

§ 18 定常電流と静磁場 (1)

導線を流れる定常電流は周囲に静磁場を作り、静磁場のもとに置かれた他の定常電流の導線には力が作用する。電荷に当たる“磁荷”は存在しないので、定常電流の導線間の相互作用の力が静磁場を考える起点となる。電荷間のクーロン力との比較もできる。

1) 導線電流に働く力と電流単位の定義

1800年にイタリアのボルダ(Volta, A., 1745-1827)が化学電池を発明した。これにより持続的電流を用いた実験がなされるようになる。1820年、電流には磁気作用があることをデンマークのエルステッド(Oersted, H. C., 1777-1855)が学生実験の中で偶然発見する。これは図 18-1 に示すように、南から北に流れる導線電流を磁針の上に近づけると、磁針の N 極は西を向こうとする。一方、この導線を 90 度回転させ、電流が西から東に流れる場合はこのような動きはない。導線電流には磁化作用が伴っている。このニュースは、当時のヨーロッパの人々

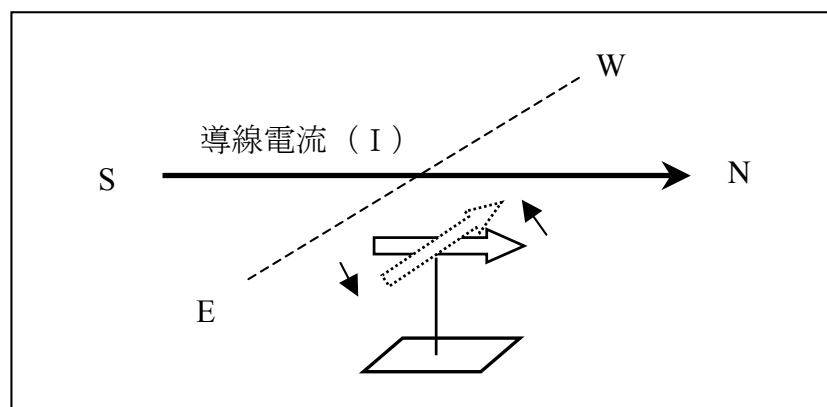


図 18-1. 南から北に流れる導線電流を磁針の上から近づけると、磁針の N 極は西を向こうとする。

に直ぐに伝わる。そして、フランスのアンペール(Ampere, A. M., 1775-1855)は導

線電流間に働く力を詳しく調べ、平行な定常導線電流には引力、向きが反対の反平行な定常導線電流には反発力、が作用することを発見した (図 18-2). さらに、導線間の距離を R , 定常導線電流を I_1, I_2 とすると、その導線電流の単位長さあたりに作用する力の大きさを F とすると、 F は電流の積($I_1 \cdot I_2$)に比例し、距離 R に反比例することが判った.

$$F = k \frac{I_1 \cdot I_2}{R} \quad (1)$$

k は比例定数である. この式は、電荷間に作用するクーロン力とは異なる.

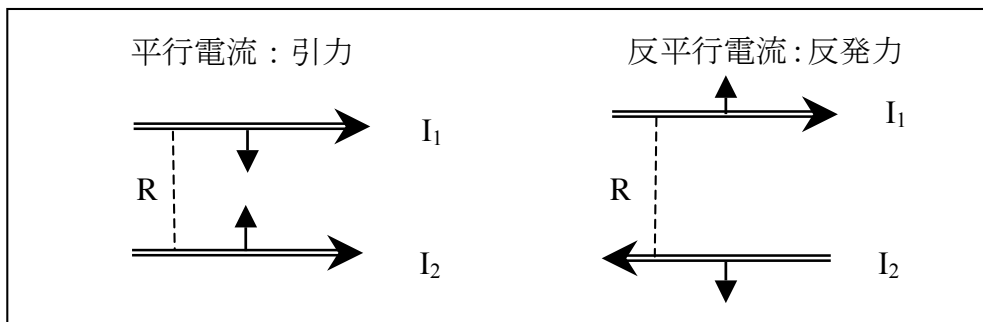


図 18-2. 平行な導線電流には引力, 反平行な導線電流には反発力が作用する.

既に § 1-3 で述べたように、MKSA 有理単位系 (SI 国際単位系) では、電流の単位をアンペールに因んで 1 A を(1)によって定義している. $R = 1 \text{ m}$, $I_1 = I_2 = 1 \text{ A}$ である時、導線電流の単位長さあたりに作用する力の大きさ F は

$$F = 2 \times 10^{-7} (\text{N/m}) \quad (2)$$

と定義して 1A を定義する. (1)と比べると比例係数 k は、 $k = 2 \times 10^{-7} (\text{N/A}^2)$ となる. しかし、MKS 有理単位系 (SI 国際単位系) では、(1)式自体を k ではなく、 $k = (\mu_0 / 2\pi)$ を用いて、

$$F = \left(\frac{\mu_0}{2\pi}\right) \cdot \frac{I_1 \cdot I_2}{R} \quad (3)$$

と表現し、 μ_0 を比例係数として採用する。 μ_0 は「真空の透磁率」と呼ばれる。

$$\mu_0 = 2\pi k = 4\pi \times 10^{-7} (N/A^2) \quad (4)$$

である。

2) 磁場と磁束密度

アンペールは、(1)式の定常電流の導線の間作用する単位長さ当たりの力 F を遠隔力で理解しようとしたが、電場と同様に近接力で考えるべきであるので、ここでは、電流 I_2 が電流 I_1 の導線付近の空間を「歪ませる“磁場”」を作り出していると考え、(3)式の F を次のように電流 I_1 と B の二つに分けて考える。

$$F = I_1 \cdot B \quad (5)$$

$$B = \left(\frac{\mu_0}{2\pi}\right) \cdot \frac{I_2}{R} \quad (6)$$

ここで B は、「磁束密度」とよばれるもので、「電場の強さ」 E と対になっている「電束密度」 D に対応する。「磁場の強さ」は後に H で表現することになる。真空空間では、「磁束密度 B 」と「磁場の強さ H 」は、共にベクトル量として

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \quad (7)$$

と定義される。これは「電束密度 D 」と「電場の強さ E 」の関係 $D = \epsilon_0 E$ に対応する。しばらくは「磁場の強さ H 」は使用しないで、「磁束密度 B 」だけを使う。

MKSA 有理単位系 (SI 単位系) では、(5)で 1A の電流に対し、単位長さの導線電流に対して 1N の力を与える「磁束密度」をその単位として使用する。故

