{D}(\mathbf{x})$ は、真空中における $\epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{x})$ に対応するもので、(14)に戻せば、

$$\int_S \mathbf{D}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS = Q \quad (17)$$

が成立する。これは分極ベクトルを露にしない表現であるが、後に考える「蓄電器 (コンデンサー)」から放出される電荷 (電流) を考える際に重要となる。電束密度 $\mathbf{D}(\mathbf{x})$ の時間微分は、電流と同じ $[\text{C} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}]$ の次元を持ち、その意味するものも電流そのものである。電束密度 $\mathbf{D}(\mathbf{x})$ に対して何を表象すれば良いかについては、本章の最後の6) で議論する。

誘電体の分極ベクトルは外的電場に比例すると述べたが、これが厳密に成立するのは、外部電場が比較的小さくて等方的な誘電体に限られ、次のように表現される。

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}) = \chi_e \mathbf{E}(\mathbf{x}) \quad (18-1)$$

ここでの比例定数 χ_e は**電気感受率**(electric susceptibility)と呼ばれる。(ただし、異方性の物質では比例定数ではなく、テンソル成分となる。) χ_e は真空の誘電率 ϵ_0 と同じ次元 $[\text{C}^2 \cdot \text{N}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}]$ を持つことに注意。そこで、 $\chi_e = \bar{\chi}_e \cdot \epsilon_0$ として無次元の $\bar{\chi}_e$ を**電気感受率**として用いることも出来る。この場合は、

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}) = \bar{\chi}_e \epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{x}) \quad (18-2)$$

となる。(13-18-1)を(13-16)に代入すれば、

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}) \equiv \epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{x}) + \mathbf{P}(\mathbf{x}) = (\epsilon_0 + \chi_e) \mathbf{E}(\mathbf{x}). \quad (19-1)$$

一方、(13-18-2)を(13-16)に代入して、

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}) \equiv \epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{x}) + \mathbf{P}(\mathbf{x}) = (1 + \bar{\chi}_e) \epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{x}) \quad (19-2)$$

となる。この比例定数 $(\epsilon_0 + \chi_e) = \epsilon_0 (1 + \bar{\chi}_e)$ が個々の誘電体を特徴付ける誘電率(ϵ)

である.

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \chi_e = \varepsilon_0(1 + \bar{\chi}_e) \quad (20)$$

電気感受率として χ_e を用いるか、それとも、 $\bar{\chi}_e$ を用いるかは、電磁気学の教科書によっても異なる。しかし、ここでは無次元量の電気感受率 $\bar{\chi}_e$ を推奨したい。現実物質の誘電率 (ε) を論ずる場合、 $\varepsilon_r = (\varepsilon/\varepsilon_0)$ で定義される比誘電率を用いることが多い。例えば、常温・常圧における大気と水の $\varepsilon_r = (\varepsilon/\varepsilon_0)$ は、それぞれ、1.0005 と 79 であると記述する。大気の誘電率は真空の誘電率と実質的に等しいが、水の誘電率は真空の誘電率の 79 倍であることを言う。このように個別物質の誘電率は $\varepsilon_r = (\varepsilon/\varepsilon_0)$ を用いて議論する。比誘電率を「誘電率」と記している文献もあるので注意を要する。(20) からすると、現実物質の比誘電率 (ε_r) は、 $\varepsilon_r = (\varepsilon/\varepsilon_0) = (1 + \bar{\chi}_e)$ となり、無次元量の電気感受率 $\bar{\chi}_e$ と簡単な形につながる。

(20) の様に定義される誘電率 (ε) を用いると

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}) = \varepsilon \mathbf{E}(\mathbf{x}) \quad (21)$$

と書ける。真空では $\chi_e = \bar{\chi}_e = 0$ であるから、 $\varepsilon = \varepsilon_0$ となり、

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}) = \varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{x}) \quad (22)$$

である。従って、真空中でも、誘電体でも、電束密度 \mathbf{D} を用いて同様に議論できる。

(17) 右辺の電荷 Q は、電荷密度 $\rho(\mathbf{x})$ の体積積分で表現できるから、

$$\int_S \mathbf{D}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS = Q = \int_V \rho(\mathbf{x}) d^3x \quad (23)$$

である。一方、左辺側の面積分は、発散定理 (ガウスの定理) から、

$$\int_S \mathbf{D}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS = \int_V \text{div} \mathbf{D}(\mathbf{x}) d^3x$$

発散の体積積分となるので、(23) の右辺は、

$$\int_V \text{div} \mathbf{D}(\mathbf{x}) d^3x = \int_V \rho(\mathbf{x}) d^3x$$

となり、

$$\text{div} \mathbf{D}(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x}) \quad (24)$$

