

## § 19 定常電流と静磁場 (2)

§ 18では、直線導線の定常電流を例に、アンペールの力、ローレンツ力、ビオ-サバールの法則、アンペールの法則、磁束密度  $\mathbf{B}$ 、磁場強度  $\mathbf{H}$  について概観した。ここでは、これらの内容を再度整理し、補足事項を追加し、静電場との著しい相似性に留意して、静磁場の性質とその基本則を考える。

### 1) 磁場とベクトル・ポテンシャル

ビオ-サバールの法則は、直線電流が周りにつくる磁場（磁束密度）を与える。それは直線上の電荷が周りにつくる電場との類似性から“電流素片”の磁束密度への寄与を与える式として導かれた。そして、磁束密度は、一般的には、

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_C \frac{d\mathbf{s} \times (\mathbf{x} - \mathbf{s})}{|\mathbf{x} - \mathbf{s}|^3} \quad (\S 18-18)$$

として、閉回路の定常電流に沿う線積分の形で一般化できることを述べた。これを証明するには“ベクトル・ポテンシャル”について説明が必要で、他の磁場の問題を考える際にも、“ベクトル・ポテンシャル”は重要であるので、ここで議論する。

(§ 18-18)は細い導線の定常電流  $I$  を前提にしているが、電流が空間的に広がっている場合も扱う為には、電流密度  $\mathbf{i}$  に変更しなければならない。電流素片  $I ds$  は  $[Am]=[Cm/s]$  の次元を持つ。一方、電流密度  $\mathbf{i}$  は単位時間内に単位面積を横切って通過する電荷量で、 $\mathbf{i}$  の次元は  $[C/m^2/s]=[A/m^2]$  である。故に電流素片を  $I ds = \mathbf{i} \cdot (d\mathbf{x})^3$  として、電流密度  $\mathbf{i}$  に書き換えればよい。 $I ds$  は  $I(\mathbf{s}) ds$  の意味であるから、 $I(\mathbf{s}) ds = \mathbf{i}(\mathbf{x}') \cdot d^3 \mathbf{x}'$  として、 $\mathbf{s} \rightarrow \mathbf{x}'$  と変換する。

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{i}(\mathbf{x}') \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3\mathbf{x}' \quad (1)$$

である。この電流密度  $\mathbf{i}$  の体積積分を実行するにあたって、

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \text{rot}\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{x}) \quad (2)$$

を満足する  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$  を導入する。この(2)は、「 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$  は  $\mathbf{B}(\mathbf{x})$  のベクトル・ポテンシャル」であることを意味する。既に §4 で、「一般に、ベクトル  $\mathbf{A}(x,y,z)$  が、あるベクトル関数  $\mathbf{p}$  の回転である時、即ち、 $\mathbf{A} = \text{rot } \mathbf{p} = \nabla \times \mathbf{p}$  の時、ベクトル関数  $\mathbf{p}$  は  $\mathbf{A}$  のベクトル・ポテンシャルと呼ばれる」と記しておいた。これに当たる。

更に、(1)の場合は、ベクトル・ポテンシャルは

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{i}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3\mathbf{x}' \quad (3)$$

となる。(2)と(3)から (1)の右辺が得られるからである。

実際に(3)式を(2)式に代入し、 $\mathbf{B}(\mathbf{x})$  を計算してみる。x成分  $\mathbf{B}_x(\mathbf{x})$  については、

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_x(\mathbf{x}) &= [\text{rot}\mathbf{A}(\mathbf{x})]_x = \frac{\partial \mathbf{A}_z(\mathbf{x})}{\partial y} - \frac{\partial \mathbf{A}_y(\mathbf{x})}{\partial z} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \int_V \frac{\mathbf{i}_z(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3\mathbf{x}' - \frac{\partial}{\partial z} \int_V \frac{\mathbf{i}_y(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3\mathbf{x}' \right\} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \left\{ \mathbf{i}_z(\mathbf{x}') \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} - \mathbf{i}_y(\mathbf{x}') \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right\} d^3\mathbf{x}' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \left\{ -\frac{\mathbf{i}_z(\mathbf{x}') (y - y')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} + \frac{\mathbf{i}_y(\mathbf{x}') (z - z')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \right\} d^3\mathbf{x}' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{[\mathbf{i}(\mathbf{x}') \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')]_x}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3\mathbf{x}' \end{aligned}$$

となる。y, z成分についても同様な結果を示すことが出来る。(2), (3)は確かに(1)の右辺を与える。

(3)は、 $I(\mathbf{s})d\mathbf{s} = \mathbf{i}(\mathbf{x}') \cdot d^3\mathbf{x}'$  として  $\mathbf{x}' \rightarrow \mathbf{s}$  と逆変換できるので、(§18-18) につい

では、ベクトル・ポテンシャルは

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_C \frac{d\mathbf{s}}{|\mathbf{x} - \mathbf{s}|} \quad (4)$$

となり、

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \text{rot}\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_C \frac{d\mathbf{s} \times (\mathbf{x} - \mathbf{s})}{|\mathbf{x} - \mathbf{s}|^3} \quad (\S 18-18)$$

となることが判る。

$\mathbf{B}(\mathbf{x})$ を Biot-Savart の法則から直接決めようとする、ベクトル積を含む積分を扱わねばならないので面倒である。だから、途中に  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$  を介在させて、2段階とはなるが、それぞれはより単純な式となる。このような実用性からベクトル・ポテンシャル  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$  を考えても良い。しかし、ベクトル・ポテンシャル  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$  はそれ以上に重要な内容を持っている。

(3)は、§7-5 で議論した電荷密度分布から与えられる静電ポテンシャル  $\phi(\mathbf{x})$  の式と、係数は ( $\mu_0 \rightarrow 1/\epsilon_0$ ) と異なるが、体積積分は同じ形になっている。V を全空間と考え、閉曲面 S が無限遠方にあり、この無限遠方境界面でスカラー・ポテンシャル  $\phi=0$  である場合のポアソン方程式の解、

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3\mathbf{x}' \quad (\S 7-26)$$

と相似である。これは、磁場は電場と同様なポアソン方程式の解でとして与えられることを意味する。電場は、 $\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\text{grad}\phi(\mathbf{x})$  により、スカラー・ポテンシャル  $\phi(\mathbf{x})$  で与えられる。 $\mathbf{B}(\mathbf{x})$  は、 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$  から  $\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \text{rot}\mathbf{A}(\mathbf{x})$  として、ベクトル・ポテンシャル  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$  から与られる。両者の対応性を更に考えよう。

## 2) 静磁場と静電場の相似性

近接作用での静電場の基本則は、§ 7で議論したように、以下の通りである。

クーロン則に発散定理を用いて、微分形のガウスの法則

$$\mathit{div}\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x})/\varepsilon_0 \quad (\S 7-3)$$

が得られた。また、Stokes の定理から、

$$\mathit{rot}\mathbf{E}(\mathbf{x}) = 0 \quad (\S 7-4)$$

であり、 $\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\mathit{grad}\phi(\mathbf{x})$ なる静電ポテンシャル $\phi(\mathbf{x})$ の存在を保証する。これらから  $\mathit{div grad}\phi(\mathbf{x})$ を作ると、Poisson の方程式 $\Delta\phi(\mathbf{x}) = -\rho(\mathbf{x})/\varepsilon_0$ となった。無限遠方境界面で $\phi = 0$ である場合のポアソン方程式の解が(§ 7-26)である。

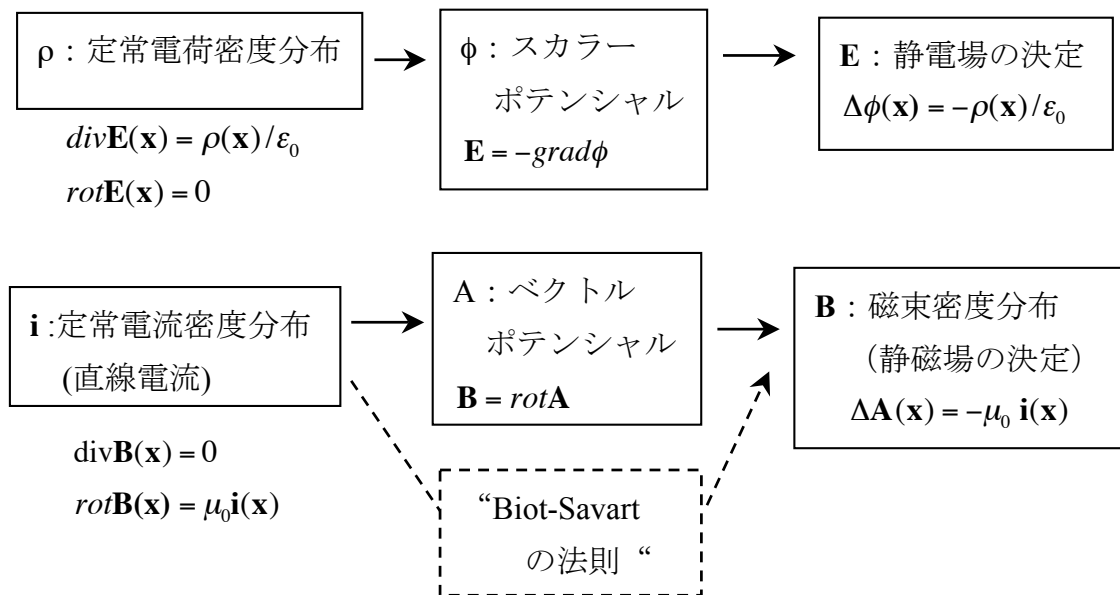


図 19-1. 静電場と静磁場の対応

図 19-1 の静電場の場合を参照して、静磁場について考えてみる。磁場のベクトル・ポテンシャルを前提にするので、

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mathit{rot}\mathbf{A}(\mathbf{x}) \quad (2)$$

である。この両辺の  $\text{div}$  を取ると、§ 4-5 「rot に関する恒等式」で述べたように、任意のベクトル  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$  に対して、 $\text{div rot}\mathbf{A}(\mathbf{x})=0$  であるから、

$$\text{div}\mathbf{B}(\mathbf{x})=0 \quad (5)$$

である。これを静電場についての  $\text{div}\mathbf{E}(\mathbf{x})=\rho(\mathbf{x})/\epsilon_0$  に対比すれば、電荷は実在するが、“磁荷”は実在するわけではないので  $\text{div}\mathbf{B}(\mathbf{x})=0$  で良いことが判る。もう一つの  $\text{rot}\mathbf{E}(\mathbf{x})=0$  に対応するものは  $\text{rot}\mathbf{B}(\mathbf{x})$  であるが、これについては既に § 18-7-(35) でアンペールの法則として得ている。

$$\text{rot}\mathbf{B}(\mathbf{x})=\mu_0\mathbf{i}(\mathbf{x}) \quad (6)$$

(2), (5), (6) からベクトル・ポテンシャル  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$  に関する Poisson の方程式が得られ、それが静電ポテンシャルの  $\Delta\phi(\mathbf{x})=-\rho(\mathbf{x})/\epsilon_0$  に相似なものとなれば良い(図 19-1)。

そこで、§ 4-5 「rot に関する恒等式」の 3 番目に述べた恒等式

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = \text{grad div } \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A} \quad (7)$$

を使う。 $\mathbf{A} \rightarrow$  ベクトル・ポテンシャル  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$  としても当然成立しなければならない。

この左辺は、(6) から

$$\text{rot rot } \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \text{rot } \mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mu_0\mathbf{i}(\mathbf{x})$$

となるので、(7) は

$$\Delta\mathbf{A}(\mathbf{x}) - \text{grad div}\mathbf{A}(\mathbf{x}) = -\mu_0\mathbf{i}(\mathbf{x}) \quad (8)$$

である。ここで、もし

$$\text{div}\mathbf{A}(\mathbf{x})=0 \quad (9)$$

が成立するなら、左辺第二項は消えるので

$$\Delta\mathbf{A}(\mathbf{x}) = -\mu_0\mathbf{i}(\mathbf{x}) \quad (10)$$

となり、スカラー・ポテンシャルの Poisson の方程式  $\Delta\phi(\mathbf{x})=-\rho(\mathbf{x})/\epsilon_0$  に正確に対

応する.

