§１５　近接作用と Maxwell 応力

電場は電気力線に平行に生じ，電気力線に垂直な面は等ポテンシャル面である．§14-1 で議論したように，静電場には単位体積当たり $u = (\varepsilon_0/2)\mathbf{E}^2 = (1/2)\mathbf{E}\bullet\mathbf{D}$ のエネルギーが蓄えられている．この性質を理解する為に電場に対して，弾性体や流体の応力のようなものを考える．これが Maxwell 応力の議論である．しかし，真空中の静電場では，弾性体や流体などの“物質媒体”は存在しない．結局は，“電気力線の媒体”から電場のエネルギーを考えることになる．　この議論は近接作用の考え方，即ち，「場」の考え方に行き着く．その意味で “物質媒体”の近接作用から弾性体や流体を取り扱う「連続体の力学」について考えておく必要がある．連続体の力学では，近接作用を「面に働く力＝応力」の考え方から記述する．運動方程式において「遠隔の力」の他に「近接力としての応力」を導入し，その近接力を「境界面を通っての運動量の獲得・流入」とみなす．このような「連続体力学」の考え方に依拠し，静電場で電荷に作用する「力」を「近接作用としての応力」で置き換えて解釈する．

１）連続体に作用する物体力と表面力

連続体 B の内部に仮想的な閉局面 S を考え，S 内部の体積を V とする（図 15-1）．連続体の力学では，この体積 V の物体に作用する外部からの力を次の二つのタイプに分けて考える[25，26，28]．

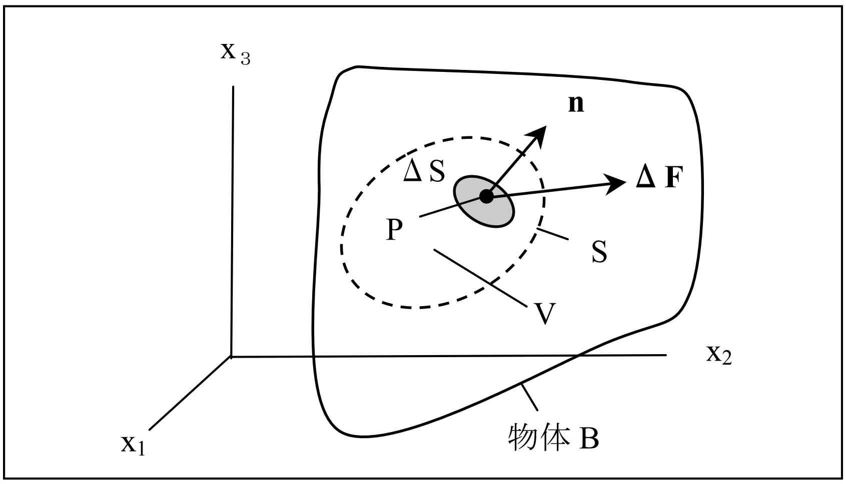

図 15-1. 面要素に作用する表面力 Δ F.

（1）重力に代表されるような単位質量当たりに作用する力．これを物体力（body force）と呼ぶ．次の表面力と区別する意味で体積力(volume force)とも呼ぶ．体積 V 全体に作用する力の意味で使われるが，物体の密度が一定なら物体力も体積力も同じとなる．

（2）V の境界面 S を通じて作用する近接力を，表面力（surface force）と呼ぶ．近接力である表面力としては，とりあえずは，圧力を思い浮かべれば良いが，圧力も含めて一般的に表面力を考えるには，もう少し細かな定義作業が必要である．

そこで，その閉曲面 S 上の面積素片 ΔS を考える（図 15-1）．ΔS により連続体の局所部分はその両側部分に分割される．両側部分を相互に識別するために，ΔS の単位法線ベクトル **n** を，領域 ΔS の中心 P を始点として，S 内部から外側を向くものを指定する．両側部分は **n** の正側と負側部分として識別できる（面積素片 ΔS の裏表を単位法線ベクトル **n** で識別すると考えても良い）．そして，ΔS 上の中心位置 P を **x として，この点**に作用する力 $\Delta\mathbf{F}$ を考える．この力は，**n** の正側部分（V の外側部分）が **n** の負側部分（V の内側部分）に作用する近接力であると考える．$\Delta\mathbf{F}$ は **x**，ΔS，**n** を指定して，その向きと大きさが決まると考え，$\Delta\mathbf{F}(\mathbf{x},\Delta S,\mathbf{n})$と記す．そこで，$\Delta S\to 0$ の極限で，$\Delta\mathbf{F}$ の大きさはΔS に比例し，$(\Delta\mathbf{F}/\Delta S)\to(d\mathbf{F}/dS)$であり，また，$\Delta S$ 内の全ての点で，ΔS に作用する力のモーメント→０と仮定する．この $\Delta S\to 0$ の極限で

$$\lim_{\Delta S\to 0}\left(\frac{\Delta\mathbf{F}}{\Delta S}\right)=\frac{d\mathbf{F}}{dS}=\mathbf{T}(\mathbf{x},\mathbf{n}) \tag{1}$$

ベクトル$\mathbf{T}(\mathbf{x},\mathbf{n})$を定義する．　$\mathbf{T}(\mathbf{x},\mathbf{n})$は，法線ベクトルが **n** である面上の点 **x** に作用する**表面力**（traction）又は，**応力ベクトル**（stress vector）と呼ばれる．この表面力（応力ベクトル）は単位面積当たりの力の次元［$ML/T^2/L^2$］を持つ．この次元は，［$ML/T^2/L^2$］$=[ML/T][1/T][1/L^2]$であるから，単位時間当たり単位面積当たりの運動量の次元でもある．また，［$ML/T^2/L^2$］$=[ML/T^2][L][1/L^3]$とすれば，単位体積当たりのエネルギーの次元にも対応する．

図 15-1 に示すような直交座標系を設定すれば，ベクトル$\mathbf{T}(\mathbf{x},\mathbf{n})$は三つの成分

に分解できる．単位法線ベクトル **n** も同様に直交成分に分解できる．

$$\mathbf{T}(\mathbf{x},\mathbf{n}) = \{\mathbf{T}(\mathbf{x},\mathbf{n})\}_x \cdot \mathbf{i} + \{\mathbf{T}(\mathbf{x},\mathbf{n})\}_y \cdot \mathbf{j} + \{\mathbf{T}(\mathbf{x},\mathbf{n})\}_z \cdot \mathbf{k} \tag{2}$$

$$\mathbf{n} = n_x \cdot \mathbf{i} + n_y \cdot \mathbf{j} + n_z \cdot \mathbf{k} \tag{3}$$

ここでの **i**, **j**, **k** は，いつものように，右手系の直交座標軸方向（x_1. x_2, x_3）の各単位ベクトルである．

表面力ベクトル（応力ベクトル）をどの場所で考えるかは別の形で明示できれば，**T**(**x**,**n**)の **x** は省略できるので，以後は単に**T**(**n**)と記す．表面力ベクトル（応力ベクトル）は単位法線ベクトル **n** を与えないと定まらないことを表す．即ち，面と向きを指定しないと定まらない． **T**(**n**)はベクトル **n** の**関数**である．

T(**n**)がベクトル関数である意味を考える一例として，単位法線ベクトル **n** を **–n** に変更した**T**(**–n**)と**T**(**n**)の関係を(1)の定義に戻って考えてみる（図 15-2）．

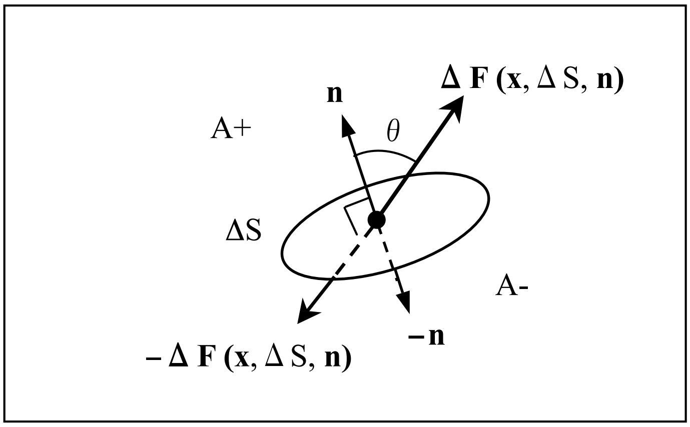

図 15-2.　Δ S に作用する力 **ΔF (x,ΔS, n)**は A+の部分が A−に作用する力と定義している．**n** とともにこれを反転する．

Δ F(x, Δ S, **n)**は“A+の部分が A−に作用する大きさ Δ F の力”で，その方向は **n** と **Δ F(x,** Δ S, **n)**が作る面内で相互に θ の角度にある（図 15-2）． **Δ F(x,** Δ S, **n)**を“作用”とすれば，この“反作用に当たる力”を考えることができる．**–ΔF (x,**ΔS, **n)**は“作用”と同じ大きさ Δ F の力で向きは反対ではある．しかし，**n** を指定しているので，“A+の部分が A−の部分に作用する力”であり，“反作用”とは言えない．一方，**–n** と **– Δ F(x,** Δ S, **n)**は，**n** と **Δ F(x,** Δ S, **n)**が作る面内にあり，**–n** と **– Δ F(x,** Δ S, **n)**のなす角度はやはり θ である（図 15-2）．**n** と **Δ F(x,** Δ S, **n)**を反転

させたものが，$-\mathbf{n}$ と$-\Delta \mathbf{F}(\mathbf{x}, \Delta S, \mathbf{n})$だから，ベクトルとしては，

$$-\Delta \mathbf{F}(\mathbf{x}, \Delta S, \mathbf{n}) = \Delta \mathbf{F}(\mathbf{x}, \Delta S, -\mathbf{n}) \qquad (4)$$

である．右辺側の表記は，図 15-2 を参照して，“A−の部分が A+の部分に作用する力”と解釈できるから，$\Delta \mathbf{F}(\mathbf{x}, \Delta S, \mathbf{n})$を“作用”とした時，“反作用に当たる力”として$\Delta \mathbf{F}(\mathbf{x}, \Delta S, -\mathbf{n})$を採用できる．**(4)**について(1)の極限を考えれば，$-\mathbf{T}(\mathbf{n}) = \mathbf{T}(-\mathbf{n})$となるので，これは

$$\mathbf{T}(\mathbf{n}) = -\mathbf{T}(-\mathbf{n}) \qquad (5)$$

と書ける．単位法線ベクトル $\mathbf{n}$ を反転すると，表面力ベクトル（応力ベクトル）も反転することを表す．これはベクトル関数$\mathbf{T}(\mathbf{n})$の一つの性質であるが，$\mathbf{T}(\mathbf{n})$は $\mathbf{n}$ を用いてどのように表現されるかについて以下でさらに考える

