

## § 1 4 静電エネルギーと電気容量

電場  $\mathbf{E}(\mathbf{x})$  が与えられた時の一個の電荷  $q$  の持つ相対的な位置エネルギーについては § 6-6,7 で議論した. ここでは複数の電荷が真空中に分布する時, この系が持つ位置エネルギー (静電エネルギー) について考える. また, 帯電した導体の電荷はその表面のみに分布するが, 表面電荷と電位の比であたえられる電気容量とその逆比について, 孤立した導体で考え, これを複数の帯電導体からなる系に拡張する.

### 1) 複数の点電荷からなる系の静電エネルギー

静電場  $\mathbf{E}$  の空間内において, 点電荷  $q$  を準静的に点  $P$  から  $Q$  に移動させる為に, 外力が為さねばならない仕事は, § 6-1-1, § 6-6-36 の  $W$  である.

$$W = (-q) \int_P^Q \mathbf{E}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{s} = q[\phi(Q(\mathbf{x})) - \phi(P(\mathbf{x}))]$$

基準点  $P$  を無限遠に取り,  $\phi(P(\mathbf{x})) = 0$  とすると,

$$W = (-q) \int_P^Q \mathbf{E}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{s} = q\phi(Q(\mathbf{x})) \quad (1)$$

である. 無限遠から位置  $Q(\mathbf{x})$  まで準静的移動した電荷  $q$  は,  $W$  だけ位置エネルギーを増加させている. しかし, この場合,  $\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\text{grad } \phi(\mathbf{x})$  は  $q$  以外の電荷の分布状況によって決まっている. 分布するすべての電荷を考慮した場合, 系全体の位置エネルギーはどのようなになるのだろうか?

相互に無限遠にある真空中の多数の点電荷 ( $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$ ) から, 先ず, 電荷  $q_1$  をある領域内の位置  $\mathbf{x}_1$  に移動させる. この場合は点電荷  $q_1$  が感じる電場は 0 と考えることができるので, 移動のために外界がなす準静的な仕事は 0 である. 次に二番目の電荷  $q_2$  をある領域内の位置  $\mathbf{x}_2$  に移動させる場合には,  $|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|$  は無限遠ではないので, 電荷  $q_1$  が作る電場の中を電荷  $q_2$  が移動してくる. この為に外界がなす準静的な仕事は 0 ではなく, (1) によると, 点電荷  $q_1$  が位置  $\mathbf{x}_2$  に作る静電ポテンシャルに電荷  $q_2$  を掛けたものとなる.

$$U = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|} \quad (2)$$

これが二つの電荷からなる系の静電エネルギー (U) である。別の表現をすれば、この系にはこれだけの静電エネルギー (U) が蓄積されている。次の三番目の電荷  $q_3$  を位置  $\mathbf{x}_3$  に移動させる。この場合は、(2) の U に加えて、電荷  $q_1$  が位置  $\mathbf{x}_3$  に作るポテンシャルに電荷  $q_3$  を掛けたもの、電荷  $q_2$  が位置  $\mathbf{x}_3$  に作るポテンシャルに電荷  $q_3$  を掛けたものが加わる。

$$U = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|} + \frac{q_1 q_3}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_3|} + \frac{q_2 q_3}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3|} \quad (3)$$

このような過程を、 $n$  番目の電荷  $q_n$  を位置  $\mathbf{x}_n$  に移動させるまで続けると、 $n$  個の電荷からなる系の静電エネルギーは、

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{(i,j)} \frac{q_i q_j}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j(j \neq i)} \sum_{i(i \neq j)} \frac{q_i q_j}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|} \quad (4)$$

となる。はじめの一重和は、(3) から判るように、異なる  $q_i$  と  $q_j$  の組み合わせだけについて和を取ることを指定している。二番目の二重和は、 $i \neq j$  として、それぞれ  $n$  までの和を取った場合は、 $(i,j)$  と  $(j,i)$  が重複し、異なる  $q_i$  と  $q_j$  の組み合わせの二倍の値となるので (1/2) 倍すべきであることを意味する。

(4) の U は次のようにも表現できる。 $q_i$  以外の全ての電荷  $q_{j(j \neq i)}$  が、電荷  $q_i$  の位置  $\mathbf{x}_i$  に作るポテンシャルの和を  $\phi_i$  とすると、

$$U = \frac{1}{2} \sum_i q_i \phi_i \quad (5-1)$$

$$\phi_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j(j \neq i)} \frac{q_j}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|} \quad (5-2)$$

である。(5-1) の係数(1/2)は、(4) の第二項の係数(1/2)と同じ意味を持つ。

電荷分布が電荷密度  $\rho(\mathbf{x})$  で与えられている時は、(5-1) から、

$$U = \frac{1}{2} \int_V \rho(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}) dV \quad (6)$$

と書ける。ここにポアソンの方程式  $\nabla^2 \phi(\mathbf{x}) = -\rho(\mathbf{x})/\epsilon_0$  を代入すると、

$$U = -\frac{\epsilon_0}{2} \int_V \phi(\mathbf{x}) \nabla^2 \phi(\mathbf{x}) dV \quad (7)$$

である。§ 7-3 でグリーンの定理に関連して述べた(7-13') を思い起こすと、

$$\operatorname{div}\{\phi(\mathbf{x}) \operatorname{grad}\phi(\mathbf{x})\} = \phi(\mathbf{x}) \nabla^2 \phi(\mathbf{x}) + \{\operatorname{grad}\phi(\mathbf{x})\}^2 \quad (7-13')$$

だから、これを右辺第一項を(7)の右辺に代入すると、

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V \{\operatorname{grad}\phi(\mathbf{x})\}^2 dV - \frac{\epsilon_0}{2} \int_V \operatorname{div}\{\phi(\mathbf{x}) \operatorname{grad}\phi(\mathbf{x})\} dV \quad (8)$$

である。この右辺第一項には  $\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\phi(\mathbf{x})$  を代入すれば良いことはすぐに判る。第二項はどう考えたらよいだろうか？ この第二項は発散定理から面積分に変えてみると、

$$\int_V \operatorname{div}\{\phi(\mathbf{x}) \operatorname{grad}\phi(\mathbf{x})\} dV = \int_S \{\phi(\mathbf{x}) \operatorname{grad}\phi(\mathbf{x})\} \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS \quad (9)$$