に、「磁束密度 \mathbf{B} 」の次元は

$$1 \text{ N/A/m} = 1 \text{ テスラ (tesla, T)} \quad (8)$$

で、その単位はテスラと呼ばれる。地球磁場による磁束密度の大きさをテスラ単位で表すと、中緯度の我が国では約 $(3\sim 4) \times 10^{-5} \text{ T}$ 程度となる。クロアチア出身で米国の電気工学者であった Tesla, Nikola (1857~1943)に由来する単位名である。彼は、直流電流ではなく交流電流の重要性をいち早く指摘した人物である。

3) 静磁場の下で導線電流に作用する力（アンペールの力）

磁石の N 極と S 極を接近させて、平行な静磁場（磁力線の向きは N 極から S 極に向かう）を作ることができる（図 18-3）。この中に定常電流(\mathbf{I})を流した導線を置き、導線の長さ Δs に作用する力 ($\Delta \mathbf{F}$) の大きさと向きを測ることができる。この実験によると、 $\Delta \mathbf{F}$ の向きは、常に、 \mathbf{B} と \mathbf{I} が作る面に垂直で、 $\Delta \mathbf{F}$

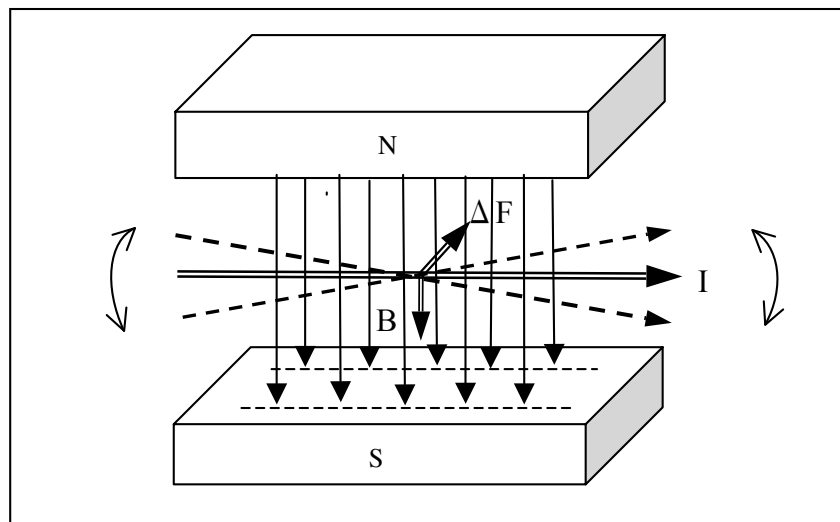


図 18-3. 磁束密度 \mathbf{B} の静磁場の内部に、定常電流(\mathbf{I})の導線を置いた時に、その導線の長さ Δs に作用する力。

の大きさは、図 17-3 に示すように、 \mathbf{B} と \mathbf{I} が相互に垂直である場合が最大とな

る。この時、 \mathbf{I} , \mathbf{B} , $\Delta \mathbf{F}$ の向きは、右手系直交座標系の x , y , z 軸のそれぞれに対応している。 $\Delta \mathbf{F}$ の向きと大きさは、ベクトルの外積を用いて次のように与えられる。

$$\Delta \mathbf{F}(\mathbf{s}) = (I \cdot \Delta \mathbf{s}) \times \mathbf{B}(\mathbf{s}) \quad (9)$$

\mathbf{s} は導線上の位置を表し、 $\Delta \mathbf{s}$ は位置 \mathbf{s} における導線の微小部分を表す。また $\Delta \mathbf{s}$ の向きは電流 \mathbf{I} の方向に取る。単位長さ当たりの力は $|\Delta \mathbf{F}|/|\Delta \mathbf{s}|$ となる。 \mathbf{B} と \mathbf{I} がなす平面内で、両者の角度が θ であれば(図 17-4),

$$|\Delta \mathbf{F}(\mathbf{s})| = |(I \cdot \Delta \mathbf{s}) \times \mathbf{B}(\mathbf{s})| = (I \cdot \Delta \mathbf{s}) B(\mathbf{s}) \cdot \sin \theta$$

である。(9)はアンペールの力と呼ばれる。

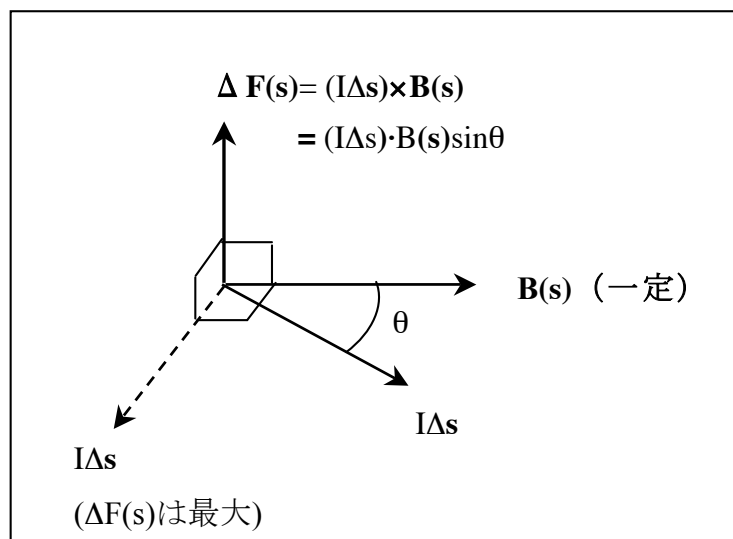


図 18-4. 磁束密度 \mathbf{B} の静磁場の内部に、定常電流(\mathbf{I})の導線を置いた時に、その導線の長さ $\Delta \mathbf{s}$ に作用する力 (アンペールの力) は、 $\Delta \mathbf{F}(\mathbf{s}) = (I\Delta \mathbf{s}) \times \mathbf{B}(\mathbf{s}) = (I\Delta \mathbf{s}) \cdot B(\mathbf{s}) \sin \theta$ で、 $\theta=90^\circ$ の時、その力は最大値 $(I\Delta \mathbf{s}) \cdot B(\mathbf{s})$. $\theta=270^\circ$ の時、最小値 $-(I\Delta \mathbf{s}) \cdot B(\mathbf{s})$. $\theta=0$ 及び 180° の時は 0 である。

4) 一様静磁場の下に置かれた正方回路に働く回転力

一様な静磁場 \mathbf{B} のもとに、一定電流 I が流れている一辺の長さ a の正方回路が置かれると、その正方回路に回転力が作用する (図 18-5).