２）表面力よる応力成分の定義

表面力ベクトル（応力ベクトル）$\mathbf{T}(\mathbf{n})$を定めるには，単位法線ベクトル $\mathbf{n}$ の他に，結局は，図 15-3 に示すように，応力テンソル成分と呼ばれる９個のパラメーターを指定する必要がある．なぜそうなるかは後に議論するとして，

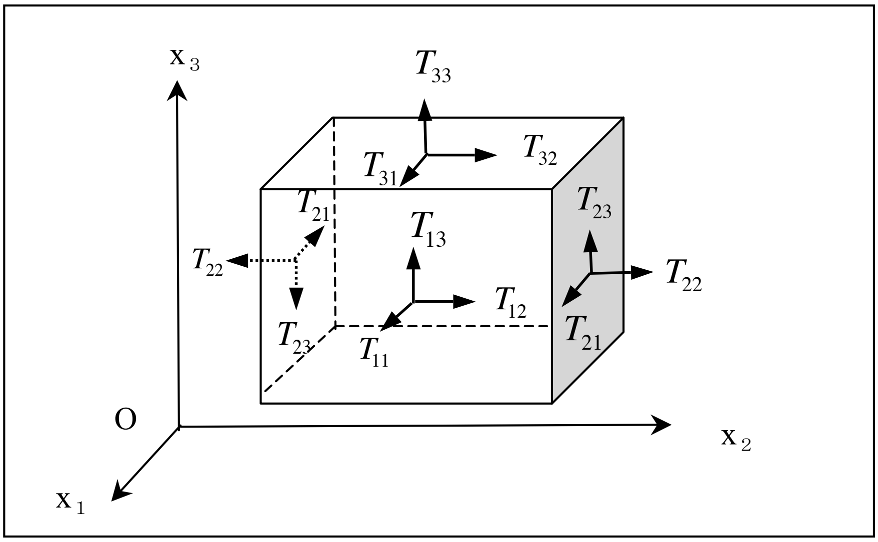

図 15-3. 正側の面で定義される９個の応力テンソル成分. 負側の面については x_2軸に垂直な面だけについて描いている.

これらの９個の応力テンソル成分の意味を，座標軸に平行な面をもつ立方体を

考えて，その面に作用する「特別な表面力ベクトルの大きさ」として，まず定義しておこう．この立方体には６つの面がある．３つの直交軸に垂直な面は２つずつ存在する．各直交軸に垂直な２つの面のうち，各軸正側にある面を選んで，その面の中心に右手系直交座標軸方向（x_1, x_2, x_3）に作用する「**３つの特別な表面力**」を考える．

x_1 軸に垂直な正側面に作用し，それぞれ，x_1，x_2，x_3 軸を向く表面力の大きさを，T_{11}，T_{12}，T_{13} と表記する．T_{11} は，x_1 軸に垂直な正側の面に作用し，x_1 軸の正方向を向き，この面に「**垂直な表面力**」の大きさを表す．T_{12} は，x_1 軸に垂直な正側面に作用し，x_2 軸の正方向を向き，この面に「**平行な表面力**」の大きさ，T_{13} は，x_1 軸に垂直正側の面に作用し，x_3 軸の正方向を向き，この面に「**平行な表面力**」の大きさを，それぞれ表す．

同様にして，x_2 の軸に垂直な正側の面に作用し，x_1, x_2, x_3 軸を向く表面力の大きさを，それぞれ，　T_{21}，T_{22}，T_{23} とする．また同様にして，x_3 の軸に垂直な面に作用し, $x_1. x_2, x_3$ 軸を向く表面力の大きさを, それぞれ, T_{31}，T_{32}，T_{33} と表記する．

このような９つの特別な表面力の大きさは，次のような３x３行列として，

$$\mathbf{T} = T_{ij} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} \tag{6}$$

書くことができる．T_{ij} は**応力テンソルの成分** と呼ばれる．「第１番の指数ｉ」はその特別な表面力が作用する面は座標軸ｉに垂直な正側の面であることを示す．「第２番の指数 j」はその表面力が j 軸方向を向くことを示す．**応力テンソルの成分** T_{ij} は，座標系軸が指定する特別な面と方向に作用する表面力の大きさを表す．３つの座標軸面と３の座標軸方向で合計９つの特別な表面力を考える．

面の単位法線ベクトルは,「考えている物体の領域内から外向き」に取ると約束しているので,「座標軸に垂直な正側の面」と指定することは，この面の単位法線ベクトル **n** が「**座標軸の単位ベクトル** 」であることを意味する．図 15-3 の立方体には６つの面があるものの，上の議論では，そのうちの正側の３つの面しか考えていない．残りの負側にある３つの面では何も考えなくてもよいの

だろうか？

負側の面の単位法線ベクトル **n** は「負符号を付けた座標軸の単位ベクトル　」となっている．従って，(5)から　**T(−n) = −T(n)**　である．図 15-3 では，x_2軸に垂直な負側面に働く特別な表面力も描いてある．正側で定義した表面力を反転させたものになっている．これは　(5)による．だから，三つの座標軸の各単位ベクトルに一致する正側面の単位法線ベクトル **n** と三つの座標軸の各単位ベクトルで指定される９つの特別な表面力 T_{ij} を考えれば，立方体の６つの面の全てについて考えていることになっている．

以上は，応力テンソルの成分 T_{ij} の定義で，これを用いて連続体の力学では面を通じて作用する近接力を議論する．しかし，**T(n)** が **n** のどのような関数であるかは依然として全く何も説明していない．結論から先に述べれば，(6)の応力テンソルを用いると，**T(n)** の(x，y，z =1, 2, 3)成分は，単位法線ベクトル **n** の(x，y，z = 1, 2, 3)成分と次のようにな単純な関係にある．

$$\begin{pmatrix} T_1(\mathbf{n}) \\ T_2(\mathbf{n}) \\ T_3(\mathbf{n}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \tag{7}$$

任意の表面力（応力ベクトル）**T(n)** の x，y，z 成分は，応力テンソル成分 T_{ij} と単位法線ベクトル **n** により，(7)で与えられる．成分の関係で書けば，

$$T_i(\mathbf{n}) = \sum_{j}^{3} T_{ij} \cdot n_j \ (= T_{ij} \cdot n_j) \tag{8}$$

である．　(8)は，i を固定して考えれば，応力テンソルの i 番目の行をベクトルとみなして，単位法線ベクトル **n** との内積を取った結果に当たる．だから，(7)を念頭に全体は

$$\mathbf{T(n)} = \mathbf{T} \bullet \mathbf{n} \tag{9}$$

と表現できる．　**T** は(3x3)行列，面の単位法線ベクトル **n** は列ベクトルで(3x1)行列である．一般にベクトルが，(9)のように，係数の行列を介し別のベクトルに変換される時，その変換係数を表す行列を（２階の）テンソルと呼ぶ．なぜ(7)が成立するのかは，次節以降で考える．

(8)右辺の括弧内の表現$T_{ij} \cdot n_j$は，テンソル成分を扱う場合に採用される和記号を省略する表記法である．テンソル成分の積で同じ指標が現れる場合（この場合は j）は，その指標に関して 1, 2, 3 として和を取ると約束した上で，この表記法を用いる．何回もの変換が繰り返された結果には，その分だけ多数のテンソル成分の積の和が現れる．この表記法を用いると，式は大幅に簡略化でき便利である．しかし，この表記法に慣れない人間には内容理解の阻害原因になるので，ここではこのような表記を全面に出すことはしない．ただし，最後の§ 28 では，このテンソル表現を使う．

３） 連続体の運動法則

Newton の運動法則は連続体物体の運動法則であるが，質点系とは異なる形で表現され，更に洗練された形を取る[25,26,28]．これを以下で確認しよう．

時間 t において物体が占めている空間を B（t）とし，物体の各点の粒子の位置を **r**, 密度を ρ , 体積素片を dV, その点の粒子速度を **v** とする（図 15-4）．$(\rho d\mathrm{V})\cdot\mathbf{v}$ は体積素片の運動量をあらわすから，これを全占有空間 B（t）にわたって体積積分したもの

$$\mathbf{P}_{\Sigma} = \int_{B(t)} (\rho\mathbf{v})d\mathrm{V} \tag{10}$$

は，空間配置 B（t）をとる物体の全運動量である．一方，原点Oに関する体積素片の角運動量は$\mathbf{r}\times(\rho d\mathrm{V})\cdot\mathbf{v}$のベクトル積で表現できるから，これをやはり全空間で体積積分した結果

$$\mathbf{L}_{\Sigma} = \int_{B(t)} \mathbf{r}\times(\rho\mathbf{v})d\mathrm{V} \tag{11}$$

は物体の全角運動量である．

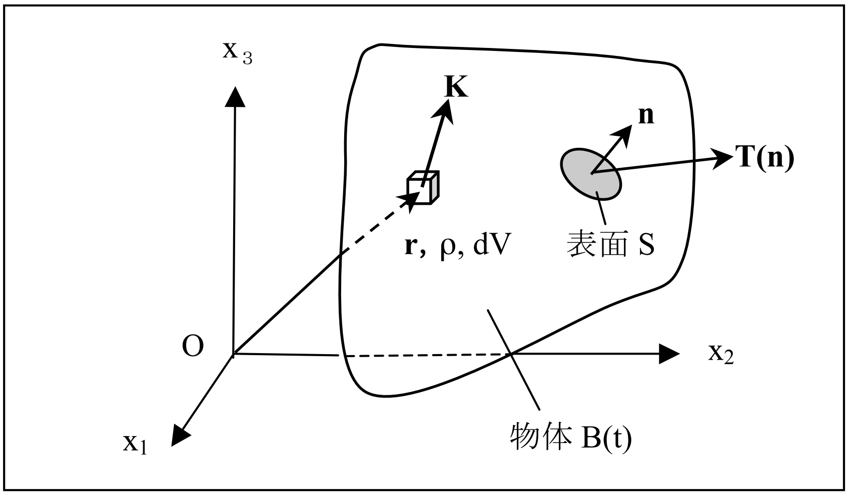

図 15-4. 物体に作用する物体力 **K**（単位質量当たりに作用する力）と表面力（応力ベクトル）**T(n)**.

