§１７　定常電流の性質

ボルダ(Volda, A., 1745-1827)は，1800 年，亜鉛と銀のような異種金属を硫酸溶液に浸すと，両金属の間に持続的な電流が生じることを発見する．この化学電池の発明により，持続的電流を用いた実験が可能になった．19 世紀における電磁気学や電気化学の発展を促す礎となった．化学電池については§9，10 で議論した．ここでは，定常電流の与える磁場の問題を考える前に，定常電流の性質と関連事項を記す.

１）定常電流と電荷保存則

電流（の強さ）は単位時間内に流れる電荷の量で定義され，MKSA 有理単位系（SI 国際単位単位系）では，電流（の強さ）の単位はアンペア(A)である．単位の電荷（１クーロン，C）は 1A の電流が 1 秒間に運ぶ電荷量として定義されている．単位面積を通過する電流の強さは「電流密度(current density)」で，この値の空間分布が時間変動せず一定である時，これを定常電流と呼ぶ.

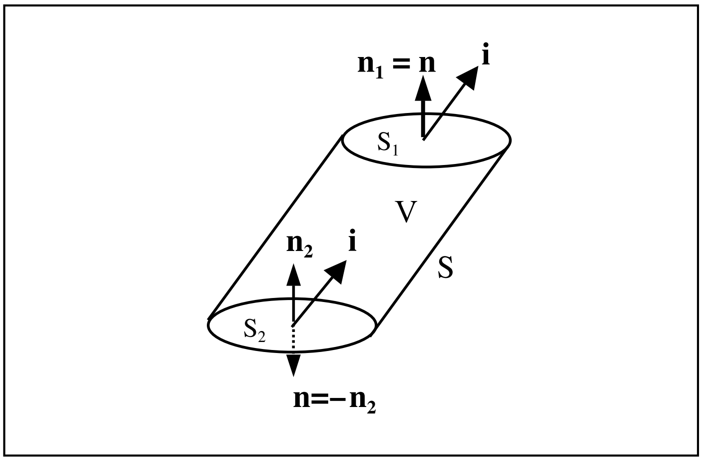

図 17-1. 断面 S_1 からの流出，S_2 からの流入だけを考えて，定常電流の保存則を考える.

定常電流の保存則は，図 17-1 を参照して考える．位置 x における電流密度を $\mathbf{i}(\mathbf{x})$ とし，その位置での微小面積 dS を単位時間内に通過する電荷量は，

$$\mathbf{i}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{n}(\mathbf{x})dS$$

である．ただし，$\mathbf{n}(\mathbf{x})$ は dS の単位法線ベクトルである．図 17-1 では，電流は V の断面 S_2 のみから流入し，断面 S_1 からのみ流出するとする． 両断面以外の周囲の断面では出入りはないものと仮定する．従って，定常電流の保存則は，

$$\int_{S_1}\mathbf{i}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{n_1}(\mathbf{x})dS=\int_{S_2}\mathbf{i}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{n_2}(\mathbf{x})dS \qquad (1)$$

であり，出入りが釣り合っていることを表す．体積 V の表面に考える単位法線ベクトルは常に外側に取るから，このように定義した表面の単位法線ベクトル $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ を用いると， $\mathbf{n_1}(\mathbf{x})=\mathbf{n}(\mathbf{x})$，$\mathbf{-n_2}(\mathbf{x})=\mathbf{n}(\mathbf{x})$，であるから，

$$\int_{S_1}\mathbf{i}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{n_1}(\mathbf{x})dS-\int_{S_2}\mathbf{i}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{n_2}(\mathbf{x})dS=0$$

これは，体積 V の表面 S に関する積分となる．S_1 と S_2 以外では，$\mathbf{i}(\mathbf{x})=0$ としているので，

$$\int_{S}\mathbf{i}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{n}(\mathbf{x})dS=0 \qquad (2)$$