(9)の  $\text{div}\mathbf{A}(\mathbf{x})=0$  が本当に成立するかどうかは問題として残るので、これを考えよう. 参照しているポアソン方程式の解としてのスカラー・ポテンシャル (§ 7-26)は、「 $V$ を全空間と考え、閉曲面  $S$  が無限遠方にあり、この無限遠方境界面でスカラー・ポテンシャル  $\phi=0$  である場合の解」であり、

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} d^3\mathbf{x}' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} d^3\mathbf{x}' \quad (11)$$

である. 従って、(3)で与えたベクトル・ポテンシャルも同じ境界条件で考えねばならないから、

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{i}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} d^3\mathbf{x}' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathbf{i}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} d^3\mathbf{x}' \quad (12)$$

である. この解が  $\text{div}\mathbf{A}(\mathbf{x})=0$  を満足することを確認すれば良い.

$$\begin{aligned} \text{div}\mathbf{A}(\mathbf{x}) &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{i_x(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} d^3\mathbf{x}' \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{i_y(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} d^3\mathbf{x}' \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{i_z(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} d^3\mathbf{x}' \right) \right] \end{aligned}$$

であるから、以下では、係数を別にした第一項のみについて考える.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{i_x(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} d^3\mathbf{x}' \right) = \int_{-\infty}^{+\infty} i_x(\mathbf{x}') \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \right) d^3\mathbf{x}' = - \int_{-\infty}^{+\infty} i_x(\mathbf{x}') \frac{\partial}{\partial x'} \left( \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \right) d^3\mathbf{x}' \quad (13)$$

$x$  による微分は  $x'$  を変数とする関数には作用しない. 微分と積分の順序を交換

している. しかし、 $\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \right) = - \frac{\partial}{\partial x'} \left( \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \right)$  であるから、この場合は  $x$  での微

分を  $x'$  による微分に変えることが出来る. 更に、

$$\frac{\partial}{\partial x'} \left[ \frac{i_x(x')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \right] = \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \cdot \frac{\partial i_x(x')}{\partial x'} + i_x(x') \cdot \frac{\partial}{\partial x'} \left( \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \right) \quad (14)$$

を使うと、(13)右辺は

$$-\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{i}_x(\mathbf{x}') \frac{\partial}{\partial x'} \left( \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) d^3 \mathbf{x}' = -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x'} \left[ \frac{\mathbf{i}_x(x')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right] d^3 \mathbf{x}' + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \cdot \frac{\partial \mathbf{i}_x(x')}{\partial x'} d^3 \mathbf{x}' \quad (15)$$

となる。この第一項は、電流密度の分布が有限領域内に限られるとの条件から消える。

$$-\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x'} \left[ \frac{\mathbf{i}_x(x')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right] d^3 \mathbf{x}' = -\int_{-\infty}^{+\infty} \left. \frac{\mathbf{i}_x(x')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right|_{x'=-\infty}^{x'=+\infty} dy' dz' = 0 \quad (16)$$

である。故に、(13)は

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathbf{i}_x(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3 \mathbf{x}' \right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \cdot \frac{\partial \mathbf{i}_x(x')}{\partial x'} d^3 \mathbf{x}' \quad (17)$$

となる。y, z成分についても同様の結果になるので、結局、

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{A}(\mathbf{x}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \left\{ \left( \frac{\partial \mathbf{i}_x(\mathbf{x}')}{\partial x'} \right) + \left( \frac{\partial \mathbf{i}_y(\mathbf{x}')}{\partial y'} \right) + \left( \frac{\partial \mathbf{i}_z(\mathbf{x}')}{\partial z'} \right) \right\} d^3 \mathbf{x}' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \{ \operatorname{div} \mathbf{i}(\mathbf{x}') \} d^3 \mathbf{x}' = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

となる。これは、§ 17 の(4)に示したように、定常電流密度  $\mathbf{i}(\mathbf{x})$  の発散は  $\operatorname{div} \mathbf{i}(\mathbf{x})=0$  であることに依る。確かに、(9)の  $\operatorname{div} \mathbf{A}(\mathbf{x})=0$  は成立する。

以上のように、静電ポテンシャル

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3 \mathbf{x}' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3 \mathbf{x}' \quad (11)$$

に対応するベクトル・ポテンシャルは、

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{i}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3 \mathbf{x}' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathbf{i}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3 \mathbf{x}' \quad (12)$$

であり、 $\rho(\mathbf{x}) \leftrightarrow \mathbf{i}(\mathbf{x})$ ,  $\epsilon_0 \leftrightarrow 1/\mu_0$  の対応関係にある。

静磁場の二つの基本則  $\operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{x})=0$  と  $\operatorname{rot} \mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mu_0 \mathbf{i}(\mathbf{x})$  に、ベクトル・ポテンシャルの定義を  $\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \operatorname{rot} \mathbf{A}(\mathbf{x})$  を持ち込めば、前節 (§ 19-1) で示したように“Biot-Savart の法則”が導出できる。ベクトル・ポテンシャルを使えば“Biot-Savart

の法則”は不要となる。図 19-1 で “Biot-Savart の法則” と引用符を付けたのはこの意味による。静電場と静磁場での二つの基本則を図 19-1 に明示しておいた。しかし，“Biot-Savart の法則” は，定常電流の直線導線間の相互作用を通じて，静磁場の二つの基本則にたどり着いた歴史定過程を追体験する上で，今日でも重要である。“Biot-Savart の法則”の意味するところは，ローレンツ変換を經由することで明らかになるが，これは § 28 で議論する。



### 3) 円形環状電流と磁気双極子

§ 18-5 では、円形の定常電流回路の中心軸 (z 軸) 上での磁束密度を求めた。しかし、中心軸 (z 軸) 以外の一般位置における磁束密度を求めることが残っている。ここでは、定電流の円形環状回路がまわりに作る磁場を求める。その為の座標系を図 19-2 に示す。最終的には、点  $P(r, \theta, \varphi)$  におけるベクトル・ポテンシャル  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$  を求める訳だが、先ずは極座標系ではなく、円筒座標系で点  $P(R, \varphi, z)$  を表現した方が都合である。その理由は、円形回路の電流は  $x$ - $y$  平面内に局在しているので、前節の(3)あるいは(4)から、

$$\mathbf{A}_z(R, \varphi, z) = 0 \quad (19)$$

であり、 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$  は  $z$  成分を持たないからである。

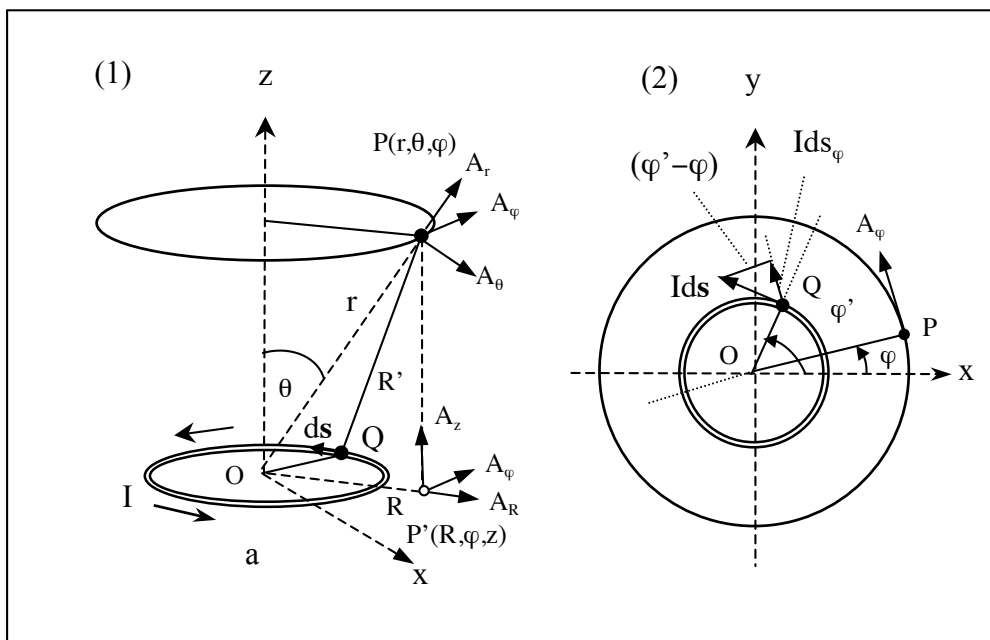


図 19-2. 定電流  $I$  の円形環状回路 (半径  $a$ ) が周辺に作る磁場を求める為の座標系。ベクトル・ポテンシャル  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$  をまず求める。

一方、R成分は、前節の(4)式で  $ds$  の R成分を  $ds_R$  と記せば、

$$\mathbf{A}_R(R, \varphi, z) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_C \frac{ds_R}{R'} = 0 \quad (20)$$

である。図 19-2 の(2)から判るように、点 Q は、z 軸と OP を含む垂直面に関して対称な二つの半円周を移動するが、電流の方向は同一であるから、 $ds_R/R'$  は反対称であり、一周すれば全て相殺され 0 となる。故に、0 とはならない成分は、 $ds_\varphi/R'$  に基づく  $\mathbf{A}_\varphi(R, \varphi, z)$  だけとなる。

$$\mathbf{A}_\varphi(R, \varphi, z) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_C \frac{ds_\varphi}{R'} \quad (21)$$

図 19-2 の(2)に示したように、 $ds_\varphi$  は

$$ds_\varphi = \cos(\varphi' - \varphi) ds = a \cos(\varphi' - \varphi) d\varphi' \quad (22)$$

である。また、 $R'$  は 図 19-2 の(1)で  $R'^2 = z^2 + (QP')^2$  であること、この  $(QP')^2$  は図 19-2 の(2)における  $(QP)^2$  に等しいから、

$$R' = \sqrt{z^2 + [R^2 + a^2 - 2aR \cos(\varphi' - \varphi)]} \quad (23)$$

そこで、 $\alpha \equiv (\varphi' - \varphi)$  と置いて、

$$\mathbf{A}_\varphi(R, \varphi, z) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a \cos \alpha \cdot d\alpha}{\sqrt{z^2 + R^2 + a^2 - 2aR \cos \alpha}} \quad (24)$$

この積分は楕円積分で初等関数では表現できないので、次のような条件の下で級数に展開して積分する。 $r^2 = z^2 + R^2$  であるから、 $r \gg a$  であるような遠方位置での値だけを問題にする。

$$\begin{aligned} (z^2 + R^2) + a^2 - 2aR \cos \alpha &= (z^2 + R^2) \left\{ 1 + \frac{a^2}{(z^2 + R^2)} - \frac{2aR \cos \alpha}{(z^2 + R^2)} \right\} \\ &= r^2 \left\{ 1 + \frac{a^2}{r^2} - \frac{2aR \cos \alpha}{r^2} \right\} \approx r^2 \left\{ 1 - \frac{2aR \cos \alpha}{r^2} \right\} \end{aligned}$$

遠方近似から、 $(a/r)^2 \approx 0$  として無視する。

$$(z^2 + R^2 + a^2 - 2aR\cos\alpha)^{-1/2} \\ \approx [r^2(1 - \frac{2aR\cos\alpha}{r^2})]^{-1/2} \approx \frac{1}{r}(1 - \frac{2aR\cos\alpha}{r^2})^{-1/2} \approx \frac{1}{r}(1 + \frac{aR\cos\alpha}{r^2})$$