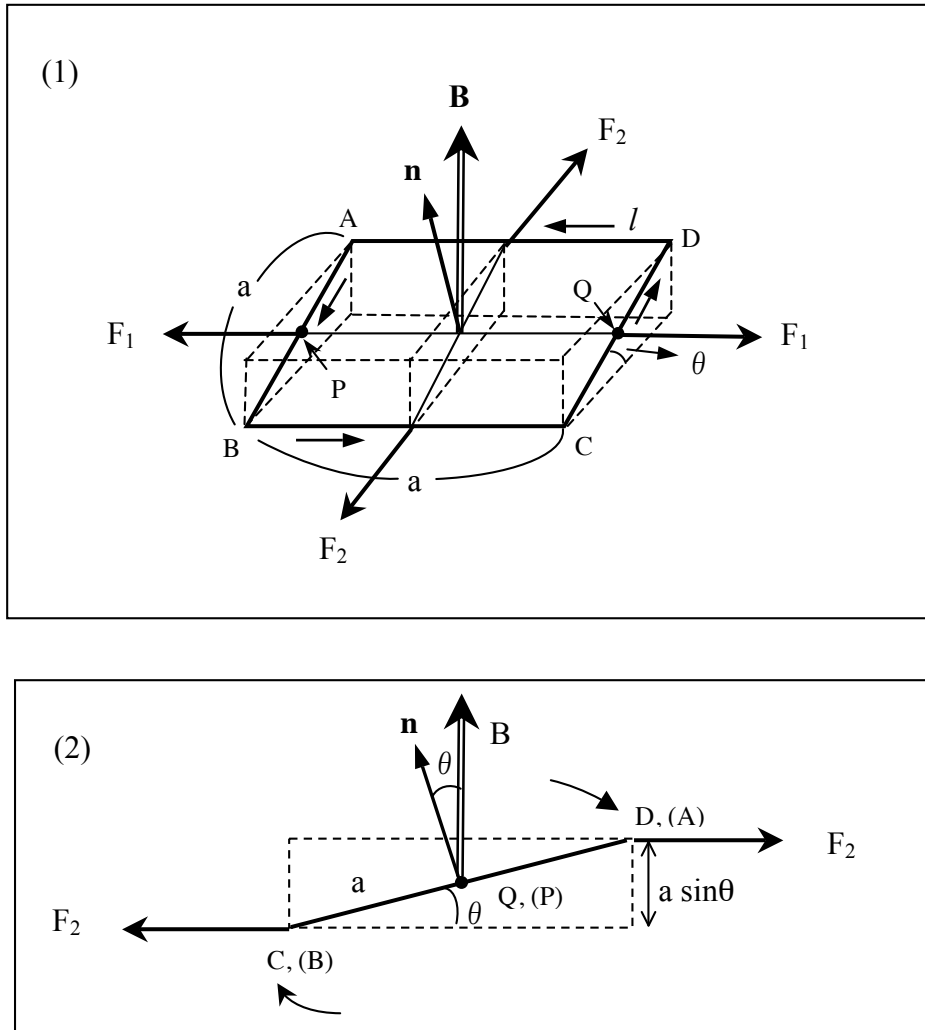


図 18-5. 一様静磁場 \mathbf{B} の下に置かれた定常電流 I が流れる正方回路には回転力が働く. P, Q に作用する F_1 は向きが反対で、同一作用線 (PQ) 上にありつり合う(1). しかし、 DA と BC に働く F_1 は、同一作用線上にはなく(2), 偶力となり回転力を与える. 右回りで回転を考えるから、回転の軸は Q から P に向かう(2). \mathbf{n} は正方回路の面に対する単位法線ベクトル.

ABの部分には、 $F_1 = Ia \cdot B \cdot \sin(\theta + \pi/2) = Ia \cdot B \cdot \cos\theta$ の力が外向きに作用し、CDの部分に作用する力は、 $Ia \cdot B \cdot \sin(\theta - \pi/2) = -Ia \cdot B \cdot \cos\theta = -F_1$ である。同じ大きさの力 F_1 が反対方向に作用している。この二つの力は同一直線 PQ に沿っているので釣り合い、両者の合力は 0 である。一方、DA に働く力は $F_2 = Ia \cdot B \cdot \sin(\pi/2) = Ia \cdot B$ である。BC 部分に作用する力は、DA に働く力と同じ大きさで、向きが反対である。 $Ia \cdot B \cdot \sin(3\pi/2) = -Ia \cdot B = -F_2$ 。これらは、(2) に示すように、同一作用線上にはないので、偶力となり正方回路全体に回転力を与える。(2)の図で回転の向きは右回りであるから、この回転軸は Q から P に向かう方向となる。

この場合、偶力が作る力のモーメント N の大きさは、 $N = F_2 \cdot a \cdot \sin\theta$ であるから、

$$N = F_2 \cdot a \cdot \sin\theta = Ia^2 B \cdot \sin\theta \quad (10)$$

となる。正方回路の面に対する単位法線ベクトルを \mathbf{n} とすると、偶力が作る力のモーメント・ベクトル \mathbf{N} は、方向も含めて、次のベクトルの外積で表現できる。

$$\mathbf{N} = (Ia^2)\mathbf{n} \times \mathbf{B} = (IS)\mathbf{n} \times \mathbf{B} \quad (11)$$

S は正方回路の面積である。回路の面積 S を使う第二の表現は、任意の形をした回路でも成立する。

一様静磁場 \mathbf{B} の下に置かれた定常電流 I の正方回路に偶力（回転力）が働く状況は、図 17-6 に示すように、一様な電場 \mathbf{E} の下に置かれた電気双極子に作用する偶力と類似する。 d の距離を隔てて $\pm q$ の電荷が分布する時、電気双極子ベクトル \mathbf{p} の大きさは dq で、その方向は負電荷から正電荷に向かう。 F の大きさは $F = \pm qE$ であるから、この偶力による力のモーメント \mathbf{N} の大きさは、

$$N = Fd \cdot \sin\theta = qEd \cdot \sin\theta = pE \cdot \sin\theta \quad (12)$$

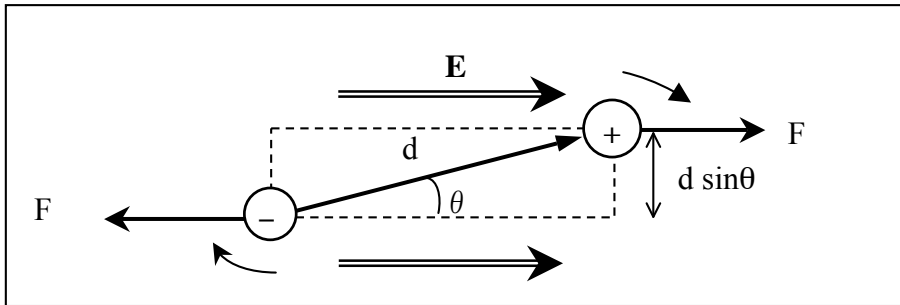


図 18-6. 一様な電場の下に置かれた電気双極子に働く偶力.