となる。§ 7-3 でグリーンの定理に関連して述べた(7-11)は

$$\phi(\mathbf{x}) \operatorname{grad}\psi(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} = \phi(\mathbf{x}) \left( \frac{\partial\psi}{\partial x} n_x + \frac{\partial\psi}{\partial y} n_y + \frac{\partial\psi}{\partial z} n_z \right) = \phi(\mathbf{x}) \frac{\partial\psi(\mathbf{x})}{\partial n} \quad (7-11)$$

であるが、ここでは  $\phi(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x})$  としているので、

$$\phi(\mathbf{x}) \operatorname{grad}\phi(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} = \phi(\mathbf{x}) \left( \frac{\partial\phi}{\partial x} n_x + \frac{\partial\phi}{\partial y} n_y + \frac{\partial\phi}{\partial z} n_z \right) \quad (10)$$

である。

$$\frac{\partial\phi(\mathbf{x})}{\partial n} \equiv (\operatorname{grad}\phi) \cdot \mathbf{n} = \left( \frac{\partial\phi}{\partial x} n_x + \frac{\partial\phi}{\partial y} n_y + \frac{\partial\phi}{\partial z} n_z \right)$$

は、ポテンシャル  $\phi(\mathbf{x})$  の単位法線ベクトル  $\mathbf{n}(\mathbf{x})$  方向の微係数である。電荷が分布する空間体積  $V$  を十分大きく取って、 $r \rightarrow \infty$  で  $\phi \propto (1/r) \rightarrow 0$  と考えているから、境界面  $S$  での  $\mathbf{x}$  に対して、

$$\phi(\mathbf{x}) \operatorname{grad}\phi(\mathbf{x}) \propto (1/r) \cdot (1/r^2) = (1/r^3)$$

となる。結果的に、(9)右辺の面積分は  $(1/r^3) \times (r^2) = 1/r$  に比例する。無限遠で  $\phi \propto (1/r) \rightarrow 0$  としているので、この面積分も 0 として良い。故に、(8)の右辺は、 $\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\phi(\mathbf{x})$  を代入すると、きわめて単純な式、

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V \mathbf{E}^2(\mathbf{x}) dV \quad (11)$$

となる。この右辺は全空間に関する積分であるが、全空間  $V$  は微小体積  $\Delta V_k$  に

分割できて、それぞれの微小体積  $\Delta V_k$  における単位体積当たりの静電エネルギー  $u$  の和として  $U$  を表現できる。

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V \mathbf{E}^2(\mathbf{x}) dV = \frac{\epsilon_0}{2} \sum_k \mathbf{E}^2(\Delta V_k) \Delta V_k = \sum_k u(\Delta V_k) \Delta V_k \quad (12)$$

従って、 $u(\Delta V_k) = (\epsilon_0/2)\mathbf{E}^2(\Delta V_k)$  であるから、各位置  $\mathbf{x}$  での静電エネルギーの体積密度は

$$u(\mathbf{x}) = \frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E}^2(\mathbf{x}) = \frac{\epsilon_0}{2} |\mathbf{E}(\mathbf{x})|^2 \geq 0 \quad (13)$$

となる。電荷が分布する真空空間の静電場では、単位体積あたり、電場の 2 乗に比例し、比例係数を真空の誘電率の  $(1/2)$  とするエネルギーが蓄積されている。

真空中での電束密度  $\mathbf{D}$  と電場  $\mathbf{E}$  の関係、 $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$ 、を用いると、(11), (13)は、

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V \mathbf{E}^2(\mathbf{x}) dV = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{E}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{D}(\mathbf{x}) dV \quad (11-1)$$

$$u(\mathbf{x}) = \frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E}^2(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{E}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{D}(\mathbf{x}) \quad (13-1)$$

このように表現すれば真空場に限らず一般の静電場への転用もそのまま可能となる。電束密度  $\mathbf{D}$  は電气的変位とも呼ばれることとも関連する。電場  $\mathbf{E}$  を単位電荷には働く力と理解すると、これに共役な「変位ベクトル」との内積は仕事（エネルギー）となる。 $\mathbf{D}$  の  $\mathbf{E}$  の向きは同じであるから、

$$\int_0^{\mathbf{D}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{D} = \int_0^{\mathbf{D}} E dD = \epsilon \int_0^{\mathbf{E}} E dE = \frac{\epsilon}{2} E^2 = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} \quad (13-2)$$

$\mathbf{D}$  が電气的変位とも呼ばれる理由である。

(11), (13)に関連して、以下に注意 2 点を述べる。第一は、単位体積当たりのエネルギー(13)が持つ次元は、 $[\text{N} \cdot \text{m}/\text{m}^3] = [\text{N}/\text{m}^2]$  で、単位面積当たりの力、即ち、応力と同じであること。応力を面積分すれば力となる。これは、後に述べる「電気力線の変形状態」を記述するマックスウェル応力につながる。

第二は、この蓄積されたエネルギー(11)は点電荷間の相互作用のエネルギーの総和であるので、点電荷それ自身が持つ「自己エネルギー」は含んでいないことである。(2), (3), (4)の議論では、「電荷  $q_1$  を位置  $\mathbf{x}_1$  に移動させる。この場合は電場は 0 と考えることができ、移動のために外界がなす準静的な仕事は 0 で

ある」として、(2), (3), (4)で電荷対のエネルギーのみを足し合わせている。点電荷がそこに存在すること自体が「エネルギー」を持っていることとして、「点電荷の自己エネルギー」を考えるのであれば、そのような点電荷の自己エネルギーは(11)には含まれていない。確かに、真空中の点電荷  $Q$  の周りには、 $E_r = (1/4\pi\epsilon_0)Q/r^2$  の動径方向の電場が存在する。この電場を、(11)に従って  $r=a$  から  $r=\infty$  まで積分すれば、電荷  $Q$  が作り出している電場のエネルギーとなる。

$$U_s = \int_a^{\infty} \left(\frac{\epsilon_0}{2}\right) E^2 (4\pi r^2) dr = \int_a^{\infty} \left(\frac{\epsilon_0}{2}\right) \frac{Q^2}{(4\pi\epsilon_0 r^2)^2} (4\pi r^2) dr$$

$$= \left(\frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0}\right) \int_a^{\infty} \frac{1}{r^2} dr = \left(\frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0}\right) \left[-\frac{1}{r}\right]_a^{\infty} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 a}$$