最後の等式は Taylor 展開で一次までを取った。結局(24)は、

$$\mathbf{A}_\varphi(R, \varphi, z) \approx \frac{\mu_0 I a}{4\pi r} \int_0^{2\pi} (1 + \frac{aR\cos\alpha}{r^2}) \cos\alpha \cdot d\alpha \\ = \frac{\mu_0 I a^2}{4} \frac{R}{r^3} = \frac{\mu_0 I a^2}{4} \frac{R}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \quad (25)$$

$$\mathbf{A}_z(R, \varphi, z) = \mathbf{A}_R(R, \varphi, z) = 0 \quad (26)$$

円筒座標系で表現した点 P(R, φ, z)でのベクトル・ポテンシャル  $\mathbf{A}$  が得られた。磁束密度  $\mathbf{B}$  を求めるには、 $\mathbf{B} = \text{rot}\mathbf{A}$  として変換すれば良い。

もし、(25)を点 P の極座標系の変数 (r, θ, φ)で表せば、 $R = r \cdot \sin\theta$  を使って、

$$\mathbf{A}_\varphi(R, \varphi, z) \approx \frac{\mu_0 I a^2}{4r^2} \sin\theta = \mathbf{A}_\varphi(r, \theta, \varphi) \quad (27)$$

である。

ベクトルの回転は、これまでは x, y, z の直交座標系で表現してきたが、円筒座標系や極座標系などの直交曲線座標系では、grad, rot, div,  $\nabla^2$  などのベクトル演算表現は複雑になる。ベクトル解析のテキスト<sup>2,3)</sup>でその内容を確認されたい。ここで円筒座標系ベクトル  $\mathbf{A}(R, \varphi, z)$  の  $\text{rot}\mathbf{A}$  のみについて掲げる。

$$(\text{rot}\mathbf{A})_R = \frac{1}{R} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \\ (\text{rot}\mathbf{A})_\varphi = \frac{\partial A_R}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial R} \\ (\text{rot}\mathbf{A})_z = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R A_\varphi) - \frac{1}{R} \frac{\partial A_R}{\partial \varphi} \quad (28)$$

極座標系(r, θ, φ)での rot の式はもう少し複雑である。

(25), (26) を (28)に代入すると、

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_R &= (\text{rot}\mathbf{A})_R = \frac{1}{R} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} = -\frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \\
\mathbf{B}_\varphi &= (\text{rot}\mathbf{A})_\varphi = \frac{\partial A_R}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial R} = 0 \\
\mathbf{B}_z &= (\text{rot}\mathbf{A})_z = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (RA_\varphi) - \frac{1}{R} \frac{\partial A_R}{\partial \varphi} = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (RA_\varphi)
\end{aligned} \tag{29}$$

ここで,

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_R &= (\text{rot}\mathbf{A})_R = -\frac{\partial A_\varphi}{\partial z} = -\frac{\mu_0 I a^2}{4} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{R}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \right\} \\
&= \frac{3\mu_0 I a^2}{4} \left\{ \frac{Rz}{(z^2 + R^2)^{5/2}} \right\} = \frac{3}{4} \mu_0 I a^2 \frac{\sin\theta \cdot \cos\theta}{r^3}
\end{aligned} \tag{30}$$

$$\mathbf{B}_\varphi = (\text{rot}\mathbf{A})_\varphi = 0 \tag{31}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_z &= (\text{rot}\mathbf{A})_z = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (RA_\varphi) = \frac{A_\varphi}{R} + \frac{\partial A_\varphi}{\partial R} \\
&= \frac{1}{R} \left[ \frac{\mu_0 I a^2}{4} \frac{R}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \right] + \frac{\mu_0 I a^2}{4} \frac{\partial}{\partial R} \left[ \frac{R}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \right] \\
&= \frac{\mu_0 I a^2}{4} \cdot \frac{1}{(z^2 + R^2)^{3/2}} + \frac{\mu_0 I a^2}{4} \cdot \frac{1}{(z^2 + R^2)^{3/2}} - \frac{3\mu_0 I a^2}{4} \cdot \frac{R^2}{(z^2 + R^2)^{5/2}} \\
&= \frac{\mu_0 I a^2}{2} \cdot \frac{1}{r^3} - \frac{3\mu_0 I a^2}{4} \cdot \frac{R^2}{r^5} \\
&= \frac{1}{2} (\mu_0 I a^2) \cdot \frac{1}{r^3} - \frac{3}{4} (\mu_0 I a^2) \cdot \frac{\sin^2\theta}{r^3}
\end{aligned} \tag{32}$$

以上で円筒座標系での磁束密度  $\mathbf{B}$  が得られたので、これを極座標系の  $\mathbf{B}$  の値に直す。(27)から両座標系で  $\mathbf{A}_\varphi$  は共通で、(31)から両座標系で磁束密度  $\mathbf{B}_\varphi$  も共通で0である。故に、 $(\mathbf{B}_R, \mathbf{B}_z)$  が  $(\mathbf{B}_r, \mathbf{B}_\theta)$  に変換するので、 $(O, R, r)$  の平面内で考えれば良い (図 19-3)。

$$\begin{aligned}
B_r(r, \theta, \varphi) &= B_z \cos\theta + B_R \sin\theta \\
B_\theta(r, \theta, \varphi) &= B_R \cos\theta - B_z \sin\theta \\
B_\varphi(r, \theta, \varphi) &= 0
\end{aligned} \tag{33}$$

となる。

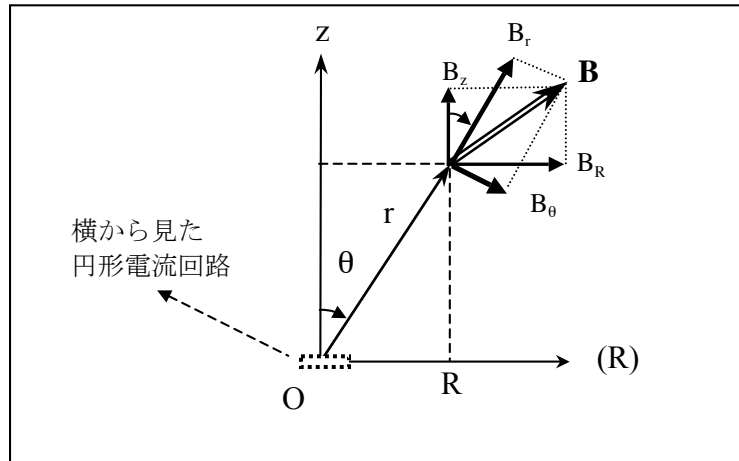


図 19-3. 円筒座標系で表現した円形電流が作る磁場( $\mathbf{B}_R$ ,  $\mathbf{B}_z$ )を極座標系( $\mathbf{B}_r$ ,  $\mathbf{B}_\theta$ )の値に変換する.

(33)に(30), (32)を代入して, 以下の結果となる.

$$\begin{aligned}
 B_r(r, \theta, \varphi) &= \frac{2\mu_0 I \cdot (\pi a^2)}{4\pi} \cdot \frac{\cos \theta}{r^3} \\
 B_\theta(r, \theta, \varphi) &= \frac{\mu_0 I \cdot (\pi a^2)}{4\pi} \cdot \frac{\sin \theta}{r^3} \\
 B_\varphi(r, \theta, \varphi) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{34}$$

この(34)の結果は, 電気双極子が作る電場( $\mathbf{E}_r$ ,  $\mathbf{E}_\theta$ , 0)と相似である. 図 19-4 は § 6-9 で述べた電気双極子が作る電場( $\mathbf{E}_r$ ,  $\mathbf{E}_\theta$ , 0)を再掲したものである.

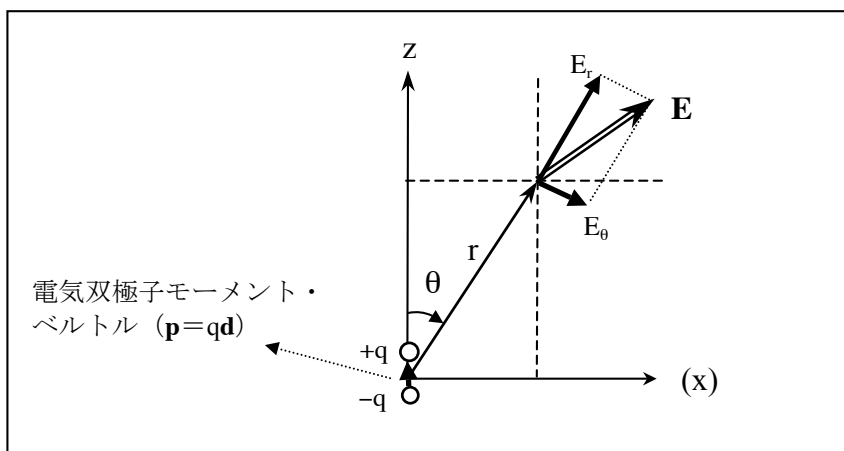


図 19-4. 電気双極子が周囲に作る電場  $\mathbf{E}$ .

電気双極子の作る電場  $\mathbf{E}$  は、この電気双極子モーメント・ベクトル ( $\mathbf{p}=\mathbf{qd}$ ) を含む面内にあり、極座標系で( $\mathbf{E}_r, \mathbf{E}_\theta, \mathbf{E}_\varphi=0$ )の値を持つ。これは図 19-3 の円形電流が周囲につくる磁場( $\mathbf{B}_r, \mathbf{B}_\theta, \mathbf{B}_\varphi=0$ )の値に、係数を別にすれば、一致する。

§ 6-9 で述べたように、電気双極子の静電ポテンシャルは、

$$V_A \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{d\cos\theta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{p\cos\theta}{r^2} \quad (\S 6-9-47)$$

で、電場  $\mathbf{E}(r,\theta) = (E_r, E_\theta)$  は、 $\mathbf{E}(r,\theta) = -\text{grad}V_A$  として

$$E_r = -\frac{\partial V_A}{\partial r} = \frac{2p}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\cos\theta}{r^3} \quad (\S 6-9-48)$$

$$E_\theta = -\frac{\partial V_A}{r\partial\theta} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\sin\theta}{r^3} \quad (\S 6-9-48)$$

であった。(34)の( $\mathbf{B}_r, \mathbf{B}_\theta, \mathbf{B}_\varphi=0$ )に、係数を除き、一致することが判る。そこで、電気双極子モーメント・ベクトル ( $\mathbf{p}=\mathbf{qd}$ ) に対応するものとして、(34)の係数を用いて、

$$|\mathbf{p}_m| \equiv \mu_0 I(\pi a^2) \quad (35)$$

磁気双極子モーメント・ベクトル ( $\mathbf{p}_m$ )を定義する。大きさは(35)で与え、その方向は、環状円形電流  $I$  の流れる向きを右ネジの回転方向とする時のネジ全体の進行方向とする。 $\mathbf{p}_m$ を使うと(34)は、

$$\begin{aligned} B_r(r,\theta,\varphi) &= \frac{2p_m}{4\pi} \cdot \frac{\cos\theta}{r^3} \\ B_\theta(r,\theta,\varphi) &= \frac{p_m}{4\pi} \cdot \frac{\sin\theta}{r^3} \\ B_\varphi(r,\theta,\varphi) &= 0 \end{aligned} \quad (36)$$

となる。 $\mathbf{p}_m$ の導入により、形式的には真空の透磁率( $\mu_0$ )が隠れてしまった。しかし、電気双極子の電場の式には真空の誘電率( $\epsilon_0$ )が残っている。そこで、 $\mathbf{B}=\mu_0\mathbf{H}$ を用いて、(36)の左辺側を磁場強度  $\mathbf{H}$  で書けば、真空の誘電率( $\epsilon_0$ )と同じ位置に

透磁率( $\mu_0$ )が再び現れる.

$$\begin{aligned}
 H_r(r,\theta,\varphi) &= \frac{2p_m}{4\pi\mu_0} \cdot \frac{\cos\theta}{r^3} \\
 H_\theta(r,\theta,\varphi) &= \frac{p_m}{4\pi\mu_0} \cdot \frac{\sin\theta}{r^3} \\
 H_\varphi(r,\theta,\varphi) &= 0
 \end{aligned} \tag{37}$$

電気双極子が作る電場  $\mathbf{E}$  と全く同一形式で記述できる. (38)は電気双極子の電場の成分を改めて記したものである.

$$\begin{aligned}
 E_r(r,\theta,\varphi) &= \frac{2p}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\cos\theta}{r^3} \\
 E_\theta(r,\theta,\varphi) &= \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\sin\theta}{r^3} \\
 E_\varphi(r,\theta,\varphi) &= 0
 \end{aligned} \tag{38}$$

$\mathbf{p} \leftrightarrow \mathbf{p}_m, \mathbf{E} \leftrightarrow \mathbf{H}, \epsilon_0 \leftrightarrow \mu_0$  の対応関係がある.