故に, 図 18-6 の状況で電気双極子ベクトル \mathbf{p} に働く力のモーメント・ベクトル \mathbf{N} は,

$$\mathbf{N} = \mathbf{p} \times \mathbf{E} \quad (13)$$

となる. (13)は, 一様な静磁場 \mathbf{B} の下に置かれた定常電流 I の閉回路に作用するモーメント・ベクトル(11)と類似する. 静磁場の中で“循環する電流”は, 静電場の中の電気双極子と類似の振る舞いを示す. これは静磁場の中で“循環する電流”が磁気双極子と類似の性質を持つからである. “循環電流”と磁気双極子との類似性は後にさらに議論する (§ 19-3).

5) 直線電流の作る静磁場：ビオー・サバールの法則

1820年、電流には磁気作用があることをエルステッド(Oersted, H. C., 1777-1855)が発見すると、フランスのビオー(Biot, J., 1774~1862)とサバール(Savaar, F., 1791~1841)は、定常直線電流のまわりに、糸でつるした小磁石を置きその回転周期の測定から、直線電流が生み出す磁場（磁束密度）の大きさを明らかにした（図 18-7）。

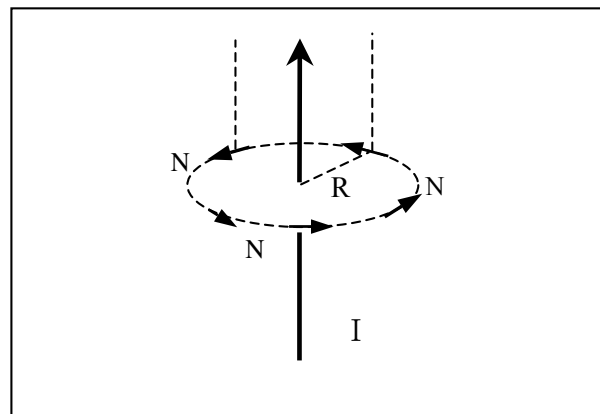


図 18-7. 定常電流の導線のまわりには、電流 I に比例し、距離 R に反比例する磁場（磁束密度）が生じ、電流の向きが右ねじの進行方向とする時、ねじの回転方向が磁場の向きである。

その結果は、既に(6)に記したように、電流 I に比例し、距離 R に反比例する。

$$B(R) = \left(\frac{\mu_0}{2\pi}\right) \cdot \frac{I}{R} \quad (14)$$

磁場（磁束密度）の向きは、電流の向きが右ねじの進行方向とする時、ねじの回転方向が磁場の向きである。

(14)の磁場（磁束密度）の大きさは、§ 3-3-(2)で考えた線密度 λ で直線上に分布する電荷が垂直距離 $r=R$ の距離にある点に与える電場の値、

$$E(R) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda}{R} \quad (\S 3-3-16-1)$$

と比べると，係数は別にすれば，類似性があることが判る．

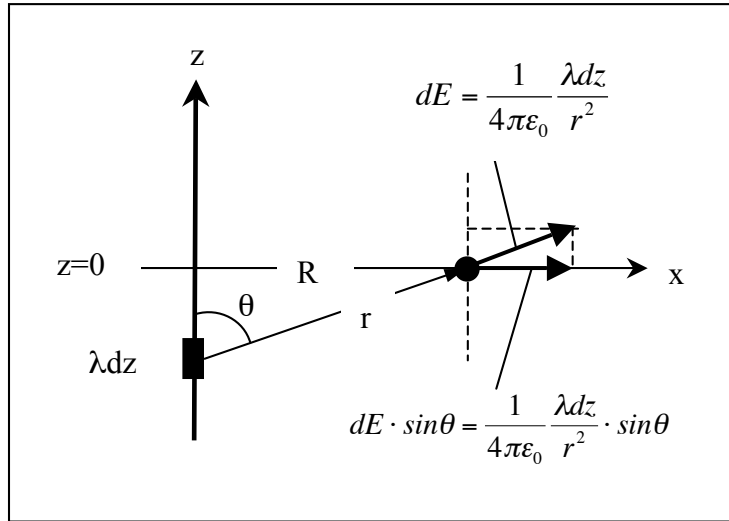


図 18-8. z 軸上に線密度 λ で分布する電荷による R における電場

§ 3-3-(2)で議論したように， $x=R$ ， $y=0$ ， $z=0$ における電場 $E(R)$ は， x 成分以外は0となり， x 成分は，

$$E(R) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda}{R}$$

であった．図 18-8 で， $r \cdot \sin\theta = R$ ， $z = -R/\tan\theta$ であることを使うと，

$$E(R) = \int_{-\infty}^{+\infty} dE \cdot \sin\theta dz = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\theta dz}{r^2} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} \int_0^\pi \sin\theta \cdot d\theta = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} \quad (15)$$

となり，同じ結果となる．故に，(10)の $B(R) = \left(\frac{\mu_0}{2\pi}\right) \cdot \frac{I}{R}$ も，

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot \sin\theta \cdot ds}{r^2} \quad (16)$$

を s について $[-\infty, +\infty]$ の線積分を行った結果であることが判る．

図 17-5 の磁場の方向の考え，かつベクトルの外積を使うと，(15)は，次のように表現できる．

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot d\mathbf{s} \times \mathbf{r}}{r^3} \quad (17)$$

これはビオー・サバールの法則と呼ばれる． $I d\mathbf{s}$ は“電流素片”と呼ばれる．この“電流素片”がそれから \mathbf{r} の位置にある場所での磁束密度への寄与を表す．