となる．これは表面 S を通って流出する正味の電荷は 0 であることを表す．これを発散定理から体積積分に直すと，

$$\int_{S}\mathbf{i}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{n}(\mathbf{x})dS=\int_{V}div\,\mathbf{i}(\mathbf{x})dV=0 \qquad (3)$$

であるから，

$$div\,\mathbf{i}(\mathbf{x})=0 \qquad (4)$$

これが微分形での定常電流の保存則である．電流は限りなく細い導線も流れる

が，面や体積内を流れることもあるので，一般的には，電流密度$\mathbf{i}(\mathbf{x})$を用いて表現する．

２）オームの法則と電気伝導度

オームの法則は§10 で述べたが，一般に均質な導線の電気抵抗(R)は長さ(l)に比例し，断面積(S)に反比例する．

$$R = \rho \frac{l}{S} \tag{5}$$

ρは抵抗率と呼ばれる比例定数で，物質の種類や温度，圧力などの測定条件に依存する．抵抗率ρの逆数が電気伝導度(σ)である．

オームの法則は，電流を I(A)，両端での電位差をΔφ(V)とすると，$\Delta\phi = RI$であるから，R はオーム（Ω）を単位として，

$$R = \Delta\phi / I = \rho \frac{l}{S} = \frac{l}{\sigma \cdot S}$$

となる．これより，$\Delta\phi / I = l/(\sigma \cdot S)$ となるので，書き直せば，

$$\frac{I}{S} = \sigma \frac{\Delta\phi}{l} \tag{6}$$

となり，これは

$$i = \sigma \cdot E \tag{7}$$

を意味する．金属導体の電気伝導度(σ)は $10^7\ (\Omega^{-1}\mathrm{m}^{-1})$ であるが，絶縁体の石英(SiO_2)では，そのσは $10^{-15}(\Omega^{-1}\mathrm{m}^{-1})$と全く小さい．

この(7)式は均質な導線，一様な電場を前提にして得られたが，電流密度と電場が場所によって異なる場合にも拡張して，

$$\mathbf{i}(\mathbf{x}) = \sigma \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}) \tag{8}$$

局所的なオームの法則として用いることが出来る．一般に固体結晶では電気伝導度(σ)はスカラーではなく，テンソルとなる．また，電流と電場の比例関係が近似的に成り立つのは電場が小さい時に限られる．

３）導体の電気伝導機構とジュール熱

金属における高い電気伝導度は，金属の伝導電子（自由電子）が担っていることは§８で述べた．電場Ｅのもとで，負電荷（−ｅ）をもつ電子は，

$$m_e \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -e\mathbf{E} \qquad (9)$$

の加速度をもつので，時間が経過すればいつまでも速度 $\mathbf{v}$ は増大し，定常的な速度，定常的な電流とはならない．しかし，現実には定常電流は得られるので，(9)の右辺には速度 $\mathbf{v}$ を一定にする項が実際には存在すると思われる．物体の落下運動でも，物体の速度はどこまでも等加速度運動を続け，速度が増大するわけではなく，周囲の媒体と運動物体の摩擦抵抗によって，落下運動速度が一定に近づくことが知られている(終端速度)．　(9)の右辺にも速度に比例する抵抗力を加えれば，

$$m_e \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -e\mathbf{E} - \alpha \cdot \mathbf{v} \qquad (10)$$

となる．電場に依る力と摩擦抵抗が釣り合えば，加速されず速度は一定になる．そのときの電子の速度は，

$$m_e \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -e\mathbf{E} - \alpha \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0} \qquad (11)$$

から，

$$\mathbf{v} = -\frac{e}{\alpha}\mathbf{E} \tag{12}$$

となる．

電子の数密度を n とすると，電流密度 **i** と電子の速度 **v** の関係は，

$$\mathbf{i}(\mathbf{x}) = -e \cdot n \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \tag{13}$$

であるので，(12)と(13)から，

$$\mathbf{i}(\mathbf{x}) = \frac{ne^2}{\alpha} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}) \tag{14}$$