以上の結果は、「遠方近似」の範囲内で、環状円形電流が、 $p_m = \mu_0 I(\pi a^2)$  の磁気双極子モーメント・ベクトル ( $\mathbf{p}_m$ ) と同等の磁場を与えると結論できる. 円形環状回路の面積を  $S$  とすると、 $p_m = \mu_0 I(\pi a^2) = \mu_0 IS$  となる. 円形ではないが環状 (ループ) の電流であれば、その回路の面積を  $S$  として、等価な磁気双極子モーメントは  $p_m = \mu_0 IS$  で与えられる. そして、その静磁場の空間分布は、「遠方近似」の範囲内で、電気双極子モーメント・ベクトル ( $\mathbf{p}$ ) が与える静電場の空間分布に相似である.

#### 4) “磁荷” と電荷とボア磁子

電気双極子と磁気双極子モーメント・ベクトル, 電場 (強度) と磁場 (強度), 真空の誘電率( $\epsilon_0$ )と透磁率( $\mu_0$ ), 電束密度と磁束密度, の対が一对一に対応する.

$$\mathbf{p} \leftrightarrow \mathbf{p}_m, \quad \mathbf{E} \leftrightarrow \mathbf{H}, \quad \epsilon_0 \leftrightarrow \mu_0, \quad \mathbf{D} \leftrightarrow \mathbf{B} \quad (39)$$

そこで, 電気双極子モーメント・ベクトル ( $\mathbf{p}=q\mathbf{d}$ ) が正負の電荷対と両者の距離で決まるなら, 磁気双極子モーメント・ベクトル ( $\mathbf{p}_m$ )に対して, 前節の環状円形電流ではなく, 正負の“磁荷 $\pm q_m$ ”と両者の距離  $d$  の積を考えることはできる.

$$\mathbf{p}=q\mathbf{d} \leftrightarrow \mathbf{p}_m=q_m\mathbf{d} \quad (40)$$

$\mathbf{p}_m=q_m\mathbf{d}$  を仮定するなら,  $\mathbf{E} \leftrightarrow \mathbf{H}$ の対応関係から,

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_m q'_m}{r^2}, \quad \mathbf{F} = q_m \mathbf{H} \quad (41)$$

も導出できる. これは, ”磁荷のクーロン則 “である. 磁場の問題を”磁荷のクーロン則 “から始めるテキストは今では見られない. “磁荷 $\pm q_m$ ” は実在しないからである. 磁場の話が  $\mathbf{B}$  (磁束密度) から始まり,  $\mathbf{H}$  (磁場強度) はアンペールの法則の説明後となるのも, これが原因である. 正負の“磁荷 $\pm q_m$ ” を考えることは許されるが, 実在しない. 実在するのは「環状電流」である.

「磁気双極子モーメント」という概念は, いわば「棒状の永久磁石」が作り出す磁場の大きさを表現するものである.  $S$  を環状電流回路の面積とすると, 磁気双極子モーメントの大きさは,

$$p_m = \mu_0 I (\pi a^2) = \mu_0 I S \quad (42)$$

であるから, 磁気双極子モーメントの次元は  $[N \cdot A^{-1} \cdot m^2]$  である (しかし,  $\mu_0$  を



除いた部分で磁気双極子モーメントを定義することもあるので注意が必要)。現実の永久磁石内部においても「環状電流の集合体」が存在する結果と考えた方が良い。

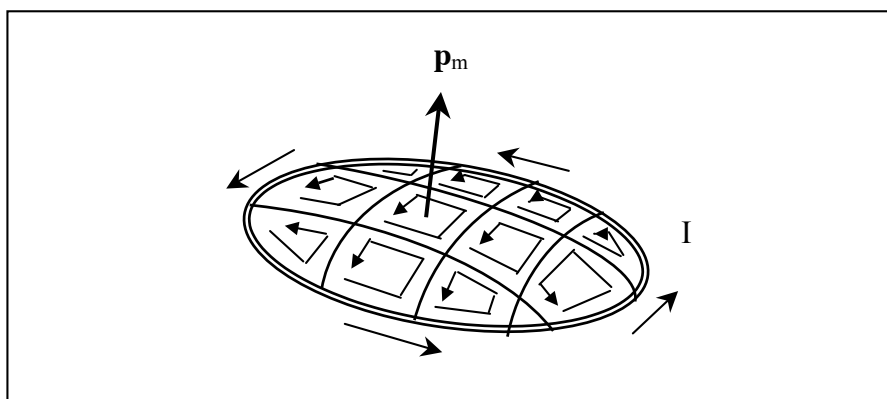


図 19-5. 環状電流  $I$  と、このループの面を構成する網目状の微小環状ループにも同じ電流  $I$  を流したとする。内部の微小ループで電流  $I$  は隣り合う境界で相殺され、一番外の環状（ループ）電流  $I$  のみが残る。

図 19-5 は環状ループに電流  $I$  を流し、このループ面積内の網目状の微小環状ループにも同じ電流  $I$  を流した状況を示す。内部の微小ループ電流  $I$  は隣り合う境界で相殺され、一番外の環状ループ電流  $I$  のみが残る。故に、外側の環状ループ電流  $I$  は、このループ面積内の網目状の微小環状電流  $I$  の集合と等価である。網目状の微小環状ループのサイズは、順次小さくして考えることができるから、このサイズは原子サイズまで小さくすることができるだろう。このような「環状ループ電流」が幾つも集まった物質が永久磁石と理解される。この問題は § 20 磁性体の項で再度論ずるが、ここでは原子自体について考える。

原子内部に存在する電子は、それ自体がスピン角運動量（“自転運動”の角運動量）もち、小磁石のような「スピン磁気モーメント」を持っている。同時に、

電子は原子核の周りを運動している。これは“電子の公転運動”にあたるが、電子は電荷を持っているので、これを環状円形電流と見なすことが出来る。ボーア(Bohr, N., 1885~1962)の原子模型で考えると、半径  $a$  の円の中心に原子核があり、円周上を質量  $m_e$ 、電荷  $-e$  の電子が速度  $v$  で定常回転運動をしていることになる。この角運動量  $L$  の大きさは、

$$L = m_e a v \quad (43)$$

である。電荷  $-e$  を持つ電子の運動を回転円運動と見なすと、これは一定の円形電流と見なすことができる。電流  $I$  の大きさは、

$$I = \frac{ev}{2\pi a} \quad (44)$$

となる。この円形電流を、(42)の「遠方近似」から磁気双極子モーメントに読み替えると、その大きさは、(43)の  $L$  も使うと、

$$p_m = \mu_0 I (\pi a^2) = \mu_0 \left( \frac{ev}{2\pi a} \right) (\pi a^2) = \mu_0 \cdot \frac{eva}{2} = \mu_0 \cdot \frac{e}{2m_e} L \quad (45)$$

となる。量子論によれば、角運動量  $L$  は、 $h$  をプランク定数( $\hbar \equiv h/(2\pi)$ )として、次の離散的な値しか許されない。

$$L = \hbar l \quad (l = 0, 1, 2, \dots) \quad (46)$$

従って、磁気双極子モーメントの値は、

$$p_m = \mu_0 \cdot \frac{e\hbar}{2m_e} \cdot l \quad (l = 0, 1, 2, \dots) \quad (47)$$

となる。この回転運動の量子数  $l$  の係数は、量子論による磁気モーメントの単位量を表す。磁気双極子のモーメントは  $\mu_0$  を含めて(42)のように表現するが、 $\mu_0$  を除いた値で表現することもある。(47)右辺の  $l$  の係数で、 $\mu_0$  を除いたものは、通常「ボーアの磁子 (Bohr magneton)」と呼ばれる。ボーアの磁子は  $[A \cdot m^2]$  の次

元を持ち、 $m_B$ とか $\mu_B$ と表記される。

$$m_B \equiv \frac{e\hbar}{2m_e} \approx 0.927 \times 10^{-23} (\text{A} \cdot \text{m}^2) \quad (48)$$

ここでは $\mu_0$ を含めて(42)のように磁気双極子モーメントを記述しているので、(42)の磁気双極子モーメントの次元は $[\text{N} \cdot \text{A}^{-1} \cdot \text{m}^2]$ であり、真空の透磁率 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} (\text{N} \cdot \text{A}^{-2})$ をボーアの磁子 $m_B \approx 0.927 \times 10^{-23} (\text{A} \cdot \text{m}^2)$ に掛けた際の次元に当たる。

“磁荷 $\pm q_m$ ”は実在せず、実在するのは「環状電流」である。しかし、“磁荷 $\pm q_m$ ”を考えることは許されるので、“磁荷 $\pm q_m$ ”の次元を考えてみよう。

$$\mathbf{p} = q\mathbf{d} \Leftrightarrow \mathbf{p}_m = q_m\mathbf{d} \quad (40)$$

からすると、電荷 $q$ の次元は $[\text{C}] = [\text{A} \cdot \text{s}]$ である。“磁荷 $\pm q_m$ ”の次元は、「磁気双極子モーメント」/[長さ]であるから、 $[\text{N} \cdot \text{A}^{-1} \cdot \text{m}]$ である。この“磁荷 $q_m$ ”の単位が Weber (Wb)である。

$$\text{“磁荷 } q_m \text{” の単位 : } \textit{Weber (Wb)} = [\text{N} \cdot \text{A}^{-1} \cdot \text{m}]$$

次に、[電荷・“磁荷”]の積の次元を求めると、

$$[q \cdot q_m] = [\text{C} \cdot \text{N} \cdot \text{A}^{-1} \cdot \text{m}] = [\text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}] = [\text{J} \cdot \text{s}] \quad (49)$$

となり、[エネルギー・時間] = [作用量]の次元となる。量子力学の基本定数であるプランク定数は[作用量]の次元をもつが、これと同じ次元である。この意味については、今井<sup>2,2)</sup>による興味深い議論がある。

## 5) 電流が作る磁場

### ＜一様な面電流が作る磁場＞

無限平面を一様な面電流密度  $j$  で流れる電流 (図 19-6) が作る磁場を、ベクトル・ポテンシャルを用いて求めてみる。結果は、§ 3 で求めた「一様な面密度 ( $\sigma$ ) で平面に分布する電荷が作る電場」に類似した形で求まる。

ベクトル・ポテンシャルは

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{i}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3\mathbf{x}' \quad (3)$$