連続体力学では，Newton の運動法則を次のように述べる．

１）全運動量（10）の時間変化率は，物体に作用する全ての外力の和に等しい．

２）全角運動量（11）の時間変化率は，原点に関する物体に作用するモーメン

ト（トルク）の総和に等しい．

物体に作用する力を二つのタイプに分けて考えることは既に述べている．物体力 **K**（単位質量当たりに作用する力）と面を通じて作用する表面力（応力ベクトル）**T(n)**の二種類である．従って，物体の占める体積をB，その閉局面をSとして，全外力は，物体力の体積積分と表面力（応力ベクトル）の面積分の和になる．

$$\mathbf{F}_{\Sigma} = \int_B \rho \mathbf{K} d\mathrm{V} + \int_S \mathbf{T}(\mathbf{n}) dS \tag{12}$$

同様に考えて，原点に関する物体に作用する全モーメント（トルク）の総和も．

$$\mathbf{M}_{\Sigma} = \int_B \mathbf{r} \times (\rho \mathbf{K}) d\mathrm{V} + \int_S \mathbf{r} \times \mathbf{T}(\mathbf{n}) d\mathrm{S} \tag{13}$$

となる．

運動量に関する法則１）は，(10)と(12)を用いて，

$$\frac{D}{Dt}[\int_{B(t)} (\rho \mathbf{v}) d\mathrm{V}] = \int_B \rho \mathbf{K} d\mathrm{V} + \int_S \mathbf{T}(\mathbf{n}) dS \tag{14}$$

と表現される．角運動量に関する法則２）は，(11)と(13)を用いて，

$$\frac{D}{Dt}[\int_{B(t)} \mathbf{r} \times (\rho \mathbf{v}) d\mathrm{V}] = \int_B \mathbf{r} \times (\rho \mathbf{K}) d\mathrm{V} + \int_S \mathbf{r} \times \mathbf{T}(\mathbf{n}) d\mathrm{S} \tag{15}$$

となる．時間微分は∂/∂t ではなく D/Dt と記してある．この意味については説明が必要である．

連続体力学の基礎となっている流体力学では，座標系を空間に固定した上で，流体の運動を速度場 $\mathbf{v}(x_1,x_2,x_3,t)$ とその時間変化で記述する方法が採用されることが多い．Euler の方法と呼ばれる.速度は四つの独立な変数で与えられるから，速度の i 軸方向成分 v_i も $\mathrm{v_i}(x_1,x_2,x_3,t)$ であり，その微小変化は，

$$\Delta \mathrm{v_i}(x_1,x_2,x_3,t) = \frac{\partial \mathrm{v_i}}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial \mathrm{v_i}}{\partial x_2}\Delta x_2 + \frac{\partial \mathrm{v_i}}{\partial x_3}\Delta x_3 + \frac{\partial \mathrm{v_i}}{\partial t}\Delta t$$

となる．両辺をΔt で割ってその時間変化率に直すと，

$$\frac{\Delta \mathrm{v_i}}{\Delta t} = \frac{\partial \mathrm{v_i}}{\partial t} + (\frac{\Delta x_1}{\Delta t}) \cdot \frac{\partial \mathrm{v_i}}{\partial x_1} + (\frac{\Delta x_2}{\Delta t}) \cdot \frac{\partial \mathrm{v_i}}{\partial x_2} + (\frac{\Delta x}{\Delta t}) \cdot \frac{\partial \mathrm{v_i}}{\partial x_3}$$

$$= \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_1 \cdot \frac{\partial v_i}{\partial x_1} + v_2 \cdot \frac{\partial v_i}{\partial x_2} + v_3 \cdot \frac{\partial v_i}{\partial x_3}$$

$$= \frac{\partial \mathrm{v_i}}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3} \mathrm{v_k} \frac{\partial \mathrm{v_i}}{\partial x_k} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \mathbf{v} \bullet \nabla \mathrm{v_i} = (\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \bullet \nabla)\mathrm{v_i} \qquad (16)$$

となる．これは，通常の時間微分に速度ベクトルとナブラ演算子の内積が付け加わった微分演算子が速度の i 成分に対し作用した結果，と考えねばならない．この微分演算子自体を

$$\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \bullet \nabla \qquad (17)$$

と記す． D/Dt 自体は，Lagrange 微分とか「流れに沿う微分」と呼ばれる．

（16）右辺の内容は, 速度成分の時間変化率を Euler の立場から導出したもので, 第一項は「その場所での加速度」，第二項は「粒子の移動による加速度」などと呼ばれる．このように，(17)の D/Dt は，空間的に不均質な速度場（粒子移動場）があることも含めたそこでの物理量の時間変化率を表現する演算子である．空間に固定した座標系からの観測結果に対応する．

しかし，もし座標系を空間に固定せず，流速 **v** と同じように運動させると考えるなら（この考え方は Lagrange の立場・方法と呼ばれる），座標系に対する粒子流速 **v** は恒等的に０となる． (17)は

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \qquad (18)$$

である．この意味で D/Dt は，Lagrange 微分とか「流れに沿う微分」と呼ばれる．

しかし，Euler の立場では，D/Dt は(17)右辺の意味をもち，粒子速度 **v** が恒等的に０ではない状況を考えている．しかし，この時間微分演算子を用いると，表記上は流速 **v** を隠してしまうことができる．粒子速度 **v** が０ではない時，運動量・角運動量は粒子の移動速度 **v** に伴って系から持ち出されたり，系に付け加わったりするが，このことを含めながらも，表記上はこれを露に掲げない表現にできる利点がある．(14), (15)に D/Dt が使われるのも，このような Euler 流の立場による． $\partial/\partial t$を用いる場合は， $D/Dt \equiv \partial/\partial t + \mathbf{v} \bullet \nabla$ と読み替えればよい．

Newton の運動法則は, 連続体の力学では D/Dt を用いて, (14),(15)の形になる．この意味についてもう少し考えておこう．質量が m である質点に対する Newton の運動方程式は,

$$\vec{F} = m\vec{\alpha} = m\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = \frac{d}{dt}(m\vec{v})$$

であるが，この左右を入れ替えて，

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{F}$$

とすれば，「運動量の時間変化率がその質点に作用する力」で，これは(14)の

$$\frac{D}{Dt}[\int_{B(t)}(\rho\mathbf{v})d\mathrm{V}] = \int_{B}\rho\mathbf{K}d\mathrm{V} + \int_{S}\mathbf{T}(\mathbf{n})dS \tag{14}$$

にそのまま対応すると考える．「Newton の運動方程式は，運動量の時間変化が“力”だと述べている」と連続体力学では理解している．更に進めて，(14)右辺の第一項は体積 B 内での「単位時間当たりの運動量の生成」，第二項は「単位時間当たりに面 S を通っての運動量の獲得（流入）」と解釈する[25, 26, 28]． 表面力（応力ベクトル）は単位面積当たりの力の次元［ML/T^2/L^2］を持つが，この次元は，［ML/T^2/L^2］= [ML/T][1/T][1/L^2]であるから，単位時間当たり単位面積当たりの運動量の次元でもある．だから，表面力の面積分を単位時間当たりの「面 S を通っての運動量の獲得（流入）」と理解する．「単位時間当たりの」との言葉を省略するために，「運動量の生成率」，「運動量の獲得（流入）率」と述べても良い．だから，(14)左辺の「運動量の時間変化」は，「体積力に相当する体積 B における運動量生成率」と「表面力に当たる面 S を通っての運動量の獲得（流入）率」によって決まると考える．この意味で．(14)の「運動方程式」は「運動量の保存則」と見なされる．(15)についても「角運動量についての保存則」と見なす．とりあえず，連続体力学の「運動方程式」観がこのようなものであることを指摘して，次に進む.

４）運動方程式と表面力

図 15-5 に示すように，物体の仮想的境界面に扁平な物体を考えて，その運動方程式を(14)から考えよう[25]．扁平物体の厚さはδとし，単位法線ベクトルが **n** である外側の面と単位法線ベクトル**−n** を持つ内部側の面の面積は等しくΔS とする．二つの面に作用する表面力は，それぞれ，**T(n)**と **T(−n)**と書ける．側面に

も表面力は作用していても良いが，δ→０の極限を考えるので，結局は，考え

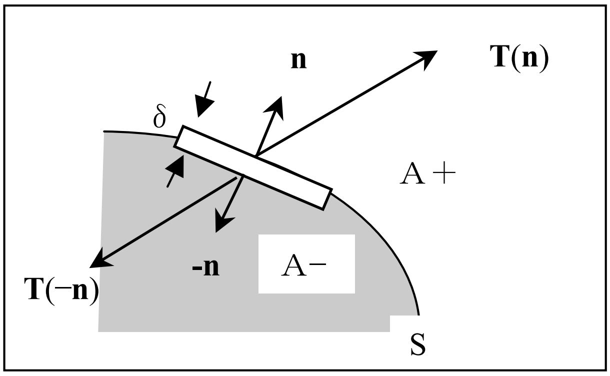

図 15-5. 物体の仮想的境界面に考える扁平な物体領域

なくても良いことになる．(14)の

$$\frac{D}{Dt}\left[\int_{B(t)}(\rho\mathbf{v})\,d\mathrm{V}\right]=\int_{B}\rho\mathbf{K}\,d\mathrm{V}+\int_{S}\mathbf{T}(\mathbf{n})\,dS \qquad (14)$$

も，δ→０の極限で考えるから，体積積分の項は表面積分に比べると無視でき，結局，面積分のみが残ることになる．従って，δ→０の極限で，

$$0=\mathbf{T}(\mathbf{n})\Delta S+\mathbf{T}(-\mathbf{n})\Delta S \qquad (19)$$

が成立する．故に，

$$\mathbf{T}(\mathbf{n})=-\mathbf{T}(-\mathbf{n}) \qquad (20)$$

である．**T**(**n**)は，境界面の外側向き単位法線ベクトル **n** の指示する（Ａ＋）部分が境界面を通じて内側（Ａ−側）部分に作用する表面力（応力ベクトル）である．一方，**T**(**−n**)は，内側向き単位法線ベクトル(**−n**)の指示する（Ａ−）側部分が外側（Ａ＋側）に作用する表面力（応力ベクトル）である．(20)は「作用・反作用」の関係から得た(5)と同じものである．扁平な厚さδの物体をδ→０の極限で考えることは，同一面の裏と表に作用する表面力を考えることであり，両者には(20)の関係が成り立たねばならない．

５）運動量保存則と作用・反作用の法則

「扁平な物体」について，(14)の「運動量保存則（運動方程式）」でδ→０の極限を考えると(20)が得られる．これは重要な意味を持つ．(14)左辺の粒子速度

v と右辺第一項の物体力（体積力）K が何であっても，“表面力”，即ち，“近接力”には(19)が成立している．この点は，次にもう一つの類似のケースを考えた後に更に議論する．