$a \rightarrow 0$  でこのエネルギーは無限大に発散する。しかし、 $a$  は点電荷と呼ぶにふさわしい極めて小さいものの、有限の値であるとしておけば、 $U_s$  を点電荷の自己エネルギーと見なすことができる。点電荷数が不変であれば、それらのなす系全体のエネルギーに定数として寄与する。しかし、通常は系のエネルギーからはこのような「自己エネルギー」を除いて議論する。(11)は点電荷間の相互作用のエネルギーの総和であるので、点電荷それ自身が持つこのような「自己エネルギー」は含んでいない。

## 2) 電気容量

半径  $a$  の球の内部に電荷  $Q$  が一様に分布する場合の電位 (静電ポテンシャル) は、§6-8-(4) で考えた。この球を導体とすると、§8-1 で述べたように、

- ・ 導体の内部には電荷は存在せず、すべて表面に存在する
- ・ 導体表面の電場は導体表面に垂直で、その大きさは、 $\sigma$  を導体表面での電荷面密度とすると、 $(\mathbf{E})_n = \sigma/\epsilon_0$  である。

であるから、この導体球の表面電荷密度は  $\sigma = Q/(4\pi a^2)$ 、表面の電場は球の中心を原点として動径方向のみの成分を持ち、 $\mathbf{E} = Q/(4\pi\epsilon_0 a^2)$  である。

先ほど述べた電気力線と電束密度  $\mathbf{D}$  を用いて、ファラデー流<sup>2)2)</sup> の立場から考えてみよう (図 14-1)。  $r=a$  の導体球面と、その球外で考える半径  $R$  の球面、

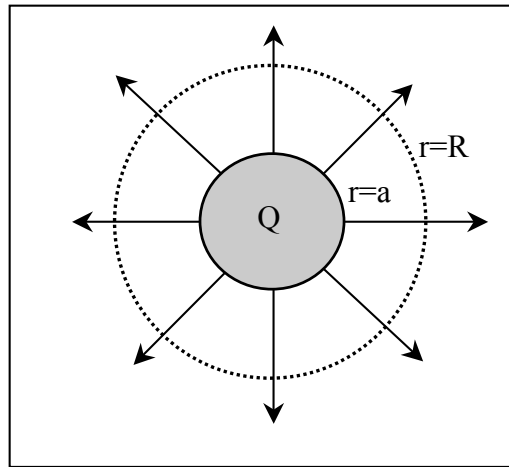


図 14-1. 電荷  $Q$  を表面に持つ半径  $a$  の導体球とそこから湧き出す電気力線.

を貫く電気力線の本数  $Q$  は同じである. ガウスの法則から電束密度は,  $r \geq a$  に対して

$$D(r) = Q/(4\pi r^2) \quad (14)$$

となる. 一般に電場は  $\mathbf{E} = (1/\epsilon_0)\mathbf{D}$  であるから,

$$E(r) = (1/\epsilon_0)D(r) = Q/(4\pi\epsilon_0 r^2) \quad (15)$$

である. また, 一般に,  $\text{rot}\mathbf{E} = \mathbf{0}$  から電場とポテンシャルの関係は  $\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\text{grad } \phi(\mathbf{x})$  であるから,

$$E(r) = -\text{grad } \phi(r) = -\frac{\partial \phi(r)}{\partial r} \quad (16)$$

となる. この両辺を積分して, ポテンシャルは  $\phi(r) = Q/(4\pi\epsilon_0 r) + c$  となる. 積分定数は  $\phi(r = \infty) = c$  となるから,  $\phi(r = \infty) = c = 0$  を使って,

$$\phi(r) = Q/(4\pi\epsilon_0 r) \quad (17)$$

である. これは  $r \geq a$  に対して成立する. (14)~(17)では「クーロン則」を使っていないが, 「クーロン則」に相当する式は(15)として得られていることに注意.

無限遠での電位を  $\phi(\infty) = 0$  とすれば, この導体球の表面  $r=a$  での電位  $\phi(a)$  は

$$\phi(a) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{a} \quad (18)$$

となる。一般に、電荷量を電位差で割ったものは、電荷量  $Q$  と電位差の比例係数で、**電気容量**(capacitance)と呼ぶ。

$$C \equiv \frac{Q}{\phi(a)} = 4\pi\epsilon_0 a \quad (19)$$

電位差を 1 V 増加させた時に増加する電荷量が  $C$  である。(19)の場合は、電気容量  $C$  は導体球の半径に比例しているの、大きな導体球であるほど、電位差 1 V で増加する電荷量は大きくなる。(19)は、孤立導体の電気容量の具体例である。

(18)で導体球の半径を固定して考えると、この球により多くの電荷を与えれば、静電エネルギーの値  $\phi(a)$  は増大する。しかし、導体球の半径  $a$  が一定である限り、電荷と静電エネルギーの比例関係は変わらない。上に述べた導体の性質、「電荷は導体表面のみに存在し、導体表面の電場は導体表面に垂直」から、導体表面は等ポテンシャル面である。即ち、導体表面が球面とは異なる幾何学的形状にあっても、 $\phi(\mathbf{x})$  の値は導体表面のどの位置でも等しい。孤立した帯電導体上の電荷  $Q$  は、この導体の境界条件として  $\phi_0$  を与えてラプラスの方程式の解を求めることで、導体外の  $\phi(\mathbf{x})$  を定め、この後に導体表面の電荷分布を求める。しかし、境界条件としての  $\phi_0$  を  $\lambda\phi_0$  とすれば、 $\phi(\mathbf{x})$  も  $\lambda\phi(\mathbf{x})$  となり、電場も電荷も  $\lambda$  倍となる。従って、(18)の場合に限らず、孤立導体一般で、電荷  $Q$  は導体表面上のポテンシャル  $\phi$  に比例する。この比例係数が孤立導体の電気容量  $C$  である。

$$Q = C \cdot \phi \quad (20)$$

電気容量の単位は Farad (F) と呼ばれ、SI 単位系 (MKSA 有理単位系) では、 $1 \text{ F} = 1 \text{ (C/V)}$  である。この単位に現れる電荷 1 C (クーロン) は実用上のコンデンサーに蓄積される電荷量としては著しく大きいので、実際には、 $\mu\text{F} = 10^{-6} \text{ (C/V)}$ 、 $\text{pF} = 10^{-12} \text{ (C/V)}$  などが電気容量の単位として利用される。