である。電流が  $x$ - $y$  の無限平面を一様な面電流密度 ( $j$ ) で  $x$  方向に流れているので、空間の位置  $\mathbf{x}' = (x', y', 0)$  における体積素片  $d^3\mathbf{x}'$  での電流は、 $x$  方向の単位ベクトルを  $\mathbf{n}_x$  とし、

$$\mathbf{i}(\mathbf{x}') d^3\mathbf{x}' = \mathbf{n}_x \cdot j \cdot dx' dy' \quad (50)$$

となる。電流は  $z=0$  の平面のみにあるから、 $dz'$  は加わらない。また、 $j$  の次元は  $[A/m^2]$  である。

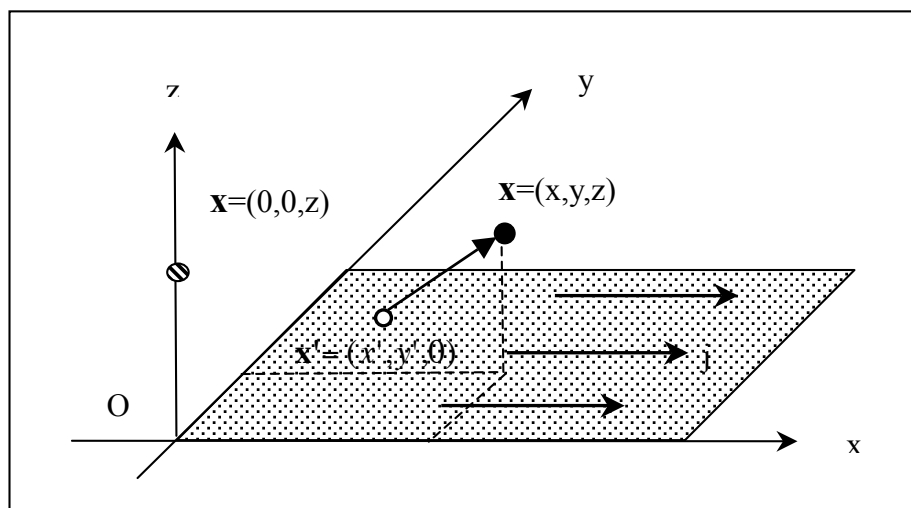


図 19-6. 無限平面上で  $x$  方向に向かう一様な面電流 ( $j$ ) が作る磁場

(3)と(50)から、ベクトル・ポテンシャルは、

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{i}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3\mathbf{x}' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathbf{n}_x \cdot \mathbf{j}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dx' dy' \quad (51)$$

となる。電流は  $z'=0$  の平面のみにあるから、 $dz'$ は加わらない。しかし、 $z'$ につ

いてのデルタ関数の性質  $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(z') dz' = 1$  を使えば、

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathbf{n}_x \cdot \mathbf{j} \cdot dx' dy'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(z') dz' = \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathbf{n}_x \cdot \mathbf{j} \cdot \delta(z') d^3\mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \quad (52)$$

ここでは、 $d^3\mathbf{x}' = dx' dy' dz'$ を意味する。

$\mathbf{x}=(x,y,z)$ と一般的に考える必要はなく、座標原点は  $x-y$  の無限表面上のどこにとっても同じであるから、図 19-6 に示すように、 $x=0, y=0$  である  $\mathbf{x}=(0,0,z)$  の位置でのベクトル・ポテンシャルを考える。(52)は、

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathbf{n}_x \cdot \mathbf{j} \cdot \delta(z')}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z'-z)^2}} dx' dy' dz' \quad (53)$$

このベクトル・ポテンシャル  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ は  $x$  成分しか持たない。また、係数部分を除いた積分は  $z$  のみの関数であるので、以後、これだけを考える。

$$f(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\delta(z')}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z'-z)^2}} dx' dy' dz' \quad (54)$$

これはデルタ関数の性質を使うと、

$$\begin{aligned} f(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\delta(z')}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z'-z)^2}} dz' \right\} dx' dy' \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z)^2}} dx' dy' \end{aligned} \quad (55)$$

従って、

$$A_x = \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right) \cdot \mathbf{j} \cdot f(z), \quad A_y = A_z = 0 \quad (56)$$

となる。

$\mathbf{B} = \text{rot}\mathbf{A}$  であるから,

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = 0, \quad B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \quad B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = 0$$

故に,  $B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z}$  のみが 0 ではない磁束密度成分となる.  $y$  方向の単位ベクトル

を  $\mathbf{n}_y$  として,

$$\mathbf{B} = \frac{\partial A_x}{\partial z} \cdot \mathbf{n}_y \quad (57)$$

である.

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_x}{\partial z} &= \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right) \cdot j \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z)^2}} dx' dy' \right] \\ &= \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right) \cdot j \cdot (-z) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{((x')^2 + (y')^2 + (z)^2)^{3/2}} dx' dy' \\ &= \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right) \cdot j \cdot (-z) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{((x')^2 + (y')^2 + (z)^2)^{3/2}} dx' \right\} dy' \end{aligned}$$

中括弧内の  $x'$  についての積分は,  $x' = a \cdot \tan\theta$  ( $a^2 = y'^2 + z^2$ ) として,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{((x')^2 + (y')^2 + (z)^2)^{3/2}} dx' &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x'^2 + a^2)^{-3/2} dx' \\ &= (1/a^2) \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} (1 + \tan^2\theta)^{-3/2} \cdot \cos^{-2}\theta \cdot d\theta = 2/a^2 = \frac{2}{y'^2 + z^2} \end{aligned}$$

したがって, 再度,  $y' = z \cdot \tan\theta$  と置換して,

$$\begin{aligned} B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} &= \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right) \cdot j \cdot (-z) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{y'^2 + z^2} dy' \\ &= \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right) \cdot j \cdot (-z) \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{2}{(z)^2 (\tan^2\theta + 1)} \cdot \frac{z}{\cos^2\theta} d\theta \\ &= \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right) \cdot j \cdot (-z) \cdot (2/z) [\theta]_{-\pi/2}^{+\pi/2} = -\left(\frac{\mu_0}{2}\right) j \end{aligned} \quad (58)$$

となる.

(58)での  $y'$ の積分でも,  $y' = z \cdot \tan\theta$ の置換を行っている.  $z > 0$  の場合は, これ

で良い。しかし、 $z < 0$  の場合、即ち平面の下側では、 $y' = z \cdot \tan \theta$  の関係から、 $y' = -\infty$  には  $\theta = +\pi/2$ 、 $y' = +\infty$  には  $\theta = -\pi/2$ 、が対応する。(58)での積分は、 $+\pi/2 \rightarrow -\pi/2$  に変更され、結果には負符号が付く。 $z < 0$  の場合は  $B_y = +(\frac{\mu_0}{2})j$  となる。従って、 $B_y$  は符号も含めて、

$$\mathbf{B}_y = -(\frac{\mu_0 j}{2})(z/|z|) \cdot \mathbf{n}_y \quad (59)$$

と一般的表現に表現できる。磁場は  $z = 0$  で不連続  $\mu_0 j$  となっている。

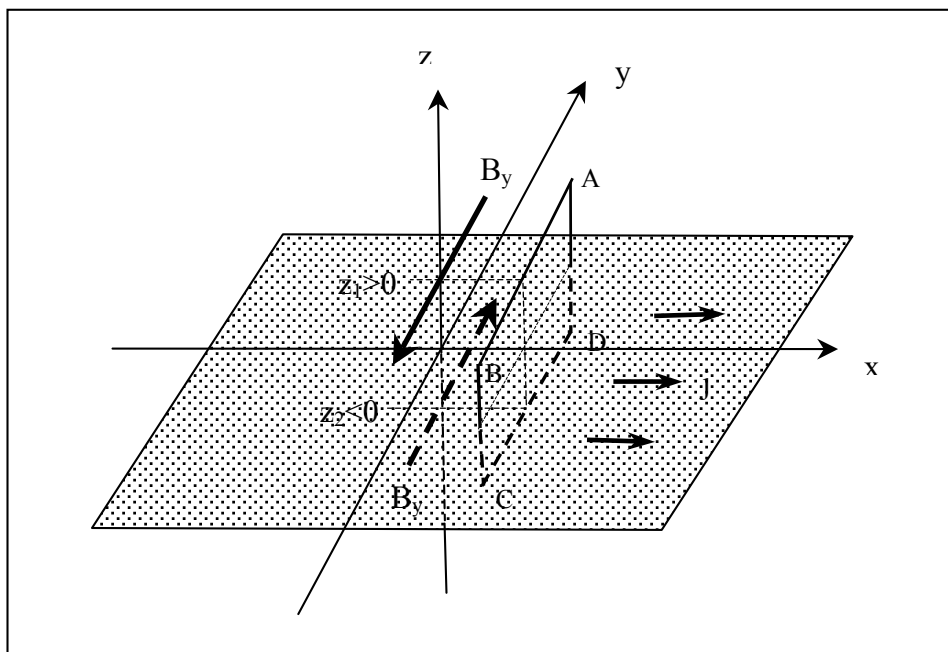


図 19-7. 無限の  $x$ - $y$  平面内で  $x$  方向に流れる一様電流密度( $j$ )電流が周りに作る磁場 ( $B_y$ ). アンペールの法則を考える矩形経路  $ABCD$ .

図 19-7 は、一様電流密度( $j$ )の電流が周りに作る磁場 ( $B_y$ ) とアンペールの法則を考える矩形経路  $ABCD$  を示す。この経路は、電流の方向に進む右ネジの回転方向に対応している。矩形のサイズは  $AB=CD=b$ ,  $BC=DA=c$  とする。この矩形ループを右ネジの進行方向に横切る電流は ( $j \cdot b$ ) である。アンペールの法則

(32)より,

$$\int_{ABCD} \mathbf{B}(\mathbf{s}) \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 \sum_k I_k = \mu_0 \cdot j \cdot b$$

となる. (59)から, 磁場は  $y$  軸方向のみであるから, 左辺側で0ではないのは,  $y$  軸方向の AB と CD の区間である. BC と DA の区間は  $y$  軸方向と直交するのでこれらの経路の積分は0である. (59)から判るように,  $B_y$ の大きさは  $z$  に依存しないが, その符号は  $z$  の正負に依存する. 図 19-7 の AB では  $z_1 > 0$  で, CD では  $z_2 < 0$  であるので,

$$B_y(z_1 > 0) = -\frac{\mu_0}{2} j < 0, \quad B_y(z_2 < 0) = \frac{\mu_0}{2} j > 0$$

となる. AB の区間では, 経路は  $y$  の負方向で  $B_y$  の値も負である. CD の区間では経路は  $y$  の正方向,  $B_y$  の値も正であるから, 経路 ABCDA の線積分は,

$$\int_{ABCD} \mathbf{B}(\mathbf{s}) \cdot d\mathbf{s} = \left(-\frac{\mu_0}{2} \cdot j\right) \cdot (-b) + \left(\frac{\mu_0}{2} \cdot j\right) \cdot (b) = \mu_0 \cdot j \cdot b$$

となり, アンペールの法則を満足している.

$x$  方向の一様な平面電流は,  $x$  方向に向く細いフィラメントを  $x$ - $y$  平面に並べたものと考えれば良い. 各フィラメントの  $x$  方向に直線電流が流れているから, この電流方向を右ネジの進行方向とする磁場が  $y$ - $z$  面に生じる.  $x$ - $y$  平面に平行に並ぶ他のフィラメントによる同様な磁場により,  $z$  成分は打ち消しあう. 結果として,  $y$  成分のみが残る. その  $y$  成分の向きは, 磁場はフィラメント電流の周りに右ネジの回転方向に生じているので, 面の上 ( $z > 0$ ) での磁場は  $y$  の負方向で, 下側 ( $z < 0$ ) では反対の  $y$  の正方向となることも判る. これらの条件とアンペールの法則から, 磁場の値が決まる. 上述のベクトル・ポテンシャルを用いた計算は必ずしも必要ではない.