である．この結果は，(8)のオームの法則に対応していることが判る．故に，電気伝導度は，

$$\sigma = \frac{ne^2}{\alpha} = \frac{ne^2}{(m_e/\boldsymbol{\tau})} = \frac{ne^2\boldsymbol{\tau}}{m_e} \tag{15}$$

となる．(10)から α は [質量/時間]の次元を持つことが判るから，τ を時間のパラメーターとして，$\alpha = m_e/\boldsymbol{\tau}$ と置かれている．τ は電子が原子に衝突する平均の時間間隔の意味をもつ．

この描像からすると，電場は電子に $-e\mathbf{E}$ の力を与え，電子を Δt の間に vΔt の距離だけ移動させている．従って，電場は（$-e\mathbf{E}\cdot\mathbf{v}\Delta\mathbf{t}$）の仕事を電子にしていることになる．

$$\Delta w = -e\mathbf{E}\cdot\mathbf{v}\Delta\mathbf{t} \tag{16}$$

しかし，電子の運動エネルギーは一定であるかから，電場の仕事（Δw）は全て熱エネルギー（“摩擦熱”）になっている．単位時間内に発生する熱は，

$$J = n\cdot\Delta w/\Delta\mathbf{t} = -ne\mathbf{E}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{i}\cdot\mathbf{E} \tag{17}$$

となる．これは，(8)　を使うと，

$$J = \mathbf{i}\cdot\mathbf{E} = \sigma\cdot|\mathbf{E}|^2 = \frac{1}{\sigma}|i|^2 \tag{18}$$

であり，電流が流れることによって不可避的に発生するジュール熱を表す．

４）起電力を含む回路でのオームの法則

閉曲線回路 C に定常電流密度 **i** で電流が流れている場合（図 17−2），(8)式の局所的オームの法則を，次のように形で閉曲線回路 C について線積分すると，

$$\int_C (1/\sigma)\mathbf{i}(\mathbf{x})\cdot d\mathbf{x} = \int_C \mathbf{E}(\mathbf{x})\cdot d\mathbf{x} = -\int_C \phi(\mathbf{x})\cdot d\mathbf{x} = 0 \tag{19}$$

これは明らかに”おかしいな”結果である．その理由は，電流の原因になる電池の起電力，外部電源のことを全く無視しているからである．

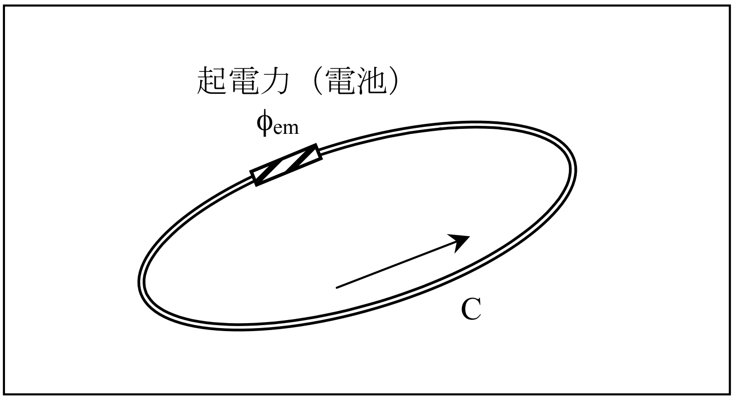

図 17−2．起電力を含む閉回路でのオームの法則

起電力に当るものが回路のどこかに存在しない限り，電流は流れない．起電力が存在する場合は，(8)ではなく，

$$\mathbf{i}(\mathbf{x}) = \sigma[\mathbf{E}(\mathbf{x}) + \mathbf{E}_{ex}(\mathbf{x})] \tag{20}$$