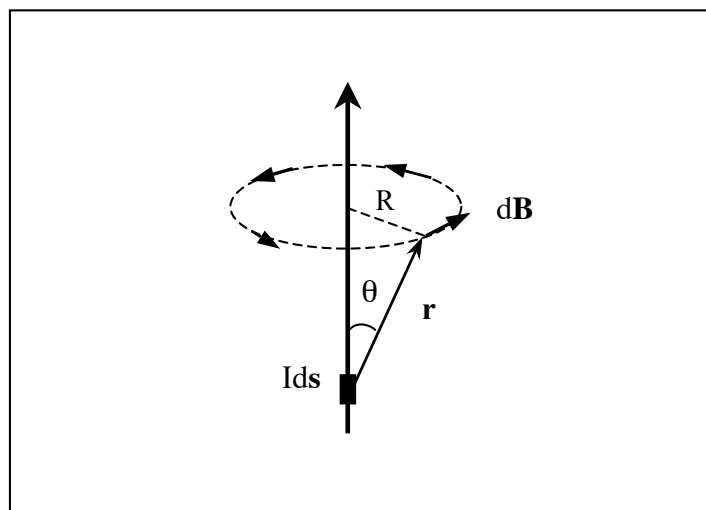


図 18-9. 定常電流の導線のまわりに生じる磁場はビオー・サバールの法則に依り，(17)式により与えられる．

“電荷素片”を考えることで，直線電流の個々の部分の寄与を考え，これらの総和（積分）として磁場（磁束密度）を求めることができる．しかし，現実には電流の一部を切り取ったりは出来ないので，直線電流の両端の“電流素片”はどう考えればよいのだろうか？

直線電流といっても，その両端は結局は直流電源につながり，全体として一つの閉回路となっていると考えれば良い．（図 18-10）．（17）から判るように磁場（磁束密度）への寄与は， $(1/r)^2$ に比例して減少するので，磁場（磁束密度）

を考える位置から十分遠くは離れた電流素片からの寄与は無視できる。従って、直線導線の両端は遠方で湾曲して、直流電源を含む一つの閉回路をなすと考えることができる。このように電流を切断して考えない限り、“電流素片”の考え方は現実的なものである。

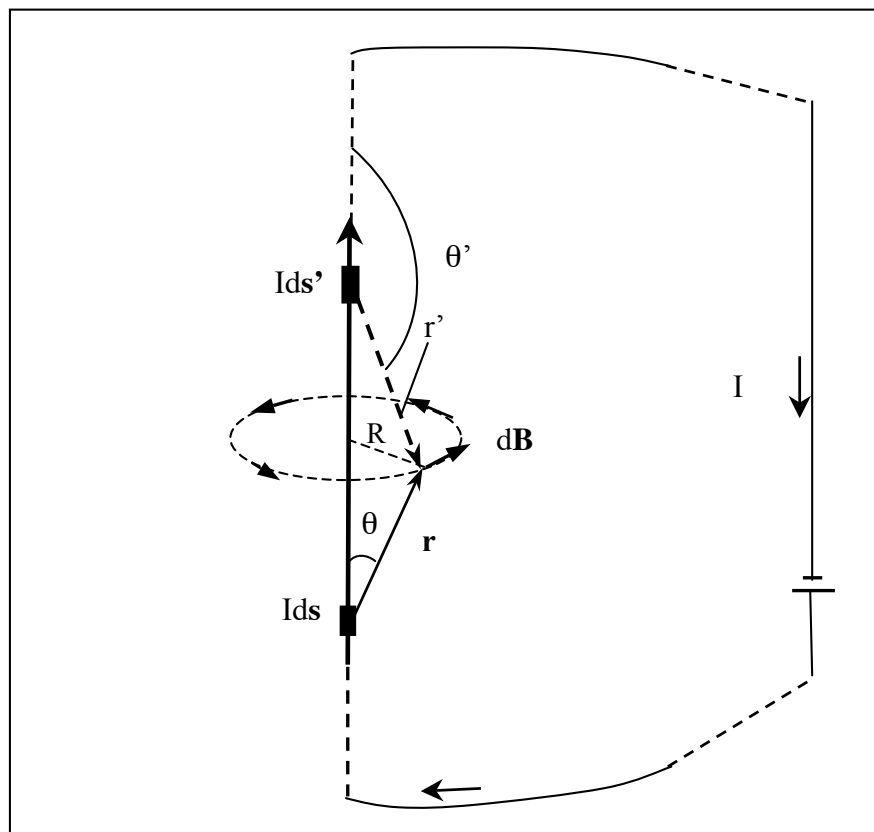


図 18-10. 定常電流の直線導線のまわりに生じる磁場はビオー・サバールの法則であたえられるが、この導線は十分に直線的に延びた後は、直流電源を含む一つの閉回路をなすと考え、電流素片の考え方は現実的なものとなる。

従って、(17)式そのものではなく、定常電流 I の閉曲線 (C) 全体に渡って線積分した結果として、ビオー・サバールの法則を一般化して表現できる (図 18-11)。

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_C \frac{d\mathbf{s} \times (\mathbf{r} - \mathbf{s})}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}|^3} \quad (18)$$

\mathbf{r} は磁場（磁束密度）を考える場所を指定する位置ベクトル． \mathbf{s} は線積分を実行する閉曲線部分の位置ベクトル． $d\mathbf{s}$ は電流の流れる方向に沿った線積分の増分を表す（図 18-11）．ビオー・サバルの法則（図 18-11）における \mathbf{r} は、ここでは $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{s}$ である．

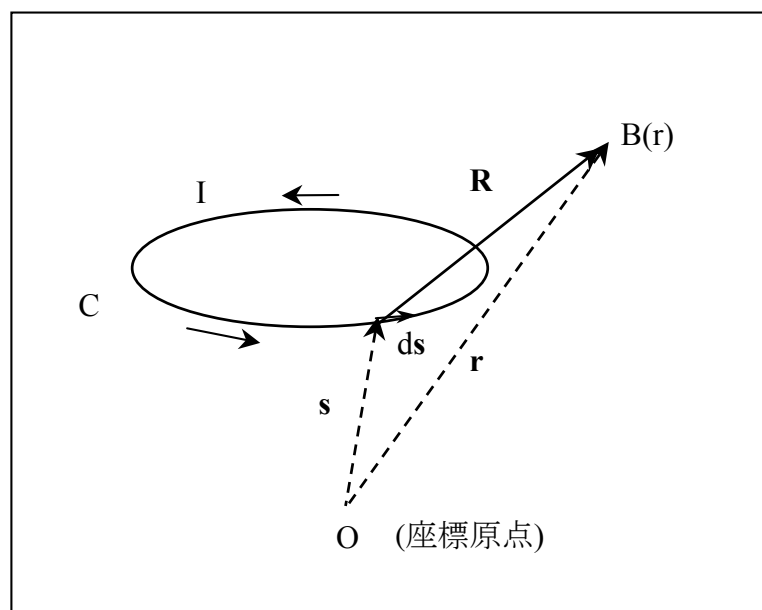


図 18-11. 定常電流(I)の閉曲線導線のまわりに生じる磁場（磁束密度）は (18)式の線積分により与えられる．

(18)式のビオー・サバルの法則は、静磁場についての近接作用の基本式から導出できる（§ 19）．しかし、この為に説明せねばならない基本事項がまだ幾つかあるので、ここでは(18)式を使う例として次の問題を考えるに止める．また、ビオー・サバルの法則については、最終章の最終節（§ 28-8）でも、電磁場のローレンツ変換から再論する．