<円筒状コイル電流の磁場>

円筒状コイルに流れる電流（ソレノイド, solenoid）がつくる磁場も，アンペールの定理を用いると，簡単に求めることが出来る．図 19-7 の（1）は

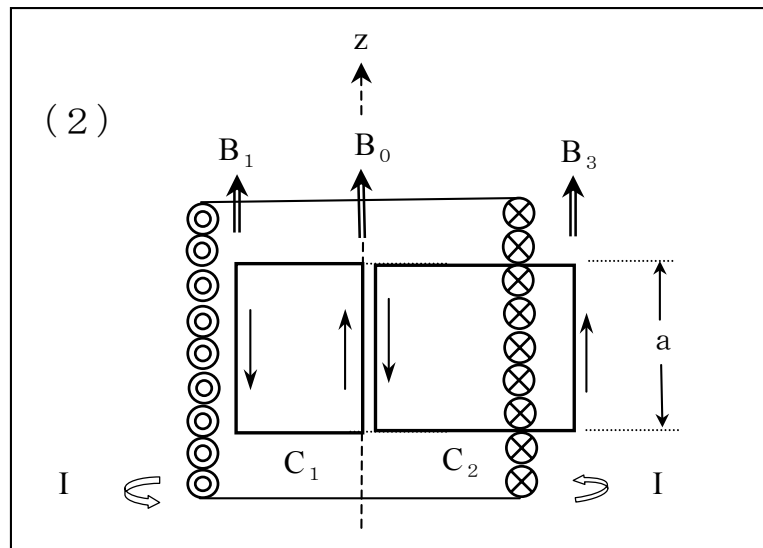
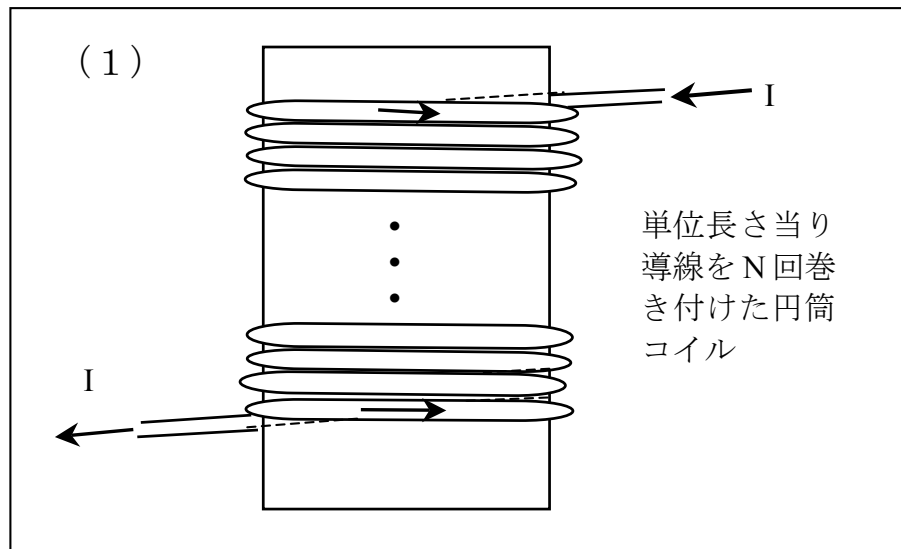


図 19-7. 円筒状コイルに流れる電流（ソレノイド）.

単位長さ当り導線を  $N$  回巻き付けた十分長い円筒コイル（ソレノイド）をしめす．その中央部を拡大したのが（2）の断面図である．

§ 18-5 で、 $z$  軸に垂直な単一の円形コイルが  $z$  軸上に作る磁束密度を

$$\begin{aligned} B(0,0,z) &= \int_{s=0}^{2\pi a} dB \cos \alpha = \int_{s=0}^{2\pi a} \frac{\mu_0 I}{4\pi |R|^2} \cos \alpha \cdot ds \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi |R|^2} \cos \alpha \cdot 2\pi a = \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2 + z^2)^{3/2}} \quad (\text{§ 18-5-19}) \end{aligned}$$

と求めた。その向きは常に  $z$  軸の正方向を向く。§ 19-3-(36)の遠方近似とも合致する。

円形コイルを  $z$  方向に積み重ねたものをソレノイドと考えることができる。結局は、単一コイルを  $z$  軸方向に「積み重ねる」ために、 $z$  軸方向以外の磁場成分は 0 となる。ただし、実際は導線を螺旋状に巻くので、「円形コイルを  $z$  方向に積み重ねたもの」は近似であり、 $z$  軸方向の電流成分もわずかに持ち、これによる僅かな磁場成分も存在する。しかし、これは無視することにする。

円筒状コイルは十分に長いとして、中心部の磁場  $\mathbf{B}$  は、単位長さ当たりの巻き数が  $N$  であるから、

$$dB = \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2 + z^2)^{3/2}} \cdot N \cdot dz \quad (60)$$

を  $-\infty$  から  $+\infty$  間で積分した結果が、円筒状コイル中心での磁束密度  $\mathbf{B}$  となる。

$$B = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2 + z^2)^{3/2}} \cdot N \cdot dz = \frac{\mu_0 I a^2}{2} \cdot N \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{(a^2 + z^2)^{3/2}} = N \mu_0 I \quad (61)$$

この積分は、(56)で行ったように、 $z = a \cdot \tan \theta$  の置換をすれば良い。円筒状コイルは十分に長いとの仮定から、(61)の値は  $z$  に依存しない。これは、 $z$  軸以外の場所でも同様に成立する。また、単一コイルを  $z$  軸方向に「積み重ねる」ために、 $z$  軸方向以外の磁場成分は相互に打ち消され 0 となる。

従って、図 19-7-(2)に示した二つの経路  $C_1$  と  $C_2$ 、ソレノイドの磁束密度値を

$B_0$ (中心部) =  $N\mu_0 I$ ,  $B_1$ (内部),  $B_0$ (外部)として, アンペールの法則を適用し,  
これら磁束密度の値を決めることができる. 電流は経路  $C_1$  を貫いていないから,

$$\int_{C_1} \mathbf{B}(\mathbf{s}) \cdot d\mathbf{s} = a(B_0 - B_1) = 0$$

故に,

$$B_0 = B_1 = N\mu_0 I \quad (62)$$

経路  $C_2$  は電流( $aNI$ )に貫かれているから,

$$\int_{C_1} \mathbf{B}(\mathbf{s}) \cdot d\mathbf{s} = a(B_3 - B_0) = -\mu_0 aNI$$

である. 右辺に負符号が付くのは電流は紙面の手前から後ろに向うからである.  
き(64)から,

$$B_3 = 0 \quad (63)$$

従って, ソレノイドの磁場は,  $B_0$ (中心部) =  $B_1$ (内部) =  $N\mu_0 I$ ,  $B_0$ (外部) = 0 である.

### <ドーナツ状のコイル電流の磁場>

円筒状コイルを両端を曲げて, 図 19-8 に示すようなドーナツ状 (平均半径  $r$ )

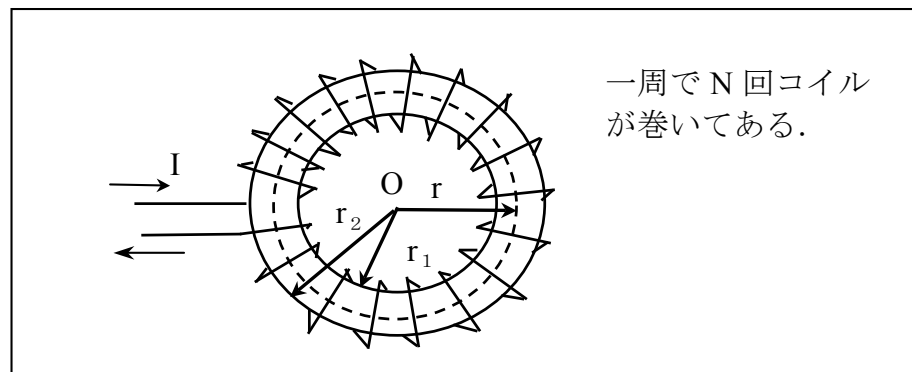


図 19-8. トロイドの磁場.

としたコイルはトロイド (toroid) と呼ばれる。一周で  $N$  回コイルが巻いて

あるものとする。半径  $r$  の円周を経路として、アンペールの法則を考えると、

$$\int_C \mathbf{B}(\mathbf{s}) \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 NI$$

この積分経路を通じて、磁束密度が一定とすると、

$$B \int_C ds = 2\pi \cdot r B = \mu_0 NI, \quad B_c \int_C ds = 2\pi \cdot r B_c = \mu_0 NI$$

であるから、

$$B_c = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} \approx \frac{\mu_0 NI}{2\pi r_1} \approx \frac{\mu_0 NI}{2\pi r_2} \quad (64)$$

となる。やはり螺旋状に導線を巻くので、点  $O$  を中心とする円周にそった電流も存在する。しかし、巻き数  $N$  を大きくすることで、この影響は小さくでき、コイル内部には比較的均一な磁場が得られる。

### <長方形のコイル>

有限の長さの直線電流がつくる磁場を求め、これを用いて、長方形のコイル電流がその中心部鉛直方向に作る静磁場を求める。有限の長さの直線電流がつくる磁場は図 19-9 に示すように、ビオー・サバルの定理の  $d\mathbf{B}$  を  $s=a$  から

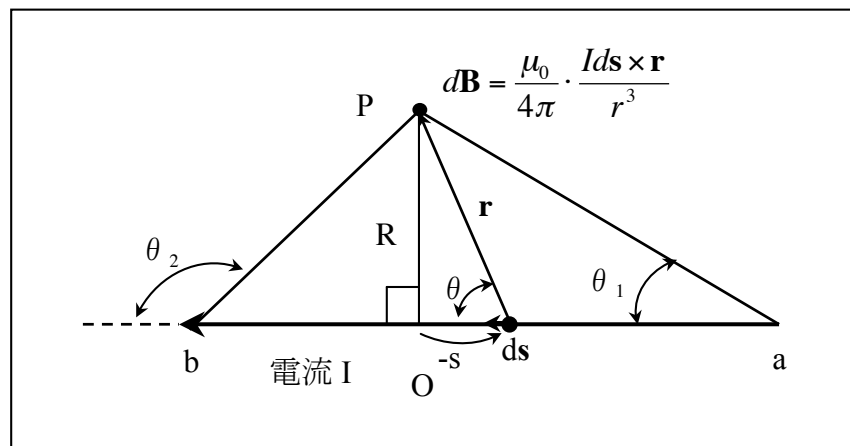


図 19-9. a から b の有限長直線電流 I が点 P につくる磁束密度  $\mathbf{B}(P)$  は、ビオー・サバルの定理の  $d\mathbf{B}$  を  $s=a$  から b まで積分する。  $d\mathbf{B}$  と  $\mathbf{B}$  は P 点で紙面の裏を向く。

b まで積分する

図 19-9 から、  $\tan\theta = R/(-s)$ 、  $\cos\theta = (-s)/r$  であるから、

$$(-s) = R/\tan\theta, \quad r = (-s)/\cos\theta = R \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \cdot \frac{1}{\cos\theta} = \frac{R}{\sin\theta} \quad (65)$$

である。初めの式を  $\theta$  で微分すると

$$\frac{d(-s)}{d\theta} = R \frac{d}{d\theta} \left( \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \right) = R \left( \frac{-\sin^2\theta - \cos^2\theta}{\sin^2\theta} \right)$$

となり、

$$\frac{ds}{d\theta} = \frac{R}{\sin^2\theta} \quad (66)$$

である。これをビオー・サバルの定理による  $d\mathbf{B} = (\mu_0/4\pi) \cdot (I \cdot ds \times \mathbf{r})/r^3$  に代入

して,

$$dB = \frac{\mu_0 I \cdot \sin\theta \cdot ds}{4\pi r^2} = \frac{\mu_0 I \cdot \sin^3\theta \cdot R}{4\pi R^2 \sin^2\theta} d\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \sin\theta d\theta \quad (67)$$

となる. a から b までの積分は,  $\theta$  の積分として

$$B(P) = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \cdot \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin\theta d\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \cdot (\cos\theta_1 - \cos\theta_2) \quad (68)$$

となる.  $\mathbf{B}$  は面 P-a-b 上の P 点で紙面の手前側から裏側を向く.