### 3) 電気容量係数と電位係数

一般の帯電した孤立導体について、(6)の

$$U = \frac{1}{2} \int_V \rho(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}) dV$$

を考えると、 $\phi(\mathbf{x}) = \phi$ は表面で一定だから、体積積分の前にくくり出すことができ、残りの体積積分は表面に存在する全電荷  $Q$  になる。

$$U = \frac{1}{2} \phi \int_V \rho(\mathbf{x}) dV = \frac{1}{2} \phi \cdot Q \quad (21-1)$$

複数の導体がある場合は、導体毎に(21-1)が成立するから、

$$U = \frac{1}{2} \phi \int_V \rho(\mathbf{x}) dV = \frac{1}{2} \sum_i \phi_i \cdot Q_i \quad (21-2)$$

帯電した孤立導体について(20)を使うと、

$$U = \frac{1}{2} \phi \cdot Q = \frac{1}{2} C \cdot \phi^2 = \frac{1}{2C} Q^2 \quad (22)$$

となる。

二つ以上の帯電した導体が存在する場合では電気容量はどのように表現できるだろうか？ 図 14-2 に示すように、考えるべき二つの導体 1, 2 の系の状態

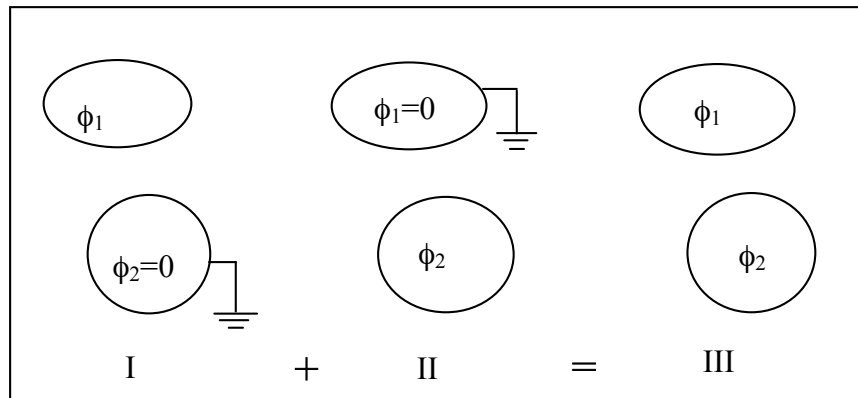


図 14-2. 境界条件の重ね合わせ. 状態 III は状態 I と状態 II の重ね合わせで表現できる。

は III であるが、重ね合わせの原理が適用できるので、この状態 III は一方を接地した状態 I と II の和になっている。

状態 I では、導体 1 の  $\phi_1$  と電荷  $Q_1$  の関係は、(20)の孤立導体の場合と同じである。一方、導体 2 の電位は接地されているので 0 であるが、導体 1 に電荷  $Q_1$  を与えると、導体 2 には誘導電荷が流入するので、 $\phi_1$  に規定された電荷が導体 2 に生じる。状態 II でも類似のことが起こるので、



$$\text{状態 I : } Q_1 = C_{11}\phi_1, \quad Q_2 = C_{21}\phi_1 \quad (23-1)$$

$$\text{状態 II : } Q_1 = C_{12}\phi_2, \quad Q_2 = C_{22}\phi_2 \quad (23-2)$$

この和が求めるべき関係になる。

$$Q_1 = C_{11}\phi_1 + C_{12}\phi_2$$

$$Q_2 = C_{21}\phi_1 + C_{22}\phi_2$$

これは行列の形を使って、

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \quad (24)$$

となる。孤立導体の場合の  $Q = C \cdot \phi$  (20)の関係は、複数の導体系では行列で表現される電気容量となる。各成分  $C_{ij}$  は電気容量係数と呼ばれる。

電気容量行列の逆行列を(24)の両辺に掛ければ、導体の電位を電荷で表現した関係が得られる。

$$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} \quad (25)$$

孤立導体における  $\phi = (1/C)Q$  (20)の関係での係数(1/C)に当たるものは、複数導体系では電気容量行列の逆行列で表現され、これは**電位係数行列**と呼ばれ、その成分 ( $P_{ij}$ ) は**電位係数**である。2個の導体系に対する(24), (25)の結果は、行列の次元を大きくすることで、3個以上の系に拡張できる。

$$Q_i = C_{i1}\phi_1 + C_{i2}\phi_2 + \cdots + C_{ij}\phi_j + \cdots = \sum_j C_{ij}\phi_j \quad (26)$$

$$\phi_i = P_{i1}Q_1 + P_{i2}Q_2 + \cdots + P_{ij}Q_j + \cdots = \sum_j P_{ij}Q_j$$

(21-2)から

$$U = \frac{1}{2} \phi \int_V \rho(\mathbf{x}) dV = \frac{1}{2} \sum_i \phi_i \cdot Q_i \quad (21-2)$$

であるから、ここに(26)を代入して、

$$U = \frac{1}{2} \sum_i \phi_i \left( \sum_j C_{ij}\phi_j \right) = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j C_{ij}\phi_i\phi_j \quad (27-1)$$

$$U = \frac{1}{2} \sum_i Q_i \left( \sum_j P_{ij}Q_j \right) = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j P_{ij}Q_iQ_j \quad (27-2)$$