<円形の定電流回路の中心軸上での磁束密度>

ビオー・サバルの法則 (18) を用いて, 図 18-12 に示す円形の定電流回路の中心軸上の磁束密度を計算してみる. 図 18-12 に示すように, z 軸上の点 $P(0,0,z)$ での磁束密度は, $d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\mathbf{s} \times \mathbf{R}}{|\mathbf{R}|^3}$ を円形回路に沿って積分する. 図の条件で, $d\mathbf{B}$ は $d\mathbf{s}$ と \mathbf{R} が作る平面に垂直であるから, その垂直成分 (z 成分) は $d\mathbf{B} \cos \alpha$, 水平成分は $d\mathbf{B} \sin \alpha$ である. $ds = a d\varphi$ とすると, 水平成分の線積分要素

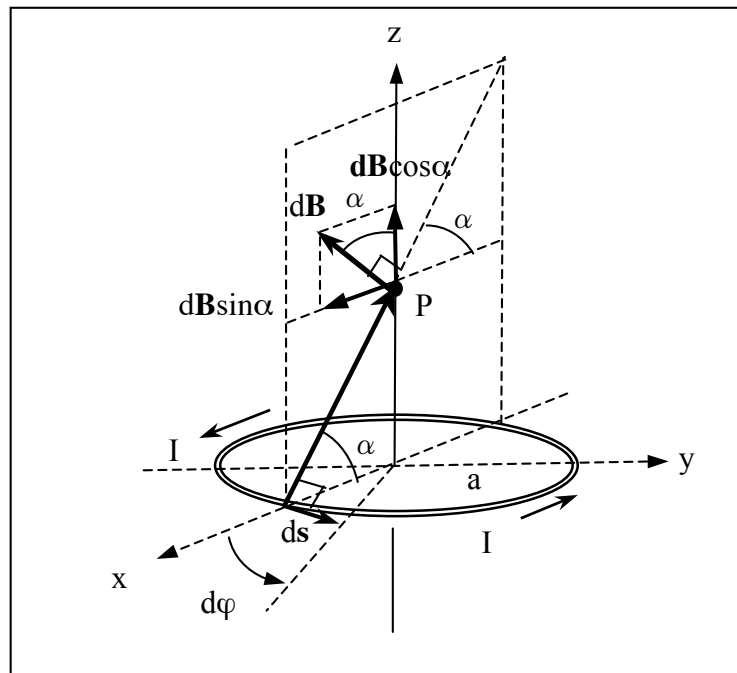


図 18-12. 円形の定常電流回路の中心軸 (z 軸) 上での磁束密度

は $\cos \varphi$ を含み, 積分の角度 φ に依存する. 全体では打ち消しあって 0 である.

$$\int_C d\mathbf{B} \sin \alpha \cdot \cos \varphi = \frac{\mu_0 I a}{4\pi |\mathbf{R}|^3} \sin \alpha \int_{\varphi=0}^{2\pi} \cos \varphi d\varphi = 0$$

しかし, 垂直成分は ds に依らず常に一定であるから,

$$\begin{aligned}
B(0,0,z) &= \int_{s=0}^{2\pi a} dB \cos\alpha = \int_{s=0}^{2\pi a} \frac{\mu_0 I}{4\pi |R|^2} \cos\alpha \cdot ds \\
&= \frac{\mu_0 I}{4\pi |R|^2} \cos\alpha \cdot 2\pi a = \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2 + z^2)^{3/2}}
\end{aligned} \tag{19}$$

である。その向きは常に z 軸の正方向を向く。 $z=0$ となる円形回路の中心では、

$$B(0,0,0) = \mu_0 I / (2a) \tag{20}$$

となる。

中心軸上も含めた、一般の位置での \mathbf{B} については後に議論する (§ 19)。

6) 荷電粒子に作用する力：ローレンツ力

直線導線に流れる定常電流の間に作用する力（アンペールの力）は，磁束密度 \mathbf{B} と定常電流素片 $I\mathbf{ds}$ のベクトルの外積で与えられる．

$$\Delta\mathbf{F}(\mathbf{s}) = (I \cdot \Delta\mathbf{s}) \times \mathbf{B}(\mathbf{s}) \quad (9)$$

\mathbf{s} は直線導線の位置を表し， $\Delta\mathbf{s}$ は大きさが Δs で，電流の方向をもつベクトルである．今，電流 I が流れる導線の断面積を S_0 とすると，電流密度の大きさ i は $i=I/S_0$ である．断面積 S_0 が導線の場所に依らず一定と仮定すると，(9)は

$$\Delta\mathbf{F}(\mathbf{s}) = (i \cdot S_0 \cdot \Delta\mathbf{s}) \times \mathbf{B}(\mathbf{s}) \quad (21)$$

となる．電流の流れる方向の単位ベクトルを \mathbf{t} とすると，電流密度は大きさ i ，向きは \mathbf{t} であるベクトルで $\mathbf{i} = i \cdot \mathbf{t}$ と書くことが出来る．また $\Delta\mathbf{s}$ も $\Delta\mathbf{s} = \Delta s \cdot \mathbf{t}$ であるから， $i \cdot \Delta\mathbf{s} = i \cdot \Delta s \cdot \mathbf{t} = \mathbf{i} \cdot \Delta s$ である．これを(21)に代入すれば，

$$\Delta\mathbf{F}(\mathbf{s}) = (S_0 \cdot \Delta s \cdot \mathbf{i}) \times \mathbf{B}(\mathbf{s}) \quad (22)$$