が適切な表現となる．$\mathbf{E}_{\mathrm{ex}}(\mathbf{x})$ は非保存力に依る電池内の電場に相当し，電池であ

れば，保存力では説明できない電極反応の進行に依る． (19)は保存力の閉曲線 C に関する線積分であるから０とした．しかし，電池の内部での電流の積分は０にはならない．(20)を使って再度(19)の閉曲線の積分をやってみる時,

$$\int_C (1/\sigma)\mathbf{i}(\mathbf{x})\cdot d\mathbf{x} = \int_C [\mathbf{E}(\mathbf{x}) + \mathbf{E_{ex}}(\mathbf{x})]\cdot d\mathbf{x}$$

$$= -\int_C \phi(\mathbf{x})\cdot d\mathbf{x} + \int_C \mathbf{E}_{ex}(\mathbf{x})\cdot d\mathbf{x} = \int_C \mathbf{E}_{ex}(\mathbf{x})\cdot d\mathbf{x} \qquad (21)$$

と考えねばならない．(21)右辺を起電力（electromotive force）として

$$\phi_{em} \equiv \int_C \mathbf{E}_{ex}(\mathbf{x})\cdot d\mathbf{x} \qquad (22)$$

定義する．可逆電池の起電力については§9, 10 で詳しく論じたが，ここでは定常電流を前提にしているので，可逆過程とは見なせない．

導線の断面積を S，定常電流の保存則 (1)~(7)からすると，(21)は，

$$I\cdot\int_C \frac{dx}{\sigma\cdot S(x)} = \phi_{em} \qquad (23)$$

左辺の積分は回路の全抵抗を表現している．導線回路の全抵抗を R，電池内部の抵抗を r とすると，(23)は

$$I\cdot(R+r) = \phi_{em} \qquad (24)$$

となる．これが起電力も含む回路のオームの法則である．

５）キルヒホッフの法則

回路が簡単な場合は，定常電流がどうなるかはオームの法則から求めることができる. しかし, 回路が分岐する複雑な回路で定常電流はどうなるのか？ この決定法の一般的法則を，1849 年，キルヒホッフ(Kirchihoff, G., 1824~1887) が

明らかにした．**キルヒホッフの法則**と呼ばれる．

１）回路の任意の分岐点において，その点に流入する電流を正，流出する電流を負とすると，これらの電流の代数和は０である．

$$\sum_k I_k = 0 \tag{25}$$

２）回路内の任意の閉回路に電流の向きを指定し，この向きの電流を正，反対向きの電流は負とする．このとき，起電力は正の向きに電流を流す場合は正の起電力とし，反対向きに流す場合は負とする．このように正負を決めておくと，この閉回路における起電力の代数和は，その閉回路における電圧降下R・Iの代数和に等しい．即ち，

$$\sum_k (\phi_{em})_k = \sum_k R_k \cdot I_k \tag{26}$$

この二つの規則に基づけばどのような複雑な回路の定常電流も決めることができる．

キルヒホッフの定理を使う一例として，ブリッジ回路を用いて抵抗値を精密に決める問題を考える．

四つの抵抗（R１，R２，R３，R４）と検流計 G，電池（φ）を図 17−3 のようの配置する．抵抗（R１，R２）の抵抗値は既知とする．抵抗（R３）は可変抵抗で，この値は，BC 間に電流が流れないことを G で確認して値を決める．この条件から，既知抵抗値（R１，R２，R３）から R４の未知抵抗値の値が，キルヒホッフの定理を使うことで決めることが出来る．

B と C は等電位になるようにR３が調整されている．二つの閉回路，ABC と BCD にキルヒホッフの定理(2)を適用する．B と C は等電位になるようにR３の