が成立する。この(24)は、真空における微分形のガウスの法則、§ 5-4 (16)式、

$$\text{div} \mathbf{E}(\mathbf{x}) = (1/\varepsilon_0) \rho(\mathbf{x}) \rightarrow \text{div} \{ \varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{x}) \} = \rho(\mathbf{x})$$

を特殊ケースとして含んでいる。従って、誘電体でも真空中でも、電束密度と電荷密度の関係は(24)である。

真空中の電場に関するもう一つの基本則は、§ 6-4, 5 で議論した $\text{rot } \mathbf{E} = 0$ であった。誘電体の電場に関しても、(13-11)の電荷に関する式は、真空中の場合と同じように成立し、 $\text{rot } \mathbf{E} = 0$ は誘電体においても成立する。その理由を簡単に述べると、以下の通りである。電気双極子によるポテンシャルと電場 ($\mathbf{E} = -\text{grad } \phi$) は § 6-8 で議論したように与えられる。誘電体は電気双極子の集合体 (電気双極子の体分布) であるから、そのポテンシャル (ϕ) は分極ベクトルを用いて記述でき、電場はやはり $\mathbf{E} = -\text{grad } \phi$ で与えられる。これが成立することは、同時に $\text{rot } \mathbf{E} = 0$ が成立することを意味している。

従って、 $\mathbf{E} = -\text{grad } \phi$ であることから、誘電体におけるポアソンの方程式も、 $\text{div grad } \phi = \nabla \cdot \nabla \phi = \nabla^2 \phi$ により、真空中の場合と同様に、

$$\nabla^2 \phi = -\text{div } \mathbf{E} = -\frac{1}{\epsilon} \text{div } \mathbf{D} = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (13-25)$$

となる。真空の誘電率 ϵ_0 が誘電体の誘電率 ϵ に変わるだけである。

§ 7-2 では、「無限遠でポテンシャル $\phi=0$ 」の境界条件に対する真空中でのポアソンの方程式の解(7-26)を得た。この解で、 $\epsilon_0 \rightarrow \epsilon$ としたものは、同様な境界条件での誘電体のポアソンの方程式の解である。

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3 \mathbf{x}'$$

$\mathbf{E} = -\text{grad } \phi$ であるから、

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \rho(\mathbf{x}') d^3 \mathbf{x}'$$

であり、電荷 q に作用する力 $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ は $q\mathbf{E}(\mathbf{x})$ となる。同じ電荷分布が真空中で作る電場 $\mathbf{E}_0(\mathbf{x})$ が同一の電荷 q に与える力 $\mathbf{F}_0(\mathbf{x}) = q\mathbf{E}_0(\mathbf{x})$ と比べると、

$$\mathbf{F}(\mathbf{x})/\mathbf{F}_0(\mathbf{x}) = (\epsilon_0/\epsilon) = 1/\epsilon_r$$

となる。例えば、液体の水の比誘電率 $\epsilon_r = (\epsilon/\epsilon_0)$ は常温常圧で 78.5 であり、他の代表的な有機溶媒である四塩化炭素、トルエン、ベンゼンの $\epsilon_r = (\epsilon/\epsilon_0) = 2.2 \sim 2.4$ と比べると異常に大きな値である。液体の水に存在する水素結合のネットワーク

クがその原因とされる。水の場合は $\mathbf{F}(\mathbf{x})/\mathbf{F}_0(\mathbf{x})=1/\epsilon_r=(1/78.5)=0.012$ となり、イオンに働く力は真空中の場合の約 100 分の 1 程度の小さなものとなる。多くの電解質が水溶液に溶解するが、これは電解質のイオンが水中で束縛力を失い自由となり安定化することから説明される。

等方性の物質の誘電率は一般に密度と温度の関数で $\epsilon = \epsilon(\rho, T)$ である。上記のように、液体の水の比誘電率 $\epsilon_r = (\epsilon/\epsilon_0)$ は常温常圧で 78.5 ときわめて大きい、温度上昇にともない急速に減少する。水の飽和蒸気圧に沿った (T, P) での温度上昇を考えると、100°C で 55.5, 200°C で 34.6, 300°C で 20.0, 350°C で 12.9 であることが知られている。この傾向は圧力が 5~6 kbar 程度に固定された場合でも大きくは変わらない。溶存イオンの温度に依存した安定性を考える際には、比誘電率 $\epsilon_r = (\epsilon/\epsilon_0)$ の温度変化は重要となる²¹⁾。異方性の物質では、(13-21)の誘電率 (ϵ) は定数ではなく、誘電率テンソル ($\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$) となる。これらの問題はここでは論じないことにする。

5) 誘電体の境界面

二種類の誘電体が接する境界面での電場の接続条件について考える。下図のように境界面に断面積が ΔS の薄い円筒を考え (図 13-4), その境界面には真電荷は存在しないとして、(23)のガウスの法則を適用する。

$$\int_S \mathbf{D}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS = Q = 0$$