で、電位あるいは電荷の二次形式となる。容量係数、電位係数のそれぞれは、

$$C_{ij} = C_{ji}, \quad P_{ij} = P_{ji} \quad (28)$$

と対称的である。これは Green の第三恒等式を用いて証明できる。

4) 相反定理： $C_{ij} = C_{ji}$ ,  $P_{ij} = P_{ji}$

容量係数行列あるいは電位係数行列の非対角成分が対称であることは、Greenの第三恒等式を使って示すことができる。これは相反定理と呼ばれる。

(26)の第一式の容量係数,

$$Q_i = C_{i1}\phi_1 + C_{i2}\phi_2 + \dots + C_{ij}\phi_j + \dots = \sum_j C_{ij}\phi_j \quad (29-1)$$

から考えよう。図 14-3 で表した導体 j 以外はすべて接地した状態を考える。

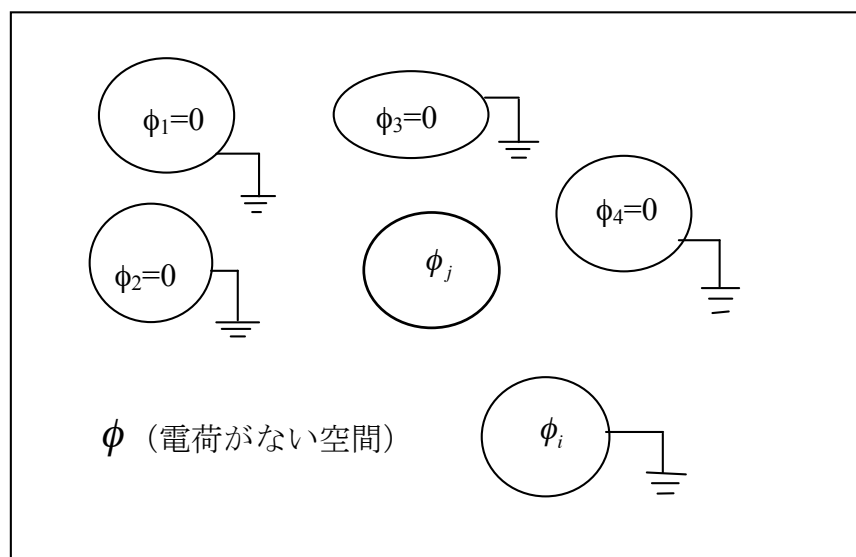


図 14-3. 導体 j 以外はすべて接地した状態.

この状態では,

$$\phi_j \neq 0, \quad \phi_{i(\neq j)} = 0 \quad (29-2)$$

である。この時、各導体には電荷が  $Q_i$  ( $i=1,2,\dots,i,\dots,j,\dots$ ) と与えられたとし、そして、電荷  $Q_i$  ( $i=1,2,\dots,i,\dots,j,\dots$ ) のない空間 (導体を除いた部分) の電位は  $\phi$  であるとする。(29-1)と(29-2)から,

$$Q_i = C_{ij}\phi_j \quad (29-3)$$

である。

図 14-4 では、導体 i 以外はすべて接地した別の状態を考える。この状態では,

$$\phi'_i \neq 0, \quad \phi'_{j(\neq i)} = 0 \quad (30-1)$$

である。この時、各導体の電荷が  $Q_i$  ( $i=1,2,\dots,i,\dots,j,\dots$ ) と与えられたとし、そして、電荷  $Q_i$  ( $i=1,2,\dots,i,\dots,j,\dots$ ) のない空間（導体を除いた部分）の電位は  $\phi'$  であるとする。 (29-1) と (30-1) から、

$$Q_j = C_{ji} \phi_i \quad (30-2)$$

である。

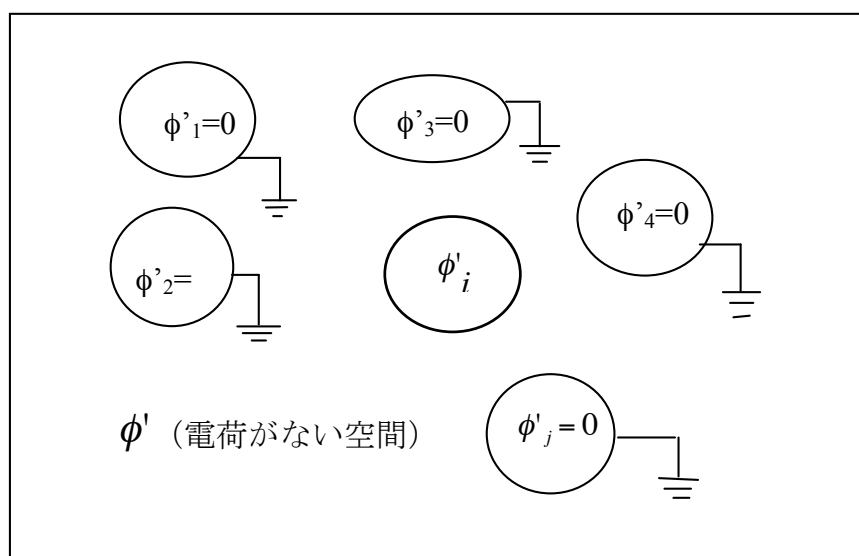


図 14-4. 導体  $i$  以外はすべて接地した状態.

そこで、二つの異なる状態での電荷のない空間の電位  $\phi$  と  $\phi'$  に関してグリーン  
の第三恒等式を使う。電荷のない空間であるから  $\nabla^2 \phi = -\rho/\epsilon_0 = 0$  と  
 $\nabla^2 \phi' = -\rho/\epsilon_0 = 0$  であり、ラプラスの方程式が成立するので、この第三恒等式は 0  
である。

$$\int_S \left( \phi \frac{\partial \phi'}{\partial n} - \phi' \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) dS = \int_V (\phi \nabla^2 \phi' - \phi' \nabla^2 \phi) dV = 0 \quad (31-1)$$

ここで、左辺の

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = (\text{grad} \phi) \cdot \mathbf{n} = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \quad (31-2)$$

は、 $\phi$  の面  $S$  の法線方向微係数である。 $\frac{\partial \phi'}{\partial n}$  についても同じである。故に、

$$\int_S (\phi \frac{\partial \phi'}{\partial n}) dS = \int_S (\phi' \frac{\partial \phi}{\partial n}) dS \quad (32)$$