もう一点は，連続体力学の“力”と“作用・反作用”の理解の仕方の問題である．“力”とは“運動量の時間変化率”との解釈は既に紹介した．そこで，(14)の「運動方程式（運動量保存則）」で，粒子速度 **v=0** の場合を考えてみる．これは，静止状態，即ち，“力が釣り合っている”状態である．

$$0 = \int_B \rho \mathbf{K} d\mathrm{V} + \int_S \mathbf{T}(\mathbf{n}) dS$$

(14)左辺は 0 であるが，これは，右辺側の物体力(体積力) ρ**K** の項も表面力の項も，それぞれが 0 であることを一般的には意味しない．

表面力 **T(n)**の面積積分は「面 S を通っての運動量の単位時間当たりの獲得（流入）量」であり，これが領域物体に作用する“近接力”と解釈すると，

$$\int_S \mathbf{T}(\mathbf{n}) dS = -\int_B \rho \mathbf{K} d\mathrm{V}$$

であるから，この釣り合い条件では，負符号無しの物体力(体積力) ρ**K** の体積積分自体は，“運動量の消滅率”でなければならない．静止状態で “力が釣り合って”いても，“運動量の獲得・損失（流れ)”が存在すると考える．この状況を，質点をバネでつり下げた場合と比べてみる（図 15-6）．この場合，バネが質点を z の正方向に引っ張る力が「近接力」に当たる．「遠隔力」の重力は z の負方向

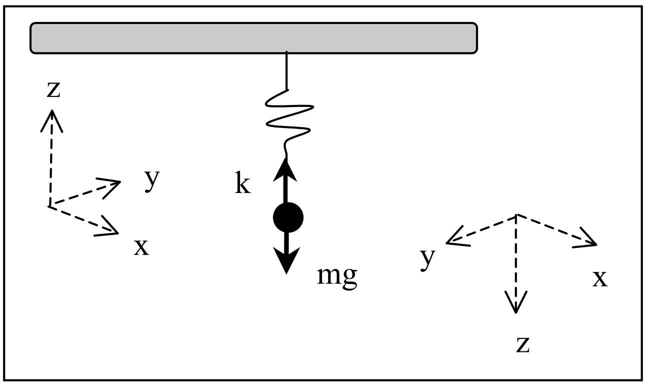

図 15-6.　バネで質点をつり下げた場合の“遠隔力”の重力と“近接力”の釣り合いと座標系の設定

に働いている．ここでの座標系の z の正方向は「近接力の作用する方向」に一致させてある．このような k なる近接力が作用することを“運動量の獲得（流入)”と解釈する限り，釣り合い状態での遠隔力の作用は．正の運動量の獲得（流入）を打ち消す“運動量の消失・消滅”となる．

“力”を以上のように考えると，“作用・反作用”とは，“運動量の保存則”から説明できることになる．体積領域外部から境界面を通っての内部側の「運動量の単位時間当たりの獲得（流入）量」は，外部領域から見ると，そこからの「運動量の単位時間当たりの損失（流出）量」である．内部と外部からなる系全体では，運動量は保存されていることを述べているに過ぎない．(19)の $\mathbf{T}(\mathbf{n}) + \mathbf{T}(-\mathbf{n}) = 0$ がこれを表現している．

前節で，連続体での近接力を考えるための応力テンソル成分を定義した．そこでは，直交座標系を設定し，座標軸が指定する 9 個の特別な面と方向に作用する単位面積当たりの力として応力成分を定義している．これは，図 15-6 でバネから質点に作用する“近接力”の方向を座標系の z の正方向に一致させたことに対応している．これは，“近接力”を“運動量の獲得・流入”で理解する場合に重要である．正の“運動量の獲得（流入）率”は，運動方程式を通じて，応力テンソル成分の定義に結びついている．“近接力”を“運動量の獲得（流入）率”で理解する限り，静止状態での上述の物体力の体積積分は“負の運動量の発生率”＝“運動量の消失・消滅率”となる．

一方，物体力の体積積分を“運動量の正の発生率”として，面積分を“負の運動量の獲得・流入率”＝“運動量の損失・流出率”と考えても良い．しかし，これは図 15-6 右側に示した鉛直下方を正とする座標系に従う考え方で．上記の釣り合いを

$$\int_B \rho \mathbf{K} d\mathrm{V} = -\int_S \mathbf{T}(\mathbf{n}) dS$$

と理解する．しかし，こう考えると運動方程式と応力テンソル成分の定義自体に遡ってその変更が必要となる．我々は，運動方程式とそこでの座標系を前提にして応力テンソル成分を定義しているので，このような途中からの変更はやらない．

６）表面力 **T(n)**と応力テンソルの関係：近接作用の表現方法

図 15-6 に示す四面体 OABC の物体について，(14)の運動方程式（運動量保存則）を考えよう．図 15-3 では，立方体の正側の面で 9 個の応力テンソル成分を定義することを述べた．図 15-3 の立方体から正側の三つの面をすべて切り取った後に残る四面体が，図 15-7 の四面体 OABC であると思えば良い．

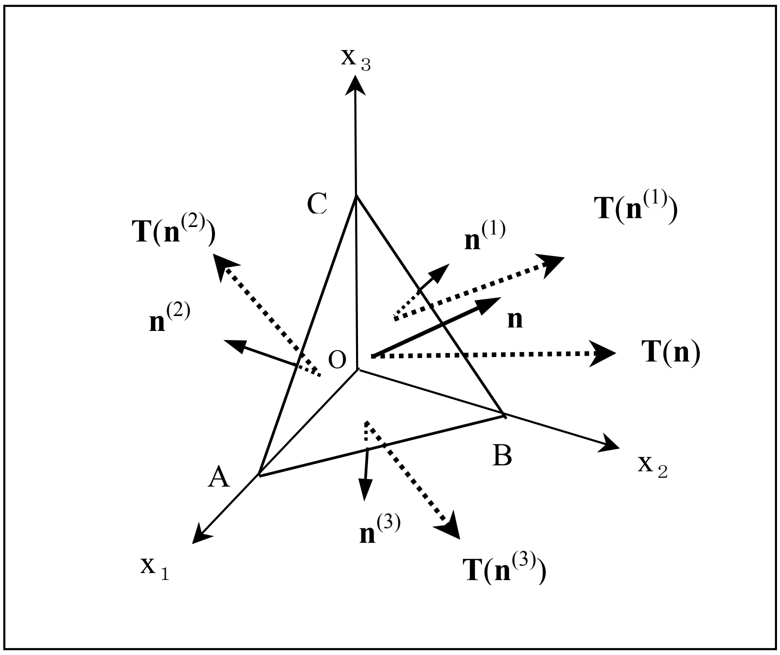

図 15-7. 四面体体積素片 OABC と，その四つの面の単位法線ベクトル　$\mathbf{n}$, $\mathbf{n}^{(1)}$，$\mathbf{n}^{(2)}$，$\mathbf{n}^{(3)}$，その各面に作用する表面力（応力ベクトル）$\mathbf{T}(\mathbf{n})$, $\mathbf{T}(\mathbf{n}^{(1)})$, $\mathbf{T}(\mathbf{n}^{(2)})$, $\mathbf{T}(\mathbf{n}^{(3)})$.　$\mathbf{n}^{(1)}$，$\mathbf{n}^{(2)}$，$\mathbf{n}^{(3)}$は座標軸 x_1，x_2，x_3の単位ベクトルに負符号を付けたものになっている．

切り取る面が三角形 ABC で，この面の単位法線ベクトル $\mathbf{n}$ のみが任意で，残りの三つ面の単位法線ベクトル $\mathbf{n}^{(1)}$，$\mathbf{n}^{(2)}$，$\mathbf{n}^{(3)}$は座標軸 x_1，x_2，x_3の単位ベクトルに負符号を付けたものなので，座標軸を決めれば自動的に決まる．　$\mathbf{n}^{(1)}$，$\mathbf{n}^{(2)}$，$\mathbf{n}^{(3)}$ は四面体内部から外向きに取るので，直交座標系（x_1，x_2，x_3）の単位ベ

クトル **i**, **j**, **k** との関係は,

$$\mathbf{n}^{(1)} = -\mathbf{i}, \quad \mathbf{n}^{(2)} = -\mathbf{j}, \quad \mathbf{n}^{(3)} = -\mathbf{k} \tag{21}$$

である．故に，　$\mathbf{T}(\mathbf{n}^{(1)})$, $\mathbf{T}(\mathbf{n}^{(2)})$, $\mathbf{T}(\mathbf{n}^{(3)})$は，(6)で述べた立方体の正側面で指定した三軸に垂直な面に作用し，三つの軸方向を向く９個の表面力（応力ベクトル），即ち，応力テンソル成分を用いて表現できる．ただし，(21)と(5)，(20)の関係から，向きは反転させる必要がある．

一方，三角形 ABC の面積ΔS を（x_2，x_3）面への正射影したものが，三角形 OBC の面積ΔS_1であるから，$(\Delta S_1/\Delta S) = n_1$であり，面 ABC の単位法線ベクトル **n** の x_1成分に等しい．同様に，$(\Delta S_2/\Delta S) = n_2$，$(\Delta S_3/\Delta S) = n_3$である．故に，

$$(\Delta S_j/\Delta S) = n_j \qquad (j = 1,\ 2,\ 3) \tag{22}$$

が成立している．

そこで，(14)の運動方程式（運動量保存則）

$$\frac{D}{Dt}\left[\int_{B(t)} (\rho\mathbf{v})\, d\mathrm{V}\right] = \int_B \rho\mathbf{K}\, d\mathrm{V} + \int_S \mathbf{T}(\mathbf{n})\, dS \tag{14}$$

をこの四面体に適用してみる．考える極限は，**n** を一定に保ちながら，原点Oから三角形 ABC へ垂直におろした足の長さ h を０に近づけた状態である．この時，三角形 ABC の面積ΔS と他の表面積ΔS_jも０に近づくが，四面体体積ΔV は h に関する３次の無限小で，表面積ΔS，ΔS_j は h の２次の無限小である．故に，h→０の極限で (14)を考えると，面積ΔS とΔS_jが関与する項に比べ，体積ΔV が関与する項は無視することができ，表面力（応力ベクトル）の面積分項のみを考えれば良いことになる．故に，

$$\mathbf{T}(\mathbf{n})\cdot\Delta S + \sum_{j=1}^{3} \mathbf{T}(\mathbf{n}^{(j)})\cdot\Delta S_j = 0 \tag{23}$$

となり，表面力（応力ベクトル）と面積の積の総和は０でなければならない．

これは

$$\mathbf{T}(\mathbf{n})\cdot \Delta S = -\sum_{j=1}^{3}\mathbf{T}(\mathbf{n}^{(j)})\cdot \Delta S_j$$

と書けるから，両辺をΔS で割れば，

$$\mathbf{T}(\mathbf{n}) = -\sum_{j=1}^{3}\mathbf{T}(\mathbf{n}^{(j)})\cdot(\Delta S_j/\Delta S) = \sum_{j=1}^{3}\mathbf{T}(-\mathbf{n}^{(j)})\cdot n_j \tag{24}$$