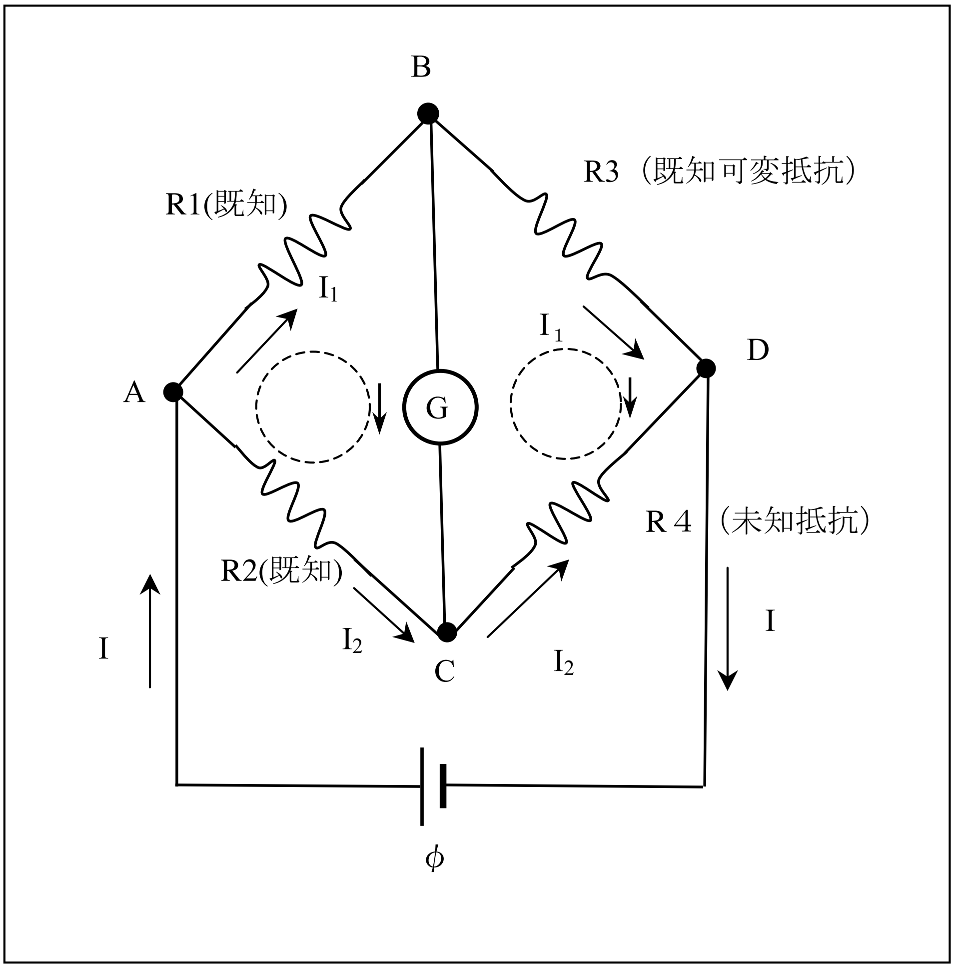

図 17-3. ブリッジ回路を用いて未知抵抗Ｒ４の値を精密に決める．既知抵抗（Ｒ１，Ｒ２）と可変抵抗（Ｒ３）から，検流計 G に電流が流れないようにＲ３を決める．

値が調整されているので，

$$R1\cdot I_1 - R2\cdot I_2 = 0, \qquad R3\cdot I_1 - R4\cdot I_2 = 0 \tag{27}$$

となる．これから，$R1/R2 = I_2/I_1 = R3/R4$ となるから，

$$R4 = (\frac{R2}{R1})\cdot R3 \tag{28}$$

右辺は既知抵抗値であるから，これだけで未知抵抗の値が決まる．

各電流は，ABD の電圧降下と起電力値から，

$$\phi_{em} = (R1 + R3)I_1 \tag{29}$$

これより，

$$I_1 = \phi_{em} / (R1 + R3) \tag{30}$$

キルヒホッフの定理(1)から，

$$I = I_1 + I_2 \tag{31}$$

(27)より， $R1/R2 = I_2/I_1$ であるから，

$$I_2 = I_1 \cdot \frac{R1}{R2} = \frac{\phi_{em}}{(R1 + R3)} \cdot \frac{R1}{R2} \tag{32}$$

(31)と(32)から，

$$\begin{aligned} I = I_1 + I_2 &= \frac{\phi_{em}}{R1 + R3} + \frac{\phi_{em}}{R1 + R3} \cdot \frac{R1}{R2} \\ &= (\frac{1}{R1 + R3}) \cdot (1 + \frac{R1}{R2}) \cdot \phi_{em} \end{aligned}$$

である．