となる。S に関する面積分は各導体の表面  $S_k$  に関する面積分の和になり、各導体表面の電位  $\phi_k$  と  $\phi'_k$  は各表面でそれぞれ同一であるから、面積分の前に出すことができる。

$$\sum_k \phi_k \int_{S_k} \frac{\partial \phi'_k}{\partial n} dS = \sum_k \phi'_k \int_{S_k} \frac{\partial \phi_k}{\partial n} dS \quad (33)$$

(31-2)を用い、更に、発散定理とガウスの法則を使うと、

$$-\int_S \frac{\partial \phi}{\partial n} dS = \int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \text{div} \mathbf{E} dV = \int_V (\rho / \epsilon_0) dV = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (34)$$

である、Q は全電荷である。これを使えば、(33)の等式は、

$$\sum_k \phi_k Q'_k = \sum_k \phi'_k Q_k \quad (35)$$

となる。しかし、 $\phi_j \neq 0, \phi_{i(\neq j)} = 0$  (29-2) と  $\phi'_i \neq 0, \phi'_{j(\neq i)} = 0$  (30-1)の条件を前提としているので、実際は

$$\phi_j Q'_j = \phi'_i Q_i \quad (36)$$

である。これに、 $Q'_j = C_{ji} \phi'_i$  (30-2) と  $Q_i = C_{ij} \phi_j$  (29-3)を代入すると、

$$C_{ji} \phi_j \phi'_i = C_{ij} \phi'_i \phi_j$$

となり、結局、

$$C_{ij} = C_{ji} \quad (37)$$

であることが判る。

$P_{ij} = P_{ji}$  が成立することも、 $(\phi_j, \phi'_i) \rightarrow (Q_j, Q'_i)$  として同様に証明できる。あるいは、(37)から容量係数行列と電位係数行列が互いに逆行列の関係にあることを使っても良い。

## 5) 同心導体球殻の電位係数と容量係数

図 14-5 に示すような同心の導体球 1 と導体球殻 2 に電荷  $Q_1$  と  $Q_2$  を与えた場合の電位、電位係数、容量係数を求めてみよう。導体球 1 に電荷  $Q_1$  を与えれば、導体の性質として、電荷  $Q_1$  は導体球 1 の表面に分布し、内部の電場は 0 で、

電位は $\phi_1$ である。導体球殻2に電荷 $Q_2$ を与えるということは、導体球殻2の内側表面と外側表面に電荷は分布するが、その和が $Q_2$ であることを意味する。導体球殻内部では電場は0で、電位は $\phi_2$ である。

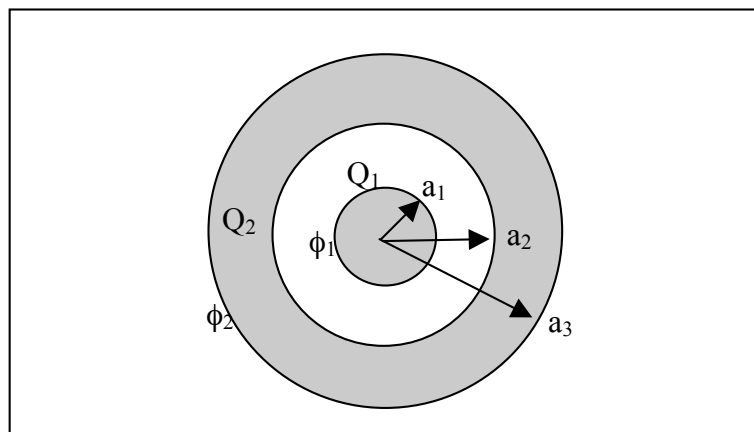


図 14-4. 同心の導体球1と導体球殻2に電荷 $Q_1$ と $Q_2$ を与えた場合の電位( $\phi_1, \phi_2$ )から、電位係数、容量係数を考える。

$r \geq a_3$ の領域では積分系のガウスの法則から、

$$\int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{(Q_1 + Q_2)}{\epsilon_0} \quad \rightarrow \quad E_r = \frac{(Q_1 + Q_2)}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

である。電位 $\phi$ は無遠を0として、

$$\phi = -\int_{\infty}^r \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\left| \frac{(Q_1 + Q_2)}{4\pi\epsilon_0 r} \right|_{\infty}^r = \frac{(Q_1 + Q_2)}{4\pi\epsilon_0 r}$$

球殻2での電位 $\phi_2$ は、 $r=a_3$ として、

$$\phi_2 = \frac{(Q_1 + Q_2)}{4\pi\epsilon_0 a_3} \quad (38)$$

一方、 $a_1 \leq r \leq a_2$ の領域では積分形のガウスの法則から

$$E_r = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

であるので、 $a_1 \leq r \leq a_2$ での電位は、導体内部の電場は0であるから、

$$\phi = -\int_{\infty}^r \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\int_{\infty}^{r(a_3)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} - \int_{r(a_3)}^{r(a_2)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} - \int_{r(a_2)}^r \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \frac{(Q_1 + Q_2)}{4\pi\epsilon_0 a_3} + \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{a_2} \right)$$

導体球 1 の電位  $\phi_1$  は  $r=a_1$  として

$$\phi_1 = \frac{(Q_1 + Q_2)}{4\pi\epsilon_0 a_3} + \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} \right) = \phi_2 + \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} \right) \quad (39)$$

これより,

$$Q_1 = 4\pi\epsilon_0 \left( \frac{a_1 a_2}{a_2 - a_1} \right) (\phi_1 - \phi_2) \quad (40-1)$$

(38)より,

$$Q_2 = 4\pi\epsilon_0 a_3 \phi_2 - Q_1 = -4\pi\epsilon_0 \left( \frac{a_1 a_2}{a_2 - a_1} \right) \phi_1 + 4\pi\epsilon_0 \left( a_3 + \frac{a_1 a_2}{a_2 - a_1} \right) \phi_2 \quad (40-2)$$

となるから, 容量係数行列は

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} = 4\pi\epsilon_0 \begin{pmatrix} \frac{a_1 a_2}{a_2 - a_1} & -\frac{a_1 a_2}{a_2 - a_1} \\ -\frac{a_1 a_2}{a_2 - a_1} & a_3 + \frac{a_1 a_2}{a_2 - a_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \quad (41)$$

である.