となる．最後の等号では，(20)と(22)の関係を用いている．また，(21)から，

$$-\mathbf{n}^{(1)}=\mathbf{i},\quad -\mathbf{n}^{(2)}=\mathbf{j},\quad -\mathbf{n}^{(3)}=\mathbf{k}$$

であるので，(24)の $\mathbf{T}(-\mathbf{n}^{(j)})$ の ｉ 成分である $T_i(-\mathbf{n}^{(j)})$ は，図 15-3 の立方体の正側の面で定義した９個の応力テンソル成分そのものである．

$$T_i(-\mathbf{n}^{(j)}) = T_{ij} \quad (i,j=1,2,3) \tag{25}$$

任意の単位法線ベクトル **n** を持つ面に作用する表面力（応力ベクトル）**T(n)**の各成分は，応力テンソルの行ベクトルとその単位法線ベクトル **n** の内積で与えられる．

$$T_i(\mathbf{n}) = \sum_{j=1}^{3} T_{ij}\cdot n_j \quad (i,j=1,2,3) \tag{26}$$

これが，任意の表面力（応力ベクトル）**T(n)** が単位法線ベクトル **n** のベクトル関数であることの中身である．　これは(7), (8)として既に提示してある．　(26)は(8)である．(7)として示したように，表面力（応力ベクトル）**T(n)** を列ベクトル，応力テンソルを(3x3)の行列，単位法線ベクトル **n** をと(3x1)の列ベクトルとすると，表面力（応力ベクトル）**T(n)**は，応力テンソルと単位法線ベクトル **n** の行列の積として(3x1)の列ベクトルで表現できる．

$$\begin{pmatrix} T_1(\mathbf{n}) \\ T_2(\mathbf{n}) \\ T_3(\mathbf{n}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \tag{7}$$

この結果は，(14)の運動量の保存則による．

一方，角運動量の保存則(15)

$$\frac{D}{Dt}[\int_{B(t)} \mathbf{r} \times (\rho \mathbf{v}) d\mathrm{V}] = \int_{B} \mathbf{r} \times (\rho \mathbf{K}) d\mathrm{V} + \int_{S} \mathbf{r} \times \mathbf{T}(\mathbf{n}) d\mathrm{S} \tag{15}$$

は，テンソル成分に“ある条件”を課すことになる．原点Oを中心とする一辺がδＬの長さの微小立方体を体積領域として考えた時，体積積分項はδＬの４乗，面積分項はδＬの３乗に比例するので，δＬ→０の極限では，面積分項のみが残り，

$$\int_{S} \mathbf{r} \times \mathbf{T}(\mathbf{n}) dS = 0$$

となる．これは面に作用する力のOに関するモーメントが釣り合う条件である．図 15-8 は，座標系原点を立方体の中心に置き，原点Oについて z 軸の周りのモーメントを考えた場合を示す．立方体の正側面に作用する x 方向と y 方向の力を実線で示す．負側面には向きを反転させた同じ大きさの力が働く．これは面

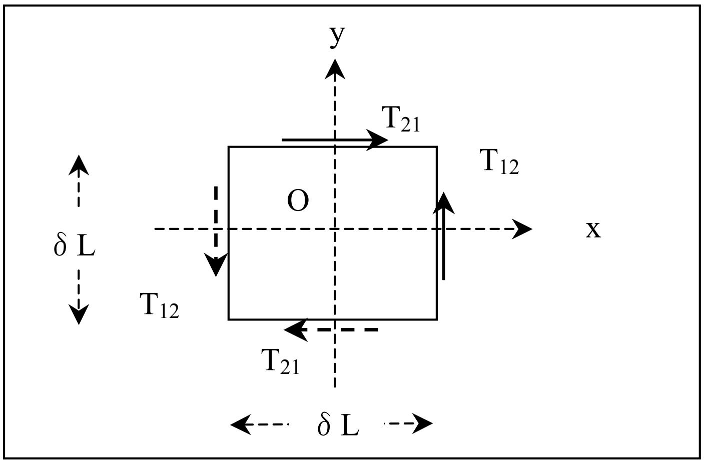

図 15-8．z 軸のまわりのモーメントの釣り合い．

の単位法線ベクトルが反転するからである．応力テンソルの対角成分（法線応力成分）は回転には無関係だから，非対角成分（剪断応力成分）だけを考えれば良い．z 軸の右まわりのモーメントは，（力 x 腕の長さ）であるから，

$$(T_{21}\cdot\Delta x\cdot\Delta z)\cdot(\Delta y/2)+(T_{21}\cdot\Delta x\cdot\Delta z)\cdot(\Delta y/2)=T_{21}\cdot(\delta L)^3$$

であり，左回りのモーメントとは，

$$(T_{12}\cdot\Delta y\cdot\Delta z)\cdot(\Delta x/2)+(T_{12}\cdot\Delta y\cdot\Delta z)\cdot(\Delta x/2)=T_{12}\cdot(\delta L)^3$$

である．

$$\int_S \mathbf{r}\times\mathbf{T}(\mathbf{n})dS=0$$

が成立しており， z 軸に関する右回りと左回りのモーメントは等しくなければならないから，$T_{21}=T_{12}$となる．x 軸，y 軸に関するモーメントについても同様な結果となるので，$T_{ij}=T_{ji}\ (i\neq j)$であることが判る．**応力テンソルは対称なテンソルで**実際は 6 個の独立な成分からなる．これが角運動量の保存則に由来する応力テンソル成分の満すべき条件である．

以上のように，任意の **n** の表面力（応力ベクトル）**T(n)**は，直交座標系を指定すれば直ちに定義できる 9 つの特別な表面力，即ち，応力テンソル成分を用いて，(7)の一次結合式で与えられる．「面と方向の両方」を指定しなければならないので， 9 つの応力テンソル成分を考える．これは運動量保存則による．ただし，角運動量保存則から，応力テンソルは対称テンソルとなるので，実際は 6 つが独立な応力テンソル成分である．

表面力（応力ベクトル）ではなく，“運動量の獲得（流入）率”で述べれば次

のようになる．任意 **n** の面を通って単位面積当たり，単位時間当たりに獲得される（流入する）運動量（ベクトル）は，三つの座標軸に垂直な面を通って，三つの軸方向に沿う９種類の単位面積当たり，単位時間当たりの獲得（流入）運動量（テンソル成分）を用いて，(7)式で与えられる．

“運動量の獲得・流入率”との表現を用いると，図 15-7 に示している外向きの **n**，定義したテンソル成分が外向きであること，との対比から，一瞬「“流入”なら向きが反対ではないか？」と思ってしまうが，運動方程式で，ベクトルとしての単位時間当たりの運動量変化の正と，表面力（応力ベクトル）の面積分の正は対応していないといけないので，その物体が単位時間内に得た運動量の意味で“運動量の獲得率・流入率”で良い．

＜静水圧を表現する応力テンソル＞

応力テンソルの一例として，「**静水圧を表現するテンソル**」考えてみよう．図 15-9 に示した二等辺三角柱が，静水圧を表現するテンソルについて教えてくれる[27]． 図における奥行きの長さは単位の長さとする．紙面に垂直な正負の面については示していない．図 15-6 の場合と同じように，この二等辺三角柱の形を保ちながら体積を０に近づければ，(23)式と同様に，面に作用する表面力の面積分の和は０でなければならない．紙面に垂直な正負の２面の面積は等しいので，この両面に作用する表面力（法線応力）の和は０である．従って，図 15-9 に示した３面の面積とそこに作用する表面力の積の和は０である． (23)に相当する式は，

$$b\cdot\mathbf{T}_1(\mathbf{n}_1)+b\cdot\mathbf{T}_2(\mathbf{n}_2)+a\cdot\mathbf{T}_3(\mathbf{n}_3)=0$$

である．しかし，ここで考える状況は，(A)での短い外向き矢印で示した三つの面の法線とは反対方向に法線応力のみが作用し（圧力），剪断応力は全く作用していないとするものである．従って，

$$\mathbf{T}_1(\mathbf{n}_1) = -p_1 \cdot \mathbf{n}_1, \quad \mathbf{T}_2(\mathbf{n}_2) = -p_2 \cdot \mathbf{n}_2, \quad \mathbf{T}_3(\mathbf{n}_3) = -p_3 \cdot \mathbf{n}_3$$

である．即ち，

$$b \cdot p_1 \cdot \mathbf{n}_1 + b \cdot p_2 \cdot \mathbf{n}_2 + a \cdot p_3 \cdot \mathbf{n}_3 = 0$$

が成立している．これは図の（B）に当たる．二等辺三角形であるから，二辺

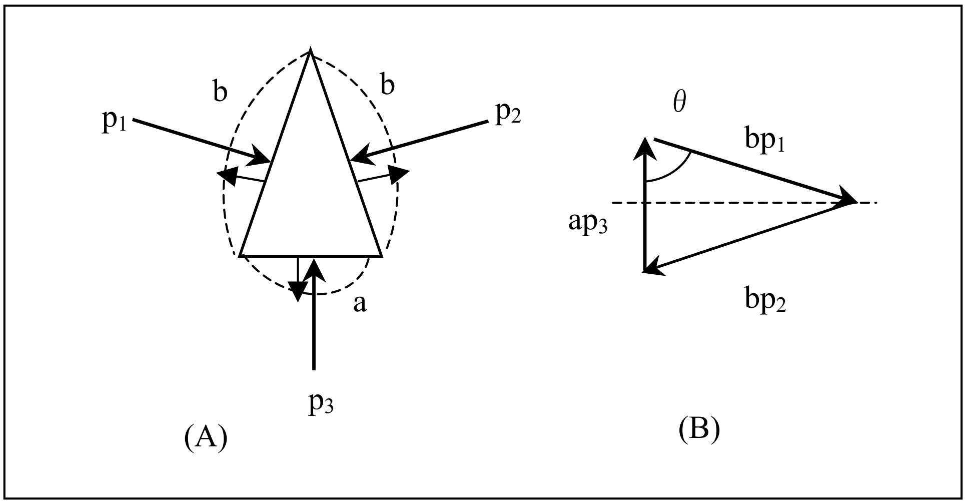

図 15-9．静水圧の条件.