この円筒の厚さは無視できるので、左辺は、

$$\mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{n}_1 \Delta S - \mathbf{D}_2 \cdot \mathbf{n}_2 \Delta S = 0$$

円筒上面の単位法線ベクトルを \mathbf{n} とすると、

$$(\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (26)$$

境界面の電束密度ベクトルの鉛直成分は等しく、境界面で連続である。境界面に平行な接戦成分については、図 13-5 に示すように、境界面を取り囲む細長い閉曲線 C を考え、 $\text{rot } \mathbf{E} = \mathbf{0}$ であることから、この線積分が 0 であることを使う。

$$\int_c \mathbf{E}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{t}_1 \Delta L + \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{t}_2 \Delta L = 0 \quad (27)$$

となる.

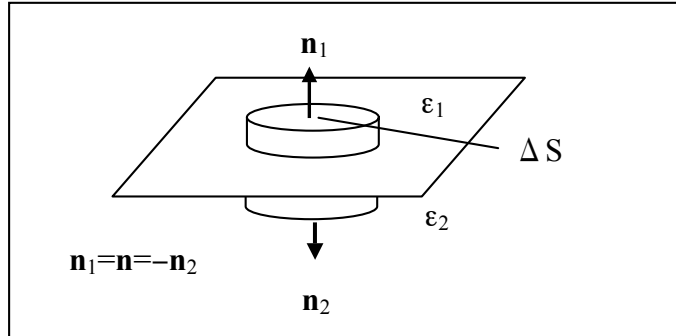


図 13-4. 二つの誘電体の境界面に考える断面積 ΔS の薄い円筒. 上面での単位法線ベクトル \mathbf{n}_1 と下面での単位法線ベクトル \mathbf{n}_2 は方向が反対で, $\mathbf{n}_1 = \mathbf{n} = -\mathbf{n}_2$ である.

(27)より, $(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \cdot \mathbf{t} = 0$ であるから,

$$\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{t} = \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{t} \quad (28)$$

となる. 境界面における電場の接線成分は等しく連続であることが判る.

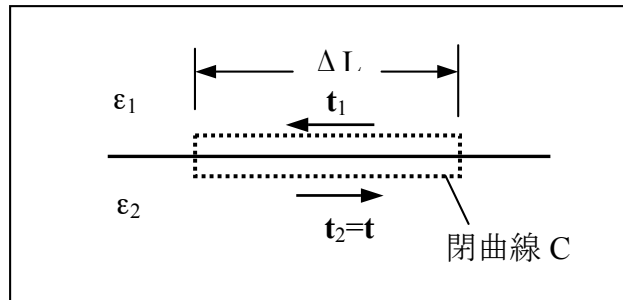


図 13-5. 二つの誘電体の境界面に考える長さ ΔL の狭い閉曲線. 上面での単位接線ベクトル \mathbf{t}_1 と下面での単位接線ベクトル \mathbf{t}_2 は方向が反対で, $\mathbf{t} = \mathbf{t}_2 = -\mathbf{t}_1$ である.

(26)の境界面での電束密度ベクトルの鉛直成分が連続であることは, 誘電率と電場の関係として,

$$\epsilon_1 \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{n} = \epsilon_2 \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{n} \quad (29)$$

で表現できる.

(28)と(29) は, 電場あるいは電束密度の屈折則を表している.

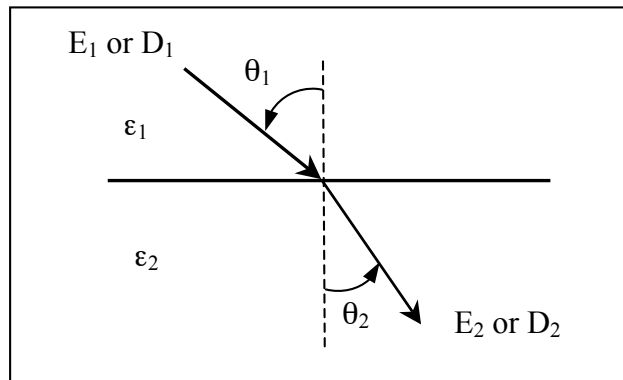


図 13-6. 二つの誘電体の境界面に考える電場の屈折. 屈折角は常に境界面の法線からの角度として測る.

(28)から, 接線成分は等しいから,

$$E_1 \sin \theta_1 = E_2 \sin \theta_2$$

であり, (29)は電場と誘電率の積の垂直成分は等しいから,

$$\epsilon_1 E_1 \cos \theta_1 = \epsilon_2 E_2 \cos \theta_2$$

となる. 第一の等式を第二の等式で割れば,

$$\frac{1}{\epsilon_1} \tan \theta_1 = \frac{1}{\epsilon_2} \tan \theta_2$$

であり,

$$\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} = \text{constant} \quad (30)$$

となることが判る. 以上は E_1 と E_2 で考えたが, D_1 と D_2 で考えても(30)が得られる. 誘電率の比が屈折角のタンジェントの比になっている.