また, (38), (39)から電位係数行列は

$$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \begin{pmatrix} 1/a_1 - 1/a_2 + 1/a_3 & 1/a_3 \\ 1/a_3 & 1/a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} \quad (42)$$

となる.

次に, 図 14-4 の同心導体球-導体球殻系に特別な条件を課した場合を考えてみよう. 先ず, 導体球殻 2 を接地して  $\phi_2=0$  とした場合は, (40-1), (40-2)あるいは (41), (42)から,

$$\phi_2=0 \rightarrow Q_1 = 4\pi\epsilon_0 \left( \frac{a_1 a_2}{a_2 - a_1} \right) \phi_1, \quad Q_2 = -Q_1 \quad (43)$$

となることが判る.  $Q_2$  は内部の導体球に与えた電荷  $Q_1$  の反対符号になっている. 内部に存在する導体球電荷の誘導電荷である. これは接地したことで電荷が導体球殻に流入した結果である. 導体球表面の電荷  $Q_1$  から出る電気力線は全て導体球殻の内部表面に流入するから, この球殻の内部表面には電荷  $-Q_1$  が存在するとも言う. この球殻の外部表面に電荷は存在しない. この状況は, 図 14-4 のような幾何学的関係に限らず, 任意の導体を任意の形状の導体殻が取り囲ん

だ場合にも成立する。

次に，導体球表面の電荷  $Q_1=0$  とした場合を考えよう．(40-1), (40-2)あるいは(41), (42)から，

$$Q_1=0 \quad \rightarrow \quad \phi_1 = \phi_2 = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 a_3} \quad (44)$$

となる．導体球殻 2 に内包された導体球 1 に電荷がない場合は，両者は同電位になる．この電荷  $Q_2$  は導体球殻 2 の外部表面に分布し，電気力線はこの外部表面からさらに外に向かう．導体球 1 には電荷がないので，導体球殻 2 の内部表面に流入する電気力線はないから，この内部表面に電荷は存在しない．これは任意の導体を任意の形状の導体殻が取り囲んだ場合にも成立する．

## 6) 静電遮蔽

図 14-5 に示すような導体 1 とこれを 2 重に取り囲む導体殻 2 と 3 を考える．それぞれの電荷を  $Q_1, Q_2, Q_3$ ，電位を  $\phi_1, \phi_2, \phi_3$  とすると，電位係数行列は，

$$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{pmatrix} \quad (45)$$

である．相反定理から， $P_{ij} = P_{ji}$  ( $i \neq j$ ) である．

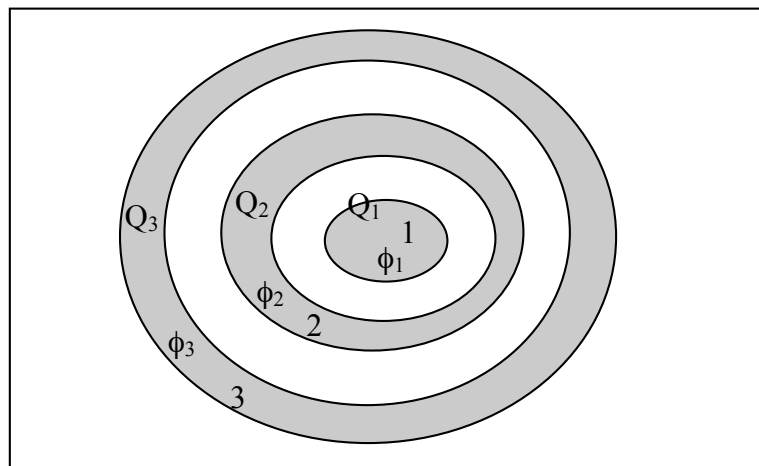


図 14-5. 導体 1 とこれを 2 重に取り囲む導体殻 2 と 3. 電荷を  $Q_1, Q_2, Q_3$  とし，電位を  $\phi_1, \phi_2, \phi_3$  とする．



1)  $(Q_1, Q_2, Q_3) = (Q, 0, 0)$ である場合を考えると (図 14-6),  $Q_1=Q$  の誘導電荷 $-Q$  が 導体殻 2 の内表面に生じるが, 導体殻 2 の電荷は 0 であるから, 外表面に  $Q$  が 生じる. これは導体殻 3 でも繰り返され, 電気力線は導体殻 3 の外部表面から 外に延びる. (45)から,

$$\phi_1 = P_{11}Q, \quad \phi_2 = P_{21}Q, \quad \phi_3 = P_{31}Q$$

である.

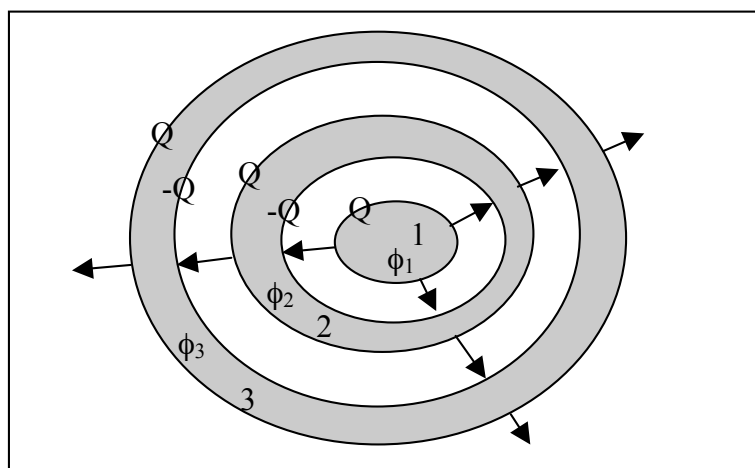


図 14-6.  $(Q_1, Q_2, Q_3) = (Q, 0, 0)$  の場合の電荷分布と電気力線.