である． $S_0 \cdot \Delta s$ は電流素片の体積を表すから，この体積で(22)両辺を割ると，

$$\frac{\Delta\mathbf{F}(\mathbf{s})}{S_0 \cdot \Delta s} = \mathbf{f}(\mathbf{s}) = \mathbf{i}(\mathbf{s}) \times \mathbf{B}(\mathbf{s}) \quad (23)$$

となる．これは電流の単位体積に作用する力 \mathbf{f} を表す．

§ 17 の(13)で述べたように，金属を流れる電流密度 \mathbf{i} ，伝導電子の数密度を n ，電子の平均速度 \mathbf{v} とすると， $\mathbf{i} = -nev$ である．これを(23)に代入すれば，

$$\mathbf{f} = -nev \times \mathbf{B} \quad (24)$$

電子一個当たりには， $\mathbf{f}/n = -e\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ の力が働くことになる．

より一般的には，電荷 q を持つ粒子が磁場 \mathbf{B} の中を速度 \mathbf{v} で運動する時，

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (25)$$

の力がこの粒子に作用する。この力はローレンツ力と呼ばれる。オランダの理論物理学者 Lorentz, H. A. (1853~1928)に因む。(25)は、(9)のアンペールの力 $\Delta\mathbf{F}(\mathbf{s}) = (I \cdot \Delta\mathbf{s}) \times \mathbf{B}(\mathbf{s})$ の定義式を置き換える基本式と考えることが出来る。また、(25)を磁束密度 \mathbf{B} の定義式と考えても良い。

磁場 \mathbf{B} だけではなく電場 \mathbf{E} も存在すれば、電荷 q を持つ粒子は、

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (26)$$

の力を受ける。これをローレンツ力と呼ぶ場合も多い。

(26)での磁場 \mathbf{B} 、電場 \mathbf{E} は与えられたもので、電荷 q を持つ粒子自体が作り出す磁場、電場は含めないで考える。その場合、速度 \mathbf{v} が一定速度であれば (26) は正しい。しかし、荷電粒子が加速度運動を行う場合は、荷電粒子自体が電磁波を放出するので、その反動が \mathbf{F} に加わる。従って、(26)の磁場 \mathbf{B} 、電場 \mathbf{E} には、電荷 q の粒子自体が作り出す磁場、電場（自己場）も含めて考える必要がある。

もし、電荷 q の粒子と同じ定速度 \mathbf{v} で運動する座標系で考えると、電荷 q の粒子は静止していることになる。しかし、粒子には同じ力 \mathbf{F} が作用しているはずだから、

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (27)$$

が成立するはずである。磁場 \mathbf{B} と電場 \mathbf{E} はどのような座標系で考えるかに依存している。運動する座標系での記述方法は相対論の問題である。空間に固定した座標系での記述結果と空間を運動する座標系での結果は相互に変換され（ローレンツ変換）、ここでは、磁場と電場は一般には相互に分離できない“一つの電磁場”の存在を示唆する。この問題は最後の2章（§27,28）で議論する。

7) 積分形のアンペールの法則と磁場強度 \mathbf{H}

再度，図 18-9, 10 を参照して，直線電流から R の距離にある位置での磁束密度の大きさは，

$$B(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot d\mathbf{s} \times \mathbf{r}}{r^3} = \left(\frac{\mu_0}{2\pi}\right) \cdot \frac{I}{R} = B(R) \quad (28)$$

である．半径 R の円周は $2\pi R$ で，この円周上で $B(R)$ の大きさは一定であるから， $B(R)$ をこの円周に沿って線積分すると，

$$\int_{C(R)} B(R) \cdot ds = B(R) \cdot 2\pi R = \mu_0 I \quad (29)$$

となる．この右辺は電流(I)と比例定数のみとなり， R は現れない．定常電流(I)を取り囲む閉曲線に沿って磁束密度 \mathbf{B} の線積分を実行すると，その結果は $\mu_0 I$ となる．磁場と定常電流を直接結びつける単純な結果で，これが**積分形のアンペールの法則**である．

R は閉曲線に沿う線積分経路を指定するパラメーターであるから，この線積分結果に R が現れないことは，定常電流(I)を取り囲む閉曲線であれば，どのような閉曲線であっても，その線積分は $\mu_0 I$ となることを示唆する．これを図 18-13 で考えてみよう．

図 18-13 では，上では考えた半径 R の円周を C とするが， I を取り囲む不規則な経路 C' を考え，その一点 P から直線電流までの距離は R ， P での経路の増分を ds とする．この増分は x , y , z 成分に分解して考えることが出来るが， y 成分のみが P 点での磁束密度 \mathbf{B} と平行になり， x , z 成分は \mathbf{B} と直交する．従って， \mathbf{B} と ds との内積では，増分 ds の y 成分に関する部分のみが残る． ds の y 成分は，電流からの距離 R と回転角の増分 $d\varphi$ との積， $ds_y = R d\varphi$ である．

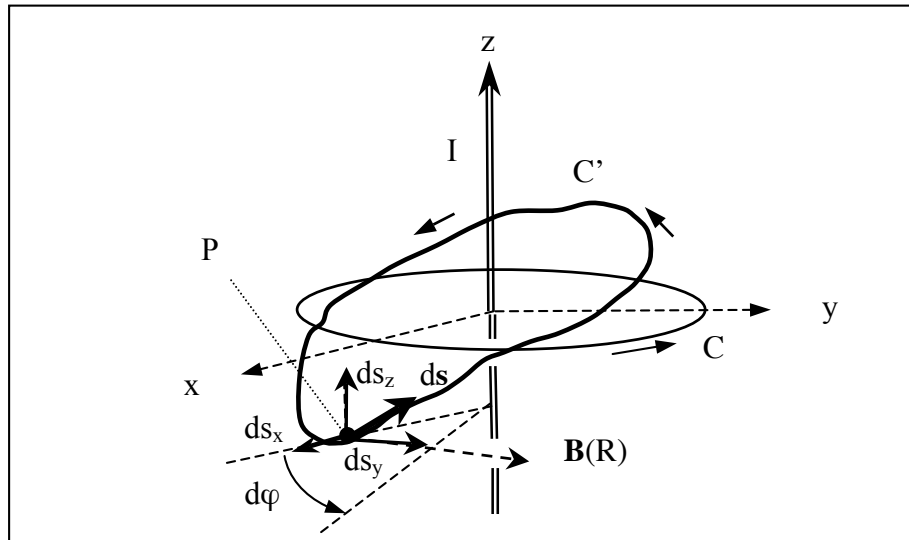


図 18-13. 磁束密度 \mathbf{B} を閉曲線 C' に沿って積分する. P における経路の増分 $d\mathbf{s}$ を x, y, z 成分に分けて考えた時, y 成分のみが P 点での磁束密度 \mathbf{B} と平行になり, x, z 成分は \mathbf{B} と直交する.