の長さは等しい．だから，$p_1 = p_2$となる．従って，

$$b \cdot p_1(\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2) + a \cdot p_3 \cdot \mathbf{n}_3 = 0$$

である．しかし，図から判るように，

$$\mathbf{n}_3 \cdot \mathbf{n}_1 = \mathbf{n}_3 \cdot \mathbf{n}_2 = \cos(\pi - \theta) = -\cos\theta = -(a/2/b)$$

が成立している． $\mathbf{n}_3$との内積を作って

$$b \cdot p_1(\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2) \cdot \mathbf{n}_3 + a \cdot p_3 \cdot \mathbf{n}_3 \cdot \mathbf{n}_3 = 0 \quad \rightarrow \quad b \cdot p_1(-2\cos\theta) + a \cdot p_3 = 0$$

である．これに先ほどの $\cos\theta = (1/2)a/b$ を代入すれば， $p_1 = p_3$ となる．結局 $p_1 = p_2 = p_3 = p$ であることが判る．

剪断応力が全て 0 であれば，法線応力は全て等しい圧力値 p になる．面の方向がどのようであろうと，その面の法線ベクトルの反対方向に圧力 p が作用す状態を静水圧力状態と呼ぶ．静水圧力状態を表す応力テンソルの成分は，

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} -\mathrm{p} & 0 & 0 \\ 0 & -\mathrm{p} & 0 \\ 0 & 0 & -\mathrm{p} \end{pmatrix}$$

である．このことは後の Maxwell の応力テンソルの議論で使う．

応力テンソルに関する(7)式の結果をもう一度冷静に考えてみると，これは実は“不思議”でもある． (14)の運動方程式（運動量保存則）から導出されたにもかかわらず，「運動状態を表現する粒子速度 **v** がどうであれ，遠隔力を表す K がどうであれ，(7)は成立する」からである．だから，(14)式から得られる(7)式は，運動状態や外力とは全く無関係で，「**近接力を前提にした連続体固有の性質**」それ自体を表現していると理解する他ない．連続体と見なす気体，液体，固体での近接作用とは，このような「表面力（応力ベクトル）と応力テンソルで記述されるもの」と考えるほかない．ならば，静電場で電荷に作用する力についても，連続体の表面力（応力ベクトル）と応力テンソルの形式を導入できれば，それは**近接作用の記述**となるに違いない．

７） Maxwell の応力テンソル

ある有限の体積領域 V とその閉曲面 S を考える．その領域内の体積素片 dV の電荷密度が ρ であるとすれば，電荷として(ρ dV)を持つので，これが静電場 **E** から受ける力 **F** は，

$$\mathbf{F} = \int_V \rho \mathbf{E} dV \tag{27}$$

となる．一方，微分形のガウスの法則は，

$$div\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\mathbf{x}) \qquad (\S 5\text{−}4\text{-}16)$$

であるから，両式から電荷密度 ρ を消去すれば，

$$\mathbf{F} = \varepsilon_0 \int_V \mathbf{E}\ \mathrm{div}\mathbf{E}\ dV \tag{28}$$

となる．

(27)を用いて電荷密度 ρ を消去することは，自らの電荷から受ける力（自己力）も **F** に算入しているので，不合理であるように見える．しかし，(27)のような体積積分を行えば，結果的には自己力は消えるので不合理ではない．(28)で良いことになる．詳しい議論は砂川のテキスト[4)] にあるので参照されたい．しかし，もう一点不合理に思えることがある．電荷密度 $\rho = 0$ である領域の積分，即ち，$\mathbf{E} \neq 0$ ではあるが電荷が存在しない真空空間の体積積分を考えると，当然ながら，**F** は０である．(§5−4-16)から $div\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ で，(28)で **F**＝０となる．しかし前提にしている $\mathbf{E} \neq 0$ はどうなるのであろうか？　電場 **E** は，(§2−3)に従って，単位電荷当たりに作用する力として定義している．極限を取るにしても試験電荷をその場に持ち込まなければ，電場の定義はできない．　はたしてこれでよいのだろうか？　§13-6，§14-2 で少し述べたように電荷密度 ρ を文字通り, 電荷がそこにあると考えることは適切ではなく, 今井[22，26)] が指摘しているように，(§5−4-16)式は，$div\mathbf{D}(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x})$ として，電気力線の密度と理解すべきことを示唆する．しかし，(27)式は電場 **E** の定義式でもあるので，この問題は「電磁気学」にとって深刻な問題である[22，26)]．ここでは，とりあえずこの問題は追求しないことにして, (28)の **F** を連続体力学の表面力と応力テンソルの形式に直すことだ

けを考える．

(28)の $\mathbf{F}$ が連続体の表面力（応力ベクトル）のようなものの表面積分で表現できるなら，

$$\mathbf{F} = \int_S \mathbf{T}(\mathbf{n})\, dS = \int_S \mathbf{T} \bullet \mathbf{n}\, dS \tag{29}$$

であろう．(29)を成分毎に考えて，$\mathbf{F}_\mathrm{i}$ と $\mathbf{T_i(n)}$に対応する応力テンソル $\mathbf{T}$ の i 行成分全体を一つのベクトル$\mathbf{T_i}$と表現すれば，

$$\mathbf{F}_i = \int_S \mathbf{T_i}(\mathbf{n}) dS = \int_S \mathbf{T_i} \bullet \mathbf{n}\, dS = \int_V div \mathbf{T_i} dV \tag{30}$$

である．最後の等式は，発散定理を使っている． (28)右辺の体積積分での$(\varepsilon_0 \mathbf{E}\ \mathrm{div}\mathbf{E})_\mathbf{i}$とこの体積積分の $div\mathbf{T_i}$ が等置されることになる．従って

$$div\mathbf{T_i} = \varepsilon_0 (\mathbf{E}\ div\mathbf{E})_\mathbf{i} \tag{31}$$

となるはずである．この(31)の関係から，$\mathbf{E}$ の成分を用いて応力テンソル成分 $\mathrm{T_{ij}}$ を与えることができれば，静電場の力を“近接力”で記述したことになる．数式表現上は，(31)右辺で$\mathbf{E_i}$を div の中に入れ込んでしまえば良いのだ．

i 成分が x 成分である場合を以下で考える． $div\mathbf{E}$ はスカラーだから，

$$(\mathbf{E}\ div\mathbf{E})_x = \mathbf{E}_x\ div\mathbf{E} = E_x \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right) \tag{32}$$

である．第一項は，

$$E_x \frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2} E_x{}^2\right) \tag{33}$$

である．第二，第三項は，

$$E_x \frac{\partial E_y}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(E_x \cdot E_y) - E_y \frac{\partial E_x}{\partial y}, \qquad E_x \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(E_x \cdot E_z) - E_z \frac{\partial E_x}{\partial z} \tag{34}$$

であるが， $rot\,\mathbf{E} = 0$ が成立しているので，

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = 0$$

であり，これを使うと (34)は次のようになる，

$$
\begin{aligned}
E_x \frac{\partial E_y}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(E_x \cdot E_y) - E_y \frac{\partial E_y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(E_x \cdot E_y) - \frac{\partial}{\partial x}(\frac{1}{2}E_y{}^2) \\
E_x \frac{\partial E_z}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z}(E_x \cdot E_z) - E_z \frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z}(E_x \cdot E_z) - \frac{\partial}{\partial x}(\frac{1}{2}E_z{}^2)
\end{aligned}
\tag{35}
$$

故に，(31)は

$$
\begin{aligned}
div\mathbf{T_x} &= \varepsilon_0(\mathbf{E}\, div\mathbf{E})_x = \varepsilon_0 \mathbf{E}_x\, div\mathbf{E} \\
&= \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\varepsilon_0}{2}E_x{}^2 - \frac{\varepsilon_0}{2}E_y{}^2 - \frac{\varepsilon_0}{2}E_z{}^2) + \frac{\partial}{\partial y}(\varepsilon_0 E_x \cdot E_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\varepsilon_0 E_x \cdot E_z)
\end{aligned}
\tag{36}
$$

と， div の中に入れ込んだ形になる．この結果は，一行目のテンソル成分が，

$$
T_{11} = \frac{\varepsilon_0}{2}(E_x{}^2 - E_y{}^2 - E_z{}^2), \quad T_{12} = \varepsilon_0 E_x \cdot E_y, \quad T_{13} = \varepsilon_0 E_x \cdot E_z \tag{37}
$$

であることを意味する．

$div\mathbf{T}_i = \varepsilon_0(\mathbf{E}\, div\mathbf{E})_i = \varepsilon_0 \mathbf{E}_i\, div\mathbf{E}$ で i=y, z として同様に考えれば，二行目，三行目のテンソル成分が求められる．結果は，

$$
\mathbf{T} = \begin{pmatrix}
\frac{\varepsilon_0}{2}(E_x{}^2 - E_y{}^2 - E_z{}^2) & \varepsilon_0 E_x \cdot E_y & \varepsilon_0 E_x \cdot E_z \\
\varepsilon_0 E_y \cdot E_x & \frac{\varepsilon_0}{2}(E_y{}^2 - E_z{}^2 - E_x{}^2) & \varepsilon_0 E_y \cdot E_z \\
\varepsilon_0 E_z \cdot E_x & \varepsilon_0 E_z \cdot E_y & \frac{\varepsilon_0}{2}(E_z{}^2 - E_x{}^2 - E_y{}^2)
\end{pmatrix} \tag{38}
$$

である．Maxwell の応力テンソルと呼ばれる．

この(38)の内容は一体何を意味するのであろうか？　次節で考えよう．

８） **Maxwell 応力テンソルと電気力線**

Maxwell の応力テンソル(38)を書き直してみる．

$$\mathbf{T}=\begin{pmatrix} \frac{\varepsilon_0}{2}(E_x{}^2-E_y{}^2-E_z{}^2) & \varepsilon_0 E_x\cdot E_y & \varepsilon_0 E_x\cdot E_z \\ \varepsilon_0 E_y\cdot E_x & \frac{\varepsilon_0}{2}(E_y{}^2-E_z{}^2-E_x{}^2) & \varepsilon_0 E_y\cdot E_z \\ \varepsilon_0 E_z\cdot E_x & \varepsilon_0 E_z\cdot E_y & \frac{\varepsilon_0}{2}(E_z{}^2-E_x{}^2-E_y{}^2) \end{pmatrix} \tag{38}$$

であるから，対角成分は

$$T_{11}=\frac{\varepsilon_0}{2}(E_x^2-E_y^2-E_z^2)=\frac{\varepsilon_0}{2}(2E_x^2-E_x^2-E_y^2-E_z^2)=\varepsilon_0 E_x^2-\frac{\varepsilon_0}{2}E^2 \tag{39}$$

$$T_{22}=\varepsilon_0 E_y^2-\frac{\varepsilon_0}{2}E^2,\qquad T_{33}=\varepsilon_0 E_z^2-\frac{\varepsilon_0}{2}E^2 \tag{40}$$

となるから，二つの(3x3)行列に分割できる．

$$\mathbf{T}=\begin{pmatrix} \varepsilon_0 E_x E_x & \varepsilon_0 E_x E_y & \varepsilon_0 E_x E_z \\ \varepsilon_0 E_y E_x & \varepsilon_0 E_y E_y & \varepsilon_0 E_y E_z \\ \varepsilon_0 E_z E_x & \varepsilon_0 E_z E_y & \varepsilon_0 E_z E_z \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -\frac{\varepsilon_0}{2}E^2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\varepsilon_0}{2}E^2 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\varepsilon_0}{2}E^2 \end{pmatrix} \tag{41}$$