2)  $(Q_1, Q_2, Q_3) = (0, Q, 0)$  の場合 (図 14-7) を考えると,  $(Q_1, Q_2, Q_3) = (Q, 0, 0)$  の場合 で,  $Q_1=Q$  と 導体殻 2 の内表面の誘導電荷 $-Q$  を除いたものになっている.

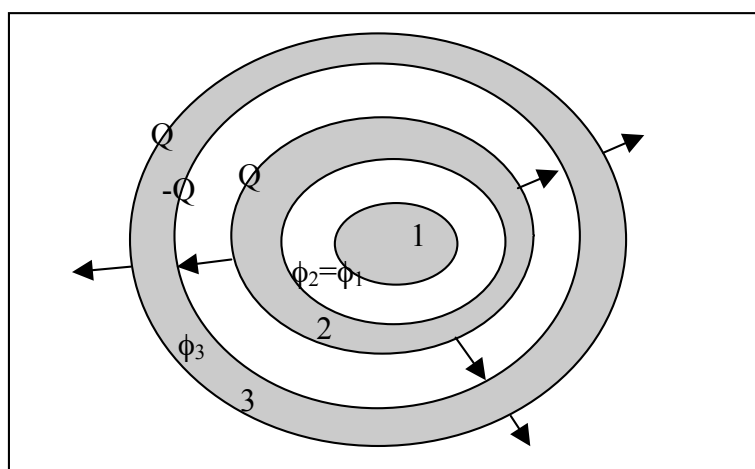


図 14-6.  $(Q_1, Q_2, Q_3) = (0, Q, 0)$  の場合の電荷分布と電気力線.

(45)からは  $\phi_1 = P_{12}Q$ ,  $\phi_2 = P_{22}Q$ ,  $\phi_3 = P_{32}Q$  であるが,  $\phi_2 = \phi_1$  であるから,  
 $\phi_1 = P_{12}Q = \phi_2 = P_{22}Q$  となり, 相反定理も使うと

$$P_{12} = P_{22} = P_{21} \quad (46)$$

である.

3)  $(Q_1, Q_2, Q_3) = (0, 0, Q)$  の場合 (図 14-8) は,  $(Q_1, Q_2, Q_3) = (0, Q, 0)$  の場合で  $Q_2 = Q$  と導体殻 3 の内表面の誘導電荷  $-Q$  を除いたものになっている. 電荷  $Q$  は導体殻の外部表面のみにあり, 電気力線はここから外部に向かうものだけである.

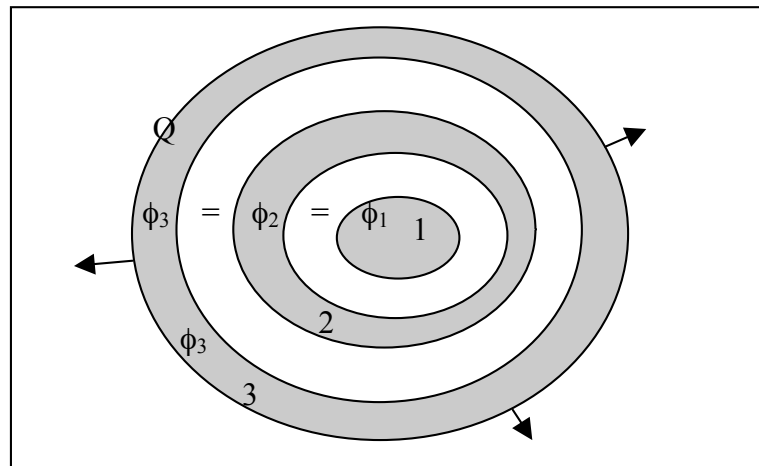


図 14-7.  $(Q_1, Q_2, Q_3) = (0, 0, Q)$  の場合の電荷分布と電気力線.

電位は全てが等しく,  $\phi_3 = \phi_2 = \phi_1$  が成立する. (45)からは

$\phi_1 = P_{13}Q$ ,  $\phi_2 = P_{23}Q$ ,  $\phi_3 = P_{33}Q$  であるが,  $\phi_3 = \phi_2 = \phi_1$  であるから,  
 $\phi_1 = P_{13}Q = \phi_2 = P_{23}Q = \phi_3 = P_{33}Q$  となり, 相反定理も使うと

$$P_{13} = P_{23} = P_{33} = P_{31} = P_{32} \quad (47)$$

となる. (46)では,  $P_{12} = P_{22} = P_{21}$  であるので,

$$P_1 = P_{11}, \quad P_2 \equiv P_{12} = P_{22} = P_{21}, \quad P_3 \equiv P_{13} = P_{23} = P_{33} = P_{31} = P_{32} \quad (48)$$

と記すことにすると, (45)の電位係数行列は

$$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & P_3 \\ P_2 & P_2 & P_3 \\ P_3 & P_3 & P_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{pmatrix} \quad (49)$$

となる。この電位係数行列の逆行列を求めると、容量係数行列となる。

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix} \quad (50)$$

この容量係数は、 $\Delta$ を電位係数行列の行列式の値として、

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ 0 & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} p_2 & p_3 \\ p_3 & p_3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} p_2 & p_3 \\ p_3 & p_3 \end{vmatrix} & 0 \\ -\begin{vmatrix} p_2 & p_3 \\ p_3 & p_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} p_1 & p_3 \\ p_3 & p_3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_3 \end{vmatrix} \\ 0 & -\begin{vmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} \quad (51)$$

となり、 $C_{13} = C_{31} = 0$  で、 $\sum_{i=1}^3 C_{i2} = \sum_{j=1}^3 C_{2j} = 0$  である。

従って、導体殻2の内側の導体1と外側の導体殻3の間には、電位と電荷の依存関係、 $Q_1$ と $\phi_3$ 、 $Q_3$ と $\phi_1$ の関係、は存在しない。一般に、導体殻に内包された導体系と、その導体殻の外に存在する導体系は、静電的に独立な系となり、相互に影響することはない。これは**静電遮蔽**と呼ばれる。

外部電場から電子素子や電子回路を保護する為に金属薄で被うことや、電気測定室を外部から遮蔽して測定への擾乱を低減することは、実用上も重要である。