6) 電束密度と電気力線

電束密度と電荷に関する積分形のガウスの法則(23)あるいはその微分形(24)は, ファラデーの提唱した**電気力線**の考え方を理解し, さらに「**電荷とは何か?**」

を考える上で重要である。これまで **電気力線の考え方**については何も述べてこなかったが、これはファラデーまで遡る。ファラデーは、「正電荷」からは「電気力線」と言うものが湧き出して流出しており、これは「負電荷」に流入し、吸込まれると考えた。ファラデー流の考え方^{2,2)}によれば、「電気力線」の向きは、正電荷から負電荷に向かい、「電荷」はそこから湧き出す「電気力線」の本数（又は、吸込まれる「電気力線」の本数）で定義できると考える。従って、積分形のガウスの法則(23)で、「電荷」が Q であるとは、 Q 本の「電気力線」がそこから湧き出していると理解する。この微分形(24)は、単位体積からの電気力線の湧き出しが、その単位体積における電荷であると考える。

$$\int_S \mathbf{D}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS = Q \quad (23)$$

$$\text{div} \mathbf{D}(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x}) \quad (24)$$

電束密度 $\mathbf{D}(\mathbf{x})$ は、「電気力線」がこれに垂直な単位面積当たり D 本貫いている状況を意味する。電束密度ベクトル $\mathbf{D}(\mathbf{x})$ の方向は、電気力線の向かう方向で、その大きさは電気力線の集中度、面密度を表現すると思えば良い。電束密度は、「電気力線の束」に何本の電気力線が密集しているかを表現する。

この立場からすると、ガウスの法則(23), (24)は、**電気力線（電束密度）によって電荷を定義する基本則**となる。これは、今井 功氏が提唱した「電磁気学の基本則」の一つである^{2,2)}。真空中の静電場とは電気力線が飛び交う空間のことで、エネルギーと運動量の保存則が成立すると考える（§6-7で述べたように、確かに、 $\text{rot } \mathbf{E} = \mathbf{0}$ は静電場のエネルギー保存則である）。さらに、ガウスの法則(23), (24)により電気力線から電荷が決まり、次に、電気力線の密度である電束密度により電場 $\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \mathbf{D}(\mathbf{x})/\epsilon_0$ を定義すると、ここからクーロン則も導出される（§14-2）。今井 功氏の議論は大変面白い。

流体力学の流線と電磁気学の電気力線の類似から、正の点電荷は「電気力線が湧き出す」**湧点**で、負の点電荷は「電気力線が吸込まれる」**吸点**であるとの記述は、ベクトル解析の教科書^{2,3)}にもあることから、何ら特異な主張ではない。高木貞治も、「解析概論（改訂第三版）」^{2,4)}の p. 388 の付記で、発散定理（Gauss の定理について次のように述べている。

『Gauss の定理, Stokes の定理によって, $\text{div } \mathbf{u}, \text{rot } \mathbf{u}$ の実用上の意味が簡単に説明される. 今一定密度の流体が定常の運動をすると想像して, \mathbf{u} を点 $P(x, y, z)$ における速度とする. 然らば Gauss の定理における面積分 $\int_S \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\sigma$ は単位時間に閉局面を通過する流失量 (符号も入れて) で, 圧縮されない流体では, それは区間 K における湧出量 (同上) に等しいはずである. この湧出量は Gauss の定理によって $\int_K \text{div } \mathbf{u} d\omega = (\text{div } \mathbf{u})_0 \int_K d\omega$ に等しいから, $(\text{div } \mathbf{u})_0$ は単位体積に関する平均の湧出率である. もしも曲面 S が一点 P に収束するなら平均値 $(\text{div } \mathbf{u})_0$ も P における $\text{div } \mathbf{u}$ に収束する. 故に $\text{div } \mathbf{u}$ は P における湧出率である.』

ただし, 最近のベクトル解析の教科書では**湧点**, **吸点**についての記述を見つけないのは困難である.

通常「電磁気学」教科書では, 電荷というものは常に与えられたもので, 「電荷とは何か?」と問うことはない. そして, 電磁気学の第一歩はクーロン則を承認することで始まり, 次に電場の定義に進み, Maxwell 方程式の導出に向かう. そこでは, 「物理量の定義」, 「物理学の法則」が「数学の定理」と頻りに交錯し, 理解が混乱してしまう原因ともなる. (この講義録もこの道を辿ろうとしているのだが). 今井 功氏の議論は, このような立場とは全く反対であることが面白い. 「通常電磁気学」の道のりを辿った後に, 再度今井 功氏の主張に耳を傾けることにすれば, その重要性が理解できるように思える.