第二の行列は対角行列で，対角成分は全て等しく，非対角の剪断応力成分が全て０である．連続体（流体力学）で言えば，静水圧を表現するテンソルに当たる（§15-6）．また，対角成分の値は，真空の静電場の単位体積当たりのエネルギー $u=(\varepsilon_0/2)E^2=(1/2)\mathbf{E}\bullet\mathbf{D}$ に負符号を付けたものである． $\mathbf{D}=\varepsilon_0\mathbf{E}$ であるから，$D_i=\varepsilon_0 E_i \quad (i=x,y,z)$ であることも使ってみれば，

$$\mathbf{T}=\begin{pmatrix} E_x D_x & E_x D_y & E_x D_z \\ E_y D_x & E_y D_y & E_y D_z \\ E_z D_x & E_z D_y & E_z D_z \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} u & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & u \end{pmatrix} \tag{42}$$

となる．個別のテンソル成分 T_{ij} は，

$$T_{ij} = E_i D_j - u \cdot \delta_{ij} \qquad (43)$$

となる．最後のδはクロネッカーのデルタで，δ $_{ij}$=1(i=j)，δ $_{ij}$=0 (i≠j)を表す．

単位法線ベクトルが$\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$である表面力（応力ベクトル）$\mathbf{T}(\mathbf{n})$の第一成分（x 成分）は，$\mathbf{D} \bullet \mathbf{n} = D_n$の表記を用いて，以下のようになる．

$$T_1(\mathbf{n}) = \sum_{j=1}^{3} T_{1j} \cdot n_j = E_x(D_x \cdot n_x + D_y \cdot n_y + D_z \cdot n_z) - u \cdot n_x$$

$$= E_x \mathbf{D} \bullet \mathbf{n} - u \cdot n_x = D_n E_x - u \cdot n_x$$

同様にして，$\mathbf{T}(\mathbf{n})$の第二成分（y 成分），第三成分（z 成分）は，

$$T_2(\mathbf{n}) = D_n E_y - u \cdot n_y, \qquad T_3(\mathbf{n}) = D_n E_z - u \cdot n_z$$

となる．従って，表面力（応力ベクトル）$\mathbf{T}(\mathbf{n})$は次のように表現できる．

$$\mathbf{T}(\mathbf{n}) = \begin{pmatrix} T_1(\mathbf{n}) \\ T_2(\mathbf{n}) \\ T_3(\mathbf{n}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_n E_x - u \cdot n_x \\ D_n E_y - u \cdot n_y \\ D_n E_z - u \cdot n_z \end{pmatrix} = D_n \cdot \mathbf{E} - u \cdot \mathbf{n} = (\mathbf{D} \bullet \mathbf{n}) \cdot \mathbf{E} - u \cdot \mathbf{n} \qquad (44)$$

この(44)の右辺は，単位法線ベクトルが $\mathbf{n}$ である面に作用する表面力（応力ベクトル）$\mathbf{T}(\mathbf{n})$と電場 $\mathbf{E}$ の関係を明示している．

$\mathbf{E}$ の係数である$\mathbf{D} \bullet \mathbf{n} = D_n$はスカラーで，その面の単位面積当たりを貫く電気

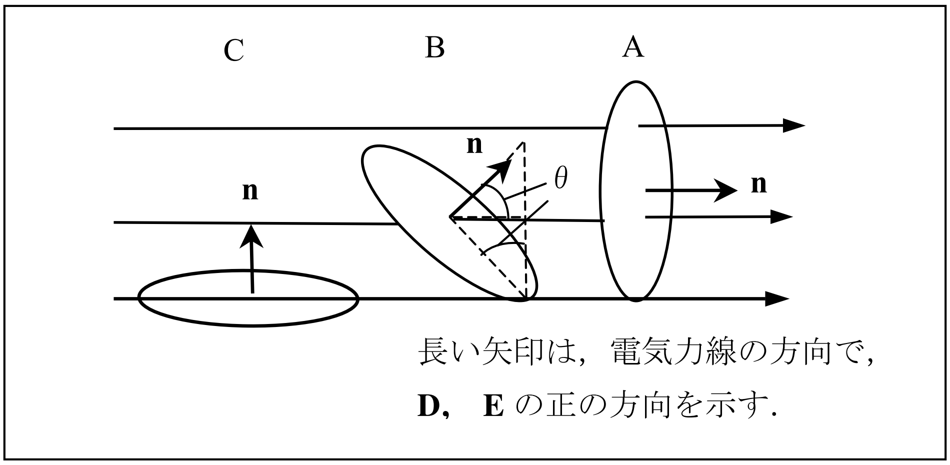

図 15-10．$\mathbf{n}$ で指定される面の単位面積当たりを貫く電気力線の本数は，$\mathbf{D} \bullet \mathbf{n} = D_n = |\mathbf{D}| \cos\theta$である．

力線の本数を表す(図 15-10).　§13-4，14-2 で紹介したように，電束密度 **D** は, 方向は **E** と同じく電気力線の方向で，その大きさは電場の方向に垂直な単位面積当たりを貫く電気力線の本数であると解釈できる（図 15-10 の A）．これは **n** で指定される面の単位法線ベクトルが電気力線に平行な場合である．この場合は，**n** と電場 **E** は平行だから，(44)は,

$$\mathbf{T(n)} = D\mathbf{E} - u\mathbf{n} = (DE - u)\mathbf{n} = \frac{\varepsilon_0}{2}E^2\mathbf{n} \tag{45}$$

となる．面の単位法線ベクトル **n** が電気力線の向きに一致するので，その面に作用する表面力（応力ベクトル）**T(n)** の方向は，**n** および電気力線の向きに一致する．だから，**T(n)** は電場 **E** の方向の張力である（**T(n)** が法線 **n** と反対方向作用する場合は圧力）．一方，面の法線 **n** と電気力線とのなす角度が π である場合, 即ち, **n** が電気力線と反平行（平行だが, 方向が反対）の場合は, $|\mathbf{D}|\cos\theta = -|\mathbf{D}|$ となる．しかし，$\mathbf{D}\bullet\mathbf{n} = D_n$ は **E** の係数であるから，全体としては，$(\mathbf{D}\bullet\mathbf{n})\mathbf{E} = -|\mathbf{D}|\mathbf{E} = DE\mathbf{n}$　となり，負符号は **E** の反対方向の法線ベクトル **n** に吸収され, 表現上は(45)と全く同じになる. 違うのは実質の **n** の向きだけである．(45)は，**n** が電気力線に平行でも反平行でも，電気力線の正負の向きに張力 **T(n)** が作用することを示している．この張力は電気力線自体に作用すると思うのが自然である．

一般の面では，その法線 **n** は電気力線と斜交する（図 15-10 の B）．両者のなす角度を θ とすると，電気力線と角度 θ で斜交する単位面積を貫く電気力線の本数は,

$$\left(\frac{\varepsilon_0}{2}\mathbf{E}\right)\bullet\mathbf{n} = \mathbf{D}\bullet\mathbf{n} = D_n = |\mathbf{D}|\cos\theta \tag{45}$$

となる．B の状態での電気力線の方向に垂直な実効的面積は，A での単位面積の $\cos\theta$ 倍したものである．だから角度 θ で斜交する単位面積を貫く電気力線の本数は $|\mathbf{D}|\cos\theta = D_n$ である．(44)右辺はこれを意味しているが，一般には **E** と **n** は方向が異なるベクトルであるから，法線が **n** である面に作用する **T(n)** は両者のベクトル和である．**T(n)** は **E** と **n** が作る面内にあるが，**E** の向きにも **n** の向きにも一致しない．

また，面の単位法線ベクトル **n** と電気力線が直交すると（図 15-10 の C），この **n** 方向の単位面積を貫く電気力線の本数は 0 となる．(44)右辺の第一項は消え，“静水圧”項のみが残る．

$$\mathbf{T}(\mathbf{n}) = -u\cdot\mathbf{n} = -\frac{1}{2}DE\cdot\mathbf{n} = -\frac{\varepsilon_0}{2}E^2\cdot\mathbf{n} \qquad (46)$$

電気力線に垂直方向では，この“静水圧”のみが作用していると考える．

Maxwell の応力テンソルを（44）で二つに分割した．

$$\mathbf{T}(\mathbf{n}) = \mathbf{T}_1(\mathbf{n}) + \mathbf{T}_2(\mathbf{n}) = (\mathbf{D}\bullet\mathbf{n})\cdot\mathbf{E} - u\cdot\mathbf{n}$$

第二項の $\mathbf{T}_2(\mathbf{n}) = -u\cdot\mathbf{n}$ は“静水圧”に相当すると述べたが，第一項 $\mathbf{T}_1(\mathbf{n}) = (\mathbf{D}\bullet\mathbf{n})\cdot\mathbf{E}$ には何を思い浮かべれば良いだろうか？　面の単位法線ベクトル **n** が電気力線の向きに平行である場合の(45)で考えると，張力の大きさは

$$\mathrm{T}_1 = D\cdot E \qquad (47)$$

である．**n** が電気力線の向きに平行であるから，図 15-10 の A の場合に当たる．(47)の両辺をこの D で割れば，

$$\mathrm{T}_1/D = E$$

となる．電場の強さ E は (T_1/D) に等しい．この場合の D は，“電場の方向に垂直

な単位面積当たりを貫く電気力線の本数”で，張力 T_1 は“単位面積当たりに作用する力”であるから，$(T_1/D)=E$ は“静水圧成分を除いて考えた時の，電気力線一本当たりに作用する張力”と解釈できる．これが電場の強さ E である．“静水圧” $\mathbf{T_2}(\mathbf{n})=-u\cdot\mathbf{n}$ は，電気力線の向きとは無関係に， $\mathbf{n}$ の方向に同じだけ寄与するから，電気力線方向の正味の張力 T は $T=(1/2)D\cdot E$ となる．正味の張力 T を D で割れば， $T/D=(1/2)\cdot E$ である．静水圧成分は $T_2=-u=-(1/2)DE$ から，電気力線一本当たり $T_2/D=-(1/2)E$ の大きさの圧力である．

一方，真空の静電場の単位体積当たりのエネルギー $u=(\varepsilon_0/2)E^2=(1/2)\mathbf{E}\bullet\mathbf{D}$ $=(1/2)DE$ についても，両辺を D で割れば，

$$u/D=(1/2)E \tag{48}$$

となる．D は“電場の方向に垂直な単位面積当たりを貫く電気力線の本数”であるから．$u/D=(1/2)E$ は“電気力線の単位長さ当たりに蓄積される静電場のエネルギー”との意味を持つ．以上の考え方は，今井　功氏が提唱した「電磁気学の基本則」になっている[22, 27, 27]．　今井氏は，静電場の電気力線のモデルとしては，「気体中で張力 E が作用する“質量の無い糸”」，即ち，「気体中の糸」を思い浮かべれば良いと述べている（図 15−11）．