(68)式を図 19-10 に示す長方形の四辺 (長さ a の二辺と b の二辺) に使う.

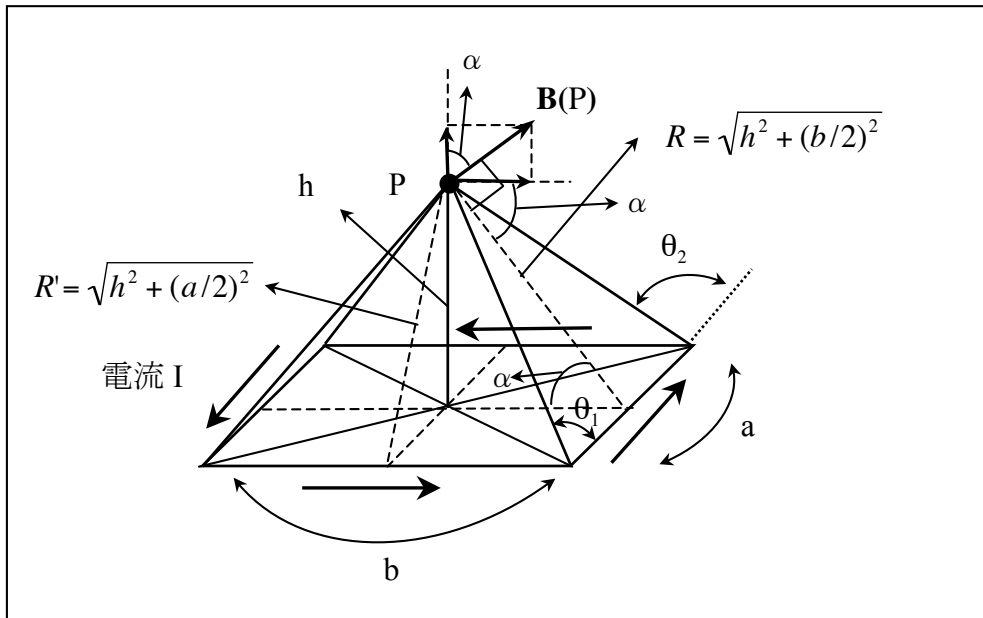


図 19-10. 辺の長さが a と b である長方形の中心点上の P での磁束密度  $\mathbf{B}(P)$  を考える. P の高さは h とする.

図 19-10 に示した長さ a の一辺の直線電流による磁束密度を  $\mathbf{B}_a(P)$  と記す. これは (68) で与えられる. この場合は,

$$\cos\theta_1 = \frac{(a/2)}{\sqrt{h^2 + (b/2)^2 + (a/2)^2}}, \quad \cos\theta_2 = \cos(\pi - \theta_1) = -\cos\theta_1 \quad (69)$$

であるから

$$B_a(P) = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \cdot (\cos\theta_1 - \cos\theta_2) = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \cdot 2\cos\theta_1 \quad (70)$$

ただし、

$$R = \sqrt{h^2 + (b/2)^2} \quad (71)$$

である。この  $B_a(P)$  の水平成分は、反対側のもう一つ長さ  $a$  の直線電流による  $B_a(P)$  と重ね合わされた時に相殺される。二つの  $a$  の辺による  $B_a(P)$  の垂直成分の和は、

$$\begin{aligned} B_{az}(P) &= B_a(P) \cdot 2\cos\alpha = B_a(P) \cdot 2 \cdot \frac{(b/2)}{R} = B_a(P) \cdot \frac{b}{\sqrt{h^2 + (b/2)^2}} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{ab}{[h^2 + (b/2)^2] \cdot \sqrt{h^2 + (b/2)^2 + (a/2)^2}} \end{aligned} \quad (72)$$

となる。

長さ  $b$  の一対の辺についても、同様にして鉛直成分を計算する。この場合は、

$$\cos\theta_1 = \frac{(b/2)}{\sqrt{h^2 + (b/2)^2 + (a/2)^2}}, \quad \cos\theta_2 = \cos(\pi - \theta_1) = -\cos\theta_1 \quad (73)$$

である。

$$R' = \sqrt{h^2 + (a/2)^2} \quad (74)$$

$$B_b(P) = \frac{\mu_0 I}{4\pi R'} \cdot (\cos\theta_1 - \cos\theta_2) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R'} \cdot \cos\theta_1 \quad (75)$$

この水平成分も、反対側のもう一つ長さ  $b$  の直線電流の  $B_b(P)$  と重ね合わされた時に相殺される。二つの  $b$  の辺による  $B_b(P)$  の垂直成分の和は、

$$\begin{aligned} B_{bz}(P) &= B_b(P) \cdot 2\cos\alpha = B_b(P) \cdot 2 \cdot \frac{(a/2)}{R'} = B_b(P) \cdot \frac{a}{\sqrt{h^2 + (a/2)^2}} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{ab}{[h^2 + (a/2)^2] \cdot \sqrt{h^2 + (b/2)^2 + (a/2)^2}} \end{aligned} \quad (76)$$

である。故に、(72)と(76)の和が  $B(P)$  の鉛直成分  $B_z(P)$  となる。

$$B_z(P) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{ab}{\sqrt{h^2 + (a/2)^2 + (b/2)^2}} \left[ \frac{1}{h^2 + (a/2)^2} + \frac{1}{h^2 + (b/2)^2} \right] \quad (77)$$

である。

$h=0$  である長方形コイルの中心では、

$$\begin{aligned} B_z(h=0) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{ab}{\sqrt{(a/2)^2 + (b/2)^2}} \left[ \frac{1}{(a/2)^2} + \frac{1}{(b/2)^2} \right] \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{16}{2} \cdot \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{ab} = \frac{\mu_0 I}{\pi} \cdot \frac{2\sqrt{a^2 + b^2}}{ab} \end{aligned} \quad (78)$$

また、(77)で  $a=b$  とすると、

$$B_z(P) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \frac{a^2}{(h^2 + a^2/4)\sqrt{h^2 + a^2/2}} \quad (79)$$

### <長方形コイルを積み重ねた中空筒が作る磁場>

図 19-10 で考えた辺の長さが  $a$  と  $b$  である長方形コイルを、ソレノイドの場合と同様に  $z$  方向に積み重ねた場合 (図 19-11), その中心部での磁束密度  $\mathbf{B}$  はどうなるであろうか? 円筒状のソレノイドでは、内部では均一な  $\mathbf{B}=\mu_0 n\mathbf{I}$ , 外部では  $\mathbf{B}=0$  であったが、この場合はどうであろうか? 円筒状のソレノイドの場合と同じように、まず、図 19-11 で中心部鉛直方向の磁束密度  $\mathbf{B}$  を求めることから始める。

長方形の各コイルには  $I$  の電流が流れているとする。その中心部鉛直方向の磁場は (77)で与えられるので、 $z$  方向の単位長さ当りのコイルの巻き数  $n$  を掛けて、 $z$  方向に積分すれば良い。

$$B_z(0,0,z) = \int_{-\infty}^{+\infty} B_z(P) \cdot n \cdot dz = \frac{\mu_0 n I}{4\pi} \cdot ab \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f(z) dz \quad (80-1)$$

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{z^2 + (a/2)^2 + (b/2)^2}} \left[ \frac{1}{z^2 + (a/2)^2} + \frac{1}{z^2 + (b/2)^2} \right] \quad (80-2)$$



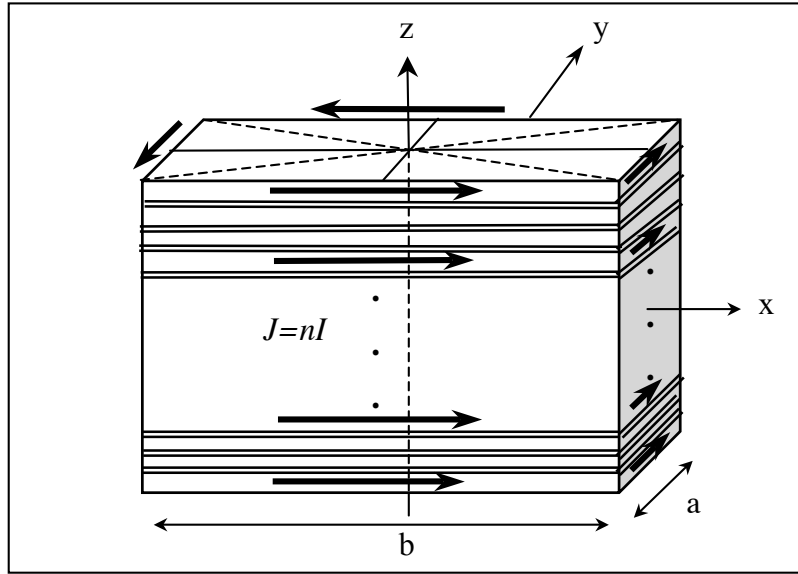


図 19-11. 長方形の断面積のコイルを  $z$  方向に積み重ねる.  $z$  方向の単位長さ当りのコイルの巻き数を  $n$  とすると, 各面は  $J=nI$  の面電流を持つ.

図 19-11 での四つの面は  $J=nI$  の面電流を持ち, その電流は  $z$  軸に垂直である.

(80-1)の右辺の積分の為に,

$$a' = (a/2), \quad b' = (b/2), \quad c^2 = (a/2)^2 + (b/2)^2 = a'^2 + b'^2 \quad (81)$$

と表記する. そして,  $z = c \cdot \tan\theta$  として, 積分変数を  $z$  から  $\theta$  に変更する.

$$z^2 + c^2 = c^2(1 + \tan^2\theta) = c^2 / \cos^2\theta, \quad dz = (c / \cos^2\theta) d\theta, \quad -\pi/2 \leq \theta \leq +\pi/2 \quad (82)$$

(81),(82)を(80)の被積分関数に代入し, 部分分数に分解する.

$$\begin{aligned} f(z)dz &= \left[ \frac{\cos\theta}{c^2 - b'^2 \cos^2\theta} + \frac{\cos\theta}{c^2 - a'^2 \cos^2\theta} \right] d\theta \\ &= \left[ \frac{-(1/2b')}{c + b'\cos\theta} + \frac{(1/2b')}{c - b'\cos\theta} + \frac{-(1/2a')}{c + a'\cos\theta} + \frac{(1/2a')}{c - a'\cos\theta} \right] d\theta \end{aligned} \quad (83)$$

これらの各項は, 結果的に, 以下の類似の定積分になるので,

$$w = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{d\theta}{\alpha + \beta \cos\theta} \quad (84)$$

予めこの解を得ておくことにする。以下に記す  $\tan(\theta/2)$  の性質を使う。

$\tan(\theta/2) \equiv t$  とすると,

$$(1) \quad 1 + t^2 = 1 + \frac{\sin^2(\theta/2)}{\cos^2(\theta/2)} = \frac{1}{\cos^2(\theta/2)}$$

$$(2) \quad \cos\theta = \cos^2(\theta/2) \cdot \left[1 - \frac{\sin^2(\theta/2)}{\cos^2(\theta/2)}\right] = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$(3) \quad \sin\theta = 2 \cdot \left[\frac{\sin(\theta/2)}{\cos(\theta/2)}\right] \cdot \cos^2(\theta/2) = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$(4) \quad d\theta = \frac{2dt}{1+t^2}$$

また,  $\tan^{-1}x$  は

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1}x + \text{const.} \quad \text{であるから,} \quad \frac{d}{dx}(\tan^{-1}x) = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{が成立する.}$$

これらを使うと,

$$w = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{d\theta}{\alpha + \beta \cos\theta} = 2 \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{(\alpha + \beta) + (\alpha - \beta)t^2} = 2 \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{(\alpha + \beta) \cdot \left[1 + \frac{(\alpha - \beta)}{(\alpha + \beta)} t^2\right]}$$

ここで,  $s \equiv \sqrt{\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}} \cdot t$  とすると,

$$\begin{aligned} w &= \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{d\theta}{\alpha + \beta \cos\theta} = \frac{2}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} \cdot \int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{1 + s^2} = \frac{2}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} \left| \tan^{-1}(s) \right|_{s_1}^{s_2} \\ &= \frac{2}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} \cdot \left| \tan^{-1} \left\{ \sqrt{\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}} \cdot t \right\} \right|_{t_1}^{t_2} \\ &= \frac{2}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} \cdot \left| \tan^{-1} \left\{ \sqrt{\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}} \cdot \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \right\} \right|_{-\pi/2}^{+\pi/2} \end{aligned} \quad (85)$$

となる。

(85)の結果を (83)の四つの項の積分に使う. (83)を積分すると.