\mathbf{B} と $d\mathbf{s}$ との内積は,

$$\mathbf{B}(R) \cdot d\mathbf{s} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \cdot R d\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} d\varphi \quad (30)$$

となる. この閉曲線 C' に沿っての線積分は

$$\int_{C'} \mathbf{B}(R) \cdot d\mathbf{s} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi = \mu_0 I \quad (31)$$

となり, (29)と同じ結果である.

(29), (31)は直線電流 I と磁束密度 \mathbf{B} の関係を示すが, 一般の電流でも同じ結果となる.

図 18-14 に示すような状況では, 磁束密度 \mathbf{B} を閉曲線に沿って積分した時, その閉曲線を貫く電流が存在すれば, 積分形のアムペールの法則は

$$\int_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 (I_1 - I_2 + I_4) = \mu_0 \sum_k I_k \quad (32)$$

となる．積分の経路と I_1 の関係は，右ネジの回転方向が経路で，ねじの進む方向が電流の方向となっている． I_2 に負符号が付くのは電流の向きが I_1 と反対だからである．閉曲線 C を貫いていない電流 I_3 は表れない． I_4 は I_1 と同じであるから右辺側現れる．

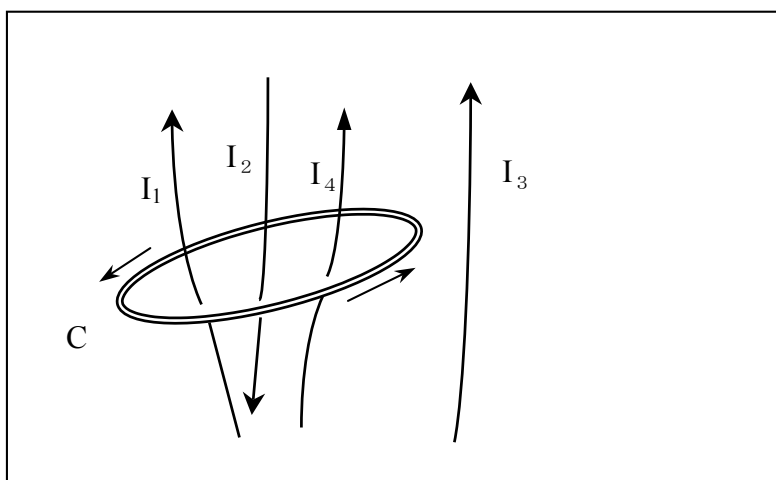


図 18-14. 積分形のアンプールの法則．

<アンプールの法則と磁場強度 \mathbf{H} >

これまで，真空空間では，「磁束密度 \mathbf{B} 」と「磁場の強さ \mathbf{H} 」は，共にベクトル量として

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \quad (7)$$

と定義されることは指摘したが，「磁場の強さ \mathbf{H} 」は使用しないで，「磁束密度 \mathbf{B} 」だけを使って議論してきた．しかし，積分形のアンプールの法則(32)を見ると，

$$\int_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 (I_1 - I_2 + I_4) = \mu_0 \sum_k I_k \quad (32)$$

であるから，この両辺を透磁率 μ_0 で割れば，(7)を使うことで透磁率 μ_0 を使わな

い単純な式が得られる.

$$\int_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = (I_1 - I_2 + I_4) = \sum_k I_k \quad (33)$$

磁場強度 \mathbf{H} の閉曲線の経路積分は, その閉曲線を貫く電流の和に等しい. 磁場強度 \mathbf{H} の単位は [A/m]となることも判る. $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ は「電束密度 \mathbf{D} 」と「電場の強さ \mathbf{E} 」の関係 $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$ に対応するが, これは後に考えよう.

<微分形のアmpールの法則>

再度, (32)のアmpールの法則に戻り, 右辺について考える. 右辺は閉曲線 C を貫く全電流 (符号も含めて) と透磁率の積である.

$$\int_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 (I_1 - I_2 + I_4) = \mu_0 \sum_k I_k \quad (32)$$

ここでの“ C を貫く全電流”は“ C が与える曲面 S を貫く全電流”の意味でもある. 電流が広がりをもって S を貫く場合でも, (32)右辺と同じように全電流を考えることが出来る. 電流に広がりがある場合は, §17で述べたように, 全電流は, 電流密度 \mathbf{i} の曲面 S に関する面積分になるので, (32)右辺は次のように表現される.

$$\int_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 \int_S \mathbf{i}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS \quad (33)$$

$\mathbf{i}(\mathbf{x})$ は曲面 S の点 \mathbf{x} における電流密度, $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ は点 \mathbf{x} における曲面 S の単位法線ベクトルである.

一方, 左辺側の閉曲線の積分は, §6で述べたストークスの定理を用いると, (33)右辺に類似する面積分に変換される. ストークスの定理は, 線積分が面積分に代わることを保証する定理である. 即ち, 空間の位置 \mathbf{x} に対して与えられ

るベクトル $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ について,

$$\int_C \mathbf{A}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \int_S \text{rot}\mathbf{A}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS \quad (\S 6-5)$$

が成立する. ただし, C は任意の閉曲線で, S は閉曲線 C が取り囲む任意の曲面で, $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ は面 S の表面要素に立てた単位法線ベクトルである. 故に, (33) 左辺は,

$$\int_S \text{rot}\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS = \mu_0 \int_S \mathbf{i}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS$$

となる. 移項すれば,

$$\int_S [\text{rot}\mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{i}(\mathbf{x})] \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS = 0 \quad (34)$$

閉曲線 C が任意であるから, 閉局面 S も任意であり, これは

$$\text{rot}\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mu_0 \mathbf{i}(\mathbf{x}) \quad (35-1)$$

これは磁場強度 \mathbf{H} で書けば,

$$\text{rot}\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \mathbf{i}(\mathbf{x}) \quad (35-2)$$

である. 微分形のアンペールの法則である. 電流密度は磁場に直結することを表す. 前出の積分形のアンペールの法則

$$\int_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \sum_k I_k \quad (33)$$

と同様に, 電流と磁場の単純な関係を表現する. 真空では

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \quad (7)$$

ではあるが, 微分形であれ積分形であれ, アンペールの法則は, μ_0 を介在することなく電流と磁場強度 \mathbf{H} の関係を明示する.