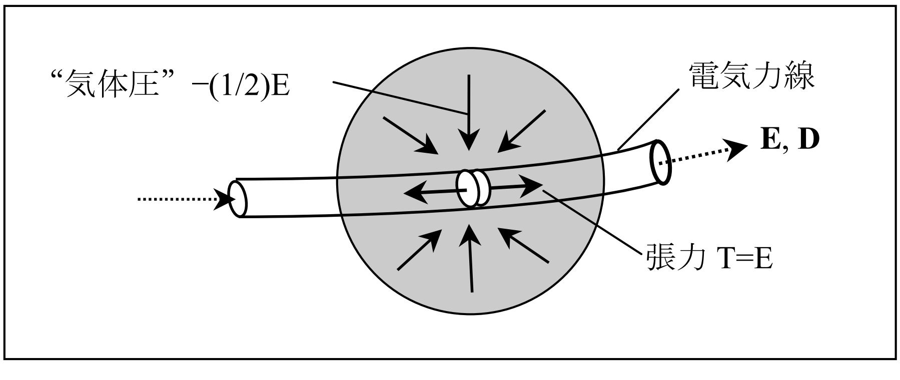

図 15-11．今井[22, 27, 27]による電気力線の「気体中の糸」モデル

９） Maxwell 応力と電磁気学の基本法則

前節での Maxwell 応力の議論を反省も込めて振り返ってみよう．空間の電荷としての(ρ dV)が静電場 **E** から受ける力 **F** は，

$$\mathbf{F} = \int_V \rho \mathbf{E} dV \tag{27}$$

であるから，微分形のガウスの法則 $div\mathbf{E}(\mathbf{x}) = (1/\varepsilon_0)\rho(\mathbf{x})$ を用いて ρ (**x**)を消去し

$$\mathbf{F} = \varepsilon_0 \int_V \mathbf{E}\ \mathrm{div}\mathbf{E}\ dV \tag{28}$$

として，この(28)を議論の前提にした．そして，(28)の **F** が連続体の“表面力（応力ベクトル）のようなもの”の表面積分で表現できるなら，

$$\mathbf{F} = \int_S \mathbf{T}(\mathbf{n})\ d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{T} \bullet \mathbf{n}\ dS \tag{29}$$

であろうと考えた． (29)を成分毎に考えて，$\mathbf{F}_\mathrm{i}$ と $\mathbf{T_i}(\mathbf{n})$に対応する応力テンソル **T** の i 行成分全体を一つのベクトル $\mathbf{T_i}$ とすれば，発散定理を使って，

$$\mathbf{F}_i = \int_S \mathbf{T_i}(\mathbf{n}) dS = \int_S \mathbf{T_i} \bullet \mathbf{n}\ dS = \int_V div\mathbf{T_i} dV \tag{30}$$

である． この(30)より，$div\mathbf{T}_i = (\varepsilon_0 \mathbf{E} div\mathbf{E})_i$ を満足するテンソル成分 T_{ij} を Maxwell 応力成分として求めた．その結果は,

$$T_{ij} = E_i D_j - u \cdot \delta_{ij} \tag{43}$$

となったのである．

Maxwell 応力を求める前に，(27)に関する疑問を述べた．電場を定義するには何らかの電荷をその場に持ち込まねばならない．電荷密度 ρ を文字通り，電荷がそこにあると考えるのではなく，今井[22，26，27]が指摘しているように，$div\mathbf{D}(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x})$ は電気力線の密度と理解すべきではないかとの問題である．今井功氏[22]は，(43)の $T_{ij} = E_i D_j - u \cdot \delta_{ij}$ を前提にすると，(30)の最後の等式から(27)

が導出できることを示している．これを以下で確認してみよう．

$$divT_i = \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}(E_iD_j - u\cdot\delta_{ij}) = \sum_{j=1}^{3}(E_i\frac{\partial D_j}{\partial x_j} + \frac{\partial E_i}{\partial x_j}D_j) - \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad (49)$$

最後の項は,

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{\varepsilon_0}{2}E^2) = \frac{\varepsilon_0}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}(\sum_{j=1}^{3}E_j^2) = \sum_{j=1}^{3}\varepsilon_0 E_j(\frac{\partial E_j}{\partial x_i}) = \sum_{j=1}^{3}D_j(\frac{\partial E_j}{\partial x_i}) \quad (50)$$

であるので，(49)は

$$divT_i = \sum_{j=1}^{3}(E_i\frac{\partial D_j}{\partial x_j} + \frac{\partial E_i}{\partial x_j}D_j - D_j\frac{\partial E_j}{\partial x_i}) = \sum_{j=1}^{3}[E_i\frac{\partial D_j}{\partial x_j} + D_j(\frac{\partial E_i}{\partial x_j} - \frac{\partial E_j}{\partial x_i})]$$
$$= E_i\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial D_j}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^{3}D_j(\frac{\partial E_i}{\partial x_j} - \frac{\partial E_j}{\partial x_i}) \quad (51)$$

となる． 第二項の $(\frac{\partial E_i}{\partial x_j} - \frac{\partial E_j}{\partial x_i})$ では，j=i の項は消える． **j≠i** の残り二つは

$$\sum_{j=1(j\neq i)}^{3}D_j(\frac{\partial E_i}{\partial x_j} - \frac{\partial E_j}{\partial x_i}) = \{(rot\mathbf{E})\times\mathbf{D}\}_{\mathrm{i}}$$

と，**E** の回転と **D** のベクトル積の i 成分となる． 静電場では $rot\mathbf{E} = \mathbf{0}$ であるので，(51)の第二項項は全て消える．残りは第一項のみで，ガウスの法則 $div\mathbf{D}(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x})$ を使い

$$divT_i = E_i\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial D_j}{\partial x_j} = E_i div\mathbf{D} = E_i\cdot\rho \quad (52)$$

となる．この結果を(30)の最後の等式に代入すれば，確かに

$$\mathbf{F} = \int_V \rho\mathbf{E}dV \quad (27)$$

となり，(43)の $T_{ij} = E_iD_j - u\cdot\delta_{ij}$ から(27)が得られる．結局，発散定理から，

$$\mathbf{F_i} = \int_V \rho\mathbf{E_i}dV = \int_S \mathbf{T_i}(\mathbf{n})\,d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{T_i}\bullet\mathbf{n}\,dS = \int_V div\mathbf{T_i}dV \quad (53)$$

と書き換えて，$\rho\mathbf{E}_i \leftrightarrow div\mathbf{T}_i$ で一方から他方が導けることを確認したことになる．連続体力学での“運動量の獲得（流入）率”を表現するテンソル成分

$T_{ij} = E_i D_j - u \cdot \delta_{ij}$ を用いて,“静電場で電荷に作用する力”を表現したことになる.前節で議論したように,このテンソル成分自体の意味は,電気力線の力学的描像(“気体中の糸”モデル)から明確になったと思う.ただし,今のところ,これらの結果は連続体力学からの類推(アナロジー)でしかない.連続体での運動量保存則(一般的な運動方程式),

$$\frac{D}{Dt}[\int_{B(t)}(\rho\mathbf{v})d\mathrm{V}] = \int_{B}\rho\mathbf{K}d\mathrm{V} + \int_{S}\mathbf{T}(\mathbf{n})dS \qquad (14)$$

に対応するものはまだ提示されていないからである.

我々は,§2-2-(3)で,通常の電磁気学テキストと同じように,クーロン則から

$$\mathbf{E}(\vec{r}) = \lim_{q\to 0}(\mathbf{F}/q) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}. \qquad §2\text{-}2\text{-}(3)$$

として電荷に作用する力により電場を定義し,その後の議論を進めてきた.定義だからそれを受け入れるのは良いであろう.また,電荷の存在を承認し,「電荷とは何ですか?」とは問わない立場を取った.実在する電荷の承認は当然と考えたからである.しかしながら,電場を二つの Q と q の電荷間に作用する遠隔力(クーロン力)で定義したことを不問にしたまま,「Maxwell の応力テンソルは遠隔作用の考えを近接力作用のそれに転換させるものである」と言われても,やはり納得できない気分が残る.多分,(43)の $T_{ij} = E_i D_j - u \cdot \delta_{ij}$ から(27)が導出きることを確認した段階で,「やっと霧が晴れるのかな?」と感じるのは私だけではないことと思う.

以上の Maxwell 応力テンソルの議論は,結果的には,大変教訓的なものとなった.「電気力線は気体中の糸」との物理モデルを導く今井　功氏提唱の基本法則[22,26,27]は,従来の考え方に比べ明解である.しかし,まだ磁場の議論を

全くやっていない．アンペールの力，ローレンツの力，ビオ・サバールの法則，ファラディーの電磁誘導の法則，Maxwell 方程式について何も述べていない．しかしながら，“電荷”に対応するべき“磁荷”は実在しないものの，電場と磁場には次のような明瞭な対応関係があることを予め知っておくことは意味がある．

電気力線　→　磁力線

電場の強さ **E**　→　磁場の強さ **H**,

電束密度 **D**　→　磁束密度 **B**,

真空の誘電率ε_0　→　真空の透磁率μ_0

と置き換えるだけで良い．　今井　功氏提唱の基本法則[22, 26, 27]を採用すれば，上記の諸法則のみならず Maxwell 方程式も簡単に導出できる．基本法則には, 電磁運動量を表す Maxwell 応力と電磁場のエネルギーの流れを表す Poynting ベクトル（**S**）が含まれているので，これら，特に Maxwell 応力の意味をどの程度理解して受け入れるかが実際は問題となる．しかし，これらを一旦了解してしまえば，その基本法則の内容は簡素で単純明解である．

この章では，連続体力学に遡って Maxwell 応力の意味を考えた．今井氏の電磁気学の基本法則に現れる Maxwell 応力の意味を了解するには，これが必要と判断したからである．少なくとも，筆者のように普段は連続体力学とのつき合いがない者にとってはそうである．従来の考え方を「各駅停車列車」とすれば，今井　功氏提唱の基本法則の採用は「電磁気学行きの列車」の超特急である．この列車から眺める「電磁気学」村の風景も，従来の「霧に包まれたもの」とは違ったものに見える．「電磁気学を眺望するには， Maxwell 方程式が必要不可欠」との従来の観念から解放されるからであろう．一読を勧めたい．ただし，

時間があれば「各駅停車列車」も十分に楽しむことが出来る．これは「超特急」では得られないものである．「電流と磁場」についての以後の議論では，従来の考え方[4,6,7,8,10]に従って歩を進めることとする．