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{+\infty} f(z) dz &= -\frac{4}{ab} \left\{ \tan^{-1} \left( \sqrt{\frac{c-(b/2)}{c+(b/2)}} \right) - \tan^{-1} \left( -\sqrt{\frac{c-(b/2)}{c+(b/2)}} \right) \right\} \\
 &\quad + \frac{4}{ab} \left\{ \tan^{-1} \left( \sqrt{\frac{c+(b/2)}{c-(b/2)}} \right) - \tan^{-1} \left( -\sqrt{\frac{c+(b/2)}{c-(b/2)}} \right) \right\} \\
 &\quad - \frac{4}{ab} \left\{ \tan^{-1} \left( \sqrt{\frac{c-(a/2)}{c+(a/2)}} \right) - \tan^{-1} \left( -\sqrt{\frac{c-(a/2)}{c+(a/2)}} \right) \right\} \\
 &\quad + \frac{4}{ab} \left\{ \tan^{-1} \left( \sqrt{\frac{c+(a/2)}{c-(a/2)}} \right) - \tan^{-1} \left( -\sqrt{\frac{c+(a/2)}{c-(a/2)}} \right) \right\} \\
 &\approx \frac{4\pi}{ab} \tag{86}
 \end{aligned}$$

となる. この結果は,

$$a/b < 1$$

$$\tan^{-1} x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \dots, \quad (x^2 < 1)$$

$$= \pm \frac{\pi}{4}, \quad (x = \pm 1)$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \dots, \quad (x^2 > 1)$$

$$\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1+x^2}$$

であることに注意して, (86)の各項について以下のように考えれば得られる.

第一項については,

$$\begin{aligned}
 \sqrt{\frac{c-(b/2)}{c+(b/2)}} &= \frac{\sqrt{\sqrt{(b/2)^2 + (a/2)^2} - (b/2)}}{\sqrt{\sqrt{(b/2)^2 + (a/2)^2} + (b/2)}} = \frac{(a/2)}{\sqrt{(b/2)^2 + (a/2)^2 + (b/2)}} \\
 &= \frac{(a/b)}{\sqrt{1+(a/b)^2} + 1} \approx \frac{(a/b)}{2+(a/b)^2/2} \approx \frac{(a/b)}{2} < 1
 \end{aligned}$$

(a/b)の一次の項までを残した. 故に,

$$\tan^{-1} \left\{ \sqrt{\frac{c-(b/2)}{c+(b/2)}} \right\} \approx \tan^{-1} \left\{ \frac{(a/b)}{2} \right\} \approx \frac{(a/b)}{2} \approx -\tan^{-1} \left\{ -\sqrt{\frac{c-(b/2)}{c+(b/2)}} \right\}$$

第一項全体では、 $\approx -\frac{4}{ab}(a/b)$ となる。

第二項では、第一項での逆数が問題であるから、

$$\sqrt{\frac{c+(b/2)}{c-(b/2)}} = \frac{\sqrt{1+(a/b)^2+1}}{(a/b)} \approx \frac{2+(a/b)^2/2}{(a/b)} \approx \frac{2}{(a/b)} \gg 1$$

となる。

$$\tan^{-1}\left\{\sqrt{\frac{c+(b/2)}{c-(b/2)}}\right\} \approx \tan^{-1}\left\{\frac{2}{(a/b)}\right\} \approx \pi/2 - \frac{(a/b)}{2} \approx -\tan^{-1}\left\{-\sqrt{\frac{c+(b/2)}{c-(b/2)}}\right\}$$

第二項全体では、 $\approx +\frac{4}{ab}[\pi - (a/b)]$  である。

第三項では、

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{c-(a/2)}{c+(a/2)}} &= \sqrt{\frac{\sqrt{(b/2)^2+(a/2)^2}-(a/2)}{\sqrt{(b/2)^2+(a/2)^2}+(a/2)}} = \frac{(b/2)}{\sqrt{(b/2)^2+(a/2)^2}+(a/2)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+(a/b)^2}+(a/b)} \approx \frac{1}{1+(a/b)^2/2+(a/b)} \approx 1-(a/b) < 1 \end{aligned}$$

となるから、

$$\tan^{-1}\left\{\sqrt{\frac{c-(a/2)}{c+(a/2)}}\right\} \approx \tan^{-1}\{1-(a/b)\} \approx \frac{\pi}{4} - (a/b)/2 \approx -\tan^{-1}\left\{-\sqrt{\frac{c-(a/2)}{c+(a/2)}}\right\}$$

ここでは、 $x = \pm 1$ 、即ち、 $y = \pm \pi/4$ である時、 $\frac{d}{dx}(\tan^{-1}x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2}$ であること

を使っている。第三項全体では、 $\approx -\frac{4}{ab} \cdot [\frac{\pi}{2} - (a/b)]$ となる。

第四項では、第三項の場合の逆数を考えれば良いから、

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{c+(a/2)}{c-(a/2)}} &= \sqrt{\frac{\sqrt{(b/2)^2+(a/2)^2}+(a/2)}{\sqrt{(b/2)^2+(a/2)^2}-(a/2)}} = \sqrt{1+(a/b)^2}+(a/b) \\ &\approx 1+(a/b)^2/2+(a/b) \approx 1+(a/b) > 1 \end{aligned}$$

$$\tan^{-1}\left\{\sqrt{\frac{c+(a/2)}{c-(a/2)}}\right\} \approx \tan^{-1}\{1+(a/b)\} \approx \frac{\pi}{4} + (a/b)/2 \approx -\tan^{-1}\left\{-\sqrt{\frac{c+(a/2)}{c-(a/2)}}\right\}$$

第四項全体では、 $\approx +\frac{4}{ab} \cdot [\frac{\pi}{2} + (a/b)]$ である。

以上の四つの項を加えると、 $(a/b)$ の一次のまでの近似項は相殺されるので、

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(z) dx \approx \frac{4}{ab} \cdot \{-(a/b) + [\pi - (a/b)] - [\frac{\pi}{2} - (a/b)] + [\frac{\pi}{2} + (a/b)]\} = \frac{4\pi}{ab}$$

となる。(86)右辺の最後に掲げた値となる。

(86)を(80-1)に代入して、断面が長方形の筒状コイルの中心の磁場は、

$$B_z(0,0,z) = \int_{-\infty}^{+\infty} B_z(P) \cdot n \cdot dz = \frac{\mu_0 n I}{4\pi} \cdot ab \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f(z) dz \approx \mu_0 n I = \mu_0 J \quad (87)$$

となり、断面が円であるソレノイドの場合と同じ結果になる。

次に、図 19-12 に示すようにアンペールの定理を2つのループ A と B で使う。

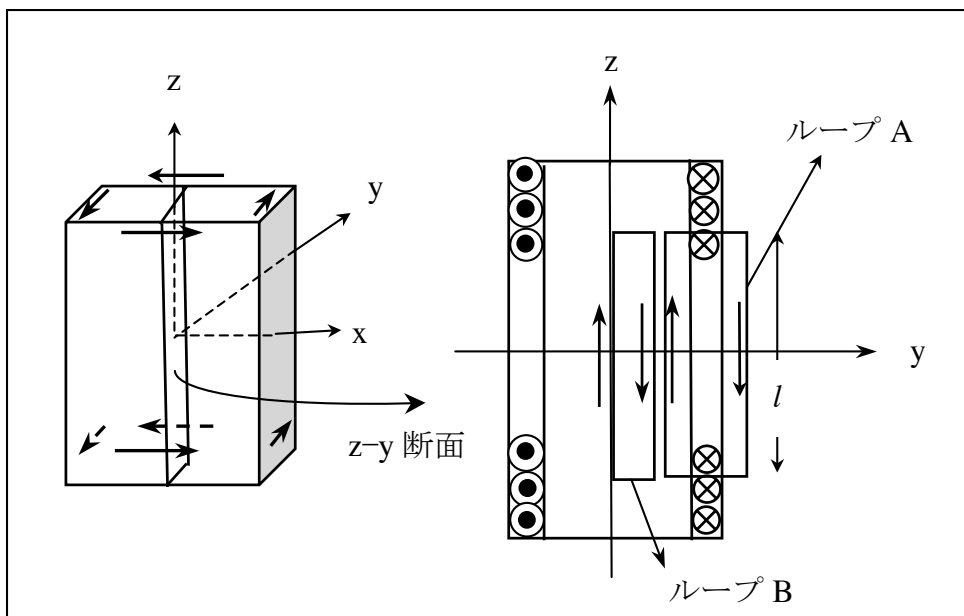


図 19-12. 断面が長方形の中空筒は  $z$  方向に長く延びている。各面は  $z$  軸に垂直で、 $x$  軸または  $y$  軸方向の面電流  $nI=J$  を持つ。この中空筒の  $z$ - $y$  断面に2つのループ A と B 考えアンペールの定理を使う。

中心の磁場を  $B_z(0,0,z)$ , 中心か外れた筒内部の磁場を  $B_z(0,y_{in},z)$ , 中空筒の外の磁

場を  $B_z(0, y_{out}, z)$  とする. これらの値は中空筒の対称性から  $z$  が変化しても変わらない. また  $z$  軸に垂直な経路部分は磁場の方向が  $z$  成分のみなので, アンペールの法則左辺の経路積分に寄与しない. ループ A では, これを貫く電流は単位長さ当り  $nI=J$  であるから, アンペールの法則は,

$$B_z(0, y_{out}, z) \cdot (-l) + B_z(0, y_{in}, z) \cdot (+l) = \mu_0(nI) \cdot l = \mu_0 J \cdot l \quad (88)$$

となる. ループの  $z$  方向の長さは  $l$  としている.

一方, ループ B では貫く電流は無いから,

$$B_z(0, y_{in}, z) \cdot (-l) + B_z(0, 0, z) \cdot (+l) = 0$$

となる. これより,

$$B_z(0, y_{in}, z) = B_z(0, 0, z) = \mu_0(nI) = \mu_0 J \quad (89)$$

これを(88)に代入すれば,

$$B_z(0, y_{out}, z) = 0 \quad (90)$$

となる. このように, 断面が長方形のコイルからなる中空筒の内部では(89)が成立し, その外部では磁束密度は0である. これは断面が円である中空円筒の場合と同じである.